

Problemas de **Física**

y cómo resolverlos

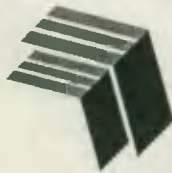
Por: Félix Aucallanchi Velásquez



Colección Racso



Problemas de
FÍSICA
y cómo resolverlos



RACSO
EDITORES

Edición 2009

Dirigido por:

DR. FÉLIX AUCALLANCHI VELÁSQUEZ

Problemas de

FÍSICA

y como resolverlos

Primera edición en español
Copyright © 1993 por RACSO Editores

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier método de publicación y/o almacenamiento de información, tanto del texto como de logotipos y/o ilustraciones sin autorización escrita del autor y los editores. Caso omiso se procederá a denunciar al infractor a la INDECOPI de acuerdo a la Ley N° 13714 y al artículo N° 221 del Código Penal vigente.



Código 1000

PROLOGO DEL AUTOR

Al iniciar estas líneas me desprendo de todo pensamiento vano, y sólo expreso mi profunda alegría por la satisfacción de ver culminado un trabajo que ha tomado poco más de 6 años, el que en su inicio se presentara dividido en fascículos, y bajo el título de Física para Estudiantes de Ciencias e Ingeniería, cuya primera edición se publicó vía Editorial Pirámide en 1986. Recuerdo entonces con nostalgia que sólo fueron tres los fascículos cuyos temas abarcaron hasta Gravitación Universal, y nunca antes al presente trabajo logré completar el curso en esa modalidad. De no haber sido por la gentil insistencia de muchísimos colegas y estudiantes, no hubiera podido terminar de escribirlos. Sin embargo, debo reconocer que es después de haber viajado fuera del Perú que recién sentí la obligación moral de publicarlo, al ver, comprobar y reconocer que referencialmente el curso de Física en nuestro país se encuentra distante del que se desarrolla en otras latitudes. En el Perú, nuestro curso está bastante abandonado, realidad que he comprobado en el sinnúmero de visitas que vengo realizando desde hace cuatro años a los diferentes centros de enseñanza escolar, pre-universitaria, tecnológica, pedagógica y universitaria de nuestra capital, y sobre todo del interior del país. Con estas palabras anhelo despertar un vivo interés por parte de mis colegas y amigos lectores, en el sentido de que todos quienes vivimos de y por la enseñanza de la Física estamos comprometidos con el desarrollo de ésta y de nuestro país. Espero que este trabajo contribuya con un grano de arena en esta fabulosa tarea.

Problemas de Física y cómo resolverlos es un intento importante de ordenar e interconectar todo el curso en un solo volumen, en cuyo desarrollo hemos empleado únicamente el Sistema Internacional de Unidades. En esta edición se presentan nuevos problemas y nuevas resoluciones con respecto a lo publicado en los fascículos precedentes, con lo cual creo cumplir con la expectativa que muchos colegas fijaron sobre nuestras publicaciones anteriores. Los más de 1 500 problemas se han seleccionado respetando: su carácter clásico, los de resolución múltiple, los analíticos y los infaltables originales. Buena parte de estos problemas los he ido ensayando en clase en los últimos años. Sin embargo, debo hacer una mención especial de agradecimiento a los colegas y estudiantes que tuvieron a bien desarrollarlos oportunamente al ser publicados en compendios, prácticas y exámenes en distintos centros pre-universitarios, institutos y universidades.

Esta edición tiene una nueva característica, cual es la de agregar en el inicio de cada capítulo un resumen teórico de conceptos y principios físicos, así como un listado de las principales fórmulas del tema que en su conjunto no es más que el desarrollo simplificado de una clase. Utilizamos este resumen en la resolución de cada problema, mostrándole al lector el modo lógico de aplicarlas, evitando en lo posible el frío y dogmático uso del cálculo superior, empleando en cambio la amena aplicación de la Matemática Elemental: Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría.

Siendo el objetivo principal de esta obra el mostrar didácticamente la resolución de ejercicios y problemas de Física, no hemos olvidado el carácter formativo que todo texto debe ofrecer al lector; ello lo hemos concebido en la naturaleza misma de los problemas seleccionados, así como las notas u observaciones que colocamos al final de cada solución: Para profundizar un concepto, para discutir una solución, para buscar el aspecto general de la respuesta, y en muchos casos para mostrar un segundo método de resolución.

En la proposición de los problemas se ha recurrido a una división en párrafos de cada capítulo, lo que permitirá al docente hacer una selección adecuada de los mismos según sea su necesidad para su clase y/o grupo de alumnos, sin olvidar ningún modelo o tema del capítulo, buscando así la actualización que todo profesional debe tener en su campo.

Espero que el presente texto constituya la fuente del orden en temas y problemas que todo profesor busca al inicio de su carrera, aliviándole de este modo su labor, pues todos por experiencia sabemos que un ejercicio o problema con características apropiadas, originales, elegantes, de resolución a veces inesperada y directa (pero meditada), y con cálculos algebraicos que siempre conducen a números de fácil operatividad (sin salirse de lo físicamente aceptable), nos permite quedar bien ante nuestros alumnos, provocando en ellos una especial atención por nuestro curso. A todos los estudiantes de la especialidad y a los profesores que se inician en esta actividad, mi mejor deseo es que este libro sirva para tales fines.

Debo confesarle a nuestros colegas experimentados que el mayor énfasis que le he dado a la obra está en la segunda mitad del curso, lo que puede apreciarse en la extensión y profundidad de los resúmenes teóricos y de los problemas propuestos. Esto lo he hecho pensando en quienes hasta hoy no han tenido un orden referencial para el desarrollo de algunos temas como: Ondas Mecánicas - Sonido, Potencial Eléctrico, Electrodinámica (1^{ra} y 2^{da} parte), Magnetismo, Electromagnetismo (1^{ra} y 2^{da} parte), Ondas Electromagnéticas, Óptica Física (Fenómenos Ondulatorios de la Luz) y Teoría de la Relatividad (Especial y General), y puedo manifestarles con mucha sinceridad el éxito que en lo personal he conseguido con tal contenido en clases de ensayo.

Para la confección y diagramación del texto hemos utilizado lo último (a la fecha) en procesamiento de textos y fotocomposición laser, acompañados de gráficos y diagramas de excelente calidad, lo que en conjunto constituyen un inmejorable marco para un trabajo que aspira a ser calificado como un libro de calidad de exportación.

Prometo que nuestras siguientes publicaciones serán cada vez mejores, superiores siempre a las anteriores. Para ello espero contar con las siempre bienvenidas sugerencias de parte de quienes hasta hoy nos dispensan con su lectura.

Hasta la próxima publicación!

Lima, Marzo de 1993

Félix Aucallanchi Velásquez

AL PROFESOR

Es ya conocido por quienes nos dedicamos a la enseñanza de la Física que uno de los principales obstáculos al que nos enfrentamos continuamente es a la falta de un conjunto de ejercicios apropiadamente seleccionados para que nuestros alumnos intenten resolverlos, buscando con ellos aplicar los conceptos y principios básicos que explicamos en nuestras charlas teóricas. Tal selección, a juicio personal, es siempre una tarea ardua que generalmente desarrollamos con mucho entusiasmo en su inicio, a continuación con intermitencia, y finalmente, por falta de tiempo y/o alicientes, lo dejamos incompleto.

Por haber vivido estas mismas experiencias durante cerca de 17 años de labor docente es que decidí, hace varios años, recopilar una serie de ejercicios y problemas que en lo posible tratara de cubrir el mayor espectro de variedad que pudiera existir (hasta la fecha) en cada tema.

Los colegas que nos han dispensado con la lectura anterior de nuestro texto Física- Curso Básico encontrarán que los casos allí resueltos y propuestos son de un nivel de dificultad bastante menor que los que aparecen en este libro; es más, se ha tratado que los problemas no se repitan en ambos textos. Por ello, sugiero a los profesores dirigir estos ejercicios especialmente a alumnos que posean una determinada base, tanto teórica como práctica, aunque ello lo dejo a criterio de cada colega, pues al revisar los contenidos encontrarán siempre problemas de aplicación directa en el inicio de la lista de los mismos; luego se proponen ejercicios de un mayor nivel de dificultad, siendo los últimos en cada serie de una resolución que requiere siempre de un mayor raciocinio.

De acuerdo con el contenido de este texto, los capítulos del curso pueden desarrollarse en el orden que aquí se publican. Sin embargo, por razones técnico-pedagógicas, el tiempo para su dictado, o según sea el grupo humano y/o institución en donde se labore, podemos recomendar el siguiente orden, sin desmedro de la efectividad de este libro. Proponemos:

- a) Vectores, Estática, Cinemática, Dinámica, Oscilaciones, Fluidos, Calor, Electricidad, Electromagnetismo, Relatividad.*
- b) Vectores, Cinemática, Estática, Dinámica, Fluidos, Calor, Electricidad, Optica, Electromagnetismo, Oscilaciones.*

Finalmente, debo señalar que muchos de estos problemas pueden ser planteados tanto a alumnos de secundaria, centros pre-universitarios, institutos pedagógicos o de universidades para los cursos de Física Elemental, Intermedia, Básica y Superior respectivamente, aunque para este último grupo hemos evitado en lo posible el cálculo integro-diferencial. A los colegas que nos dispensan con su lectura les prometo proponer nuevos, mejores y más problemas originales para nuestras próximas publicaciones, pues es lo menos que podemos ofrecerles por su deferencia.

Atentamente:

El autor

AL ESTUDIANTE

Siempre es grato dirigirse a los lectores que en su calidad de estudiantes del curso de Física aspiran encontrar en un libro la respuesta a sus dudas y solución a sus inquietudes. Es por lo tanto un verdadero reto para un autor satisfacer tales expectativas; por ello debo confesar que estas líneas las escribo con mucho entusiasmo, y a la vez, cuidado de expresar lo justo y necesario.

*En primer lugar debemos reconocer que este curso requiere una especial dedicación, pues siempre pone a prueba nuestra habilidad en aplicar un concepto o principio físico a un caso determinado, el mismo que por estar vinculado a la realidad, es decir, a nuestra naturaleza, debe encerrar siempre o casi siempre un hecho por demás lógico y elemental, al menos cuando los casos a resolver corresponden a un curso de Física Elemental o Inter-medio. También es cierto que la gran mayoría de las preguntas de las prácticas y/o exámenes giran en torno a un determinado grupo de problemas llamados **tipos**, y el éxito que tenemos al rendir tales pruebas depende en buena medida de la oportunidad que hemos tenido al haberlos revisado en su totalidad durante nuestra preparación o entrenamiento.*

*El presente texto es un trabajo que trata de reunir, sino toda, la mayoría de los ejercicios y problemas tipos existentes en cada tema, desde los medianamente difíciles hasta los más intrincados que demandan del estudiante una gran concentración y destreza en los planteamientos y recursos matemáticos. Cada capítulo tiene un resumen teórico orientado exclusivamente a los problemas propuestos, sin el cual sería prácticamente imposible su resolución. Y a propósito de las resoluciones, éstas se presentan en la sección **Resoluciones y Respuestas**, los mismos que son un modelo que el estudiante puede tomar como referencia, pero no como el único.*

Recomiendo a los estudiantes en general que antes de resolver un problema de Física (especialmente de este texto) siga las siguientes normas:

- 1°) Encontrarse muy familiarizado con los resúmenes teóricos del capítulo, y de ser posible con los de los capítulos anteriores (Esto es más necesario cuanto más nos sumergimos en el curso).*
- 2°) Extraer los datos del problema y tener en cuenta los resultados de problemas anteriores (esto último es muy frecuente en los "problemas laboriosos").*
- 3°) Confeccionar un esquema (gráfico) y colocar en él los datos disponibles.*
- 4°) Resolver en lo posible en forma algebraica (es decir, en forma literal).*
- 5°) Examinar la veracidad del resultado, eliminando los valores que no sean físicamente aceptables.*

*Espero sinceramente que **Problemas de Física y cómo resolverlos** te ayude a conseguir un mejor dominio del curso, y de ser posible que cada uno de ustedes alcance el éxito en la empresa en que se encuentren comprometidos: De lograrlo habremos conseguido darle significado a la existencia de esta modesta obra.*

Atentamente:

Félix Aucallanchi Velásquez

INDICE GENERAL

	Página	
	Enunciados	Resoluciones
CAP 1.- Análisis Dimensional	13	349
CAP 2.- Análisis Vectorial	19	360
CAP 3.- Movimiento Rectilíneo Uniforme	34	388
CAP 4.- Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado	38	398
CAP 5.- Caída Libre Vertical	43	410
CAP 6.- Gráficos del Movimiento Referidos al Tiempo	47	422
CAP 7.- Movimientos Relativos - Movimientos Dependientes..	56	435
CAP 8.- Movimientos Compuestos - Movimiento Parabólico .	61	443
CAP 9.- Movimiento de Rotación	68	457
CAP 10.- Movimiento Curvilíneo Plano - Movimiento de		
Rotación y Traslación	73	465
CAP 11.- Estática I	82	479
CAP 12.- Estática II	96	500
CAP 13.- Centro de Gravedad	107	519
CAP 14.- Dinámica Lineal	118	531
CAP 15.- Rozamiento	128	548
CAP 16.- Dinámica Circular	136	563
CAP 17.- Trabajo y Potencia	141	570
CAP 18.- Energía	146	578
CAP 19.- Cantidad de Movimiento	154	589
CAP 20.- Gravitación Universal	162	604
CAP 21.- Movimiento Armónico Simple	167	612
CAP 22.- Péndulo Simple	173	621
CAP 23.- Ondas Mecánicas - Sonido	176	626
CAP 24.- Fluidos en Reposo	183	635
CAP 25.- Termometría - Dilatación	195	650
CAP 26.- Calor	200	658
CAP 27.- Teoría Cinética de los Gases	206	670
CAP 28.- Termodinámica	213	679
CAP 29.- Ley de Coulomb y Campo Eléctrico	223	689
CAP 30.- Potencial Eléctrico	235	706
CAP 31.- Capacidad Eléctrica	244	720

	Página	
	Enunciados	Resoluciones
CAP 32.- Electrodinámica (Primera Parte)	257	745
CAP 33.- Electrodinámica (Segunda Parte)	265	754
CAP 34.- Magnetismo	279	781
CAP 35.- Electromagnetismo (Primera Parte)	285	789
CAP 36.- Electromagnetismo (Segunda Parte)	295	801
CAP 37.- Ondas Electromagnéticas - Ondas Luminosas ...	305	812
CAP 38.- Optica Geométrica - Reflexión de la Luz	309	816
CAP 39.- Refracción de la Luz	316	826
CAP 40.- Fotometría	326	845
CAP 41.- Optica Física - Fenómenos Ondulatorios de la Luz	330	850
CAP 42.- Teoría de la Relatividad	338	856
 Bibliografía	 865	

AGRADECIMIENTOS

Este texto se empezó a redactar en Abril de 1992 y se culminó en Junio de 1993. Durante todo este tiempo fué necesario tener mucha dedicación y paciencia para la composición, diagramación y revisión de los contenidos, sin duda una tarea verdaderamente invaluable, por lo que me siento sinceramente agradecido de la colaboración de mis amigos:

Ing. Mecánico (UNI): **Martín Casado Márquez**
Lic. Físico-Matemático (UNCP): **César Romero Quispe**

Asimismo a todos quienes contribuyeron de alguna u otra forma en la elaboración del texto, pero muy especialmente a quienes figuran en la lista de colaboradores.

DEDICATORIA

Dedico esta obra a mi familia, mi esposa Carmela, mis hijos Marlon, Rocío y Daniel, mis alumnos de ayer y hoy y a mi país.

1° Edición Diciembre - 1993
1° Reimpresión - Febrero 1994
2° Reimpresión - Abril 1994
3° Reimpresión - Junio 1994
4° Reimpresión - Agosto 1994
2° Edición - Enero 1995
1° Reimpresión - Marzo 1996
3° Edición - Octubre 1997
1° Reimpresión - Enero 1998
4° Edición - Junio 1998
1° Reimpresión - Abril 1999

1

Análisis Dimensional

1.1. Sistema absoluto

Sub-sistema	L	M	T
CGS	<i>cm</i>	<i>g</i>	<i>s</i>
MKS	<i>m</i>	<i>kg</i>	<i>s</i>
FPS	<i>pie</i>	<i>lb</i>	<i>s</i>

1.2. Sistema técnico

Sub-sistema	L	F	T
CGS	<i>cm</i>	<i>g</i>	<i>s</i>
MKS	<i>m</i>	<i>kg</i>	<i>s</i>
FPS	<i>pie</i>	<i>lb</i>	<i>s</i>

1.3. Sistema Internacional de Unidades (S.I.)

MAGNITUD FUNDAMENTAL	SIMBOLO	UNIDAD BASICA	SIMBOLO
Longitud	L	<i>metro</i>	<i>m</i>
Masa	M	<i>kilogramo</i>	<i>kg</i>
Tiempo	T	<i>tiempo</i>	<i>s</i>
Temperatura termodinámica	θ	<i>kelvin</i>	<i>K</i>
Intensidad de corriente eléctrica	I	<i>ampere</i>	<i>A</i>
Intensidad luminosa	J	<i>candela</i>	<i>cd</i>
Cantidad de sustancia	N	<i>mol</i>	<i>mol</i>

MAGNITUD AUXILIAR	UNIDAD BASICA	SIMBOLO
Angulo sólido	radián	<i>rad</i>
Angulo diedro	estereorradián	<i>sr</i>

$$\text{Unidad de } (x) = m^a \cdot kg^b \cdot s^c \cdot K^d \cdot A^e \cdot cd^f \cdot mol^g \cdot rad^h \cdot sr^i$$

1.4. Fórmula dimensional

$$[x] = L^a M^b T^c \theta^d N^e J^f I^g \quad (1.1)$$

siendo: a, b, c, , g = números reales.

Las expresiones numéricas como los números reales, funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, por ser adimensionales, se les representan por la unidad (1).

1.5. Fórmulas dimensionales más usuales

MAGNITUD DERIVADA	F.D.	MAGNITUD DERIVADA	F.D.
Area	L^2	Periodo	T
Volumen	L^3	Frecuencia	T^{-1}
Velocidad lineal	LT^{-1}	Coficiente de dilatación	θ^{-1}
Aceleración lineal	LT^{-2}	Capacidad calorífica	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}$
Velocidad angular	T^{-1}	Capacidad calorífica específica	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$
Aceleración angular	T^{-2}	Calor latente específico	L^2T^{-2}
Fuerza	LMT^{-2}	Carga eléctrica	TI
Torque	L^2MT^{-2}	Intensidad de campo eléctrico	$LMT^{-3}I^{-1}$
Trabajo o energía	L^2MT^{-2}	Potencial eléctrico	$L^2MT^{-3}I^{-1}$
Potencia	L^2MT^{-3}	Capacidad eléctrica	$L^2M^{-1}T^4I^2$
Cantidad de movimiento	LMT^{-1}	Resistencia eléctrica	$L^2MT^{-3}I^{-2}$
Impulso	LMT^{-1}	Carga magnética	LI
Densidad absoluta	$L^{-3}M$	Inducción magnética	$MT^{-2}I^{-1}$
Peso específico	$L^{-2}MT^{-2}$	Flujo magnético	$L^2MT^{-2}I^{-1}$
Presión	$L^{-1}MT^{-2}$	Iluminación	$L^{-2}J$

1.6. Principio de homogeneidad dimensional (Principio de Fourier).

Si $[A] + [B] = [D] - [E]$ es una ecuación dimensionalmente correcta, entonces se verifica lo siguiente:

$$[A] = [B] = [D] = [E] \quad (1.2)$$

1.7. Fórmulas empíricas

Si la magnitud p depende de las magnitudes a , b y c , entonces se deberá verificar la siguiente relación:

$$p = k a^x b^y c^z \quad (1.3)$$

siendo k la constante numérica de proporcionalidad, y los valores de los exponentes x , y , z deberán satisfacer el principio de homogeneidad.

PROBLEMAS

Nota: Todos los problemas se proponen para ser resueltos en el Sistema Internacional de Unidades (S.I).

Fórmulas dimensionales

1.1. Determinar las dimensiones de X para que la relación: $EX = Fv \cos \theta$ sea dimensionalmente correcta. Se sabe que: E = energía cinética, F = fuerza, y v = velocidad.

1.2. La Ley de Gravitación Universal se plasma en la siguiente relación :

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

la cual resulta ser dimensionalmente correcta si: F = fuerza, m_1 y m_2 = masas, y d = distancia. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener G para que dicha relación sea completamente homogénea?

1.3. Para el cálculo de la energía cinética promedio de las moléculas de un gas ideal monoatómico se utiliza la relación de Boltzmann :

$$E = 3/2 kT$$

siendo E = energía cinética, y T = temperatura absoluta. Determinar la fórmula dimensional de la constante de Boltzmann.

1.4. Sabiendo que la expresión $pV = nRT$ es dimensionalmente correcta, siendo p = presión, V = volumen, n = cantidad de sustancia, y T = temperatura, se pide determinar las dimensiones de R .

1.5. De acuerdo con la Ley de Coulomb para la interacción de dos cargas eléctricas en el vacío, se verifica lo siguiente:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

siendo F = fuerza, q_1 y q_2 = cargas eléctricas, y d = distancia. Se pide encontrar las dimensiones de la permitividad eléctrica en el vacío (ϵ_0).

1.6. Sabiendo que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas viene dada por la relación:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

siendo c = velocidad lineal, y ϵ_0 = permitividad eléctrica del vacío. Encontrar la fórmula dimensional de la permeabilidad magnética del vacío (μ_0).

1.7. Se sabe que la energía de una bobina recorrida por una corriente eléctrica viene dada por: $W = 1/2 Li^2$, siendo W = energía, i = intensidad de corriente eléctrica. ¿Cuáles serán las dimensiones del coeficiente de autoinducción L ?

1.8. Cuando una corriente eléctrica variable recorre una bobina, ésta presenta una oposición a su paso, que viene dada por: $X_L = 2\pi fL$, siendo f = frecuencia, y L = coeficiente de autoinducción. ¿Qué magnitud física representa X_L ? (Consultar con el cuadro 1.4).

1.9. Las ondas electromagnéticas transportan energía, que de acuerdo con la hipótesis de Planck, al interaccionar con los cuerpos, lo ceden en pequeñas cantidades llamadas **fonones**. Según esta hipótesis, la energía de un fotón viene dada por: $E = hf$, siendo E = energía, y f = frecuencia. ¿Cuáles son las dimensiones de la constante de Planck (h)?

1.10. En Fotometría se sabe que la iluminación (Y) sobre una superficie está dada por:

$$Y = \frac{\Phi}{d^2 \Omega}$$

Si d = distancia, y Ω = ángulo sólido, ¿Cuál es la fórmula dimensional del flujo luminoso (Φ)?

Ecuaciones dimensionales

1.11. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de A y B para que la ecuación dada sea dimensionalmente correcta?

$$A = \frac{W \operatorname{sen} \theta}{m(B^2 + S)}$$

siendo: W = trabajo, m = masa, y S = área.

1.12. Se da la siguiente ecuación dimensional: $V = 3at^3 + (h - b)/c$, siendo: V = volumen, t = tiempo, h = altura; determinar la expresión dimensional de: $E = b/ac$.

1.13. Si la rigidez (P) de una cuerda está dada por la fórmula: $P = aQ/R + bd^2$, siendo: P = fuerza en newton, R = radio, Q = presión, d = densidad. Qué dimensiones deben tener a y b para que dicha fórmula sea dimensionalmente correcta?

1.14. En la siguiente fórmula empírica: $F = (a + b/\sqrt{v})dv^2L$, donde: F = fuerza de rozamiento, d = diámetro de la tubería, v = velocidad lineal, L = longitud, a = coeficiente experimental dimensional. Determinar las dimensiones del coeficiente b .

1.15. La ecuación que permite calcular el caudal (Q) del escape de agua por un orificio es la siguiente:

$$Q = \frac{CA}{\sqrt{1 - (A/B)^2}} \sqrt{\frac{2g(p_1 - R)}{\gamma}}$$

siendolas unidades de $Q = m^3/s$, C = coeficiente de descarga, A = área del tubo, g = aceleración de la gravedad, p_1 = presión en el tubo, γ = 0000 peso específico. Considerando dimensionalmente correcta a la ecuación dada, ¿Cuáles son las dimensiones de B , C y R ?

1.16. Si la ecuación dada es dimensionalmente correcta, se pide encontrar la fórmula dimensional de E .

$$P \cdot Q = \left\{ \frac{Rv - aE}{E(F + Q)} \right\}^{\log 4}$$

siendo P = peso, R = trabajo, v = velocidad y a = aceleración.

1.17. Sabiendo que la ecuación: $F = qE + qvB$ es dimensionalmente correcta, determinar la fórmula dimensional de B , siendo E = intensidad de campo eléctrico, y v = velocidad lineal.

1.18. Determinar la fórmula dimensional de A en la siguiente ecuación dimensionalmente correcta: $A = Bk - Ck^3$, siendo B = calor específico, y C = aceleración angular.

1.19. La ecuación propuesta es dimensionalmente correcta, siendo: p = presión, B = diámetro, A = área, m y n = adimensionales. Cuáles deben ser las dimensiones de C , H y D ?

$$p = C(B - nH) \left\{ m + (nA/D)^2 \right\} D^{3/2}$$

1.20. De la siguiente ecuación dimensionalmente correcta, hallar $E = (x - p)^{(z-y)}$, si:

$$I = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot m \left\{ \frac{(R_n \cdot \cos \theta_n)^x - (R_{n-1} \cdot \cos \theta_{n-1})^y}{(R_n \cdot \operatorname{sen} \theta_n)^z - (R_{n-1} \cdot \operatorname{sen} \theta_{n-1})^p} \right\}$$

siendo: I = momento de inercia = masa. (longitud)²; m = masa; R_n, R_{n-1} = radios; θ_n, θ_{n-1} = ángulos.

1.21. ¿Bajo qué condiciones la ecuación propuesta es dimensionalmente correcta?

$$\left(Wp^x \cos\theta\right)^2 + \delta mg = \left(Wpv^y\right)^{1/\cos\theta}$$

siendo: W = peso, m = masa, g = aceleración, v = velocidad, $\theta = \pi/3$ rad, $p = 4,44$ m².kg/s.

1.22. Determinar el valor de $R = x + y + w + r + z$, si la ecuación es dimensionalmente correcta.

$$\alpha \omega \sec 30^\circ - Pt = \pi^2 m^x v^y \pm d^z \cdot \rho^w \cdot b^r / \sqrt{2}$$

siendo: P = potencia, t = tiempo, m = masa, v = velocidad, d = densidad, ρ = peso específico, b = espacio recorrido, α = magnitud desconocida.

1.23. Si la expresión propuesta es dimensionalmente correcta, hallar la fórmula dimensional de Q .

$$W = mv^\alpha + Agh - Bx^{\sec 60^\circ} + PC$$

En donde: W = trabajo, m = masa, v = velocidad, g = aceleración de la gravedad, h = altura, x = distancia, P = potencia.

$$Q = A^\alpha \cdot \sqrt{B} / \sqrt{C}^\alpha$$

1.24. Si la siguiente expresión contiene n términos y es dimensionalmente correcta:

$$W = k_1 v_1 + \frac{k_2 v_2^2}{2!} + \frac{k_3 v_3^3}{3!}$$

siendo: W = energía, v_i = velocidad, $n!$ = factorial de n , k_i = constante física. Determinar la fórmula dimensional de E , si $E = k_9 \cdot k_{17} / k_{12}$.

1.25. En un experimento de Física se comprobó que la relación: $pF = (FAV)^{UNA}$ es dimensionalmente correcta, siendo p = presión, F = fuerza, A = área, V = volumen y U = energía. ¿Cuáles son las dimensiones de N ?

1.26. Determinar las dimensiones de A e y para que la expresión: $y = A \cdot p \cdot e^{(4mA/v)}$ sea dimensionalmente correcta, siendo: p = presión, m = masa, v = velocidad, y e = base de los logaritmos neperianos.

1.27. Si la ecuación dimensional: $mv^2 \sin(\omega y - \phi) = \pi \cdot \frac{\sqrt{x}}{y^2}$

es dimensionalmente correcta, determinar las dimensiones de x e y , siendo m = masa, v = velocidad y ω = velocidad angular.

1.28. Determinar las dimensiones de E , si: $E = xz/y^2$, sabiendo asimismo que la expresión:

$$d \log(mx/t) = y \operatorname{tg}(\theta + ym/z)$$

es dimensionalmente correcta, siendo d = densidad, m = masa, v = velocidad y t = tiempo.

Fórmulas empíricas

1.29. La relación de Louis de Broglie para la interpretación física de la dualidad onda-partícula establece que cualquier masa o partícula que se mueve a cierta velocidad tiene asociada una onda electromagnética cuya longitud de onda (λ) depende de la constante de Planck (h) y de su cantidad de movimiento (P), tal que: $\lambda = h^x \cdot P^y$. ¿Cuáles son los valores de x e y que logran homogenizar la fórmula dada?

1.30. La potencia (Pot) que requiere la hélice mayor de un helicóptero viene dada por la siguiente fórmula :

$$Pot = kR^x \omega^x D^z$$

siendo: k = número; R = radio de la hélice; ω = velocidad angular; d = densidad del aire. Hallar la expresión final de la fórmula empírica.

1.31. La presión (p) que ejerce un chorro de agua sobre una placa vertical viene dada por la siguiente fórmula empírica:

$$p = kQ^x d^y A^z$$

siendo: k = constante numérica; d = densidad del agua; A = área de la placa; Q = caudal en m^3/s . Determinar la expresión final de la fórmula.

1.32. La frecuencia de oscilación (f) en s^{-1} de un péndulo simple depende de su longitud l y de la aceleración de la gravedad (g) de la localidad. Determinar una fórmula empírica para la frecuencia.

1.33. El periodo de un planeta que gira en una órbita circular depende del radio de la órbita (R), de la masa de la estrella (M) y de la constante G . Sabiendo que G es la constante de Gravitación Universal, determinar una fórmula empírica para el periodo.

1.34. Rocío, una eficiente enfermera, ha observado que la potencia (P) con que aplica una inyección depende de la densidad (d) del líquido encerrado, de la velocidad (v) del émbolo al expulsar el líquido y del tiempo de aplicación de la inyección (t). Martín, un ingeniero de la UNI le ha conseguido una fórmula con los datos que ella le ha proporcionado. Si $d = 0,8 \text{ g/cm}^3$, $v = 5 \text{ cm/s}$, y $t = 2 \text{ s}$, entonces $P = 0,9 \text{ watts}$. Cuál será la fórmula descubierta?

1.35. Si se tomaran como magnitudes fundamentales la aceleración (A), la masa (M) y el tiempo (T), ¿Cuál sería la fórmula dimensional de la constante de gravitación universal (G)?. *Sugerencia:* Utilizar el resultado del problema 1.2.

1.36. Se forma un sistema de unidades tomando como unidades fundamentales: $U(L) = 3m$; $U(M) = 5kg$; $U(T) = 3s$. Si la unidad de potencia en el Sistema Internacional es el *watt*, hallar la relación con la unidad de potencia $U(P)$ del nuevo sistema formado.

1.37. Se forma un sistema cuyas unidades son:

- Velucio (Velocidad de la luz = $300\,000 \text{ km/s}$).
- Gravio (Aceleración igual a la gravedad).
- Trevio (Trabajo necesario para elevar una masa de 1 kg hasta una altura de 1 m).

Hallar la equivalencia entre la unidad de masa del sistema dado y la unidad de masa del sistema CGS absoluto.

1.38. La resistencia W que ofrece el aire en kg/m^2 está dada por: $W = 0,05v^2$, siendo v la velocidad en km/h . ¿Cuál será la expresión que nos permite calcular W en N/m^2 cuando v se da en m/s ? ($1 \text{ kg} = 9,8 \text{ N}$; $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$; $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$).

2

Análisis Vectorial

2.1. Vector

$$\bar{V} = V/\theta \quad (2.1)$$

siendo V el módulo del vector, y θ el ángulo direccional.

2.2. Adición de vectores

2.2.a. Método del paralelogramo (Fig. 2.1)

$$\bar{R} = \bar{A} + \bar{B} \quad (2.2)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} \quad (2.3)$$

$$R_{\text{máx}} = A + B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \uparrow \bar{B} \quad (2.4)$$

$$R_{\text{mín}} = A - B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \downarrow \bar{B} \quad (2.5)$$

siendo A y B los módulos de los vectores, y siempre de signo positivo.

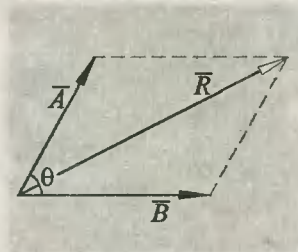


Fig. 2.1

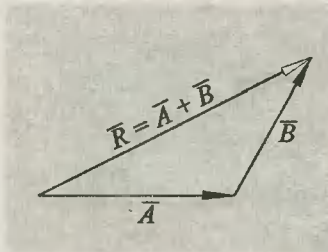


Fig. 2.2

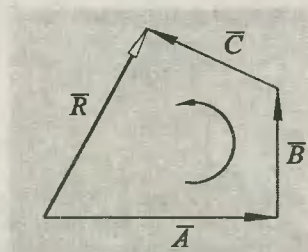


Fig. 2.3

2.2.b. Método del triángulo.- El vector resultante es aquel que cierra el triángulo (Fig. 2.2).

2.2.c. Método del polígono (Fig. 2.3).- El vector resultante es el que cierra el polígono:

$$\bar{R} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

Nota: Si el polígono vectorial es cerrado, la resultante es nula.

2.3. Sustracción de vectores (Fig. 2.4)

$$\bar{D} = \bar{A} - \bar{B} \quad (2.6)$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta} \quad (2.7)$$

$$D_{\text{máx}} = A + B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \downarrow \bar{B} \quad (2.8)$$

$$D_{\text{mín}} = A - B \Leftrightarrow \bar{A} \uparrow \uparrow \bar{B} \quad (2.9)$$

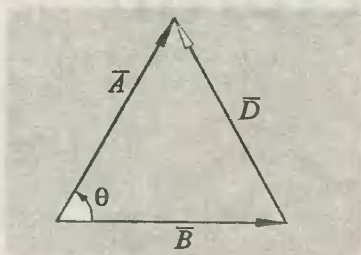


Fig. 2.4

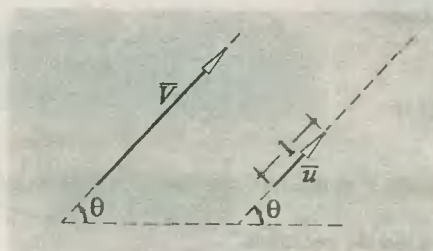


Fig. 2.5

2.4. Multiplicación de un vector por un escalar

$$\bar{P} = n\bar{V} \quad (2.10)$$

$$\bar{P} = n \cdot \bar{V} \quad (2.11)$$

$$\bar{P} \uparrow \uparrow \bar{V} \Leftrightarrow n (+) \quad (2.12)$$

$$\bar{P} \uparrow \downarrow \bar{V} \Leftrightarrow n (-) \quad (2.13)$$

2.5. Vector unitario (Fig. 2.5)

$$\bar{u} = \frac{\bar{V}}{|\bar{V}|} \quad (2.14)$$

$$\bar{u} = 1/\theta \quad (2.15)$$

donde \bar{u} y \bar{V} son siempre codirigidos.

2.6. Condición de codireccionalidad

Dos vectores \bar{A} y \bar{B} serán codirigidos si presentan la misma dirección, de modo que sus vectores unitarios serán iguales. Entre los vectores y sus longitudes se verificará que:

$$\frac{\bar{A}}{l_A} = \frac{\bar{B}}{l_B} \quad (2.16)$$

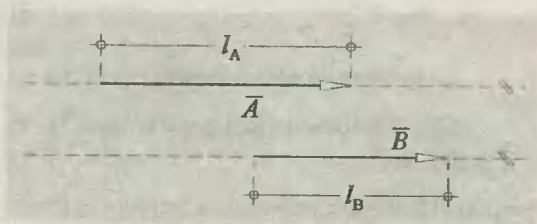


Fig. 2.6

2.7. Descomposición rectangular

$$\bar{V} = \bar{V}_x + \bar{V}_y \quad (2.17)$$

$$\bar{V}_x = (V \cos \theta) \bar{i} \quad (2.18)$$

$$\bar{V}_y = (V \sin \theta) \bar{j} \quad (2.19)$$

siendo \bar{i} y \bar{j} los vectores unitarios en los ejes cartesianos X e Y respectivamente (Fig. 2.7).

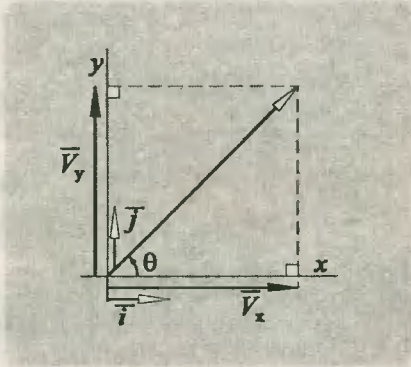


Fig. 2.7

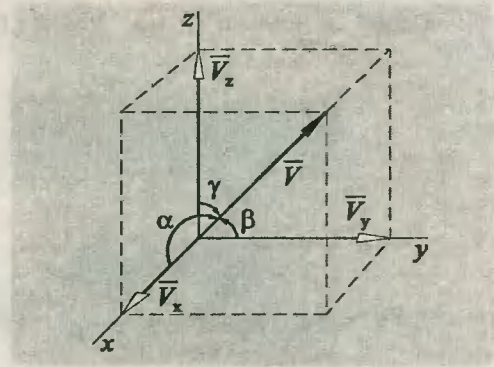


Fig. 2.8

2.8. Composición rectangular

$$\bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y \tag{2.20}$$

$$R_x = \Sigma V_x ; R_y = \Sigma V_y \tag{2.21}$$

$$|\bar{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \tag{2.22}$$

$$\text{tg}\theta = R_y/R_x \tag{2.23}$$

siendo θ el ángulo que se mide desde el eje X en sentido antihorario.

2.9. Vectores en el espacio

$$\bar{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} \tag{2.24}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{2.25}$$

$$\cos\alpha = V_x/V ; \cos\beta = V_y/V ; \cos\gamma = V_z/V \tag{2.26}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{2.27}$$

siendo \bar{k} el vector unitario en el eje de las cotas Z. Asimismo, α, β y γ son los ángulos directores (Fig. 2.8).

2.10. Vector posición (\bar{r}) (Fig. 2.9)

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \tag{2.28}$$

$$\bar{r} = (x; y; z)$$

2.11. Producto escalar (Fig. 2.10)

Datos: $\bar{A} = (A_x; A_y; A_z) \wedge \bar{B} = (B_x; B_y; B_z)$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB\cos\theta \tag{2.29}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{2.30}$$

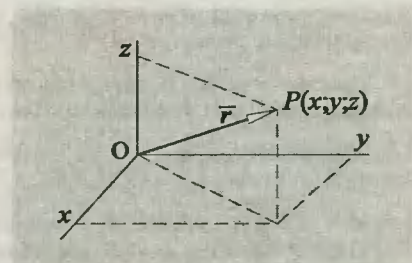


Fig. 2.9

2.12. Producto vectorial

$$\text{Datos: } \vec{A} = (A_x; A_y; A_z) \wedge \vec{B} = (B_x; B_y; B_z)$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad (2.31)$$

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \text{sen}\theta \quad (2.32)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{i} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

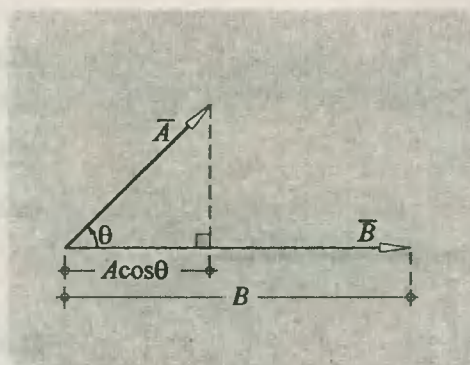


Fig. 2.10

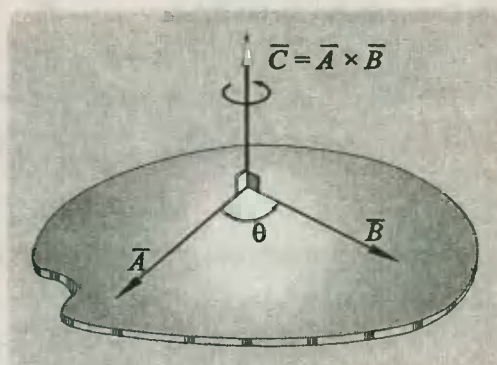


Fig. 2.11

PROBLEMAS

Método del paralelogramo

2.1. Dos vectores de la misma naturaleza poseen módulos $A = 6$ y $B = 10$, formando entre sí un ángulo θ . Determinar la medida del ángulo θ , si su resultante es $R = 14$.

2.2. Dados los vectores: $\vec{A} = 18 \angle 20^\circ$, y $\vec{B} = 24 \angle 110^\circ$, determinar el módulo de la resultante y su correspondiente dirección.

2.3. Dos vectores A y B tienen una resultante máxima de 16 y una mínima de 4. ¿Cuál será el módulo de la resultante de dichos vectores cuando éstos formen 127° entre sí?

2.4. Dos vectores A y B originan una resultante mínima de valor 3. Hallar sus módulos, si cuando forman un ángulo de 60° , la resultante es 39.

2.5. Dos vectores coplanares y concurrentes forman entre sí un ángulo de 60° , y poseen una resultante que mide 35. Sabiendo además que uno de ellos es los $3/5$ del otro, ¿Cuál es la suma de los módulos de dichos vectores componentes?

2.6. La resultante de dos vectores mide 21, y es perpendicular a uno de ellos. Si el otro mide 35, ¿Qué ángulo forman entre sí los vectores componentes?

2.7. Se descompone un vector F en dos vectores paralelos a las rectas X_1 e Y_1 . Se sabe que $F = 8$, y su componente paralela a Y_1 tiene una magnitud igual a 6. Determinar la magnitud de la otra componente.

2.8. Determinar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado, si $A = 10$, $E = 6$.

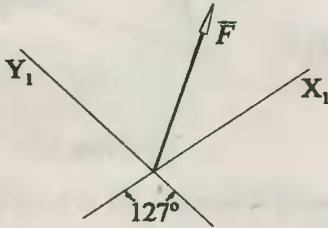


Fig. Prob. 2.7

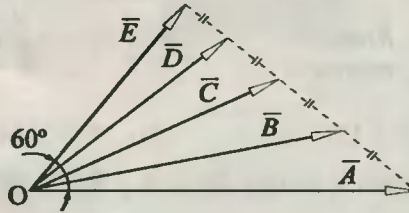


Fig. Prob. 2.8

2.9. La figura muestra tres vectores de módulos iguales. Hallar el valor del ángulo θ , tal que la resultante de los vectores sea mínima.

2.10. Se tienen dos vectores compuestos: $(2\vec{P} + \vec{Q})$ y $(3\vec{P} - \vec{Q})$, que forman entre sí un ángulo de 53° , siendo sus módulos respectivos iguales a 15 y 7 unidades. ¿Cuál es el módulo del vector P ?

2.11. Sabiendo que $|\vec{A} - 2\vec{B}| = 5$, y $|3\vec{A} + 5\vec{B}| = 6$, calcular $|5\vec{A} + \vec{B}|$.

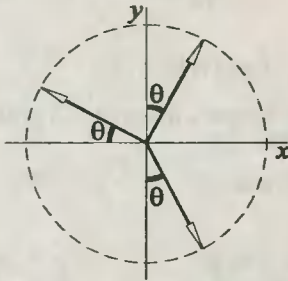


Fig. Prob. 2.9

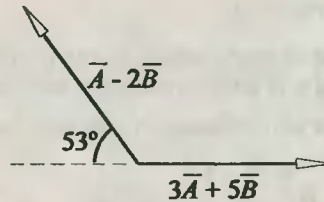


Fig. Prob. 2.11

Método del triángulo

2.12. Determinar el módulo y dirección de la resultante total del conjunto de vectores mostrado.

2.13. Se tiene tres vectores $a = 3$, $b = 4$, y $c = 5$, tal que $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Determinar el módulo de x , si: $\vec{x} = (5/3)\vec{a} + 3\vec{b}$.

2.14. Determinése el vector \bar{x} en función de los vectores \bar{A} y \bar{B} (Ver figura).

2.15. Encontrar una expresión para el vector \bar{x} en función de los vectores \bar{A} y \bar{B} . La figura es un paralelogramo.

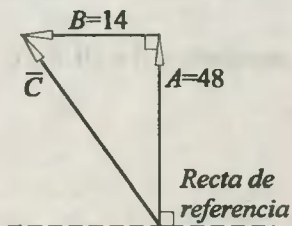


Fig. Prob. 2.12

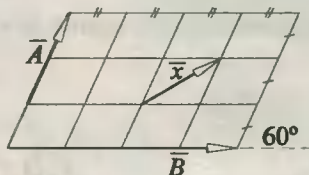


Fig. Prob. 2.14

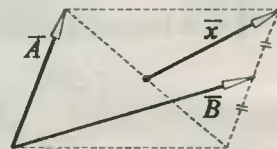


Fig. Prob. 2.15

2.16. Determinar \bar{x} en función de \bar{A} y \bar{B} , si ABCD es un paralelogramo (M y N son puntos medios).

2.17. Hallar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado, sabiendo que $PM = 2$, $MQ = 7$ y $MS = 1$.

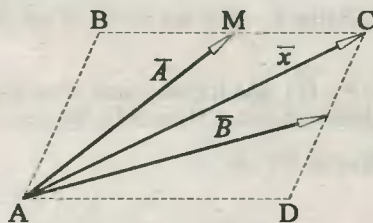


Fig. Prob. 2.16

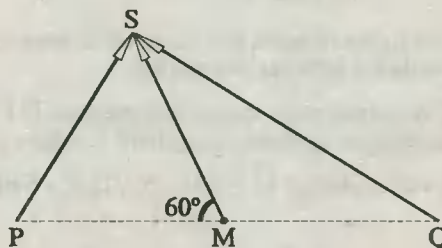


Fig. Prob. 2.17

2.18. Encontrar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado, si ABCD es un trapecio, siendo M y N puntos medios, y además $BC = 8$, y $AD = 12$.

2.19. Encontrar la resultante del conjunto de vectores mostrado.

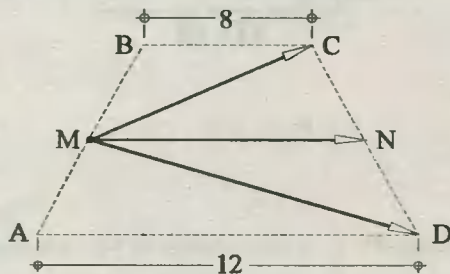


Fig. Prob. 2.18

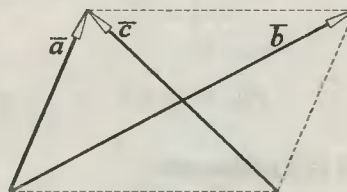


Fig. Prob. 2.19

- 2.20. Expresar el vector \vec{x} en función de \vec{a} y \vec{b} , si se sabe también que: $AQ/QB = 2/3$; $AP/PC = 3/5$.
- 2.21. Determinar \vec{x} en función de los vectores a y b , si G es el baricentro del triángulo.

Método del polígono

- 2.22. Determinar el vector R , si $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C} - \vec{D}$, siendo conocidos los vectores A, B, C y D , tal como se indica en la figura.

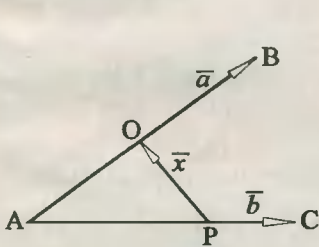


Fig. Prob. 2.20

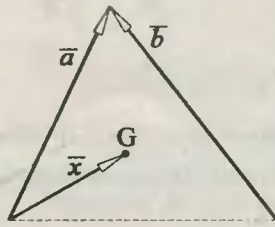


Fig. Prob. 2.21

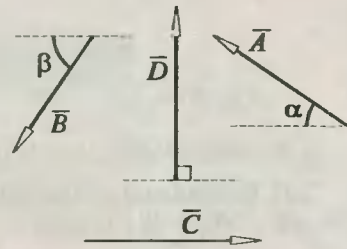


Fig. Prob. 2.22

- 2.23. Determinar la resultante del grupo de vectores mostrado, indicando su módulo y dirección. $A = 10, B = 16, C = 13$.
- 2.24. Si ABCDEF son los vértices de un hexágono regular, determinar la resultante de los vectores mostrados.
- 2.25. Hallar el módulo de la resultante para el conjunto de vectores mostrados.

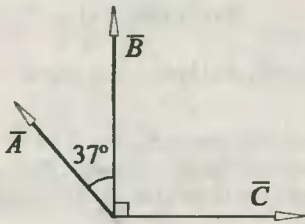


Fig. Prob. 2.23

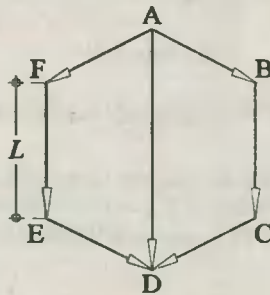


Fig. Prob. 2.24

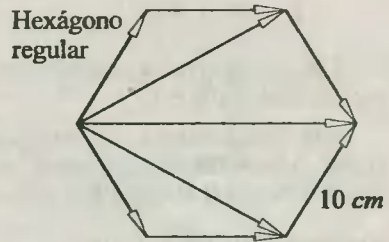


Fig. Prob. 2.25

- 2.26. Hallar la resultante de los vectores mostrados.
- 2.27. Si $C = 6\sqrt{3}$, hallar el módulo de \vec{R} , si $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C} - 2\vec{D}$.
- 2.28. Dados los siguientes vectores, hallar el módulo de la resultante de los vectores mostrados, si $f = 3$, y $d = 4$, siendo \vec{f} y \vec{d} perpendiculares.
- 2.29. Determinar la resultante \vec{R} en base al conjunto de vectores mostrados, sabiendo que: $\vec{R} = \vec{p} - \vec{q} + \vec{m} - \vec{d} + \vec{s}$.

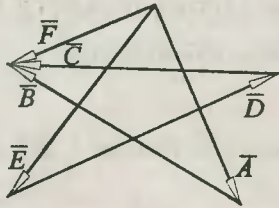


Fig. Prob. 2.26

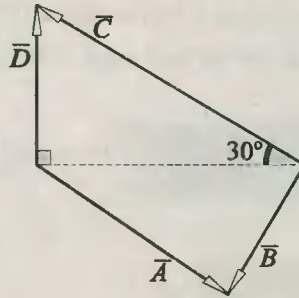


Fig. Prob. 2.27

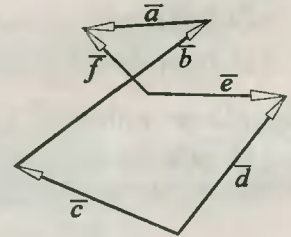


Fig. Prob. 2.28

2.30. Hallar el módulo de la resultante de los vectores mostrados.

2.31. Determine el módulo del vector resultante para el conjunto de vectores mostrados, si se sabe que $AB = 2AC = 20 \text{ cm}$, y O es el centro de la circunferencia.

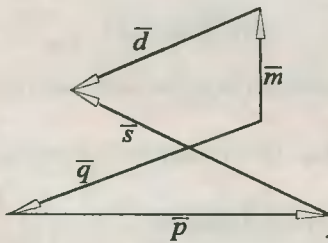


Fig. Prob. 2.29

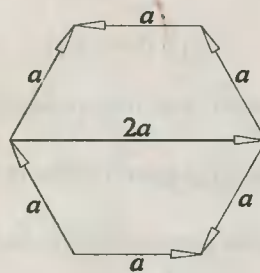


Fig. Prob. 2.30

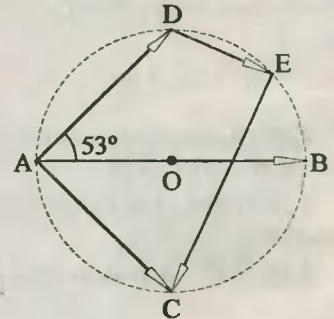


Fig. Prob. 2.31

2.32. Hallar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado, si el lado del hexágono regular mide $6\sqrt{3} \text{ cm}$.

2.33. Dos hombres y un muchacho desean jalar un fardo en la dirección marcada con X en la figura. Ambos hombres jalan con las fuerzas F_1 y F_2 , cuyos valores y sentidos están indicados en la figura. Encontrar la magnitud y dirección de la fuerza mínima que debe ejercer el muchacho.

Sustracción de vectores

2.34. Dos vectores de módulos $A = 50$, y $B = 14$ forman 74° entre sí. ¿Cuál es el módulo del vector diferencia D , si $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$?

2.35. Dos vectores coplanares y concurrentes tienen una resultante que mide 74 unidades, y su correspondiente vector diferencia mide 37 unidades. ¿Qué ángulo forman dichos vectores, si se sabe además que sus módulos son iguales?

2.36. Calcular el módulo de la diferencia $(\vec{A} - \vec{B})$ de los vectores mostrados, y su dirección respecto de la horizontal, si se sabe que $A = 16$, y $B = 12$.

2.37. Conociendo los vectores \vec{P} y \vec{Q} , determinar la expresión vectorial de x en función de ellos, sabiendo además que $P = Q$.

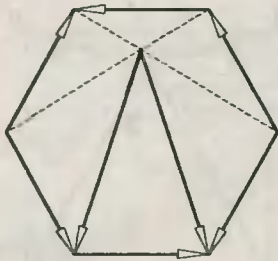


Fig. Prob. 2.32

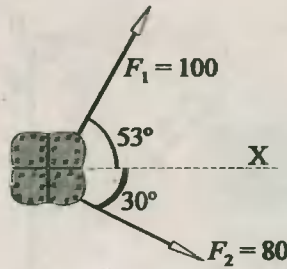


Fig. Prob. 2.33

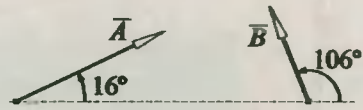


Fig. Prob. 2.36

2.38. Determinar \bar{x} en función de \bar{A} y \bar{B} .

2.39. Para el grupo de vectores mostrado, determinar el vector x en función de \bar{a} y \bar{b} , sabiendo además que G : Baricentro del triángulo PQR , y $RN = 4NQ$.

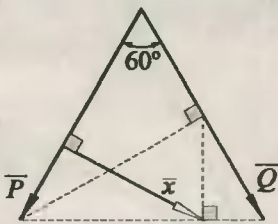


Fig. Prob. 2.37

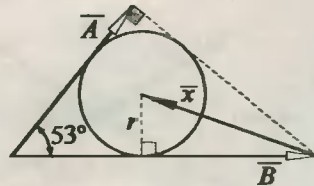


Fig. Prob. 2.38

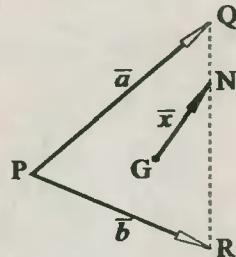


Fig. Prob. 2.39

2.40. Dos vectores A y B cuyos módulos son 15 y 7 respectivamente, tienen un vector diferencia cuyo módulo es 20. ¿Cuál es la medida del ángulo que forman dichos vectores?.

2.41. Se tienen dos vectores compuestos $(\bar{A} + 3\bar{B})$ y $(\bar{A} + 2\bar{B})$, que forman entre sí un ángulo $\theta = 37^\circ$. Si además se sabe que $|\bar{A} + 3\bar{B}| = 40 u$, y $|\bar{A} + 2\bar{B}| = 14 u$, calcular $|\bar{B}|$.

Vector unitario

2.42. Sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado de lado L , determinar un vector unitario en la dirección de la diagonal AC y DB .

2.43. Sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado, determinar una expresión vectorial para \bar{x} en función de los vectores \bar{M} y \bar{N} .

2.44. Determinar $\bar{x} + \bar{y}$ en términos de \bar{A} y \bar{B} , sabiendo que $PQRS$ es un cuadrado.

2.45. Determinar una expresión vectorial para \bar{x} en función de los vectores A y B , sabiendo que $PQRS$ es un cuadrado.

Descomposición rectangular

2.46. Determinar el módulo de la resultante de los vectores trazados sobre el rectángulo mostrado.

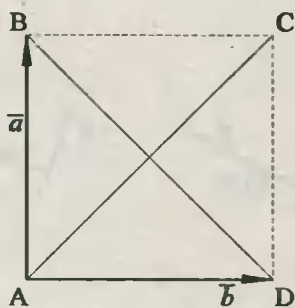


Fig. Prob. 2.42

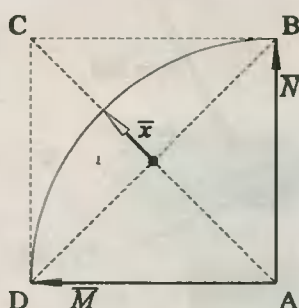


Fig. Prob. 2.43

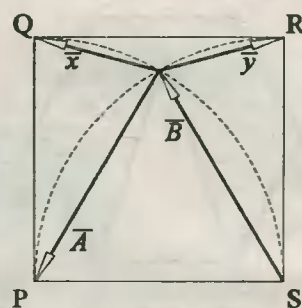


Fig. Prob. 2.44

2.47. Calcular la resultante del conjunto de vectores mostrado, sabiendo que ABCD es un cuadrado de 4 cm de lado, siendo M y N puntos medios.

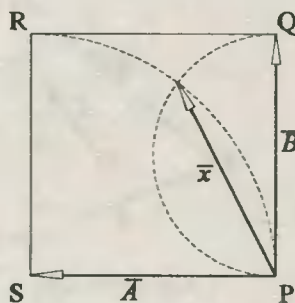


Fig. Prob. 2.45

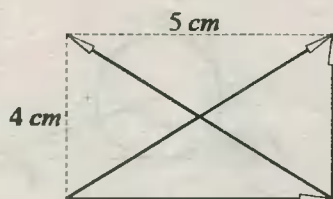


Fig. Prob. 2.46

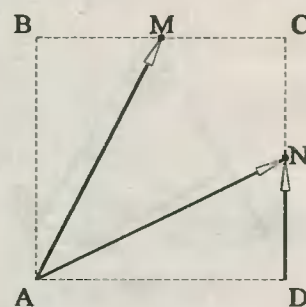


Fig. Prob. 2.47

2.48. Dado el sistema de vectores mostrado, calcular la magnitud de la resultante: $A = 6$, $B = 2$, $C = 2\sqrt{3}$.

2.49. Determinar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado, si $A = 4$, $B = 8$, $C = 5$.

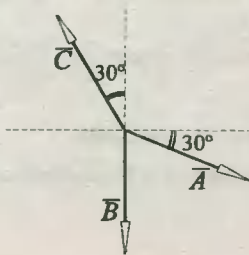


Fig. Prob. 2.48

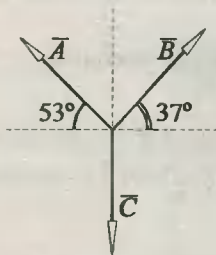


Fig. Prob. 2.49

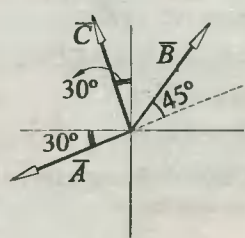


Fig. Prob. 2.50

2.50. Calcular el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado. $A = 55$, $B = 25\sqrt{2}$, $C = 15$.

2.51. Para el sistema vectorial mostrado, se sabe que $A = 2\sqrt{2}$, $B = 6$, y $C = 5$. ¿Cuál es el módulo de la resultante?

2.52. En la circunferencia de 1 m de radio se encuentran los vectores \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} , \vec{D} y \vec{E} , donde $B = D$, y $\theta = 30^\circ$. ¿Cuál es el módulo de su resultante, si la escala es $50 \text{ cm} \triangleq 1 \text{ N}$. O: Centro de la circunferencia.

2.53. Sabiendo que la resultante de los vectores mostrados es horizontal, se pide calcular el módulo del vector C . Además: $A = 18$, $B = 10$.

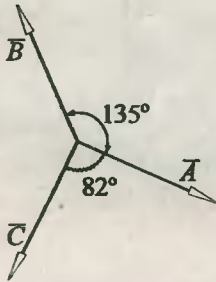


Fig. Prob. 2.51

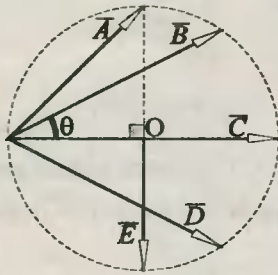


Fig. Prob. 2.52

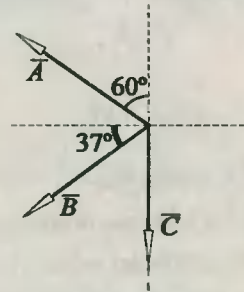


Fig. Prob. 2.53

2.54. Para el conjunto de vectores mostrado, calcular el módulo de su resultante, sabiendo que tiene dirección horizontal. Además $P = 30$.

2.55. La resultante de los vectores mostrados está en la dirección positiva del eje X, y su módulo es 4. Si además $A = 20\sqrt{2}$, y $C = 52$, se pide:

- El módulo de \vec{B} .
- La medida del ángulo θ .

2.56. Si la resultante del sistema vectorial está en la dirección de \vec{B} , siendo $C = 2$, y $D = 12$, calcular el módulo de A .

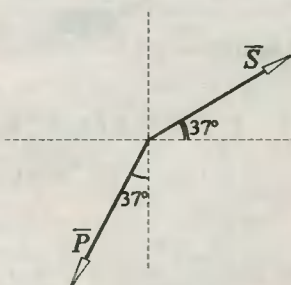


Fig. Prob. 2.54

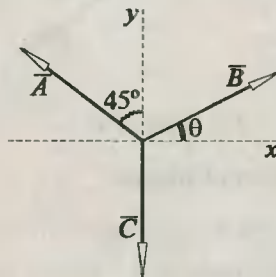


Fig. Prob. 2.55

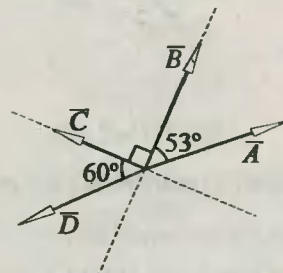


Fig. Prob. 2.56

2.57. Para el sistema vectorial mostrado, determinar el módulo del vector resultante, sabiendo que su dirección es vertical.

2.58. Para el sistema mostrado, hallar el valor de α para que la resultante sea vertical y hacia arriba, y cuyo valor exceda en 20% a A.

2.59. Hallar el valor de α para que la resultante del sistema forme 53° con el eje positivo de X ($\beta = 37^\circ$).

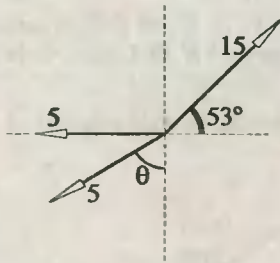


Fig. Prob. 2.57

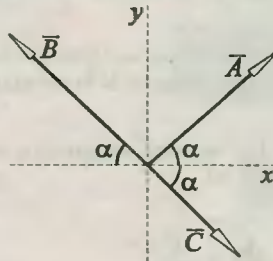


Fig. Prob. 2.58

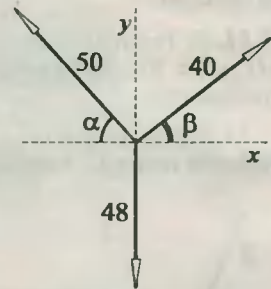


Fig. Prob. 2.59

2.60. Calcular D, si $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{0}$, sabiendo además que $A = 5\sqrt{3}$, y $B = 2$.

2.61. En la figura mostrada, se sabe que $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{0}$, $B = 3$, $C = 5\sqrt{3}$ y $D = 8$. Calcular:

- El módulo del vector \vec{A} .
- La medida del ángulo θ .

2.62. Si la resultante del sistema mostrado está en el eje X, y es igual a $3\,900\text{ N}$, encontrar:

- Las tensiones (1) y (2), si $\alpha = 74^\circ$.
- ¿Qué valor debe tener α para que T_2 sea mínima?

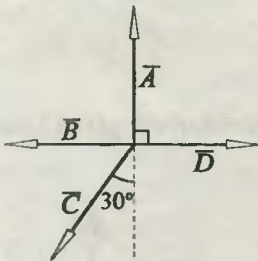


Fig. Prob. 2.60

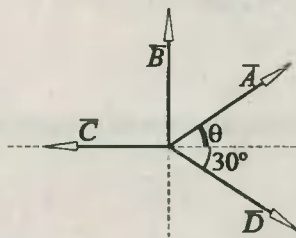


Fig. Prob. 2.61

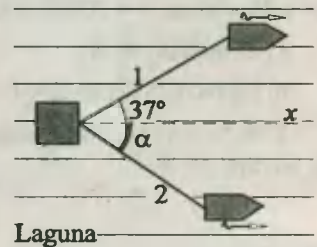


Fig. Prob. 2.62

Vectores unitarios cartesianos en el plano

2.63. Determinar un vector unitario en la dirección de \vec{AB} .

2.64. Calcular el módulo del vector diferencia $\vec{A} - \vec{B}$, si se sabe que: $\vec{A} = \vec{x} + \vec{y}$; $\vec{B} = \vec{p} + \vec{q}$.

2.65. Determinar el vector $\vec{X} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C} - \vec{D}$.

2.66. El vector \vec{AC} se ha descompuesto en 2 vectores paralelos a \vec{AM} y \vec{AN} , siendo M y N puntos medios. ¿Cuál es la magnitud del vector paralelo a \vec{AM} ?

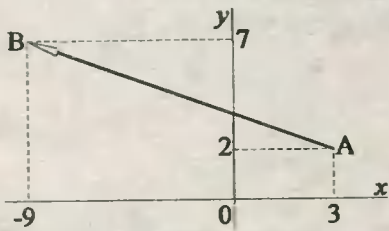


Fig. Prob. 2.63

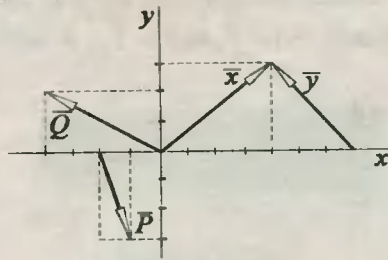


Fig. Prob. 2.64

2.67. En la figura mostrada, consideremos que $\vec{ON} = m\vec{OM} + n\vec{OM}'$. Hallar $(m + n)$, si se sabe que $OM' = 100$ es el vector ortogonal a OM .

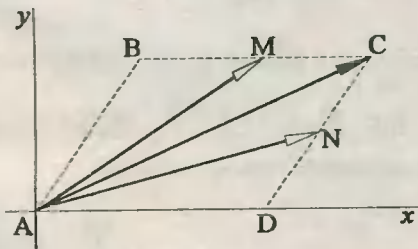


Fig. Prob. 2.66

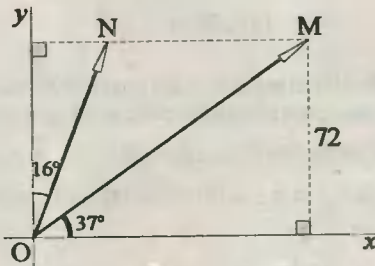


Fig. Prob. 2.67

2.68. Los vectores $\vec{A} = 9\vec{i} + 12\vec{j}$ y $\vec{B} = 12\vec{i} - m\vec{j}$ son codirigidos. Calcular el valor de m .

Vectores en el espacio

2.69. Determinar la expresión vectorial para el vector \vec{V} , si $V = 75$.

2.70. Hallar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado.

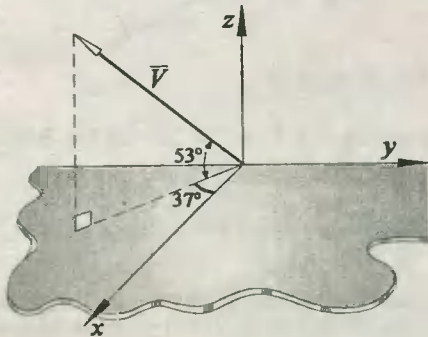


Fig. Prob. 2.69

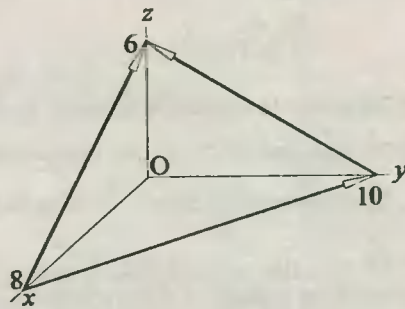


Fig. Prob. 2.70

2.71. Determinar una expresión vectorial para la fuerza \vec{Q} , cuyo módulo es 30 N.

2.72. Hallar el vector \vec{F} , si $\vec{F} = \vec{T} + \vec{P}$, sabiendo además que $T = 50$ N, y $P = 52$ N.

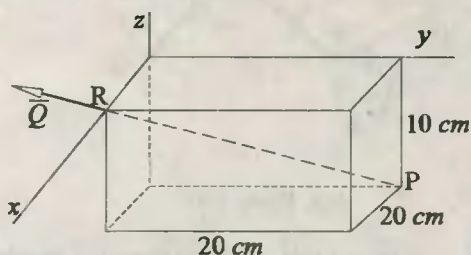


Fig. Prob. 2.71

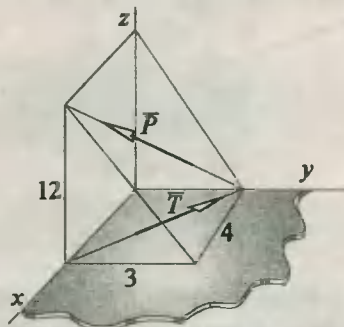


Fig. Prob. 2.72

2.73. Hallar el módulo y los cosenos directores del vector \vec{a} , que va desde $(1; -1; 3)$ al punto medio del segmento comprendido entre el origen y el punto $(6; -6; 4)$.

2.74. Hallar el vector resultante, si: $\vec{A} = 6\vec{i} + 10\vec{j} + 16\vec{k}$; $\vec{B} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$, y $C = 10\sqrt{2}$.

2.75. Si $a = b = c = 60$, determinar la resultante del conjunto de vectores mostrado.

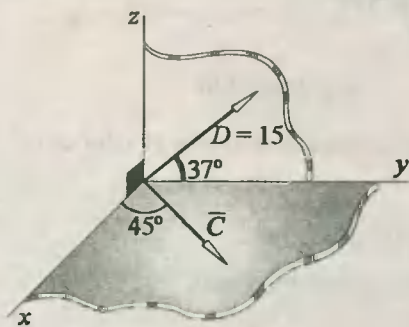


Fig. Prob. 2.74

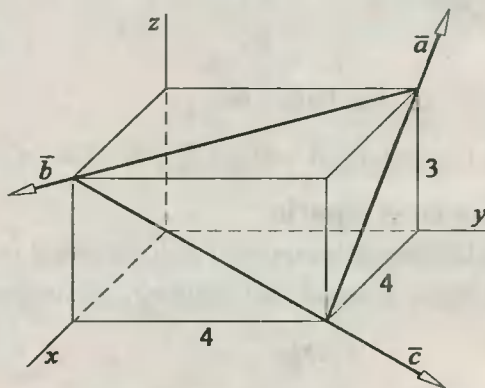


Fig. Prob. 2.75

2.76. Hallar la expresión vectorial de la fuerza resultante de \vec{F} y \vec{T} , si $F = 25$ N, y $T = 30$ N.

2.77. Calcular el ángulo que forman los vectores \vec{A} y \vec{B} , si $\vec{A} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$, y $\vec{B} = 24\vec{i} + 7\vec{j}$.

2.78. Determinar el coseno del ángulo que forman los vectores \vec{PM} y $(\vec{PT} + \vec{PU})$. $ST = SU$, y $\angle TSU = 74^\circ$.

2.79. Calcular la menor distancia que existe entre el punto P y la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto A, sabiendo que sus coordenadas son $(2; 2; 1)$ y $(4; 3; 12)$ respectivamente.

2.80. Un vector P tiene una dirección perpendicular al triángulo ABC, y posee un módulo de $8\sqrt{61}$. Determinar una expresión vectorial cartesiana para \vec{P} .

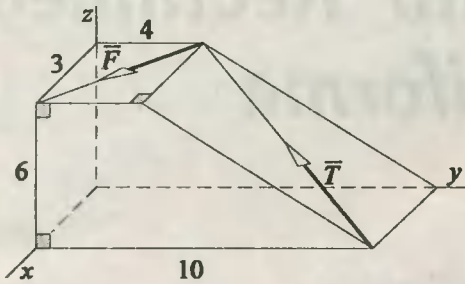


Fig. Prob. 2.76

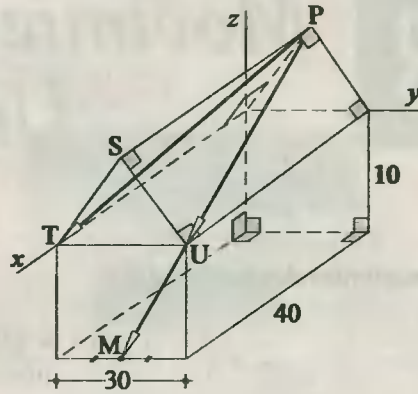


Fig. Prob. 2.78

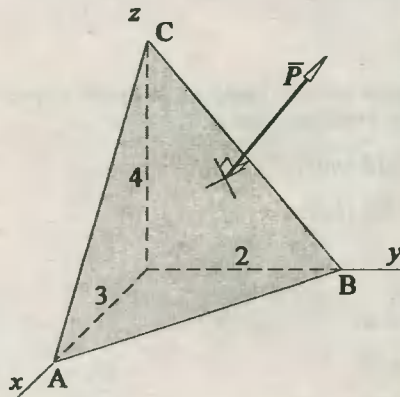


Fig. Prob. 2.80

2.81. Calcular la mínima distancia existente entre el punto $P(2; 3; -1)$ y el plano que contiene a los puntos A, B y C , siendo sus coordenadas $(-4; 3; -2)$, $(1; 1; 0)$ y $(2; -3; 1)$ respectivamente.

2.82. Calcular la mínima distancia que existe entre dos rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 , si se sabe que los puntos $A(-2; 0; 3)$ y $B(4; 1; -2)$ están contenidos en la recta \mathcal{L}_1 y los puntos $C(0; 1; -2)$ y $D(-1; 1; 1)$ están contenidos en la recta \mathcal{L}_2 .

3

Movimiento Rectilíneo Uniforme

3.1. Concepto de velocidad lineal (\bar{v})

$$\bar{v} = \frac{\bar{d}}{t} \quad \left(\frac{\text{vector desplazamiento}}{\text{tiempo}} \right) \quad (3.1)$$

$$v = \frac{d}{t} \quad \left(\text{rapidez} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo}} \right) \quad (3.2)$$

3.2. Unidades de velocidad lineal

En el S.I. la velocidad se expresa en *m/s*. También se puede expresar en *cm/s*, *piels*, *km/h*. Para la transformación de unidades se establece que :

$$x \text{ (km/h)} = x \cdot 5/18 \text{ (m/s)} \quad (3.3)$$

$$y \text{ (m/s)} = y \cdot 18/5 \text{ (km/h)} \quad (3.4)$$

3.3. Leyes del MRU

$$1^{\text{ra}} \text{ ley} \quad v = e/t \quad (3.5)$$

$$2^{\text{da}} \text{ ley} \quad e = vt \quad (3.6)$$

$$3^{\text{ra}} \text{ ley} \quad t = e/v \quad (3.7)$$

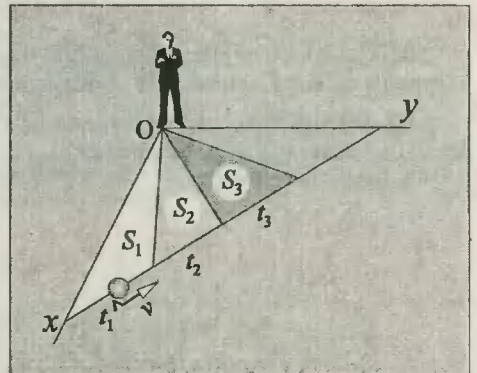
3.4. Ley de Kepler para el MRU

Un observador colocado en el origen de coordenadas cartesianas logrará certificar que un móvil con MRU logra desplazarse de tal modo que el radio vector posición barre áreas iguales en intervalos de tiempo también iguales.

$$\frac{S_1}{t_1} = \frac{S_2}{t_2} = \frac{S_3}{t_3} = \dots = \text{constante} \quad (3.8)$$

3.5. Tiempo de encuentro

$$t_e = \frac{d_s}{v_1 + v_2} \quad (v_1, v_2 \lll c) \quad (3.9)$$



3.6. Tiempo de alcance

$$t_a = \frac{d_s}{v_1 - v_2} \quad (v_1 > v_2) \quad (3.10)$$

siendo c la velocidad de la luz, cuyo valor es $3 \cdot 10^8$ m/s en el vacío.

PROBLEMAS

3.1. Un automóvil posee una velocidad de 72 km/h , y avanza contra una pared tal como se indica en la figura. ¿Después de cuántos segundos se encontrará a 40 m de dicha pared?

3.2. Los móviles 1 y 2 se desplazan uniformemente con velocidades de 12 m/s y 8 m/s respectivamente. ¿Al cabo de qué tiempo mínimo ambos móviles equidistarán del muro P a partir de las posiciones indicadas en la figura?

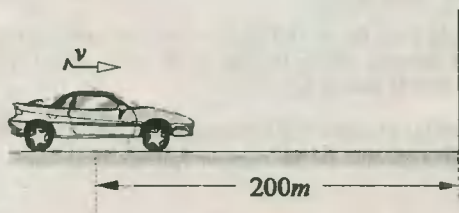


Fig. Prob. 3.1

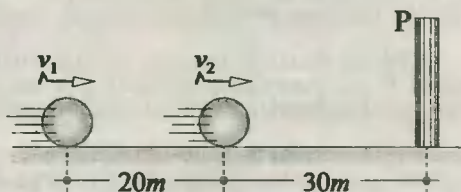


Fig. Prob. 3.2

3.3. Dos móviles están separados 168 km , y se mueven al encuentro llegando a cruzarse al cabo de 7 h . Calcular la velocidad del más veloz, si la velocidad del otro es 2 km/h menos?

3.4. El tiempo que demoran en encontrarse dos autos que viajan en sentidos contrarios, y separados inicialmente 160 m es 20 s . Si viajasen en el mismo sentido, el de mayor velocidad alcanza al otro en 80 s . Hallar la velocidad de cada auto.

3.5. Dos trenes que viajan en sentidos contrarios y hacia el encuentro, lo hacen con velocidades de 11 km/h y 33 km/h . Cuando están separados 88 km , del más lento sale volando un pájaro hacia el otro tren a una velocidad de 88 km/h respecto a Tierra. Cuando llega al otro tren, el pájaro emprende el retorno, y así hasta que éstos se encuentran. ¿Qué espacio recorrió dicho pájaro durante todo este tiempo?

3.6. Un hombre viaja con MRU, y debe llegar a su destino a las 7 p.m. Si viajara a 40 km/h llegaría 1 h después, y si viajara a 60 km/h llegaría 1 h antes. ¿Qué velocidad debió llevar para llegar a su destino a la hora fijada?

3.7. Una persona dispone de 5 h para dar un paseo. ¿Hasta qué distancia podrá hacerse conducir por un automóvil que va a 54 km/h , sabiendo que ha de regresar a pie a la velocidad de 6 km/h ?

3.8. Un pibe se encuentra sobre la playa de Las Malvinas, percatándose que mar adentro se produjo una explosión. Reconoce que la diferencia de los tiempos de llegada de los sonidos por el agua y el aire es de 11 s . ¿A qué distancia del pibe se produjo la explosión, sabiendo que las velocidades del sonido en el aire y en el agua son de 340 m/s y 1440 m/s respectivamente?

3.9. Dos puntos A y B situados en línea recta se encuentran separados 120 km . Del punto A parte un móvil M_1 que avanza hacia B a 5 km/h . Dos horas después, de B sale otro móvil M_2 que va al

encuentro del móvil M_1 a 8 km/h . ¿Después de qué tiempo de partir M_2 ambos móviles se encontrarán a 20 km alejándose entre sí?

3.10. Se tiene 3 móviles A, B y C. El móvil A parte a las 8:00, B a las 9:00 y C a las 10:00, con velocidades de 40 , 45 y 51 km/h respectivamente. Si van por la misma trayectoria e igual sentido, ¿A qué hora B equidistará de A y C?

3.11. Un muchacho que camina sobre una escalera detenida se demora en llegar arriba 90 s . Cuando está abajo sobre la escalera en movimiento se demora en llegar arriba 60 s . ¿Qué tiempo demorará en llegar arriba si camina sobre la escalera en movimiento?

3.12. Dos móviles parten desde un mismo punto siguiendo trayectorias rectilíneas perpendiculares, con velocidades de 6 m/s y 8 m/s . ¿Después de qué tiempo ambos móviles estarán separados 200 m ?

3.13. Dos móviles siguen trayectorias que se cortan formando un ángulo de 106° . Si desde la intersección de las trayectorias se desplazan con velocidades constantes de 40 m/s y 80 m/s , hallar la velocidad de un tercer móvil que parte del mismo punto y se desplaza por la bisectriz de este ángulo, para que en cualquier instante equidiste de los otros dos.

3.14. La vela de la figura se consume uniformemente a razón de $0,5\text{ cm/s}$, y está delante de una pared P que posee una rendija que se encuentra a la misma altura inicial de la vela. ¿Con qué velocidad se desplazará el haz luminoso que incide sobre la pared Q?

3.15. Dos velas de igual altura h se encuentran separadas por una distancia a . ¿Con qué velocidad se mueve la sombra de las velas a lo largo de las paredes, si una de ellas se apaga en un tiempo t_1 y la otra en t_2 ?

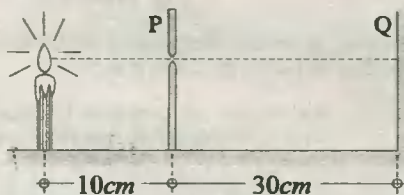


Fig. Prob. 3.14

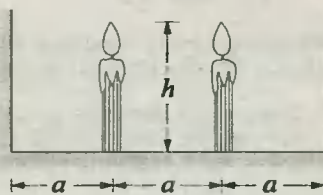


Fig. Prob. 3.15

3.16. Un ómnibus va por la carretera a razón de 16 m/s . Un hombre se encuentra a 60 m de la carretera, y en cierto instante a 400 m del ómnibus. ¿En qué dirección indicada por α debe correr el hombre a razón de 4 m/s para llegar a encontrarse justamente con el ómnibus, o antes que éste pase frente a él (Ver figura).

3.17. Un punto A dista 140 km de un punto B. Dos Móviles parten a la vez de A, y se dirigen hacia B con velocidades de 30 km/h y 40 km/h . Cuando llegan a B emprenden el retorno, manteniendo la misma rapidez, y al llegar a A vuelven hacia B, y así sucesivamente. Determinar al cabo de qué tiempo ambos móviles se vuelven a encontrar en A para repetir el ciclo de movimientos.

3.18. Cuando un tren se desplaza sobre la vía se escucha un ruido característico de origen metálico. Si el número de golpes que se escuchan en 45 s (cuando las ruedas pasan de uno a otro riel) da el valor de la velocidad en km/h , ¿Cuál es la distancia entre rueda y rueda?

3.19. Un tren demora 8 s en pasar frente a un alumno, y luego recorre íntegramente un túnel de 160 m de longitud en 48 s con velocidad constante. ¿Cuál es la longitud del tren?

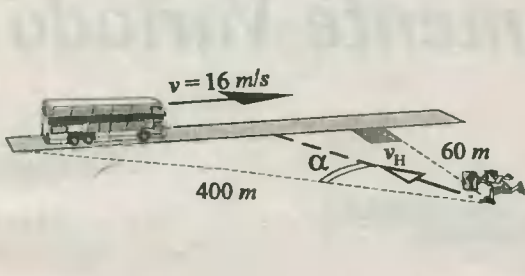


Fig. Prob. 3.16

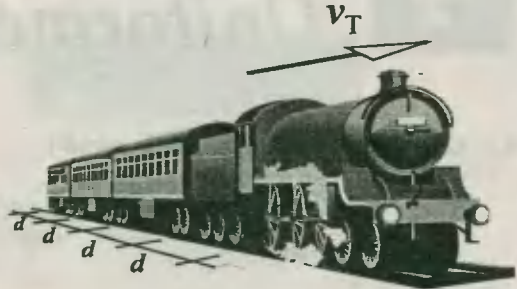


Fig. Prob. 3.18

3.20. Un observador que mira con un solo ojo se encuentra a 30 cm frente a una ventana de 20 cm de ancho, y a 12 m de él pasa un camión con una velocidad constante de 20 m/s. Si el observador lo vió durante 1 s, ¿Cuál es la longitud del camión?

3.21. Un móvil viaja con velocidad constante de la ciudad A a la ciudad B. Luego de 3 h de viaje se detiene en P durante 20 min, y continúa con 1/3 menos de su velocidad original, llegando a B con un retraso de 50 min. Se sabe que si se hubiera detenido 10 km más allá de P, sólo se hubiera retrasado 45 min. ¿Cuál es la distancia entre las ciudades?

3.22. Dos coches partieron al mismo tiempo: Uno de A en dirección a B, y el otro de B en dirección a A. Cuando se encontraron, el primero había recorrido 36 km más que el segundo. A partir de este momento (en que se encontraron) el primero tardó una hora en llegar a B, y el segundo 4 h en llegar a A. Hallar la distancia entre A y B.

3.23. En la figura se da una fotografía "borrosa" de un avión reactor en vuelo. La longitud del avión es 30 m, y la de la sección de la nariz 10 m. Si el tiempo de exposición del obturador de la cámara fotográfica es 0,1 s, haciendo uso de esta "fotografía", calcular la velocidad del avión. La línea de trazos muestra la forma del avión.

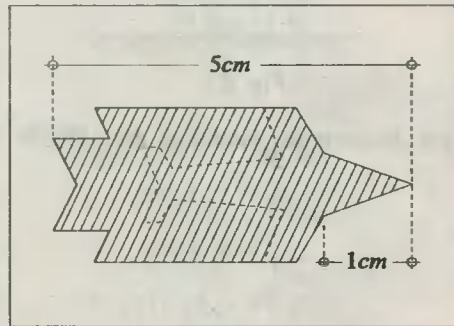


Fig. Prob. 3.23

3.24. Un automóvil se acerca hacia una tapia a una velocidad constante de 10 m/s. Si en determinado instante el chofer del automóvil hace sonar la bocina, y al cabo de 10 s escucha el eco, calcular a qué distancia se encontraba el móvil cuando el chofer hizo sonar la bocina (considerar que la velocidad del sonido es 340 m/s).

3.25. (Principio de Fermat) Una pelota de beisbol debe ser lanzada desde un punto A, chocar en un muro P y llegar hasta un punto B empleando el menor tiempo posible. La pelota mantiene siempre la misma rapidez en cualquier dirección que se mueva, y es de 2,6 m/s (considerar que el choque de la pelota con el muro es completamente elástico). Si la distancia de A hacia el muro es 3 m, de B al muro es 2 m, y la distancia entre los pies de las perpendiculares trazadas desde dichos puntos es 12 m, ¿Cuál es dicho tiempo?

4

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

4.1. Concepto de aceleración lineal (\bar{a})

$$\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \left(\frac{\text{Variación del vector velocidad}}{\text{Tiempo empleado}} \right) \quad (4.1)$$

$$\bar{a} = \frac{\bar{v}_f - \bar{v}_0}{t_f - t_0} \quad (4.2)$$

$$\bar{a} = \frac{\bar{v}_f - \bar{v}_0}{t} \Leftrightarrow (t_0 = 0 \wedge t_f = t) \quad (4.3)$$

4.2. Unidades de aceleración

En el S.I. la aceleración se expresa en m/s^2 . También se puede expresar en cm/s^2 , km/h^2 , $piels^2$.

4.3. Tipos de movimientos variados

A) Movimiento acelerado

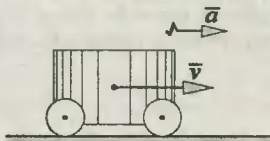


Fig. 2.1

B) Movimiento desacelerado

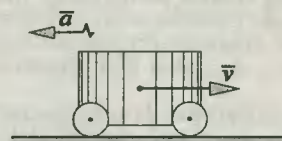


Fig. 2.2

4.4. Ecuaciones escalares del MRUV

$$v_f = v_0 + at \quad (4.4)$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2ae \quad (4.5)$$

$$e = v_0 t + 1/2 a t^2 \quad (4.6)$$

$$e = \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right) t \quad (4.7)$$

$$e_n = v_0 + 1/2 a (2n-1) \quad (4.8)$$

El signo de la aceleración a es positivo (+) si el movimiento es **acelerado**, y negativo (-)

si el movimiento es **desacelerado**. Asimismo, e_n representa el espacio recorrido en el n -ésimo segundo.

4.5. Ecuaciones vectoriales del MRUV

$$\vec{v}_t = \vec{v}_0 + \vec{a} t \tag{4.9}$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + 1/2 \vec{a} t^2 \tag{4.10}$$

en los cuales todos los términos, salvo el término t tienen signo, y ello según la dirección que poseen los vectores en un marco de referencia elegido.

4.6. Los numeros de Galileo

Todo móvil que parte del reposo con aceleración constante tendrá la característica de recorrer, en tiempos iguales, distancias proporcionales a los números 1, 3, 5, 7, 9, . . . , $(2n - 1)$.

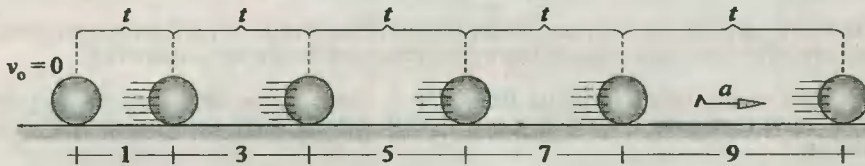


Fig. 2.3

4.7. Ley de las areas para el MRUV

Si el móvil de la figura parte del reposo, entonces, en tiempos iguales su radio vector posición barre areas proporcionales a los números de Galileo.

$$\frac{S_1}{1} = \frac{S_2}{3} = \frac{S_3}{5} = \dots = \frac{S_n}{2n-1} \tag{4.11}$$

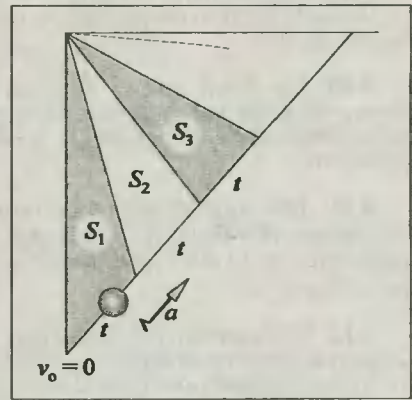


Fig. 2.4

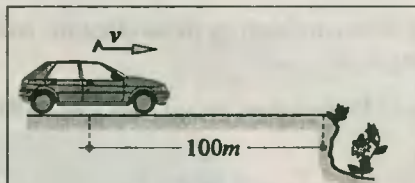
PROBLEMAS

Ecuaciones escalares

4.1. Un móvil se desplaza con MRUV; al pasar por un punto A su velocidad es v , y 4 s después pasa por otro punto B con una velocidad $3v$. Si el móvil experimenta una aceleración de 2 m/s^2 , ¿Qué

velocidad poseerá 3 s después de haber pasado por B?

4.2. El automóvil de la figura se desplaza a razón de 108 km/h y hacia un precipicio. El conductor aplica los frenos a partir del punto A de tal modo que experimenta un movimiento retardatriz con aceleración a . ¿Cuál debe ser el mínimo valor de a para que el automóvil no caiga por el precipicio?



4.3. Una pelota es pateada horizontalmente sobre un piso, experimentando una aceleración retardatriz de -6 m/s^2 . Si al ser pateado parte con una velocidad de 72 m/s , ¿Qué distancia recorre en los 2 primeros segundos de su movimiento?

4.4. Un móvil que viaja con MRUV triplica su velocidad luego de recorrer 200 m , empleando 10 s . ¿Cuál es la aceleración que posee?

4.5. Un vehículo se desplaza con aceleración constante $a = 3 \text{ m/s}^2$. Luego de recorrer 96 m alcanza una velocidad de 90 km/h . ¿Cuánto tiempo demoró el vehículo en realizar este recorrido?

4.6. Un móvil parte del reposo y acelera uniformemente, tal que en los 2 primeros segundos de su movimiento recorre 6 m . ¿Qué espacio logra recorrer en los 4 segundos siguientes?

4.7. Un auto se desplaza a razón de 108 km/h . A continuación aplica los frenos y retarda su movimiento uniformemente a razón de 4 m/s^2 . ¿Qué espacio logra recorrer en el 4º segundo de su movimiento?

4.8. ¿Durante qué segundo un móvil que parte del reposo y que tiene MRUV recorrerá el triple del espacio recorrido durante el quinto segundo?

4.9. Un móvil parte del reposo, y recorre en 2 s consecutivos de su movimiento las distancias de 26 m y 30 m . Si su movimiento es uniformemente acelerado, ¿En qué segundo de su movimiento recorre 46 m ?

4.10. Un móvil que se desplaza con movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado recorre 35 m en t segundos de su movimiento, y en los siguientes t segundos 25 m . Si todo el movimiento dura $4t$ segundos, ¿Qué espacio recorrió en los últimos t segundos antes de detenerse?

4.11. Tres móviles parten de un mismo punto en la misma dirección; los 2 primeros con velocidades constantes de 50 m/s y 80 m/s respectivamente, y el tercero parte del reposo con una aceleración de 13 m/s^2 . ¿Al cabo de qué tiempo los otros dos móviles se encontrarán equidistantes del tercero?

4.12. Dos automóviles se acercan el uno hacia el otro a 40 m/s y 30 m/s respectivamente. Cuando se encuentran separados 280 m , los dos conductores se dan cuenta de la situación y aplican los frenos, llegando al reposo al mismo tiempo precisamente antes de chocar. Si la desaceleración es constante para los dos automóviles, hallar la distancia recorrida por cada uno durante la frenada.

4.13. Un móvil parte de un punto con una velocidad $v_1 = 20 \text{ m/s}$. Cuando posee la mitad de dicha velocidad pasa por su lado otro móvil en sentido opuesto, el cual llega al punto de partida del primero luego de 2 s. Calcular la velocidad del segundo móvil en el momento del cruce, si los dos poseen aceleraciones del mismo módulo: 10 m/s^2 .

4.14. Un automóvil viaja a razón de 72 km/h . De pronto el conductor ve delante de él la luz roja

de un semáforo, y aplica los frenos, retardando uniformemente su movimiento a razón de 5 m/s^2 , deteniéndose justo al lado del semáforo. ¿A qué distancia del semáforo se encontraba el automóvil cuando se encendió la luz roja?. (Nota: El tiempo de reacción media para un conductor es $7/10 \text{ s}$).

4.15. Dos móviles parten del reposo con aceleraciones constantes $a_1 = 8 \text{ m/s}^2$ y $a_2 = 5 \text{ m/s}^2$. ¿Al cabo de qué tiempo el móvil 1 alcanzará al móvil 2, y qué velocidad poseerá cada uno de ellos?.

4.16. Dos móviles se encuentran inicialmente en reposo, y separados por una distancia de 20 m . Si ambos parten en la misma dirección, según se indica en la figura, ¿Al cabo de qué tiempo como mínimo ambos móviles se encontrarán distanciados 4 m ?



Fig. Prob. 4.15

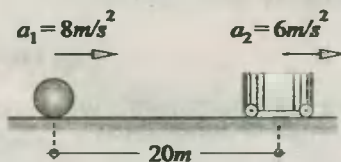


Fig. Prob. 4.16

4.17. Un auto se encuentra a 10 m de distancia de un ciclista que se mueve con MRU, y hacia el auto, que a su vez parte alejándose con aceleración constante de 4 m/s^2 . ¿Al cabo de qué tiempo ambos móviles se cruzan por segunda vez? (Velocidad del ciclista = 12 m/s).

4.18. Un pasajero se encuentra a 20 m de un omnibus detenido. Cuando el pasajero corre hacia el omnibus a razón de 6 m/s , aquel parte alejándose con aceleración constante de 1 m/s^2 . ¿En cuánto tiempo el pasajero logra alcanzar al omnibus?. Si no lo alcanza, ¿Hasta qué distancia como mínimo logró acercarse al omnibus?.

4.19. Un auto está esperando que cambie la luz de un semáforo. Cuando la luz cambia a verde, el auto acelera uniformemente durante 6 s a razón de 2 m/s^2 , después de lo cual se mueve con velocidad constante. En el instante que el auto comienza a moverse, un camión se mueve en la misma dirección con velocidad constante de 10 m/s y lo pasa. ¿En qué tiempo y a qué distancia se encontrarán nuevamente el auto y el camión?.

4.20. Un auto y un camión se mueven a 72 km/h por una autopista. Cuando el auto está 5 m detrás del camión, comienza a acelerar hasta colocarse a 55 m delante de él. ¿Cuál será el tiempo mínimo de la operación, si la máxima aceleración del auto es $2,5 \text{ m/s}^2$, si se sabe además que su velocidad es de 90 km/h ?

4.21. Tres autos A, B y C se encuentran sobre una línea recta, estando B a igual distancia de A y C. Si el auto A se mueve hacia el Norte con velocidad constante v , y el auto C parte del reposo hacia el Sur con aceleración constante a , ¿De qué modo debe moverse el auto B paralelamente a A para que en todo instante los tres se encuentren en una misma recta?.

Ecuaciones vectoriales

4.22. La posición de un móvil está dada por la siguiente ecuación, y define su posición x para todo instante t :

$$x = -28 + 8t + t^2$$

donde x se expresa en cm , y t en segundos. ¿En qué instante se encontrará el móvil pasando por un punto ubicado a 56 cm hacia la derecha del origen de coordenadas X , y qué velocidad tendrá en dicho punto?

4.23. Hallar el instante en que un móvil pasa por el origen de coordenadas, sabiendo que su posición x en metros viene dado por :

$$x = 24 - 10t + t^2$$

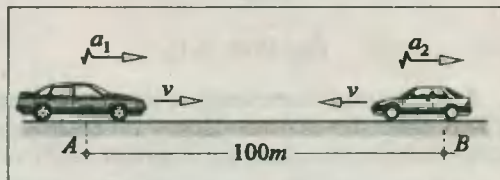
siendo t el instante en *segundos*.

4.24. Una partícula avanza en línea recta sobre el eje X , y posee un movimiento que viene dado por la siguiente ley :

$$x = 12t - 135 + 3t^2$$

en los cuales x está dado en metros, y t en segundos. ¿Cuál es la velocidad que posee la partícula cuando pasa por el origen de coordenadas?

4.25. Dos autos se mueven con MRUV, y en el instante mostrado poseen iguales velocidades (módulos) con aceleraciones permanentes y constantes: $a_1 = 2\text{ m/s}^2$; $a_2 = 4\text{ m/s}^2$. ¿A qué distancia de A se encontrarán los autos, si esto sucede luego de 10 s ?



4.26. La ley de movimientos para dos móviles A y B viene dado por:

$$A \rightarrow x = 4t^2 + 5t - 1 ; B \rightarrow x = 3t^2 + 5t + 8$$

en los cuales x está en metros y t en segundos. Hallar la velocidad de A en el momento en que se cruzan.

4.27. Un carrito de demostraciones se movía a lo largo de una regla con aceleración constante. Cuando el cronómetro marcaba $t_1 = 7\text{ s}$, el carrito se encontraba en el punto $x_1 = 70\text{ cm}$; cuando $t_2 = 9\text{ s}$, $x_2 = 80\text{ cm}$; y en el momento $t_3 = 15\text{ s}$, $x_3 = 230\text{ cm}$. ¿Qué aceleración poseía el carrito?

5

Caída Libre

Vertical

5.1 Valores de g

g : Aceleración de la gravedad

En los polos: $g = 9,83 \text{ m/s}^2$

En el ecuador: $g = 9,78 \text{ m/s}^2$

A 45° de latitud Norte: $g = 9,805 \text{ m/s}^2$ (valor estándar)

En Lima - Perú: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ (ubicado a 12° de latitud Sur).

5.2. Movimientos verticales

a) Hacia arriba: Movimiento desacelerado.

b) Hacia abajo: Movimiento acelerado.

Del ejemplo de la figura:

$$1^\circ) |v_1| = |v_5| ; |v_2| = |v_4|$$

$$2^\circ) v_3 = 0 \text{ (Altura máxima)}$$

$$3^\circ) t_1 = t_4 ; t_2 = t_3$$

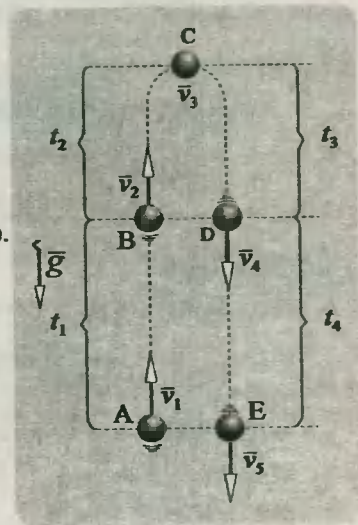


Fig 5.1

5.3. Ecuaciones escalares de la caída libre vertical

$$v_f = v_o \pm gt \tag{5.1}$$

$$v_f^2 = v_o^2 \pm 2gh \tag{5.2}$$

$$h = v_o t \pm 1/2 gt^2 \tag{5.3}$$

$$h = \left(\frac{v_o + v_f}{2} \right) t \tag{5.4}$$

$$h_n = v_o \pm 1/2 g(2n - 1) \tag{5.5}$$

El signo (+) se usará si el movimiento es descendente, y el signo (-) si el movimiento es ascendente. El término h representa la distancia vertical entre dos puntos de la trayectoria. Asimismo, h_n es el desplazamiento vertical en el n -ésimo segundo.

5.4. Ecuaciones vectoriales de caída libre vertical

$$\vec{v}_f = \vec{v}_o + \vec{g} \cdot t \quad (5.6)$$

$$\vec{y}_f = \vec{y}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 \quad (5.7)$$

Cada vector se considerará positivo (+) si apunta hacia arriba, y será negativo (-) si el vector apunta hacia abajo. Por ello, g llevará el signo negativo delante.

5.5. Fórmulas adicionales

Para lanzamientos verticales hacia arriba:

$$t_{\text{vuelo}} = 2v_o / g \quad (5.8)$$

$$h_{\text{máx}} = v_o^2 / 2g \quad (5.9)$$

PROBLEMAS

Nota: Para todos los problemas considere $g = 10 \text{ m/s}^2$, a menos que se indique lo contrario.

5.1. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad $v_o = 90 \text{ m/s}$. Determinar su velocidad luego de:

- $t_1 = 10 \text{ s}$
- $t_2 = 9 \text{ s}$
- $t_3 = 12 \text{ s}$

5.2. En un lugar donde $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad $v_o = 98 \text{ m/s}$. Calcular en qué posición se encontrará la piedra (respecto al punto de lanzamiento) al cabo de:

- $t_1 = 10 \text{ s}$
- $t_2 = 20 \text{ s}$
- $t_3 = 25 \text{ s}$

5.3. Un paquete ubicado a 70 m del piso es lanzado verticalmente hacia arriba con $v_o = 20 \text{ m/s}$. Determinar a qué altura se encontrará luego de:

- 2 s
- 6 s

5.4. Un cuerpo es disparado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 98 m/s . Si la altura alcanzada por el cuerpo coincide con la del edificio, ¿Cuántos pisos tiene el edificio, si cada piso tiene 5 m de altura, y qué tiempo demorará en volver al piso? ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

5.5. Una piedra se lanza verticalmente desde un punto A con una velocidad de 80 m/s . ¿A qué distancia de A se encontrará un punto B, en el cual la velocidad de la piedra será 20 m/s hacia abajo?

5.6. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s . ¿Al cabo de qué tiempo la pelota poseerá una velocidad de 40 m/s ?

5.7. Desde el piso se lanza una pelota verticalmente hacia arriba a razón de 20 m/s . ¿Al cabo de qué tiempo como máximo se encontrará a 15 m de altura?

5.8. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con $v_0 = 30 \text{ m/s}$. ¿Al cabo de qué tiempo dicho cuerpo se encontrará a 80 m debajo del punto de lanzamiento?

5.9. Una piedra es lanzada desde el suelo verticalmente hacia arriba. Si demora $0,2 \text{ s}$ en pasar por una ventana de $1,8 \text{ m}$ de altura, ¿Con qué velocidad fue lanzada la piedra, si el borde inferior de la ventana está a 40 m del suelo?

5.10. Un observador que mira a través de una rendija muy angosta ve pasar un cuerpo verticalmente hacia arriba, y 8 s después lo ve pasar hacia abajo. Si dicho cuerpo fué impulsado desde el piso con una velocidad de 60 m/s , ¿A qué altura del piso se encuentran los ojos del observador?

5.11. Un hombre lanza una pelota verticalmente hacia arriba. Dos segundos más tarde lanza una segunda pelota, y con la misma velocidad inicial que la primera, y observa que las pelotas chocan $0,4 \text{ s}$ después que la segunda pelota fué lanzada. ¿Cuál es la velocidad inicial de ambas pelotas?

5.12. Dos cuerpos se encuentran en una misma vertical en la Luna. En determinado instante están separados por una distancia de 100 m , y tienen velocidades iniciales opuestas de 10 m/s . ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán?

5.13. Desde el borde de un acantilado de $50,2 \text{ m}$ de altura una persona arroja dos bolas iguales, una hacia arriba con una velocidad de $19,6 \text{ m/s}$, y la otra hacia abajo con la misma velocidad. ¿Con qué retraso llegará la bola lanzada hacia arriba al suelo? ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

5.14. Dos muchachos están en el último piso de un edificio. El primer muchacho suelta un vaso fuera de la ventana. Tres segundos después el otro muchacho arroja otro vaso hacia abajo fuera de la ventana. Ambos vasos llegan a Tierra al mismo tiempo. Si los vasos partieron desde una altura de 125 m , ¿Cuál será la velocidad inicial del segundo vaso?

5.15. Una piedra A es lanzada hacia arriba. Tres segundos más tarde otra piedra B es también lanzada hacia arriba, dando alcance a A cuando ésta alcanza su altura máxima. Calcular en cuánto tiempo B alcanza a A (Velocidad inicial de A = 50 m/s).

5.16. Una piedra es soltada en un lugar cerca a la superficie terrestre. Si en el último segundo de su caída recorre la mitad de su altura de caída, ¿Cuál es el valor de dicha altura? ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

5.17. Después de soltarse de un helicóptero, un paracaidista cae 80 m en forma libre, y abre en ese instante el paracaídas, lo cual le produce un retardo en su velocidad de 2 m/s^2 , llegando al suelo con una velocidad de 2 m/s . ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire?

5.18. Un piloto suelta una bomba desde un helicóptero estático en el aire, y después de 120 s escucha la detonación. Si la velocidad del sonido la supondremos igual a 300 m/s , hallar la velocidad de la bomba al tocar Tierra.

5.19. ¿Cuál deberá ser el valor de H para que el cuerpo m recorra el plano inclinado liso en el menor tiempo posible, si parte del reposo en O? (Ver figura)

5.20. Una esferilla se deja caer de la parte superior de un cilindro hueco inclinado un ángulo α en el preciso instante que éste arranca con una aceleración $a = 3,75 \text{ m/s}^2$. Hallar el ángulo α para que la bola no toque el cilindro hasta que impacte en su base.

5.21. Un ascensor de 3 m de altura se mueve verticalmente hacia arriba con aceleración retardatriz de 4 m/s^2 . Cuando su velocidad era de 3 m/s una lámpara se desprende del techo interior. ¿Al cabo de qué tiempo chocará contra el piso del ascensor? Indicar además si para un observador ubicado en la Tierra la lámpara estaba subiendo o bajando, o se encontraba en reposo en el momento del impacto.

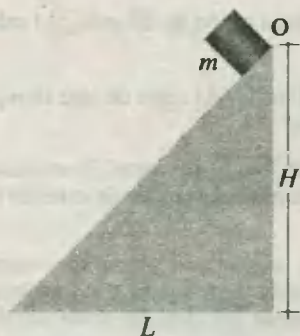


Fig. Prob. 5.19

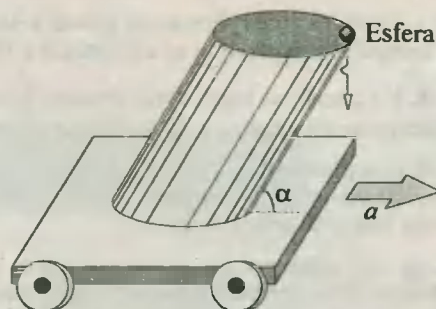


Fig. Prob. 5.20

5.22. Un globo aerostático sube verticalmente con una velocidad $v_1 = 30 \text{ m/s}$. El piloto al encontrarse a una altura $h = 240 \text{ m}$ lanza verticalmente hacia abajo una bolsa de arena, con una velocidad respecto a su mano $v_2 = 20 \text{ m/s}$. ¿Al cabo de qué tiempo la bolsa tocará el suelo?.

5.23. Un globo aerostático se mueve verticalmente hacia abajo con una velocidad de 20 m/s . En un instante dado el piloto lanza una manzana con una velocidad de 35 m/s hacia arriba (respecto a su mano). ¿Qué aceleración retardatriz deberá imprimir al globo para detenerse justo cuando la manzana vuelve a pasar frente a él?.

5.24. Sobre una placa elástica caen libremente dos bolas metálicas, tal como se muestra en la figura. La bola B cae T segundos después que A ($T > 0$). Al pasar cierto tiempo "después" de T , las velocidades de las bolas coinciden (en todo). Determinar:

a) El lapso T .

b) El intervalo de tiempo durante el cual las velocidades de dichas bolas cumplen con la condición antes dicha.

5.25. En el pozo de la figura caen gotas de agua a razón de 1 gota/s . Un objeto asciende a una velocidad constante de 10 m/s , y es alcanzado por una gota cuando está a una profundidad $h = 500 \text{ m}$. ¿Cuánto subirá el objeto aproximadamente hasta ser alcanzado por la siguiente gota?.

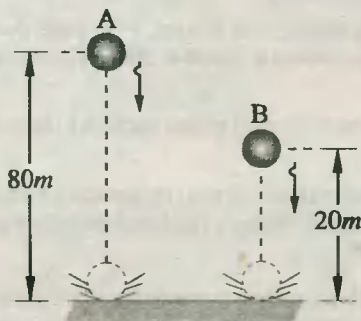


Fig. Prob. 5.24

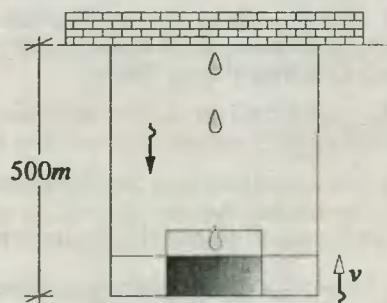


Fig. Prob. 5.25

6

Gráficos del Movimiento Referidos al Tiempo

6.1. Movimiento rectilíneo uniforme

6.1.a. Posición-vs-tiempo

(* Es una línea recta inclinada (Fig. 6.1).

(* La pendiente de la línea recta nos da la velocidad.

$$\operatorname{tg}\theta = v \quad (6.1)$$

La ley del movimiento es:

$$x = x_0 + v_0 t \quad (6.2)$$

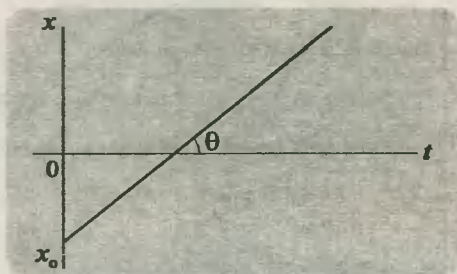


Fig.6.1

6.1.b. Velocidad-vs-tiempo

(* Es una línea recta paralela al eje del tiempo (Fig. 6.2).

(* Area = d (desplazamiento) (6.3)

(* Area = e (espacio) (6.4)



Fig.6.2

6.2. Movimiento rectilíneo uniformemente variado

6.2.a. Posición vs. tiempo

(* Es una parábola (Fig. 6.3).

(* La pendiente de la recta tangente a la parábola la da la velocidad instantánea.

(* Ley del movimiento:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (6.5)$$

$$\text{AREA} = \pm \frac{\left[x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \right]^2}{2(v_0 + at)}$$

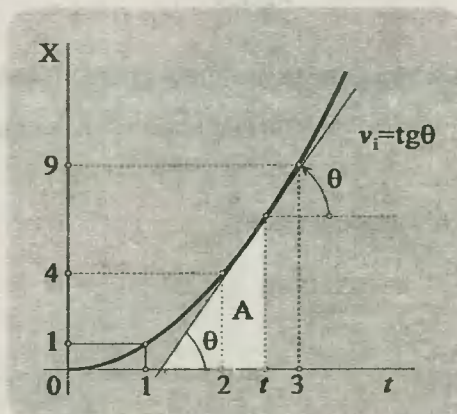


Fig.6.3

6.2.b. Velocidad vs. tiempo

(*) Es una línea recta inclinada (Fig. 6.3).

(*) La pendiente de la recta nos da la aceleración del movimiento:

$$\operatorname{tg}\alpha = a \quad (6.7)$$

(*) Ley de la velocidad:

$$v = v_0 + at \quad (6.8)$$

6.2.c. Aceleración vs. tiempo

(*) Es una línea recta paralela al eje del tiempo (Fig. 6.5).

(*) El área bajo la curva dá el cambio producido en la velocidad:

$$\text{Area} = \Delta v \quad (6.9)$$

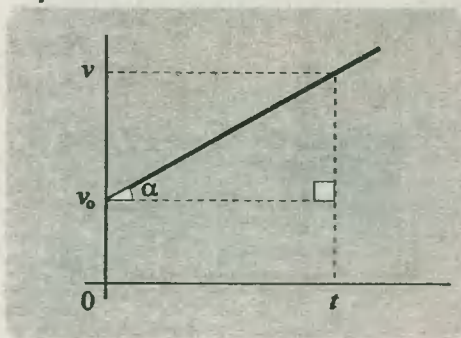


Fig.6.4

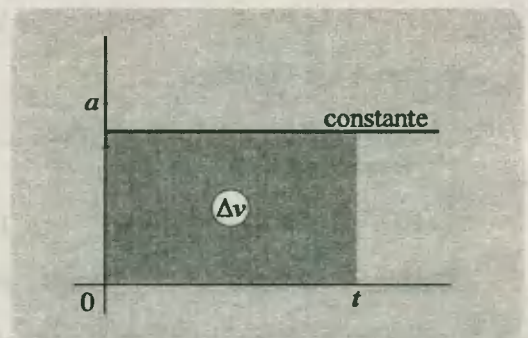


Fig.6.5

6.3. Movimiento rectilíneo variado linealmente (MRVL)

b = B-celeración: Magnitud física que mide la rapidez con que cambia la aceleración.

$$b = \Delta a / \Delta t \quad (6.10)$$

6.4. Leyes del MRVL

$$b = \text{constante:} \quad a = a_0 + bt \quad (6.11)$$

$$v = v_0 + a_0 t + \frac{1}{2} bt^2 \quad (6.12)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 + \frac{1}{6} bt^3 \quad (6.13)$$

PROBLEMAS

Posición - vs - tiempo

6.1. Un móvil se desplaza a lo largo del eje X, y su posición viene dada por la siguiente ecuación:

$$x = 24 - 6t$$

donde x está en metros, y t en segundos. Se pide determinar:

- La velocidad del móvil.
- La gráfica *espacio - temporal*.
- El instante en el cual el móvil pasa por el origen de coordenadas.
- La pendiente de la curva en $t = 4$ s.

6.2. Dado el gráfico x - vs - t , determinar:

- La ecuación que define la trayectoria *espacio - temporal*.
- La posición del móvil en $t = 10$ s.

6.3. Una partícula móvil se desplaza a lo largo del eje X, y su posición para todo instante t viene dado por la siguiente ley:

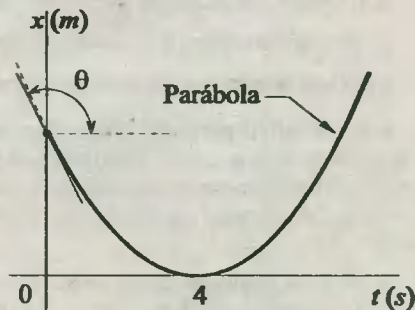
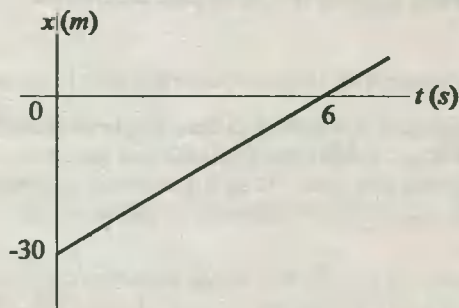
$$x = 45 - 6t - 3t^2$$

donde x está en metros y t en segundos. Se pide determinar:

- Su gráfica *espacio - temporal*.
- La pendiente de la curva en $t = 0$ s y en $t = 5$ s.
- El instante en el cual el móvil pasa por el origen de coordenadas.

6.4. Dada la gráfica *posición - vs - tiempo* de un móvil, se pide determinar:

- La aceleración del móvil.
- La pendiente de la curva en $t = 8$ s, si en $t = 0$ s, $\text{tg}\theta = -8$ m/s.
- El significado de que la curva toque al eje del tiempo en $t = 4$ s.



6.5. Dado el gráfico x - vs - t para un móvil, se pide determinar:

- La aceleración del móvil y su velocidad en $t = 0$ s.
- La posición del móvil en $t = 4$ s.
- El significado de que la curva corte al eje t en dos puntos.

6.6. Una partícula se desplaza a lo largo del eje X, y su posición respecto al tiempo viene dado por el cuadro de datos mostrado. Determinar:

- El gráfico *espacio - temporal* (discutir).
- La velocidad media entre $t = 1\text{ s}$ y $t = 5\text{ s}$.
- La velocidad instantánea en $t = 5\text{ s}$ (aproximar).

$t\text{ (s)}$	0	1	2	3	4	5
$x\text{ (m)}$	0	2	8	18	32	50

6.7. La gráfica *espacio - temporal* que se muestra describe el desplazamiento de un objeto con respecto a un cierto marco de referencia. Determinar el valor y signo de la mayor velocidad que se presenta a lo largo de todo el movimiento, y además, la velocidad media en el intervalo de tiempo de 4 a 10 s.

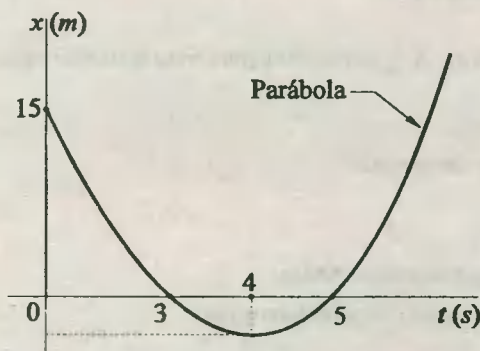


Fig. Prob. 6.5

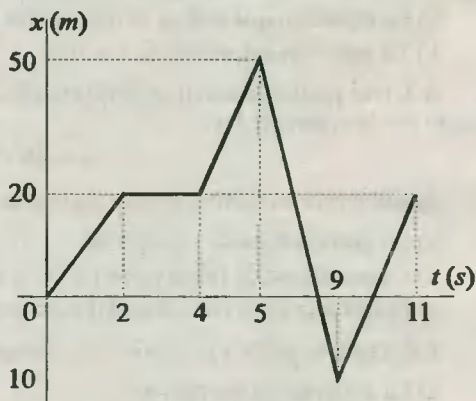


Fig. Prob. 6.7

6.8. Dados los gráficos *posición - vs - tiempo* de dos móviles A y B, se pide determinar:

- El valor y signo de sus velocidades.
- El instante en que los móviles se cruzan, y a qué distancia del origen de coordenadas lo hacen.

6.9. Un móvil parte del reposo con aceleración constante $a_1 = 4\text{ m/s}^2$, la cual mantiene durante 6 s, después de los cuales continúa con MRU durante 4 s, y finalmente continúa con movimiento rectilíneo uniformemente retardado, recorriendo 24 m hasta detenerse. Se pide determinar la gráfica *posición - vs - tiempo*, si se sabe que el móvil partió del origen de coordenadas con dirección hacia el eje + X.

6.10. Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba con $v_0 = 20\text{ m/s}$ desde la posición $y_0 = 60\text{ m}$, en un lugar donde $g = 10\text{ m/s}^2$. Se pide construir la gráfica *posición (y) - vs - tiempo* hasta el instante en el cual la piedra toca el piso.

Nota: Considere que el origen de coordenadas ($y = 0$) se ubica sobre el piso.

6.11. Dado el gráfico $x - vs - t$ para una partícula que se desplaza rectilíneamente con aceleración constante $a = 8\text{ cm/s}^2$. ¿Cuál es la velocidad en el instante t en que el área sombreada sea $64\text{ cm}\cdot\text{s}$?

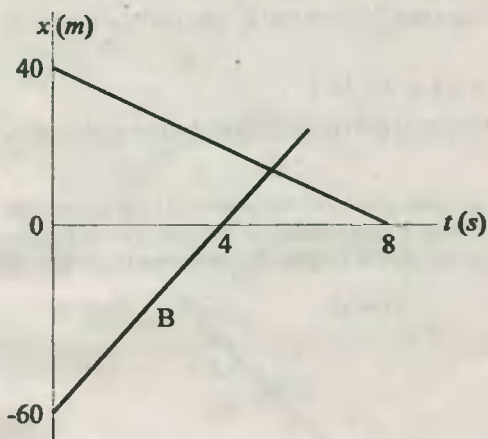


Fig. Prob. 6.8

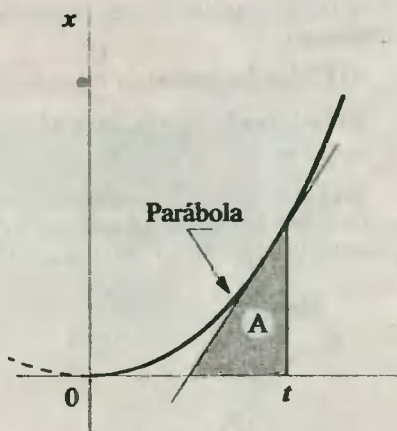


Fig. Prob. 6.11

Velocidad - vs - tiempo

6.12. El gráfico muestra la velocidad de un móvil a través del tiempo. Se sabe que originalmente el móvil se encontraba en la posición $x_0 = -10$ m. Se pide determinar:

- La ley del movimiento: $x = f(t)$.
- La aceleración del móvil.
- El desplazamiento producido entre $t = 0$ s y $t = 8$ s.
- La posición del móvil en $t = 8$ s.

6.13. Dado el gráfico velocidad - vs - tiempo, hallar:

- La aceleración del móvil.
- Su velocidad en $t = 12$ s.
- Su desplazamiento entre $t = 0$ s y $t = 12$ s.
- La posición del móvil en $t = 12$ s, si $x_0 = -8$ m.

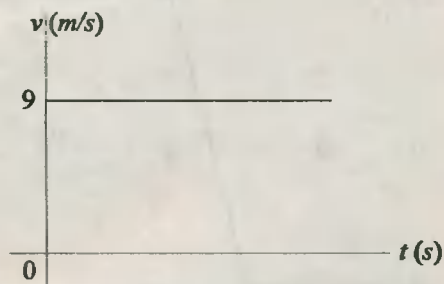


Fig. Prob. 6.12

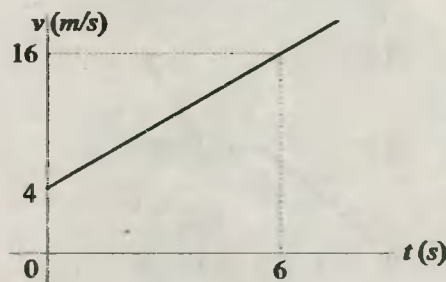


Fig. Prob. 6.13

6.14. Si el gráfico v - vs - t corresponde al movimiento unidimensional de una partícula, se pide determinar:

- El desplazamiento y espacio recorrido entre $t = 0$ s y $t = 10$ s.
- La ley del movimiento $x = f(t)$, si además se sabe que el móvil se encontraba inicialmente en $x_0 = -12$ m.

6.15. Un móvil se desplaza a lo largo del eje X, y se sabe que en el instante $t = 0$ s se encuentra en $x = +9$ m. Sabiendo además que su velocidad es variable, y viene dada por la gráfica de la figura, ¿En qué instante dicho móvil logra pasar por segunda vez por el origen de coordenadas?.

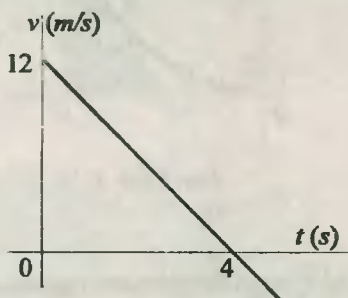


Fig. Prob. 6.14

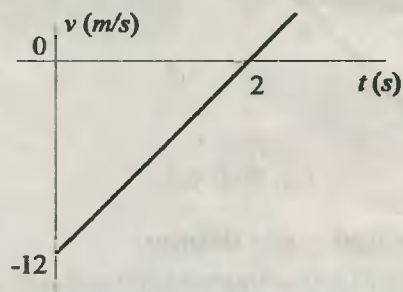


Fig. Prob. 6.15

6.16. Los ascensores de algunos edificios están diseñados para aceleraciones constantes que permiten alcanzar velocidades máximas de 9 m/s en 6 s, o desacelerar desde esta velocidad hasta detenerse también en 6 s. ¿Cuál será el tiempo mínimo para ir desde el primer piso hasta el último, situado a 180 m del primero?.

6.17. En la figura se muestra la gráfica *velocidad* - *vs* - *tiempo* de un móvil. Determinar la posición del móvil para $t = 4$ s, si para $t = 0$ s el móvil está en $x = -2$ m.

6.18. Un móvil parte del reposo con una aceleración constante de 10 m/s². Luego de transcurrir cierto tiempo el móvil empieza a desacelerar a razón de 5 m/s² hasta detenerse. Si el tiempo total empleado es 30 s, calcular el espacio total recorrido.

6.19. El gráfico mostrado da la velocidad de un móvil para todo instante. Encontrar la velocidad media entre $t = 2$ s y $t = 6$ s.

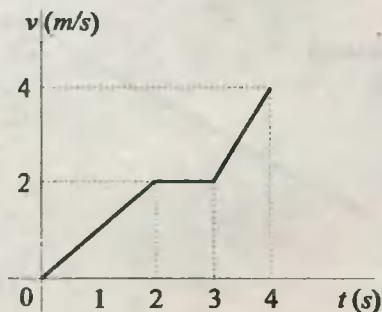


Fig. Prob. 6.17

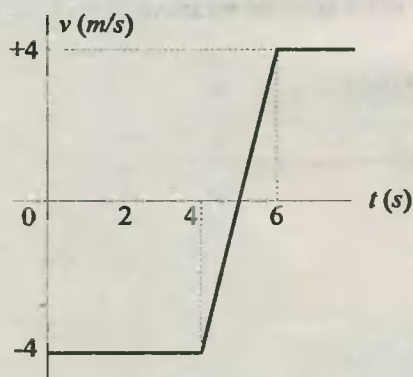


Fig. Prob. 6.19

6.20. Dos móviles M y N se mueven sobre una misma recta y en el mismo sentido, siendo las gráficas de sus velocidades las que se muestra en la figura. ¿En qué instante t sus velocidades coincidirán en todo?

6.21. Dos móviles A y B parten desde $x_{o_A} = 10 \text{ m}$, y $x_{o_B} = -800 \text{ m}$ respectivamente, siendo sus gráficas *velocidad - vs - tiempo* la que se muestra en la figura. ¿Qué distancia los separa cuando sus velocidades se igualen?

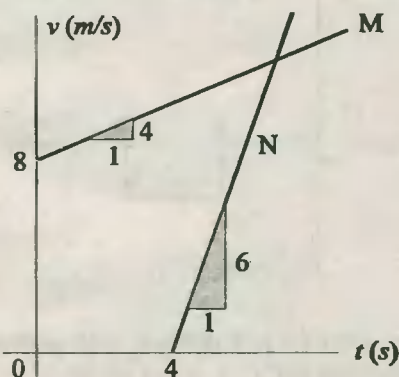


Fig. Prob. 6.20

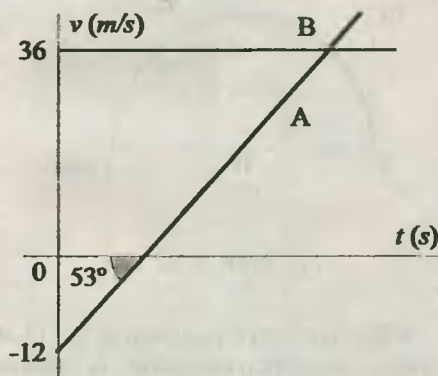


Fig. Prob. 6.21

6.22. En la figura se muestra las gráficas $v - vs - t$ de los movimientos rectilíneos de dos móviles A y B. ¿Con qué velocidad inicial partió B, si cuando sus velocidades se igualaron por segunda vez sus desplazamientos también se igualaron?. Considerar $\pi \approx 22/7$.

6.23. El gráfico mostrado corresponde a la velocidad en el transcurso del tiempo de un objeto lanzado desde la azotea de un edificio hasta el instante en que toca el piso. Calcular la altura del edificio ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

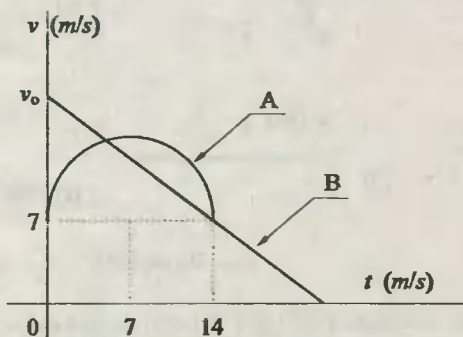


Fig. Prob. 6.22

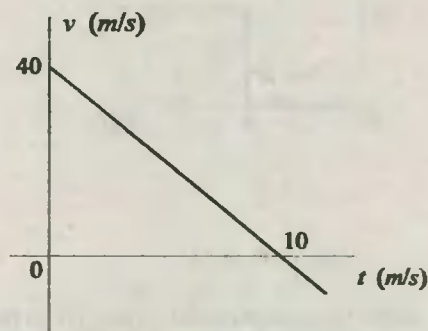


Fig. Prob. 6.23

6.24. Un móvil posee una velocidad variable, según muestra la gráfica. Determinar la aceleración en el instante $t = 16 \text{ s}$.

Aceleración - vs - tiempo

6.25. Un móvil parte del reposo y con una aceleración que viene dada por la gráfica a - vs - t mostrada. Se pide determinar la velocidad del móvil en $t = 4$ s, $t = 7$ s, y $t = 12$ s.

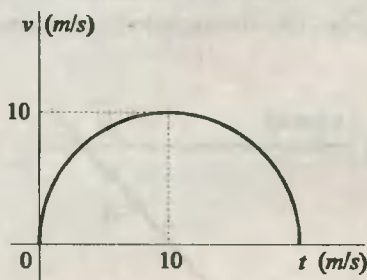


Fig. Prob. 6.24

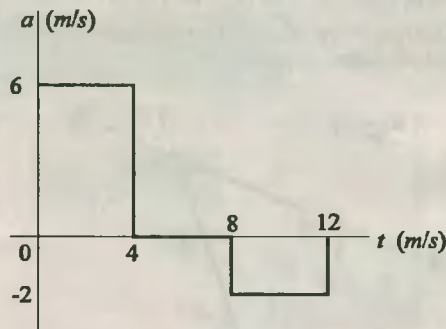


Fig. Prob. 6.25

6.26. Si un móvil parte con $v_0 = -12$ m/s, y se desplaza sobre el eje X desde $x_0 = 18$ m, se pide construir un gráfico *velocidad - vs - tiempo*, y el correspondiente gráfico x - vs - t , sabiendo que su aceleración viene dada por el gráfico mostrado.

6.27. En la figura se muestran la posición de un móvil (1) con respecto al tiempo, y la aceleración de un segundo móvil (2) con respecto al tiempo. Se sabe además que para $t = 0$ s el móvil (2) se ubica en $x = 0$, y con velocidad $v = 0$. Determinar en qué instante se vuelven a encontrar ambos móviles.

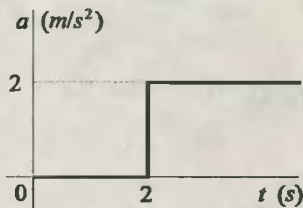


Fig. Prob. 6.24

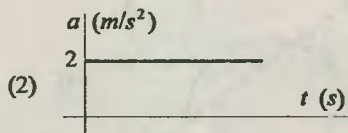
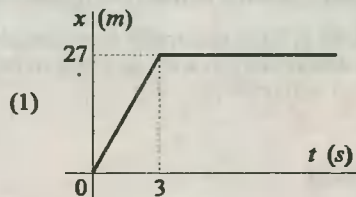


Fig. Prob. 6.25

6.28. Un auto parte del reposo en un punto A, y se desplaza 1 800 m a lo largo de una pista, en la cual se detiene en un punto B. ¿Cuál será el tiempo mínimo que emplea el auto en ir desde A hasta B, si la aceleración que lo afecta está dada por el gráfico mostrado?.

6.29. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración en función del tiempo, según se muestra en la figura. Si para $t = 0$ s, $v_0 = 4$ m/s. Calcular la velocidad de la partícula cuando $t = 4$ s.

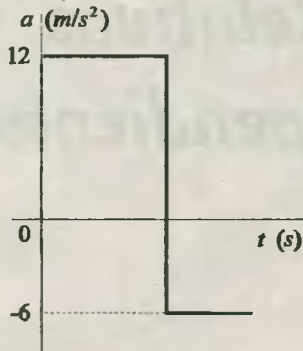


Fig. Prob. 6.28

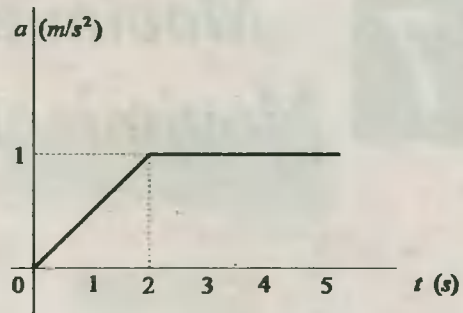


Fig. Prob. 6.29

6.30. Se tiene el gráfico *aceleración - vs - tiempo* de un móvil que se desplaza sobre una recta. Si para $t = 0$ s la velocidad es v , y para $t = 4$ s la velocidad es $3v$, determinar su velocidad para $t = 6$ s.

6.31. Se tiene las gráficas *a - vs - t* y *v - vs - t* de un móvil que en el instante $t = 0$ tiene una posición $x_0 = -39$ m. ¿Cuál será su posición en el instante $t = 7$ s?.

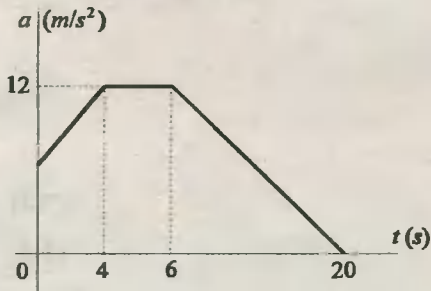


Fig. Prob. 6.30

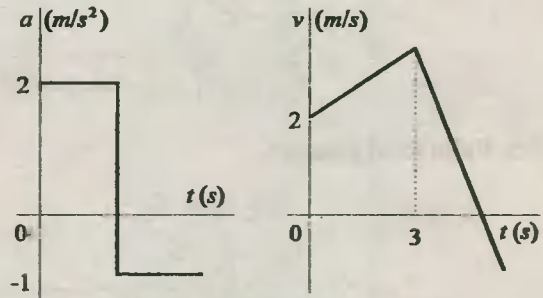


Fig. Prob. 6.31

6.32. Una partícula se mueve en línea recta. Cuando $t = 0$ s su velocidad es 1 m/s en dirección del eje (+ X), y tiene una aceleración variable, según se muestra en la figura. Determinar el espacio recorrido hasta el instante $t = 4$ s.

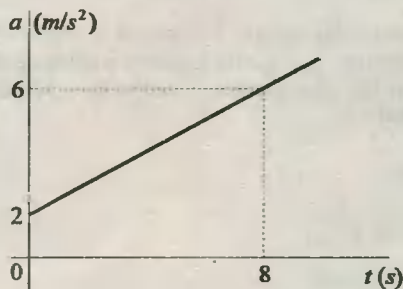


Fig. Prob. 6.30

7

Movimientos Relativos

Movimientos Dependientes

7.1. Principio de relatividad de Galileo

"No existe un sistema de referencia privilegiado ni forma alguna de determinar una velocidad absoluta".

7.2. Posición relativa

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{2/1} \quad (7.1)$$

$$\vec{r}_{2/1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (7.2)$$

$$|\vec{r}_{2/1}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 \cdot r_2 \cdot \cos \theta} \quad (7.3)$$

7.3. Velocidad relativa

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{2/1} \quad (7.4)$$

$$\vec{v}_{2/1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad (7.5)$$

$$|\vec{v}_{2/1}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 \cdot v_2 \cdot \cos \theta} \quad (7.6)$$

$$v_{2/1} = v_1 + v_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \uparrow \downarrow \vec{v}_2 \quad (7.7)$$

$$v_{2/1} = v_1 - v_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \uparrow \uparrow \vec{v}_2 \quad (7.8)$$

siendo $v_{2/1}$ la velocidad relativa del cuerpo 2 respecto al cuerpo 1; este último es el lugar donde se ubica el observador. Asimismo, v_1 y v_2 son las velocidades de dichos cuerpos respecto a Tierra, y θ es el ángulo que forman sus direcciones. Cuando la velocidad se mide respecto a Tierra se denomina **velocidad absoluta**.

7.4. Aceleración relativa

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{2/1} \quad (7.9)$$

$$\vec{a}_{2/1} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \quad (7.10)$$

$$|\bar{a}_{2/1}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos \theta} \quad (7.11)$$

$$a_{2/1} = a_1 + a_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1 \uparrow \downarrow \bar{a}_2 \quad (7.12)$$

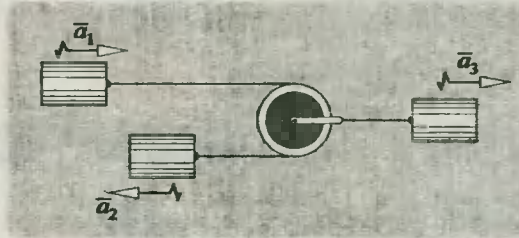
$$a_{2/1} = a_1 - a_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1 \uparrow \uparrow \bar{a}_2 \quad (7.13)$$

7.5. Poleas móviles

$$\bar{d}_3 = 1/2 (\bar{d}_1 + \bar{d}_2) \quad (7.14)$$

$$\bar{v}_3 = 1/2 (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \quad (7.15)$$

$$\bar{a}_3 = 1/2 (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \quad (7.16)$$



PROBLEMAS

Movimientos relativos

7.1. Se tiene dos móviles A y B (A detrás de B) que se desplazan uniformemente en la misma dirección y sentido con velocidades absolutas $v_A = 40 \text{ m/s}$ y $v_B = 15 \text{ m/s}$, los cuales se encuentran inicialmente separados 75 m . Se pide calcular:

- a) La velocidad relativa de A respecto a B.
- b) Al cabo de qué tiempo A pasará al lado de B.

7.2. Dos coches P y Q se desplazan uniformemente en la misma dirección (P detrás de Q) con velocidades $v_P = 10 \text{ m/s}$ y $v_Q = 30 \text{ m/s}$, separados inicialmente una distancia $d = 40 \text{ m}$. Se pide calcular:

- a) La velocidad de Q respecto a P.
- b) El tiempo que emplean para estar separados una distancia $3d$.

7.3. Dos coches 1 y 2 que se desplazan uniformemente en la misma recta y en direcciones opuestas tienen velocidades constantes $v_1 = 5 \text{ m/s}$ y $v_2 = 3 \text{ m/s}$. Estos móviles están inicialmente separados por una distancia de 16 m . Se pide calcular:

- a) La velocidad de 2 respecto a 1.
- b) Al cabo de qué tiempo se cruzan.
- c) Después de cuánto tiempo estarán separados por una distancia $d_2 = 40 \text{ m}$.

7.4. En la figura se dan tres móviles con velocidades relativas y direcciones conocidas: $v_{A/T} = 6 \text{ m/s}$, $v_{B/A} = 3 \text{ m/s}$, y $v_{P/B} = 2 \text{ m/s}$. Se pide calcular:

- a) La velocidad del hombre P respecto al piso.
- b) La velocidad del hombre P respecto al coche A.

7.5. Un auto viaja a razón de 90 km/h , y lo hace paralelamente a un tren de pasajeros que viaja en el mismo sentido a razón de 72 km/h . ¿Cuánto tiempo empleará el auto en adelantar al tren?

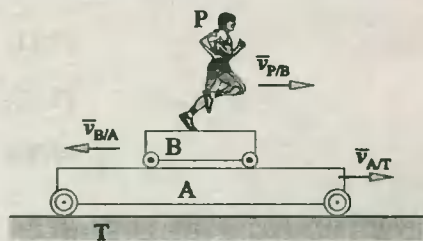


Fig. Prob. 7.4



Fig. Prob. 7.5

7.6. Dos trenes corren en direcciones opuestas con velocidades $v_1 = 36 \text{ km/h}$ y $v_2 = 54 \text{ km/h}$. Un pasajero del primer tren nota que el tren 2 demora 6 s en pasar por su costado. Se pide calcular:

- La longitud del segundo tren.
- ¿Cuánto tiempo demoran los trenes en cruzarse?

7.7. Un automóvil que viaja por una carretera con neblina con una velocidad de 30 m/s avista repentinamente un camión a 52 m delante de él, viajando en la misma dirección y a la velocidad constante de 10 m/s . El conductor del auto pierde $0,6 \text{ s}$ mientras reacciona y aplica los frenos. ¿Cuál debe ser la desaceleración mínima que debe aplicar el auto para evitar el choque?

7.8. Un ómnibus viaja por una carretera horizontal con una velocidad de 72 km/h . Las gotas de lluvia caen uniformemente a razón de 15 m/s . Se pide calcular:

- La velocidad relativa de las gotas respecto a un pasajero del ómnibus.
- ¿Qué ángulo forman con la vertical los trazos de las gotas de lluvia con las ventanillas laterales del ómnibus.

7.9. Un pasajero de un automóvil observa que los trazos de las gotas de lluvia forman 37° con la vertical en un momento dado, y luego de 10 s éstos forman 53° con la misma vertical. ¿Cuál fue la aceleración media que experimentó el automóvil, si se sabe además que las gotas caen uniformemente a razón de 24 m/s respecto a Tierra y en forma vertical?

7.10. Un tren de 196 m de longitud viaja a una rapidez constante de 30 m/s , y cruza una carretera según se indica en la figura. Si el automóvil A que viaja a 25 m/s se encuentra a 35 m del cruce en el instante que el frente del tren alcanza el cruce, calcular:

- La velocidad relativa del tren respecto al automóvil.
- La distancia entre el automóvil y el extremo del último vagón del tren en ese instante.



Fig. Prob. 7.6

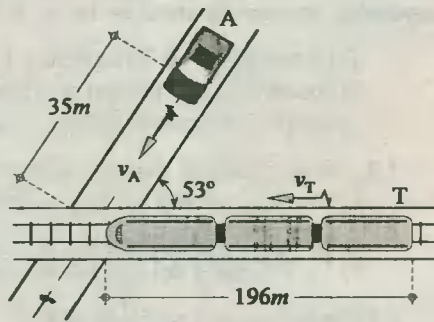


Fig. Prob. 7.10

7.11. Dos móviles 1 y 2 salen simultáneamente de un punto O con velocidades constantes $v_1 = 14 \text{ cm/s}$ y $v_2 = 50 \text{ cm/s}$, cuyas direcciones forman un ángulo de 74° . Calcular:

- La velocidad relativa de 1 respecto a 2.
- El tiempo después del cual la distancia relativa entre ambos sea 960 cm .

7.12. Dos argollas se desplazan por dos carriles que se cortan en ángulo recto con velocidades constantes $v_A = 12 \text{ m/s}$ y $v_B = 9 \text{ cm/s}$. A partir de las posiciones mostradas se pide calcular:

- La distancia mínima a la que se encontrarán los cuerpos durante sus movimientos.
- El tiempo necesario para que se presente la distancia mínima.

7.13. Un barco en el Ecuador navega hacia el Este con una velocidad $v_0 = 7 \text{ m/s}$. Desde el Sureste hacia el Ecuador sopla un viento con una velocidad $v = 15 \text{ m/s}$, formando un ángulo $\phi = 53^\circ$ con el Ecuador. Hallar la velocidad v' del viento respecto al barco y el ángulo ϕ' entre el Ecuador y la dirección del viento en el sistema de referencia ligado con el barco.

7.14. Un automóvil parte del reposo con una aceleración $a_1 = 6 \text{ m/s}^2$ en el preciso instante que pasa por su costado y en el mismo sentido un ómnibus que acelera a razón de $a_2 = 7 \text{ m/s}^2$. Determinar la aceleración que tiene el automóvil para un pasajero que va en el ómnibus.

7.15. Un automóvil sube por una pendiente inclinada 30° con la horizontal con una aceleración constante de 6 m/s^2 . Si el conductor ve caer una gota de lluvia delante de él, ¿Cuál es la aceleración relativa de la gota para el conductor?. $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Movimientos dependientes

7.16. El bloque 2 de la figura se mueve con una aceleración $a_2 = 6 \text{ m/s}^2$. Calcular la aceleración que poseerá el bloque 1, si en todo momento las cuerdas que los unen se mantienen tensas, y además los dos inician sus movimientos simultáneamente.

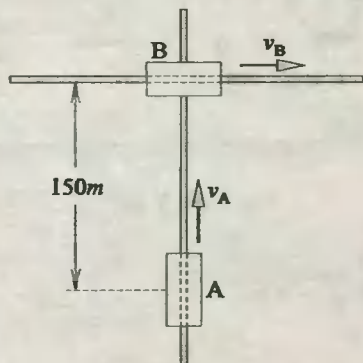


Fig. Prob. 7.12

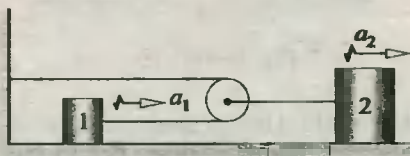


Fig. Prob. 7.16

7.17. Dado el conjunto de bloques mostrado, se pide determinar la aceleración del bloque B, si el bloque A desciende con una aceleración $a_A = 8 \text{ m/s}^2$.

7.18. Tres bloques 1, 2 y 3 se mueven en un plano horizontal con aceleraciones conocidas $a_1 = 5 \text{ m/s}^2$ y $a_2 = 3 \text{ m/s}^2$ respecto a un sistema de referencia fijo a Tierra. ¿Cuál deberá ser la aceleración del bloque 3 para que las cuerdas que los relacionan se mantengan tensas?.

7.19. Una cuña 1 se encuentra entre dos muros horizontales y se apoya sobre la cara inclinada de una cuña 2, la que se desliza horizontalmente con una aceleración $a_2 = 8 \text{ m/s}^2$. Calcular la aceleración con la cual descende la cuña 1 ($\theta = 37^\circ$).

Nota: Los movimientos se realizan en el plano horizontal.

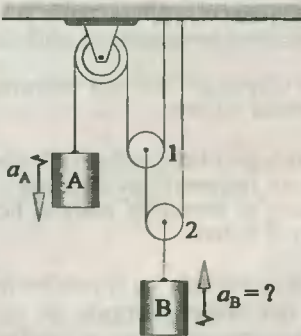


Fig. Prob. 7.17

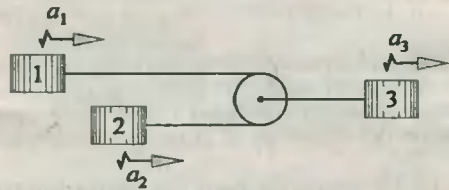


Fig. Prob. 7.18

7.20. Una cuña 2 se desliza con una velocidad $v_2 = 6 \text{ m/s}$. ¿Cuál será la velocidad con la cual el bloque 1 se deslizará sobre la cara inclinada de la cuña 2 desde un sistema de referencia ubicado en el piso? $\alpha = 60^\circ$.

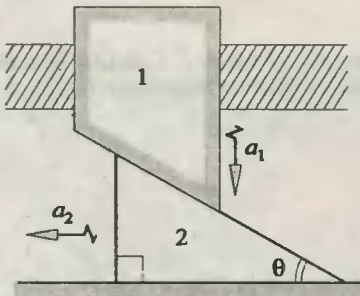


Fig. Prob. 7.19

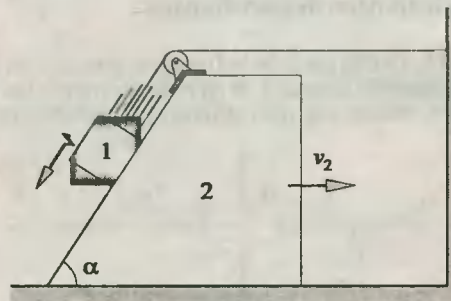
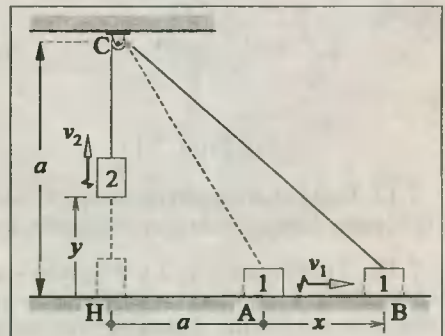


Fig. Prob. 7.20

7.21. Cuando el bloque 2 se encuentra sobre el suelo, el otro extremo está sujetando al bloque 1 en A. Si éste se mueve horizontalmente con una velocidad constante v_1 , determinar la velocidad del bloque 2 para todo instante t .





Movimientos Compuestos - Movimiento Parabólico

8.1. Movimientos compuestos

$$\bar{d}_T = \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \dots \quad (8.1)$$

$$\bar{v}_T = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots \quad (8.2)$$

$$\bar{a}_T = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots \quad (8.3)$$

donde d_i , v_i , a_i son respectivamente el *desplazamiento*, *velocidad* y *aceleración* en un movimiento componente definido.

8.2. Principio de independencia de los movimientos (Galileo)

“Los movimientos componentes en un movimiento compuesto se desarrollan independientemente uno de otro, es decir, el desarrollo de un movimiento no se ve alterado por la presencia de otro”.

8.3. Movimiento parabólico

Cuando un cuerpo se mueve en un campo gravitatorio, este movimiento es una caída libre, siendo su trayectoria una línea curva llamada **parábola**.

8.3.a. Caso 1 (Figura 8.1)

$$\text{Tiempo de vuelo: } T = \frac{2v_o \cdot \text{sen } \theta}{g} \quad (8.4)$$

$$\text{Altura máxima: } H = \frac{v_o^2 \cdot \text{sen}^2 \theta}{2g} \quad (8.5)$$

$$\text{Alcance horizontal: } L = \frac{2v_o^2 \cdot \text{sen } \theta \cdot \text{cos } \theta}{g} = \frac{v_o^2 \cdot \text{sen } 2\theta}{g} \quad (8.6)$$

$$\text{Relación entre } H \text{ y } T: H = 1/8 g T^2 \quad (8.7)$$

$$\text{Relación entre } H \text{ y } L: \text{tg } \theta = 4H/L \quad (8.8)$$

8.3.b. Caso 2. (Figura 8.2)

$$\text{Movimiento horizontal: } v_x = v_o \text{ cos } \theta = \text{constante} \quad (8.9)$$

$$x = v_x \cdot t \quad (8.10)$$

$$\text{Movimiento vertical : } v_{oy} = v_o \cdot \text{sen}\theta \quad (8.11)$$

$$\bar{v}_y = \bar{v}_{oy} + \bar{g}t \quad (8.12)$$

$$y = v_{oy} \cdot t - 1/2 g t^2 \quad (8.13)$$

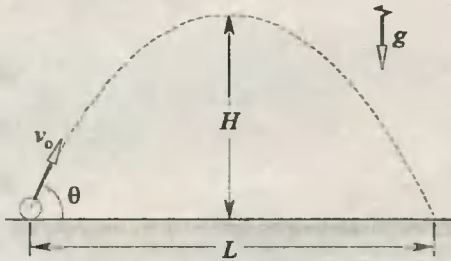


Fig. 8.1

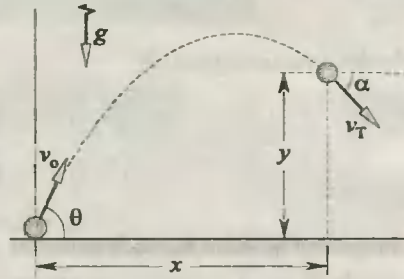


Fig. 8.2

$$\text{Ecuación de la trayectoria : } y = x \text{ tg } \theta - \frac{g}{2v_o^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (8.14)$$

$$y = x (1 - x/L) \text{ tg } \theta \quad (8.15)$$

$$\text{Velocidad total : } v_T = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (8.16)$$

Nota: En las ecuaciones presentadas se considera que el movimiento se inicia en el origen de coordenadas.

PROBLEMAS

Movimientos compuestos

8.1. Un bote anclado en el medio de un río inicia su movimiento río abajo, y luego de cierto tiempo da la vuelta y se mueve río arriba. Si la velocidad del bote respecto al río es 5 m/s , y de aquel respecto al fondo es 3 m/s . ¿Cuáles son las velocidades del bote río abajo y río arriba?

8.2. Una lancha que navegaba río abajo dejó atrás una balsa en un punto A. Transcurrido 1 h la lancha dió la vuelta y volvió a encontrar a la balsa 6 km más abajo del punto A. Calcular la velocidad de la corriente, si a lo largo del trayecto el motor trabajó por igual.

8.3. Un bote sale del punto A de la orilla de un río que tiene 144 m de ancho y cuyas aguas tienen una velocidad de 5 m/s en una dirección AB perpendicular a las orillas. Si la velocidad del bote respecto a las aguas es 12 m/s , calcular:

- En cuánto tiempo cruza el río.
- A qué distancia del punto B logra desembarcar.

8.4. Un bote navega a una velocidad de 6 m/s respecto a las aguas de un río, que a su vez se desplaza a razón de 3 m/s . ¿Qué ángulo debe mantener el bote respecto a la corriente para que ésta lo arrastre lo menos posible?.

8.5. Una lancha de motor cruza un río perpendicularmente respecto a su corriente que acelera sus aguas a razón de 4 m/s^2 . Si la velocidad que le produce el motor a la lancha es 6 m/s , ¿Qué trayectoria describe el movimiento de aquella, y cuántos metros fué arrastrada por la corriente hasta que llegó a la otra orilla?. El ancho del río es 60 m .

8.6. Una lancha sale perpendicularmente de un punto A de la orilla de un río cuyo ancho es 90 m , y parte del reposo con una aceleración de 5 m/s^2 . Sabiendo que llega a la otra orilla en un punto B distante 144 m de un punto C, el mismo que dista 90 m del punto A, calcular la aceleración de la corriente de agua.

Movimiento parabólico

Nota: Para todos los problemas considerar $g = 10\text{ m/s}^2$, salvo que se diga lo contrario.

8.7. Desde el borde de la azotea de un edificio se lanza horizontalmente una piedra a razón de 8 m/s . Si la azotea está a 80 m del piso, calcular a qué distancia del pie del edificio logra caer la piedra.

8.8. Un avión bombardero avanza horizontalmente a una altura de 500 m y con una velocidad de 720 km/h . ¿A qué distancia horizontal de un blanco que tiene adelante deberá soltar una bomba para eliminarlo por completo?.

8.9. Desde lo alto de una torre de 100 m de altura se lanza una piedra horizontalmente con una velocidad de 30 m/s . Cuando han transcurrido 4 s , se pide determinar:

- La distancia horizontal avanzada.
- La altura a la que se encuentra respecto al piso.
- La velocidad total del proyectil.

8.10. Un hombre que viaja horizontalmente sobre una plataforma lanza hacia arriba un llavero con la velocidad de 10 m/s . ¿A qué velocidad deberá viajar la plataforma para que el llavero logre caer sobre las manos del hombre después que la plataforma haya avanzado 40 m ?

8.11. Un proyectil es lanzado desde el piso (punto $(0; 0)\text{ m}$), y alcanza su altura máxima en el punto $(30; 20)\text{ m}$. Calcular:

- El ángulo de lanzamiento θ .
- La velocidad de lanzamiento v_0 .

8.12. Un avión está volando horizontalmente a una altura de 490 m con una velocidad de 98 m/s . En el instante que el avión está directamente sobre un cañón antiaéreo, éste disparó un proyectil contra el avión. Calcular el ángulo de disparo, sabiendo que la velocidad inicial del proyectil es mínima para dar en el blanco ($g = 9,8\text{ m/s}^2$).

8.13. Un mortero de trinchera dispara un proyectil con un ángulo de 53° con la horizontal con una velocidad de 50 m/s . Un tanque está avanzando directamente hacia el mortero sobre un piso a nivel con una rapidez de 5 m/s . ¿Cuál debe ser la distancia del mortero al tanque en el instante que aquel dispara de modo que logre hacer blanco?.

8.14. Un jugador polaco arremete con todo su coraje contra la valla peruana. El loco Quiroga, arquero de la selección nacional, se encuentra en el punto A (saque de fondo), y se sabe que puede correr como máximo a razón de 10 m/s en sus momentos de desesperación. Sabiendo que el delantero logra impulsar el balón mediante una "chalaca" a razón de 10 m/s , ¿Qué podríamos afirmar?.

- a) Será gol.
- b) Pasa por encima del parante.
- c) Quiroga coge la bola con suma facilidad.
- d) La pelota choca en el vértice.
- e) Quiroga coge la bola con las justas.

8.15. Desde el pie de una loma se dispara una pelota con una velocidad $v_0 = 100 \text{ m/s}$, según se indica. ¿A qué distancia del pie de la loma impacta la pelota sobre ella?

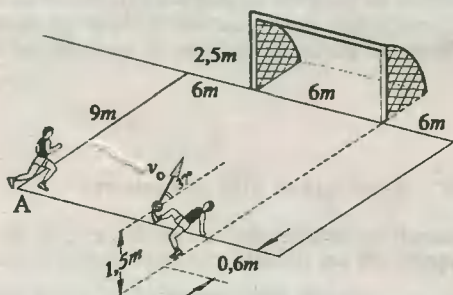


Fig. Prob. 8.14

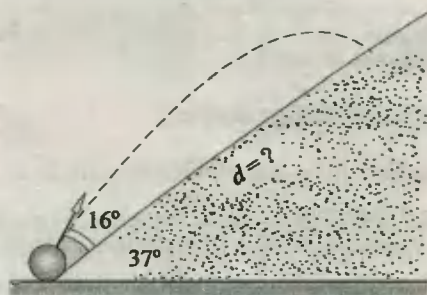


Fig. Prob. 8.15

8.16. Dos proyectiles se lanzan simultáneamente desde A y B con velocidades v_1 y v_2 respectivamente, y con ángulos de disparos α y β ($\alpha > \beta$). ¿A qué distancia horizontal x se producirá el impacto entre los proyectiles?. Dar la respuesta en términos de h , α y β .

8.17. En el gráfico mostrado dos móviles son lanzados simultáneamente, y chocan en el punto M. Si el que sale de A lo hace con una velocidad de 50 m/s y un ángulo de 37° , ¿Cuál debe ser el ángulo y velocidad de lanzamiento del móvil que sale de B?.

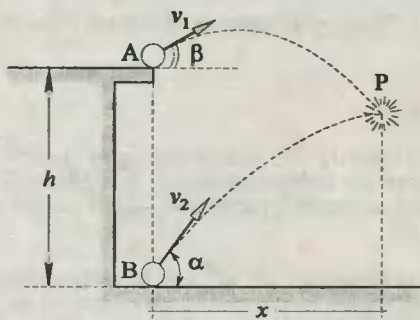


Fig. Prob. 8.16

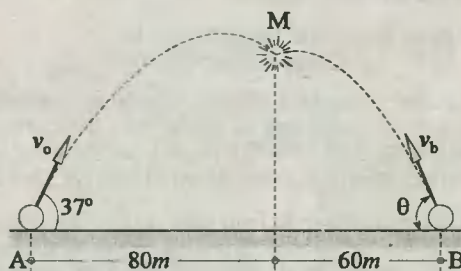


Fig. Prob. 8.17

8.18. Un muchacho de $1,5 \text{ m}$ de estatura y que está parado a una distancia de 15 m frente a una cerca de $5,25 \text{ m}$ de altura lanza una piedra bajo un ángulo de 45° con la horizontal. ¿Con qué velocidad mínima debe lanzar la piedra para que ésta pase por encima de la cerca?

8.19. Se lanza una pequeña piedra con una velocidad $v_0 = 10 \text{ m/s}$ en la forma mostrada en la figura. Si la piedra se introduce en un tubo que se orienta 45° respecto a la vertical, de modo que el movimiento de la piedra coincida con el eje del tubo, se pide calcular los valores de x e y en el instante que la piedra penetra en el tubo.

8.20. Un electrón ingresa paralelamente a las láminas de un condensador que contiene un campo eléctrico que lo acelera a razón de $2,5 \cdot 10^{10} \text{ m/s}^2$. Calcular con qué velocidad debe ingresar el electrón para que al salir del condensador lo haga por el borde, y formando 37° con las láminas.

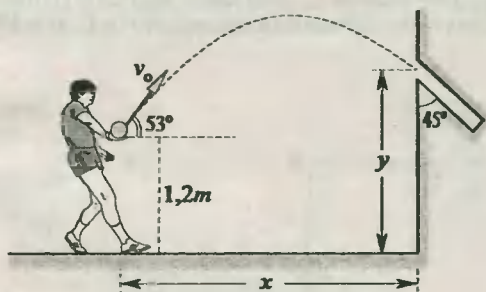


Fig. Prob. 8.19

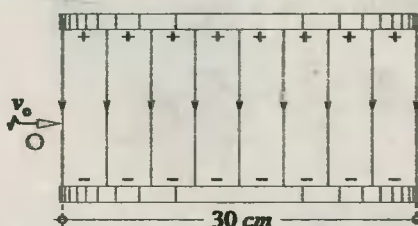


Fig. Prob. 8.20

8.21. Un motociclista acrobático que se desplaza a razón de 30 m/s debe efectuar un movimiento parabólico de modo que logre ingresar en un camión perpendicularmente a la dirección de movimiento de aquel. Si la velocidad del camión es v , y sale de A simultáneamente como el motociclista lo hace del precipicio, calcular:

- La altura H del precipicio.
- El valor de v .

8.22. Un avión bombardero que vuela horizontalmente a una altura de $1\,000 \text{ m}$, y con una velocidad de 250 m/s suelta una bomba. En ese mismo instante un cañón que se encuentra en la cima de una montaña a $1\,000 \text{ m}$ de altura dispara horizontalmente con la intención de darle a la bomba y salvar la ciudad. La dirección de las velocidades de ambos proyectiles antes de chocar son perpendiculares. Si el choque tiene lugar a una altura de 500 m , calcular la velocidad del proyectil disparado por el cañón.

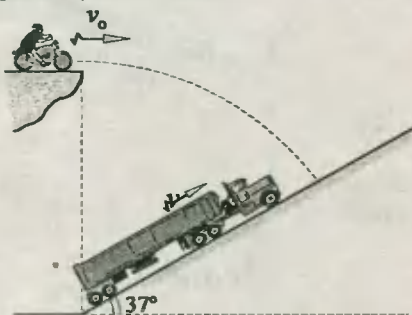


Fig. Prob. 8.21

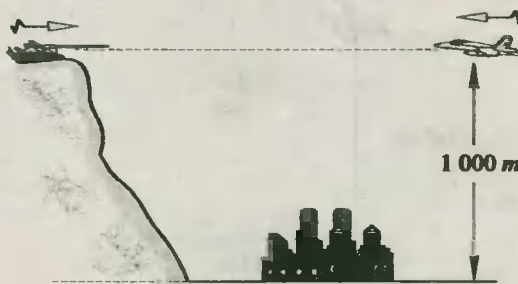


Fig. Prob. 8.22

8.23. Al encontrarse a una distancia d_1 de un arco, un futbolista dispara una pelota con velocidad v y ángulo de disparo θ , la que choca en el parante horizontal que está a una altura h . Al rebotar y

llegar al suelo el futbolista se lanza de palomita y vuelve a impulsar la pelota con la misma rapidez v y ángulo θ , tal que vuelve a impactar en el parante horizontal del arco por segunda vez. Calcular la medida del ángulo θ , si la pelota cayó a la distancia d_2 delante del arco al rebotar. ($1/h = 1/d_1 + 1/d_2$).

8.24. Un móvil es disparado desde el origen de coordenadas X - Y con una velocidad cuya dirección forma un ángulo θ con el eje X, y de un valor tal que le permite pasar por los vértices superiores de un hexágono regular de lado $a = \sqrt{7} \text{ m}$. Calcular la medida del alcance horizontal del movimiento parabólico.

8.25. En la figura mostrada el proyectil lanzado debe caer en la pista horizontal CD. Hallar el mínimo valor de x para los siguientes datos, siendo ésta la distancia alcanzada a partir de C. $\alpha = 37^\circ$; $AB = 240 \text{ m}$; $BC = 135 \text{ m}$.

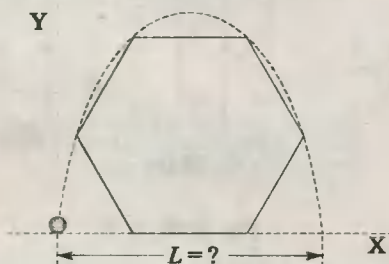


Fig. Prob. 8.24

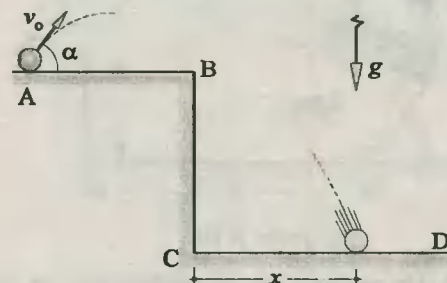


Fig. Prob. 8.25

8.26. En el gráfico mostrado un balón es lanzado desde A con una velocidad v_0 y una inclinación α respecto a la horizontal. Si se sabe que llega a B al cabo de 6 s, ¿Cuáles son los valores correspondientes de v_0 y α ?

8.27. De dos cañerías A y B sale agua, según se muestra en la figura. Si los chorros de agua tardan el mismo tiempo en llegar al punto C = (2; y) m, calcular h. $v_A = 1 \text{ m/s}$; $v_B = 5\sqrt{2} \text{ m/s}$.

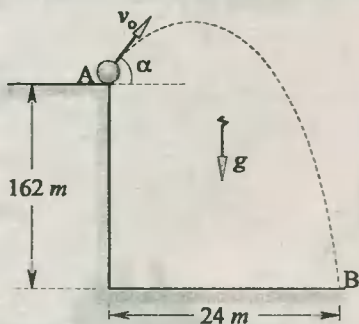


Fig. Prob. 8.26

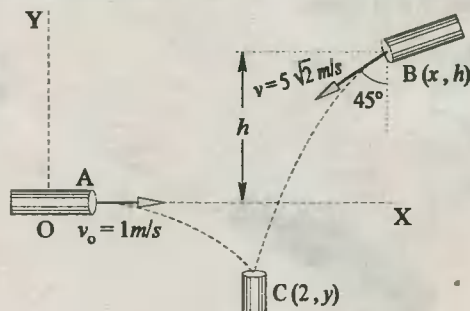


Fig. Prob. 8.27

8.28. Sabiendo que la velocidad con la cual la pelota rompe el vidrio de la ventana que se encuentra a h metros debajo de B, según como se muestra, es 5 m/s , calcular:

- a) Desde qué distancia d del borde A debió lanzarse ésta para lograr su propósito.
 b) El valor de h .

8.29. Determinar la velocidad con la cual debe lanzarse un objeto desde M para que al caer en P llegue simultáneamente con otro objeto lanzado horizontalmente 10 s después desde Q con una velocidad de 48 m/s.

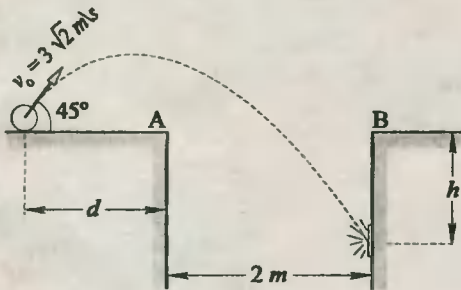


Fig. Prob. 8.28

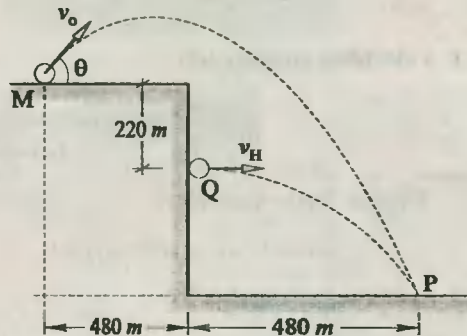


Fig. Prob. 8.29

8.30. Se suelta una partícula desde una altura de 20 m sobre un campo de aceleración uniforme y horizontal cuyo módulo es $a = 2g$. Calcular la ubicación de la partícula al cabo de 3 s de iniciado el movimiento.

8.31. Una pequeña esfera es lanzada como se muestra en la figura a una velocidad $v_0 = 40$ m/s. Calcular qué distancia horizontal e logra alcanzar la esfera

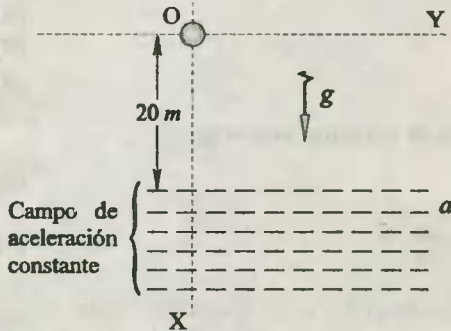


Fig. Prob. 8.30

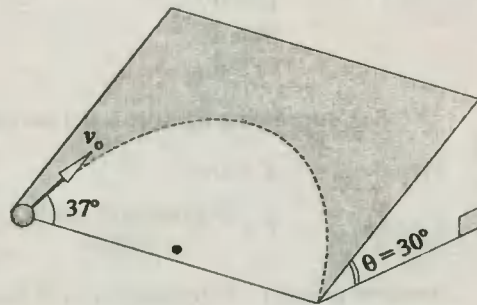


Fig. Prob. 8.31

9

Movimiento de Rotación

9.1. Velocidad angular (ω)

$$\omega = \frac{\bar{\theta}}{t} \left(\frac{\text{desplazamiento angular}}{\text{tiempo}} \right) \quad \dots (9.1)$$

Unidad (ω) = *rad/s* (S.I)

(ω) = *rev/s*, *rev/min* (*rpm*)

9.2. Aceleración angular (α)

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\omega}_f - \bar{\omega}_o}{t} \quad \dots (9.2)$$

Unidad (α) = *rad/s²* (S.I)

(α) = *rev/s²*, *rev/min²*

9.3. Movimiento de rotación uniforme

Se caracteriza porque en él la velocidad angular se mantiene constante.

9.3.a. Leyes del movimiento de rotación uniforme

$$\omega = \theta/t \quad (9.3)$$

$$\theta = \omega t \quad (9.4)$$

$$t = \theta/\omega \quad (9.5)$$

9.3.b. Conceptos adicionales del movimiento de rotación uniforme

Periodo: $T = 2\pi/\omega \quad (9.6)$

Frecuencia: $f = \frac{\text{Número de vueltas}}{\text{tiempo}} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (9.7)$

donde el periodo y la frecuencia en el SI se expresan en *s* y *rev/s* respectivamente.

9.4. Movimiento de rotación uniformemente variado

Se caracteriza porque el cuerpo presenta una aceleración angular constante.

9.4.a. Ecuaciones del movimiento de rotación uniformemente variado

$$\omega_f = \omega_o + \alpha t \quad (9.8)$$

$$\omega_f^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta \quad (9.9)$$

$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (9.10)$$

$$\theta = \frac{1}{2} (\omega_o + \omega_f) t \quad (9.11)$$

$$\theta_n = \omega_o + \frac{1}{2} \alpha(2n - 1) \quad (9.12)$$

en los cuales α tendrá signo positivo (+) si el movimiento es acelerado, y signo negativo (-) si el movimiento es desacelerado. Además, θ_n es el desplazamiento angular en el n -ésimo segundo.

9.4.b. Los números de Galileo

Todo cuerpo rígido que parte del reposo con aceleración angular constante experimenta, durante intervalos de tiempo iguales, desplazamientos angulares (θ) proporcionales a los números 1, 3, 5, 7,, $(2n - 1)$.

PROBLEMAS

Movimiento de rotación uniforme

9.1. Dos partículas parten simultáneamente de los extremos de un diámetro AB y en los sentidos indicados en la figura. Si giran con periodos $T_A = 20s$ y $T_B = 30s$ respectivamente, calcular al cabo de qué tiempo logran cruzarse por segunda vez.

9.2. En la figura se muestra dos barras A y B que giran en el mismo sentido. Si sus frecuencias de rotación son $f_A = 30 \text{ rpm}$ y $f_B = 25 \text{ rpm}$, calcular al cabo de qué tiempo las barras formarán un ángulo recto por primera vez.

9.3. Dos barras A y B parten simultáneamente desde las posiciones y sentidos indicados. Si sus periodos de rotación son $T_A = 20s$ y $T_B = 30s$, calcular después de cuántos segundos las barras se cruzan por primera vez.

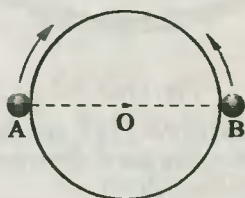


Fig. Prob. 9.1

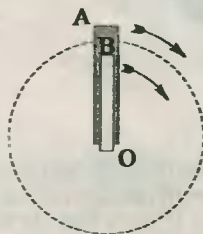


Fig. Prob. 9.2

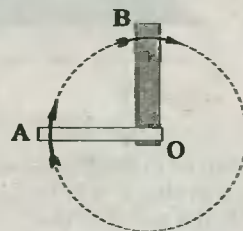


Fig. Prob. 9.3

9.4. Se dispara una bala con una velocidad $v = 200 \text{ m/s}$ contra un cascarón esférico de papel que gira con movimiento uniforme respecto a un eje vertical. Sabiendo que el radio del cascarón es 10 m , calcular con qué velocidad angular mínima deberá girar el cascarón para que el proyectil haga un solo agujero. La dirección del movimiento de la bala pasa por el centro de la esfera.

9.5. Se sueltan dos pelotitas desde A y B simultáneamente. Si la plataforma horizontal gira con un periodo de $12s$, y que la primera bolita marca el punto P en la plataforma, y la segunda marca el punto Q, calcular la medida del ángulo POQ. $g = 10 \text{ m/s}^2$.

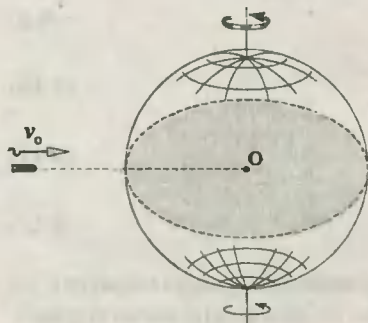


Fig. Prob. 9.4

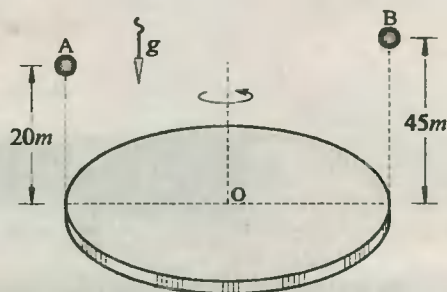


Fig. Prob. 9.5

9.6. Un cilindro de tecnopor gira con movimiento de rotación uniforme cuya frecuencia es $f = 2 \text{ rev/s}$. Una bala es disparada paralelamente al eje de rotación, ingresando con una velocidad de 350 m/s , y desacelerando uniformemente, tal que al salir su velocidad lineal paralela al eje es 250 m/s . ¿Qué ángulo habrá girado el cilindro mientras la bala lo atravesó?

9.7. El disco mostrado en la figura cuyo radio es $R = 1,2 \text{ m}$ gira uniformemente en un plano horizontal y alrededor de un eje que pasa por su centro. En el instante mostrado, una esferilla es lanzada desde un punto cercano a la periferia del disco con un ángulo de lanzamiento $\theta = 37^\circ$. Sabiendo que llega a un punto diametralmente opuesto en el mismo instante que por dicho lugar pasa el punto B marcado en la plataforma, calcular la velocidad angular del disco en rpm . $g = 10 \text{ m/s}^2$.

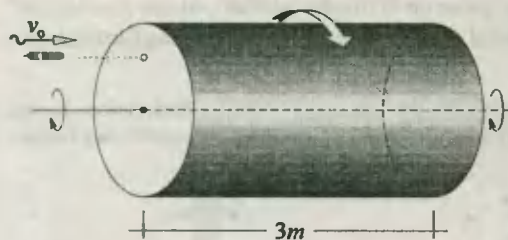


Fig. Prob. 9.6

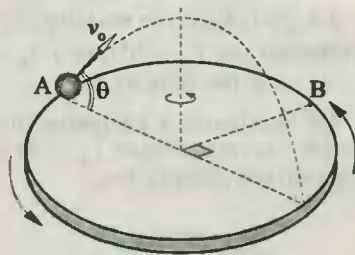


Fig. Prob. 9.7

9.8. Sobre un punto P marcado en la periferia de un disco cuyo radio es $R = 15\sqrt{2} \text{ cm}$, que gira a 45 rpm , a una altura de $4,9 \text{ m}$ se deja caer una piedra en el preciso instante en que el disco empieza a girar. Calcular a qué distancia del punto P logra caer dicha piedra sobre el disco.

Movimiento de rotación uniformemente variado

9.9. Calcular la velocidad angular que tiene un disco, sabiendo que éste es capaz de triplicar la velocidad que tiene luego de dar 600 vueltas en 20 s .

9.10. Un disco parte del reposo con movimiento de rotación uniformemente variado, y durante los dos primeros segundos da 8 vueltas . ¿Cuántas vueltas da durante el primer segundo de su movimiento?

9.11. Un disco posee una velocidad de 40 *rev/s*, e inicia un movimiento uniformemente retardado con aceleración $\alpha = 2 \text{ rev/s}^2$. ¿Cuántas vueltas dá durante el cuarto segundo de su movimiento?

9.12. Un cuerpo parte de un punto A de una circunferencia, y acelera a razón de 2 *rad/s*². En cierto instante pasa por un punto B, y 1 s después pasa por otro punto C. Si $BC = 90^\circ$, calcular la velocidad angular en C y el tiempo transcurrido desde A hasta B.

9.13. Un cuerpo parte del reposo con movimiento de rotación uniformemente variado, y tarda 2 *min* en experimentar un desplazamiento angular de 24 vueltas entre dos puntos de su trayectoria circular. Cuando pasa por el segundo punto lo hace a razón de 18 *rpm*. Calcular el número de revoluciones entre el primer punto y el punto de partida.

9.14. Un disco parte del reposo con una aceleración angular constante α . Si la segunda vuelta la dió en 1 s, ¿En cuántos segundos dió la primera vuelta?

9.15. Un ventilador alcanza su velocidad máxima de trabajo de 900 *RPM* en 40 s. Si al "encenderlo" inicia su movimiento con aceleración constante, calcular cuántas revoluciones completa en el primer minuto de su movimiento.

9.16. Un punto M se mueve por una circunferencia con movimiento uniformemente variado de acuerdo a la siguiente ley: $\theta = 7 + 3t^2 - 5t$, donde θ está en radianes, y t en segundos. Calcular su velocidad angular al cabo de 6 s de iniciado su movimiento, y el desplazamiento angular en el sexto segundo del mismo.

9.17. Un móvil inicia un movimiento de rotación uniformemente variado, y se observa que después de t segundos gira un ángulo γ , y seguidamente un ángulo β en 5 s. Si se sabe que $\beta/\gamma = 7/9$, y además su aceleración es $4\pi \text{ rad/s}^2$, calcular el número de vueltas que se realizaron al recorrer β .

9.18. Una rueda inicia su movimiento de rotación pura con una aceleración angular constante de 2 *rpm/min*. Luego de 12 *min* de iniciado el movimiento desacelera a razón de 4 *rpm/min*. Calcular el número de vueltas que completó hasta detenerse.

9.19. Un disco tiene un movimiento de rotación variado, y se mide su velocidad angular respecto a la recta de referencia XX' , la cual viene dada por el gráfico ω -vs- t (ver figura). ¿Cuántas vueltas completas dió el disco entre $t_0 = 12 \text{ s}$ y $t = 30 \text{ s}$?

9.20. Según el gráfico de la figura, una polea parte del reposo y desarrolla un movimiento rotacional uniformemente variado. Se sabe que la polea tenía una velocidad de 18 *rev/s* cuando $t = 2 \text{ s}$. ¿Cuál será su velocidad cuando $t = 10 \text{ s}$?

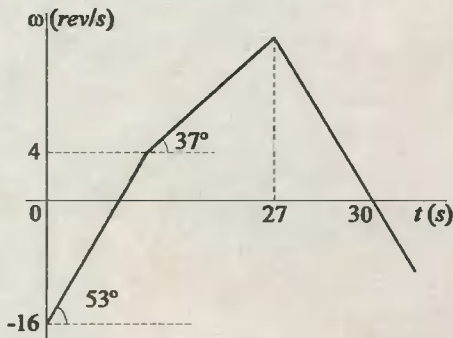


Fig. Prob. 9.19

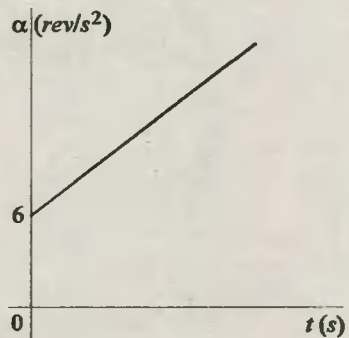
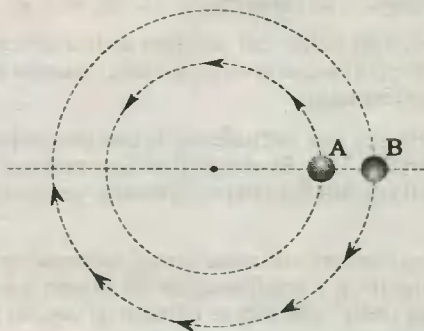


Fig. Prob. 9.20

9.21. Dos móviles parten simultáneamente desde el mismo punto y en el mismo sentido recorriendo una trayectoria circular. El primero está animado de movimiento uniforme de velocidad angular 2 rad/s , y el segundo hace su recorrido con aceleración angular constante de 1 rad/s^2 y velocidad angular inicial de 2 rad/s . ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse de nuevo?

9.22. En la figura se muestran dos partículas A y B que parten a la vez desde un mismo diámetro. Si A posee una velocidad constante de $\sqrt{\pi} \text{ rad/s}$, y B parte del reposo con movimiento uniformemente acelerado y en sentido contrario, calcular cuál debe ser la aceleración angular de B para que se cruce con A en el extremo opuesto del diámetro.

Nota: Considerar el primer cruce.



10

Movimiento Curvilíneo

Movimiento de Rotación y Traslación

10.1. Longitud de arco (s)

$$s = \theta r \quad (10.1)$$

siendo θ el ángulo central medido en radianes, y r el radio de giro.

10.2. Velocidad tangencial (v_t).

$$v_t = s/t \quad (10.2)$$

$$v_t = \omega r \quad (10.3)$$

siendo ω la velocidad angular en rad/s , r el radio de giro en m , y v_t se mide en m/s .

10.3. Aceleración tangencial (a_t)

$$a_t = \frac{v_{t_f} - v_{t_o}}{t} \quad (10.4)$$

$$a_t = \alpha r \quad (10.5)$$

siendo v_{t_f} y v_{t_o} la velocidad tangencial final e inicial respectivamente, y α la aceleración angular. En el S.I la aceleración a_t se mide en m/s^2 .

10.4. Aceleración centrípeta (a_c)

$$a_c = v_t^2/r \quad (10.6)$$

$$a_c = \omega^2 r \quad (10.7)$$

10.5. Aceleración total (a_T)

$$a_T = a_c + a_t \quad (10.8)$$

$$a_T = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} \quad (10.9)$$

siendo a_c y a_t dos vectores perpendiculares entre sí.

10.6. Movimiento circunferencial uniforme (MCU)

La partícula describe una circunferencia; su radio vector posición experimenta una velo-

cidad angular constante, y su velocidad tangencial mantiene un módulo constante.

10.6.a. Leyes del MCU

$$v_t = s/t \quad (10.10)$$

$$s = v_t \cdot t \quad (10.11)$$

$$t = s/v_t \quad (10.12)$$

10.6.b. Ley de Kepler para el MCU

"El radio vector posición barre áreas proporcionales a los intervalos de tiempo empleados".

10.7. Movimiento circunferencial uniformemente variado (MCUV)

La partícula describe una circunferencia, su radio vector posición experimenta una aceleración angular constante, y su aceleración tangencial mantiene un módulo constante

10.7.a. Ecuaciones del MCVU

$$v_{t_f} = v_{t_o} + a_t \cdot t \quad (10.13)$$

$$v_{t_f}^2 = v_{t_o}^2 + 2a_t \cdot s \quad (10.14)$$

$$s = v_{t_o} \cdot t + \frac{1}{2} a_t \cdot t^2 \quad (10.15)$$

$$s = \frac{1}{2} (v_{t_f} + v_{t_o}) t \quad (10.16)$$

$$s_n = v_{t_o} + \frac{1}{2} a_t \cdot (2n - 1) \quad (10.17)$$

10.7.b. Ley de las áreas para el MCVU

Si una partícula parte del reposo con MCVU, su radio vector posición barrerá, durante intervalos de tiempo iguales, áreas proporcionales a los números de Galileo: 1, 3, 5, 7, . . . , (2n - 1).

10.8. Transmisión de movimientos

Los movimientos de rotación transmitidos por contacto directo de sus bordes o a través de fajas tienen la característica de que sus velocidades y aceleraciones tangenciales son iguales.

$$v_{t_1} = v_{t_2} \Rightarrow \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 \quad (10.18)$$

$$a_{t_1} = a_{t_2} \Rightarrow \alpha_1 \cdot r_1 = \alpha_2 \cdot r_2 \quad (10.19)$$

10.9. Movimiento de traslación y rotación simultáneos

Características principales de una rueda rodando sin deslizar:

a) El centro de la rueda tiene una velocidad lineal (v_o) respecto al piso, y viene dado por:

$$v_o = \omega r \quad (10.20)$$

siendo ω la velocidad angular de rotación de la rueda respecto a su centro, y r su radio.

b) El centro de la rueda tiene una aceleración lineal (a_0) respecto al piso, y está dada por:

$$a_0 = \alpha r \tag{10.21}$$

siendo α la aceleración angular de rotación de la rueda respecto a su centro.

c) La velocidad de cualquier punto de la periferia de la rueda viene dada por:

$$v = v_0 + v_t \tag{10.22}$$

$$|v_t| = \omega r \tag{10.23}$$

$$v = \sqrt{2} \cdot v_0 \cdot \sqrt{1 + \cos\theta} = 2v_0 \cos(\theta/2) \tag{10.24}$$

siendo v_t la velocidad tangencial del punto respecto a un observador que solo aprecia la rotación pura de la rueda y que está ubicado en el centro de la misma, y θ el ángulo formado por v_0 y v_t .

d) La aceleración de cualquier punto de la periferia viene dada por:

$$a = a_0 + a_t \tag{10.25}$$

$$|a_t| = \alpha r \tag{10.26}$$

$$|a| = \sqrt{2} \cdot a_0 \cdot \sqrt{1 + \cos\theta} = 2a_0 \cos(\theta/2) \tag{10.27}$$

e) La trayectoria que describe un punto de la rueda para un observador ubicado en el piso es una curva que se llama **cicloide**.

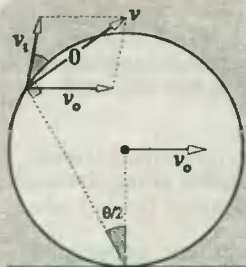


Fig. 10.1

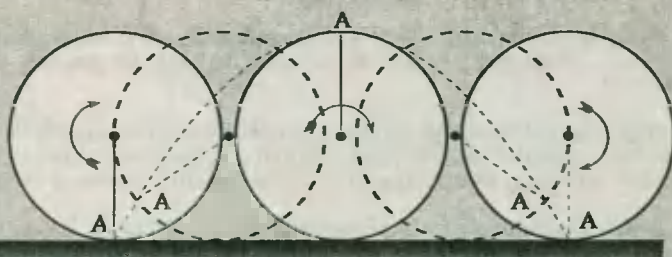


Fig. 10.2

PROBLEMAS

Movimiento curvilíneo

10.1. Una partícula inicia su movimiento circunferencial uniformemente variado con una velocidad tangencial de 6 m/s . Si su aceleración tangencial es 4 m/s^2 , y su radio de giro es 9 m , determinar:

- a) La velocidad tangencial luego de 12 s.
- b) La velocidad angular al término de los 12 s.

10.2. Una esferita se desplaza con MCUV, de tal modo que luego de recorrer 8 m incrementa su velocidad de 4 m/s a 12 m/s. Si su radio de giro es 4 m, calcular:

- a) La aceleración tangencial del móvil.
- b) La aceleración angular.

10.3. Un coche de demostraciones toma una curva de 32 m de radio con una velocidad de 2 m/s y una aceleración tangencial constante de 3 m/s². Calcular:

- a) La longitud del arco que describió en los 4 primeros segundos del movimiento.
- b) El ángulo central que subtende al arco descrito.

10.4. Un ciclista corre por un velódromo de modo que al cabo de 5 s su velocidad lineal es 15 m/s. Se observa también que durante dicho tiempo el ciclista logró girar un ángulo central de 2 rad, siendo el radio de la pista igual a 25 m. Calcular la velocidad lineal que tenía al iniciar su movimiento.

10.5. Una partícula parte del reposo, y se mueve a lo largo de una circunferencia con MCUV de tal modo que el área barrida por el radio de giro en el 2^{do} segundo es 15 cm². ¿Qué área barrerá el mismo radio durante el 5^{to} segundo del movimiento?

10.6. Una piedra atada a una cuerda experimenta un movimiento circunferencial en el plano horizontal. Cuando su velocidad logra ser 6 m/s su aceleración centrípeta tiene el valor de 3 m/s². Calcular la longitud de la cuerda que aparece como radio de giro.

10.7. Una paloma vuela en circunferencias, de modo que experimenta un MCU. Si el radio de giro es 4 m y su aceleración centrípeta es 9 m/s², calcular:

- a) La velocidad angular del movimiento.
- b) El periodo de giro de la paloma.

10.8. Un punto se mueve por una circunferencia de 10 m de radio con una aceleración constante de 8 m/s². ¿Cuál será el valor de su velocidad angular después de 40 s de haber empezado a moverse?

10.9. Un punto material se mueve por una circunferencia de π^2 cm de radio con una aceleración constante a_t . Hallar la aceleración normal de este punto al cabo de 20 s de haber comenzado a moverse, sabiendo además que al finalizar la quinta vuelta su velocidad tangencial fué 10 cm/s.

10.10. Un punto se mueve por una circunferencia de 10 cm de radio con una aceleración tangencial constante. Calcular esta aceleración, sabiendo que al finalizar la quinta vuelta contada desde el momento que el punto empieza a moverse, su velocidad es $v = 40\sqrt{\pi}$ cm/s.

10.11. En un instante dado, el automóvil mostrado desarrolla una rapidez de 21 m/s y una aceleración $a = 15$ m/s². Determinar:

- a) El radio de curvatura de la trayectoria en el punto A.
- b) El valor de la aceleración tangencial.

10.12. Una piedra atada a una cuerda gira en un plano de modo que en el instante mostrado su velocidad angular es $\omega = 2$ rad/s. Se sabe que en dicho instante experimenta una aceleración angular $\alpha = 3$ rad/s². Calcular el ángulo θ que se indica en la figura, si en la posición dada el móvil tiene una aceleración a que es paralela al eje X.

10.13. Hallar la aceleración angular de una rueda, sabiendo que al cabo de 1 s de iniciar su movimiento uniformemente acelerado, el vector aceleración total de un punto que se encuentra en su periferia forma un ángulo de 37° con la dirección de la velocidad lineal de este mismo punto.

10.14. Una partícula posee un MCUV. Si al pasar por el punto A tenía una velocidad de 4 m/s , y al pasar por el punto B ésta fué 18 m/s , calcular el valor de la aceleración angular, si la partícula invirtió 2 s en ir desde A hasta B ($\pi \approx 22/7$).

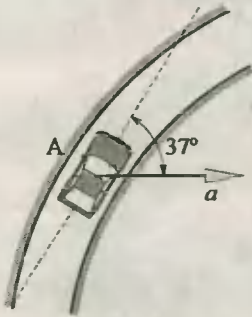


Fig. Prob. 10.11

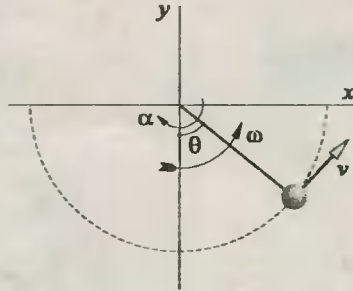


Fig. Prob. 10.12

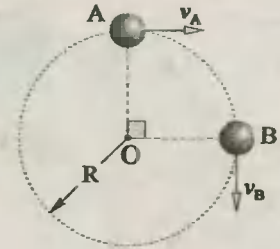


Fig. Prob. 10.14

10.15. Un móvil describe un arco de circunferencia de 21 m de radio con MCUV. Si pasa por el punto P a razón de 5 m/s , y por el punto Q a razón de 6 m/s empleando 4 s , calcular el cambio de dirección que experimentó la velocidad tangencial con relación a la que tenía en P ($\pi \approx 22/7$).

10.16. Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio R con velocidad constante v . La partícula se mueve de la posición 1 a la posición 2, siendo la abertura angular entre 1 y 2 igual a θ . Calcular el módulo de la aceleración media en dicha trayectoria.

10.17. Se suelta una bolita desde el punto A, la cual pierde la mitad de su velocidad al llegar al punto B, para luego recorrer el tramo BC con MRU, e inmediatamente después ingresa al tubo circular CD, de donde sale con una velocidad de 17 rad/s . Si el tramo CD lo hace con MCUV, hallar su aceleración angular (despreciar el rozamiento). $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\pi \approx 22/7$.

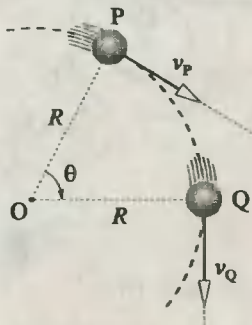


Fig. Prob. 10.15

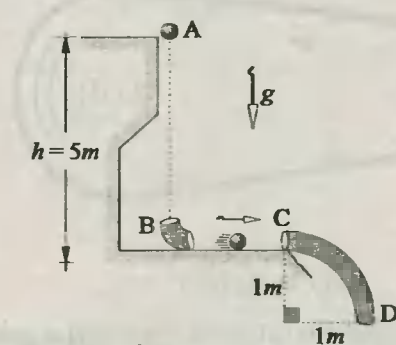


Fig. Prob. 10.17

10.18. En una competencia de aeromodelismo, un "avioncito" describe un MCU en un plano vertical de $10\sqrt{2} \text{ m}$ de radio. Al pasar por A suelta un paquete. ¿Cuál deberá ser la velocidad angular

que debe mantener el "avioncito" a partir de dicho instante con la finalidad de reencontrarse con el paquete cuando éste regrese al plano horizontal que pasa por A?. *Nota:* Considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$.

10.19. Un balde con agua gira en un plano horizontal con un periodo de $3\pi/2 \text{ s}$, y va derramando gotas de modo que éstas forman una circunferencia de radio R en el piso. Si la longitud de la cuerda es $L = 5 \text{ m}$, $AB = 9 \text{ m}$ y $\theta = 37^\circ$, calcular R . ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

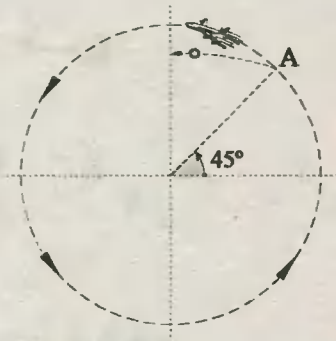


Fig. Prob. 10.18

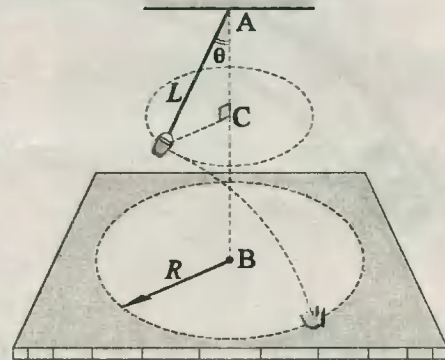


Fig. Prob. 10.19

10.20. En la figura se muestran dos poleas que forman parte de un compresor de aire para un horno de vidrio. El sistema se encuentra inicialmente en reposo. ¿Después de cuántas vueltas la polea 2 tendrá una velocidad de 20 rad/s , si el motor logra acelerar a la polea 1 a razón de 5 rad/s^2 ? $R_1 = 0,1 \text{ m}$; $R_2 = 0,2\pi \text{ m}$.

10.21. Para la figura mostrada, determinar la velocidad con la cual el bloque Q se desplaza, si se sabe que $\omega_D = 8 \text{ rad/s}$, y $R_A = 18 \text{ cm}$; $R_B = 50 \text{ cm}$; $R_C = 12 \text{ cm}$; $R_D = 10 \text{ cm}$, y $R_E = 25 \text{ cm}$.

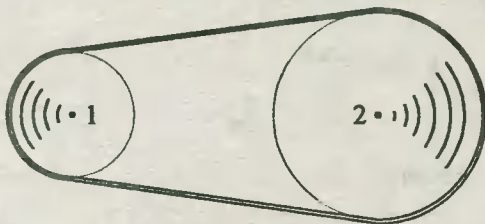


Fig. Prob. 10.20

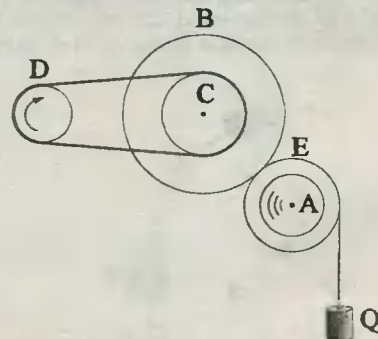


Fig. Prob. 10.21

10.22. Hallar la velocidad con la cual se mueve el bloque B , si las poleas solidarias giran con velocidad angular $\omega = 8 \text{ rad/s}$. Además se sabe que $R = 16 \text{ cm}$, y $r = 12 \text{ cm}$, y el radio de la polea móvil es $R + r$.

10.23. Un cuerpo es lanzado desde un plano horizontal con una velocidad v_0 y un ángulo θ . Si

en el punto más alto de su trayectoria se cumple que el radio de curvatura es el doble de su altura máxima, calcular la medida del ángulo θ .

10.24. Un proyectil es disparado con una velocidad de 16 m/s , cuyo vector forma 53° con la horizontal. Calcular el radio de curvatura de su movimiento curvilíneo cuando su vector velocidad forme un ángulo de 37° con la horizontal. Considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$.

10.25. ¿Con qué velocidad tangencial deberá girar un punto situado en la periferia de una plataforma circular para que un hombre que parte de dicho punto, siguiendo una trayectoria rectilínea con una velocidad constante de 7 km/h , llegue a un punto diametralmente opuesto después que la plataforma haya dado una revolución alrededor de su eje?.

10.26. Una hormiga parte desde el borde de una plataforma de 33 cm de radio, y con un movimiento uniformemente acelerado a razón de 2 cm/s^2 , desplazándose diametralmente. Por su parte, la plataforma gira con una velocidad angular de 3 rad/s . ¿Al cabo de qué tiempo como mínimo la velocidad de la hormiga será 26 cm/s respecto a Tierra?.

10.27. Una pelotita es lanzada desde el borde de un abismo muy profundo con una velocidad de 90 m/s . Calcular el radio de curvatura de la trayectoria al cabo de 12 s de caída. ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

10.28. Dos aviones de retropropulsión están volando horizontalmente a la misma altura, tal como se indica en la figura. El avión A está volando en línea recta con una velocidad $v_A = 720 \text{ km/h}$ y una aceleración $a_A = 5 \text{ m/s}^2$, y el avión B está volando en una trayectoria circular a razón de 540 km/h , y su rapidez decrece a razón de 7 m/s^2 , calcular la velocidad y aceleración del avión B medida por el piloto del avión A.

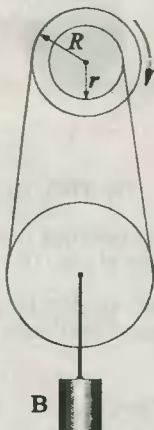


Fig. Prob. 10.22

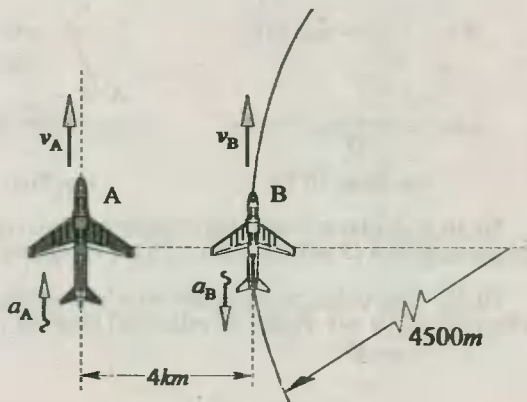


Fig. Prob. 10.28

Rotación y traslación

10.29. Una llanta de 60 cm de diámetro rueda sobre un piso horizontal de modo que su centro O se desplaza a la velocidad de 12 m/s respecto al piso. Calcular la velocidad angular con la cual gira la llanta respecto a su centro.

10.30. Un disco de 50 cm de diámetro rueda por un piso horizontal de modo que en 4 s su centro se desplazó uniformemente la distancia de 12 m . Calcular:

- a) La velocidad angular con la cual gira el disco respecto a su centro.

- b) El periodo de rotación del disco.
c) El ángulo girado por el disco durante su movimiento.

10.31. Una llanta de camión de 1 m de diámetro desciende rodando por una pendiente, tal que su centro acelera a razón de 6 m/s^2 . Calcular la aceleración angular que posee esta llanta respecto a su centro.

10.32. La velocidad de un automóvil cuyas llantas tienen un diámetro de 50 cm aumenta uniformemente desde 19 km/h hasta 55 km/h en 10 s . Calcular la aceleración angular de éstas.

10.33. La llanta mostrada de $0,4\text{ m}$ de radio rueda por el piso horizontal, y avanza con una velocidad de 16 m/s . Calcular:

- a) La velocidad angular de la llanta respecto a un eje instantáneo de rotación que pase por el punto de contacto con el piso (D).
b) La velocidad lineal de los puntos A, B, C y D respecto al piso.

10.34. El disco mostrado rueda de modo que en el instante indicado el punto A posee una velocidad de 7 m/s . Calcular la velocidad del punto B para dicho instante.

10.35. Determinar la velocidad del punto A, si el centro de la rueda mostrada se mueve con una velocidad v . No existe deslizamiento.

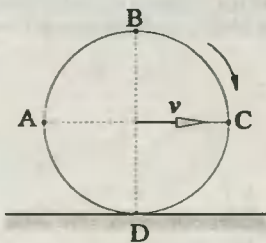


Fig. Prob. 10.33

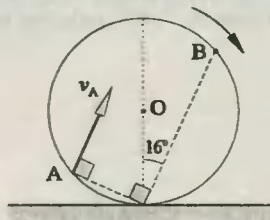


Fig. Prob. 10.34

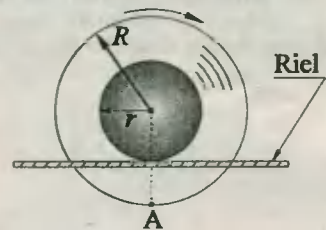


Fig. Prob. 10.35

10.36. Calcular la velocidad angular del disco de 1 m de diámetro, si se sabe que la velocidad del punto P es $8\sqrt{5}\text{ m/s}$ respecto a Tierra en el preciso instante que Q toca el piso ($\theta = 53^\circ$).

10.37. Una polea rueda sobre un plano inclinado, tal que su centro se desplaza con una velocidad de 10 m/s . Hallar la velocidad total del punto P respecto al plano inclinado.

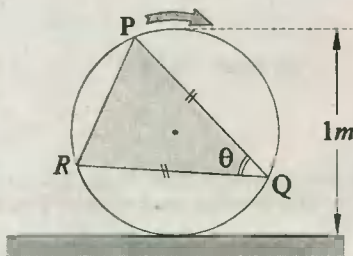


Fig. Prob. 10.36

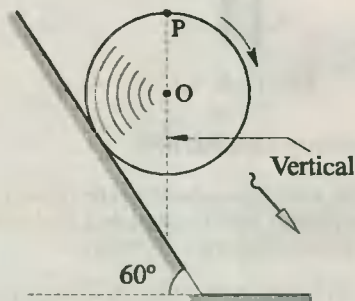


Fig. Prob. 10.37

10.38. Un cono recto de altura h tiene su vértice O fijo en el piso horizontal, y rota de modo que su velocidad angular respecto a un eje vertical que pasa por O es Ω . Determinar la velocidad angular que tiene el cono respecto a su eje OA .

10.39. Una rueda de radio R rueda uniformemente por una superficie horizontal. Del punto A de la rueda se desprende una gota de barro. Determinar la velocidad v de la rueda, si la gota vuelve a caer sobre el mismo punto A después de estar en el aire. La resistencia del aire no se toma en consideración.

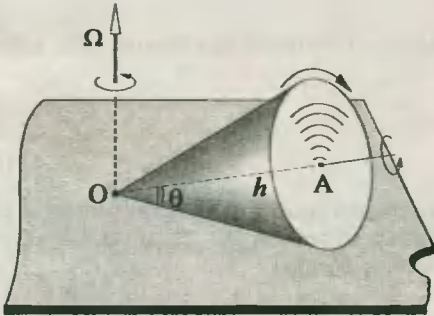


Fig. Prob. 10.38

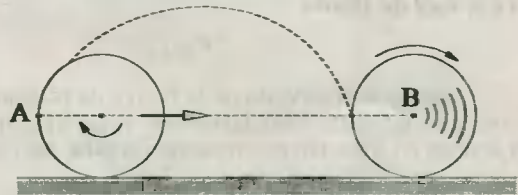


Fig. Prob. 10.39

11

Estática I

11.1. Fuerza

Es el resultado de toda interacción, y que está asociado a los efectos de empujar, jalar, tensar, comprimir, deformar, atraer, repeler,, etc.

11.2. Ley de Hooke

$$F = kx \quad (11.1)$$

siendo F el módulo de la fuerza de restitución interna del resorte, x su deformación, y k la constante de elasticidad del resorte. En el SI la fuerza F se da en *newton* (N), x se da en *metros* (m) y k se da en N/m . Un resorte estirado **jala**; uno comprimido **empuja**.

11.3. Primera ley de Newton

Si la fuerza resultante sobre un cuerpo es nula, entonces dicho cuerpo está en reposo o con movimiento rectilíneo uniforme (MRU).

11.4. Inercia

Propiedad inherente de los cuerpos, y que les permita conservar su estado de reposo o de movimiento.

11.5. Tercera ley de Newton

Si un cuerpo actúa contra otro con una fuerza llamada **acción**, el segundo actúa contra el primero con una fuerza de igual intensidad, de la misma recta de acción, pero de dirección contraria, llamada **reacción**.

11.6. Fuerzas internas y superficiales

11.6.a. Tensión.- En el interior de cuerdas o cables, cuando se intenta aumentar su longitud. Toda tensión **jala**.

11.6.b. Compresión.- En el interior de barras o columnas, cuando se intenta disminuir su longitud. Toda compresión **empuja**.

11.6.c. Rozamiento.- Cuando dos superficies ásperas en contacto se deslizan o intentan deslizarse uno respecto al otro. Todo rozamiento se opone al deslizamiento.

11.7. Primera condición de equilibrio

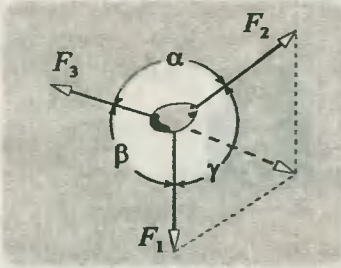
Un cuerpo estará en equilibrio de traslación si la fuerza resultante que lo afecta es nula.

$$\Sigma F = 0 \quad (11.2)$$

en el cual los vectores fuerza formarán un polígono vectorial cerrado.

11.8. Teorema de Lami

Si un cuerpo está sometido a tres fuerzas no paralelas y en equilibrio, se cumplirá que ellas serán coplanares y concurrentes, tal que una es la resultante de las otras dos; sus vectores representativos forman un triángulo. Asimismo, sus módulos estarán en proporción directa con el seno de los ángulos que se oponen a sus correspondientes direcciones.



$$\frac{F_1}{\text{sen } \alpha} = \frac{F_2}{\text{sen } \beta} = \frac{F_3}{\text{sen } \gamma} \quad (11.3)$$

PROBLEMAS

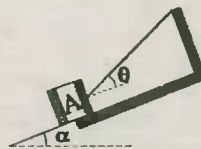
Diagramas de cuerpo libre (DCL)

Nota: Se recomienda usar un par de ejes X-Y girados en los casos de planos inclinados, de modo que el eje X quede paralelo a dicho plano.

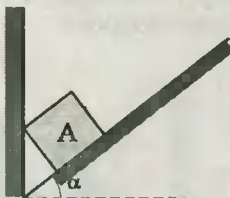
11.1. Determinar el DCL del bloque A para cada caso, despreciando todo efecto de rozamiento, así como las dimensiones de los cuerpos. Considere que los sistemas están en equilibrio.



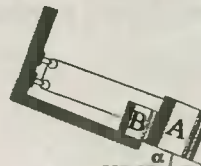
(a)



(b)

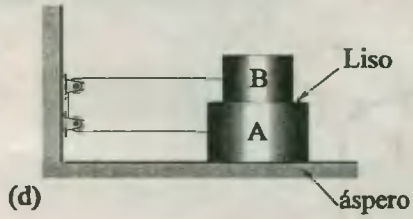
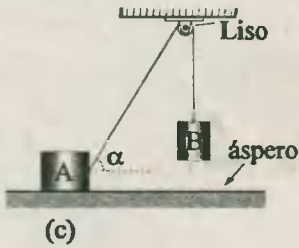
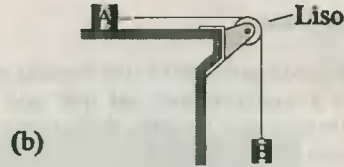
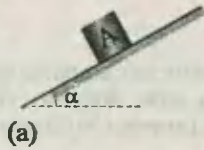


(c)

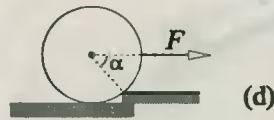
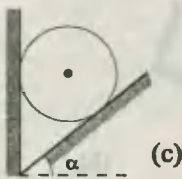
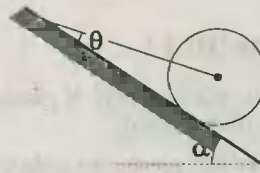
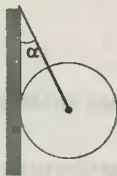


(d)

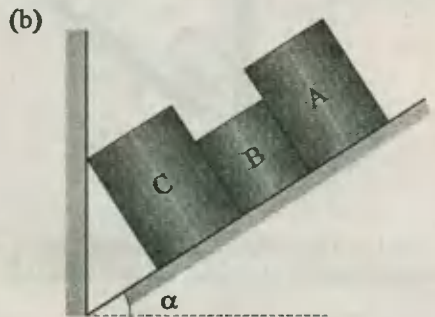
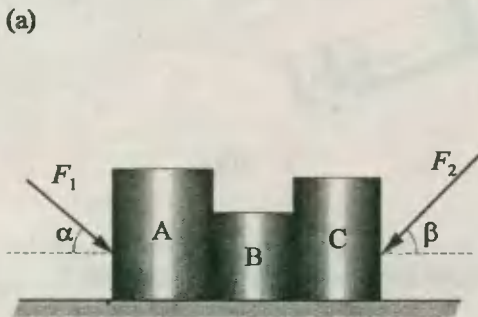
11.2. Presentar el DCL del bloque A en cada caso, si se sabe que existe rozamiento en todas las superficies de contacto, salvo en las indicadas. Despreciar las dimensiones de los cuerpos.

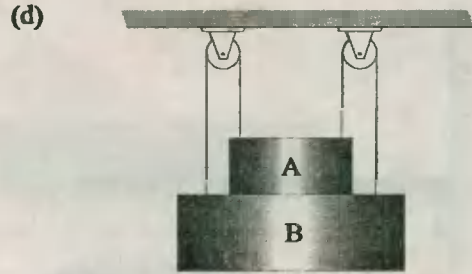
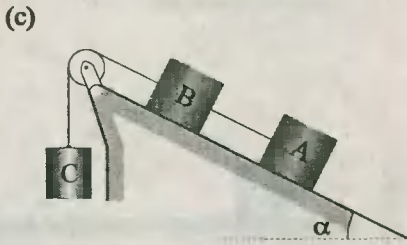


11.3. Elaborar el DCL de las esferas mostradas en cada caso, despreciando todo tipo de rozamiento, y considerando que se encuentran en equilibrio.

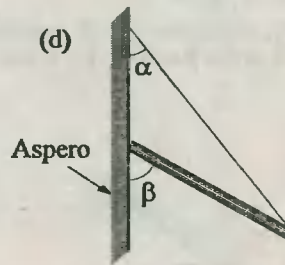
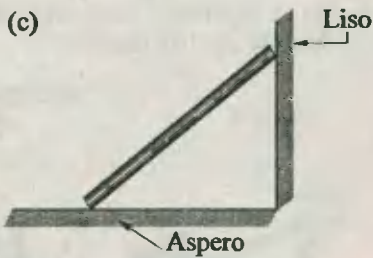
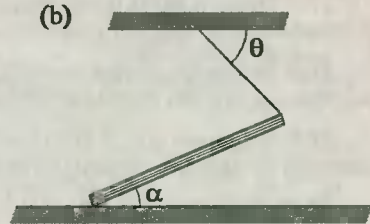
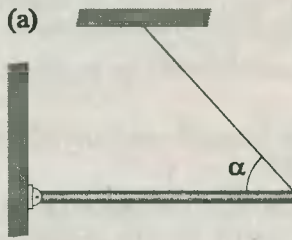


11.4. Construir el DCL simplificado del sistema formado por los bloques A y B, despreciando el rozamiento en todas las superficies y considerando que están en reposo.

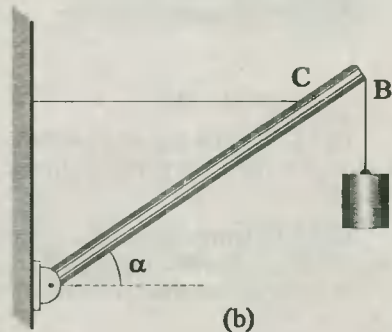


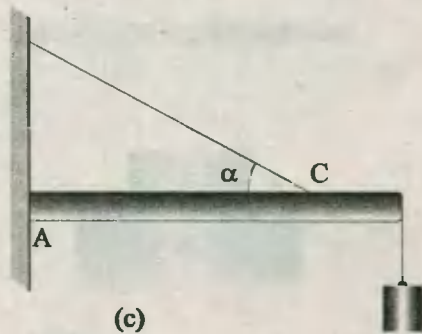


11.5. Construir el DCL de las barras mostradas, considerando que son uniformes y homogéneas, y que se encuentran en equilibrio.

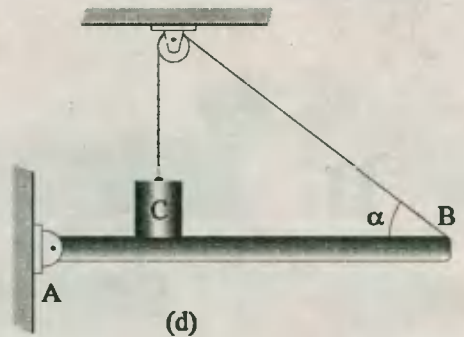


11.6. Elaborar los DCL de las barras mostradas en cada caso, considerando que son uniformes y homogéneas.





(c)



(d)

Descomposición de fuerzas

11.7. Determinar la tensión en el cable del problema 11.1.b para que el bloque de 640 N de peso permanezca en equilibrio, sabiendo además que $\alpha = 30^\circ$ y $\theta = 37^\circ$. No hay rozamiento.

11.8. Hallar la mínima fuerza F que se necesita para levantar la esfera del problema 11.3.d, si se sabe que el peso de ésta es 300 N , y $\alpha = 37^\circ$.

11.9. Sabiendo que la esfera mostrada pesa 60 N y que se encuentra en equilibrio, calcular la reacción en el piso horizontal. No hay rozamiento.

11.10. Determinar la fuerza de contacto entre los bloques B y C del problema 11.4.b, si se sabe que los pesos de los bloques son $P_A = 40\text{ N}$, $P_B = 60\text{ N}$, y $P_C = 80\text{ N}$. Se sabe además que $\alpha = 30^\circ$. No existe rozamiento.

11.11. Sabiendo que el sistema mostrado se encuentra en equilibrio, determinar el peso del bloque 3, si los pesos de 1 y 2 son 70 N y 60 N respectivamente. No hay fricción.

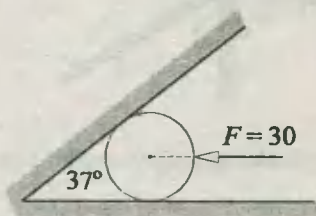


Fig. Prob. 11.9

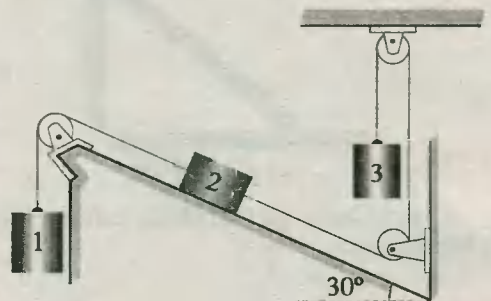


Fig. Prob. 11.11

11.12. Se sabe que el bloque del problema 11.2.a pesa 120 N , y se encuentra en equilibrio. Calcular la fuerza de rozamiento que experimenta el bloque en su base de apoyo, considerando que $\alpha = 37^\circ$.

11.13. Del problema 11.2.c, calcular la fuerza de rozamiento y la reacción normal entre el bloque A y el piso, si se sabe que el sistema se encuentra en equilibrio, siendo los pesos de A y B 400 N y 250 N respectivamente. Además, $\alpha = 53^\circ$.

11.14. Una esfera que pesa 200 N se encuentra en equilibrio con dos bloques Q y R . Se sabe que $Q = 300\text{ N}$, y que la reacción del piso sobre él vale 100 N . ¿Cuáles son los valores del peso del bloque R y la reacción del piso sobre la esfera?. Despreciar todo tipo de rozamiento.

11.15. Sabiendo que el sistema mostrado se encuentra en equilibrio, calcular la tensión en la cuerda AB . Se sabe también que $P = 4Q = 32\text{ N}$, y que las tensiones en las cuerdas BC y DE difieren en 30 N .

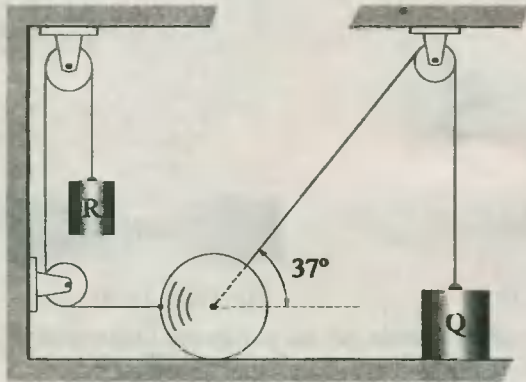


Fig. Prob. 11.14

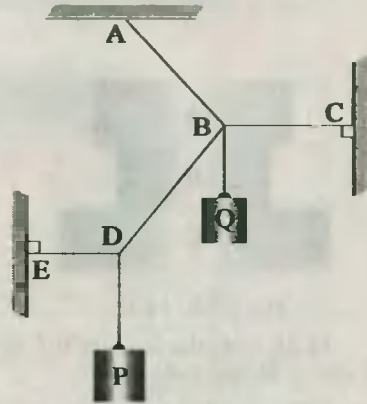


Fig. Prob. 11.15

11.16. Calcular el peso necesario y suficiente del bloque Q para que el sistema mostrado se encuentre en equilibrio, sabiendo que $P = 320\text{ N}$, y que las cuerdas son imponderables.

11.17. En la figura, la esfera pequeña pesa 10 N , y la grande 25 N . Calcular las reacciones de la pared y el piso, si $S = 25\text{ N}$. $r_A = 2r_B$.

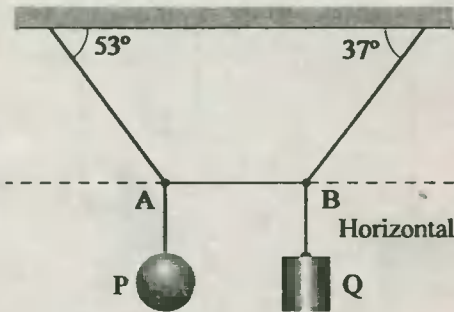


Fig. Prob. 11.16

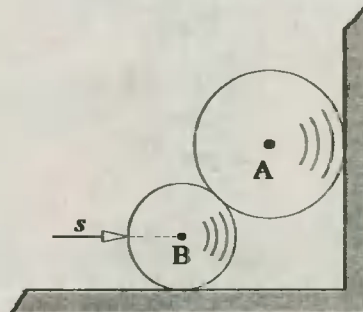


Fig. Prob. 11.17

11.18. Tres bloques uniformes y homogéneos de pesos $P_A = 600\text{ N}$, $P_B = 100\text{ N}$ y $P_C = 300\text{ N}$ se mantienen en equilibrio, y sostenidos por cables idénticos. Calcular el valor de la reacción en las superficies X e Y .

11.19. Se tiene un prisma triangular isósceles sobre el cual se encuentran dos bloques A y B de pesos 360 N y 480 N respectivamente. Calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio. No existe rozamiento.

Poleas

11.20. Sabiendo que el conjunto de poleas imponderables (sin peso) logran equilibrar al bloque que pesa 600 N , se pide calcular la tensión en el cable más largo.

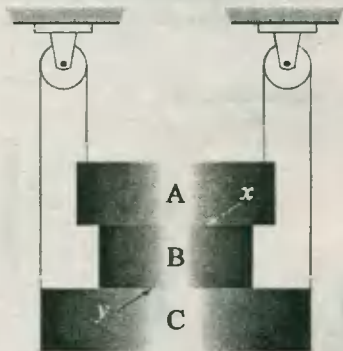


Fig. Prob. 11.18

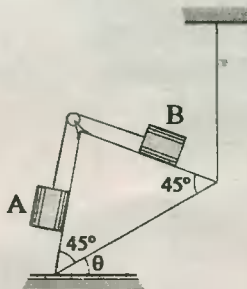


Fig. Prob. 11.19

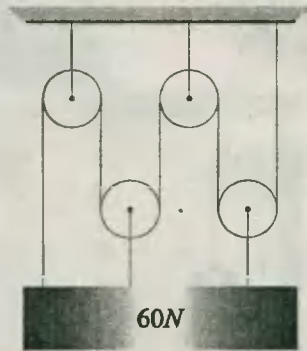


Fig. Prob. 11.20

11.21. Calcular la tensión T en el cable indicado, sabiendo que las poleas son imponderables, y que el bloque pesa 500 N .

11.22. En el sistema mostrado, los bloques están en equilibrio. Si sus pesos son $P = 60\text{ N}$ y $Q = 40\text{ N}$, calcular con qué fuerza se comprimen los bloques. Despreciar el peso de las poleas.

11.23. Una persona que pesa 600 N tira una cuerda para mantenerse en equilibrio gracias a un aparejo ingrávito. Calcular la fuerza con la cual el hombre aprieta su asiento.

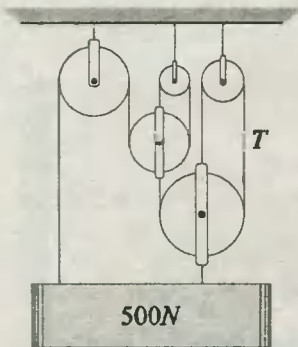


Fig. Prob. 11.21

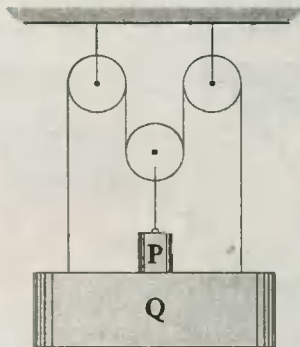


Fig. Prob. 11.22

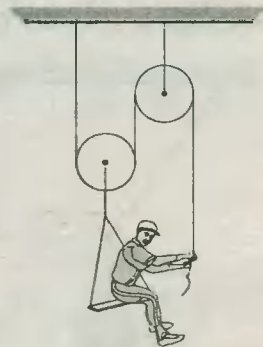


Fig. Prob. 11.23

11.24. En el sistema mostrado, la fuerza que mantiene en equilibrio al bloque de 50 N de peso es $F = 20\text{ N}$. Calcular el peso de las poleas, si éstas son iguales entre sí.

Resortes

11.25. Sabiendo que el sistema mostrado está en reposo, calcular la longitud del resorte sin deformar. $F_1 = 50\text{ N}$, $k = 40\text{ N/cm}$.

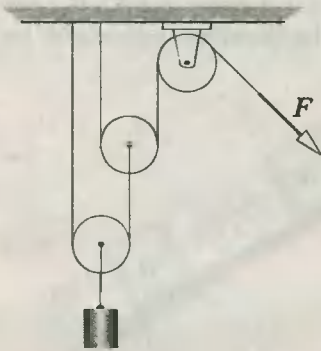


Fig. Prob. 11.24

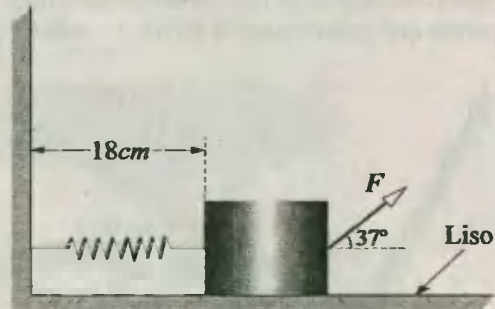


Fig. Prob. 11.25

11.26. Una plataforma descansa sobre dos resortes idénticos de constante $k = 100 \text{ N/cm}$. Calcular su peso, si se sabe que los resortes tienen una longitud natural de 20 cm .

11.27. El sistema mostrado se suelta de tal modo que los resortes se estiran por acción del bloque A. Calcular la longitud original de los resortes, si sus constantes de elasticidad son $k_1 = 300 \text{ N/cm}$, y $k_2 = 200 \text{ N/cm}$. Peso de A = 600 N .

11.28. El bloque de 500 N de peso se encuentra en equilibrio apretando un resorte de constante de elasticidad $k = 400 \text{ N/m}$. Calcular la deformación del resorte en cm .

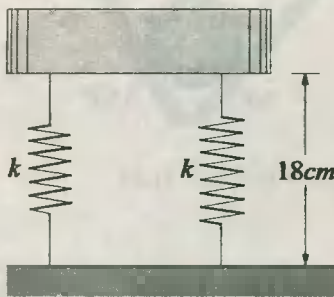


Fig. Prob. 11.26

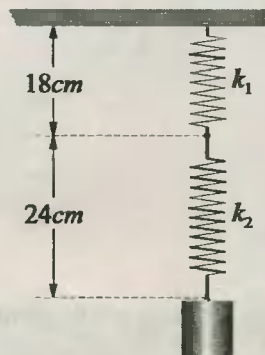


Fig. Prob. 11.27

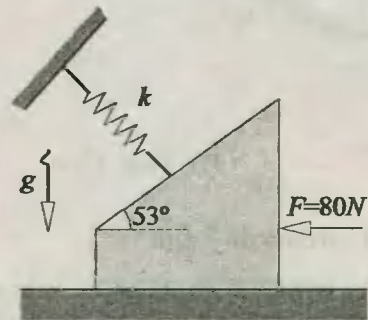


Fig. Prob. 11.28

11.29. El bloque mostrado pesa 50 N , y se encuentra en equilibrio. Si el resorte tiene una constante de elasticidad $k = 100 \text{ N/m}$, y está comprimido 20 cm , calcular el valor de la fuerza de fricción.

11.30. Sabiendo que el sistema mostrado está en equilibrio, calcular la deformación en cm del resorte cuya constante de elasticidad es $k = 500 \text{ N/m}$. Se sabe además que $P_A = 4 P_B$, y no hay rozamiento.

11.31. Un cajón pesa 400 N , y está siendo jalado con velocidad constante hacia arriba de un plano liso e inclinado 30° , según se muestra en la figura. Calcular el alargamiento desarrollado en el resorte del cable remolcador.

11.32. La esfera mostrada pesa 500 N , y se apoya sobre dos planos inclinados lisos A y B, y está unida a un resorte. Si la longitud del resorte es $l_0 = 200\text{ mm}$, calcular las reacciones normales de los planos que actúan sobre la esfera. $l = 500\text{ mm}$, $k = 600\text{ N/m}$.

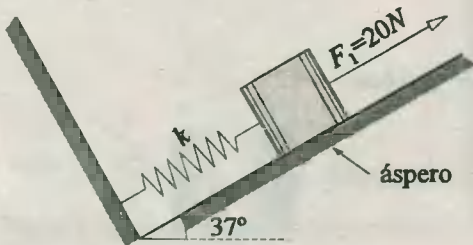


Fig. Prob. 11.29

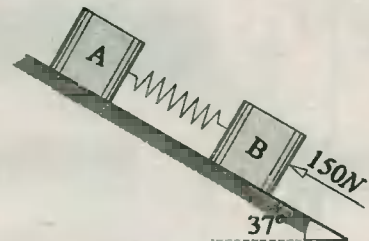


Fig. Prob. 11.30

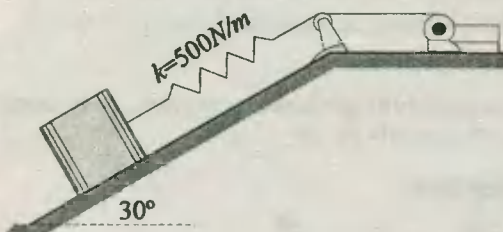


Fig. Prob. 11.31

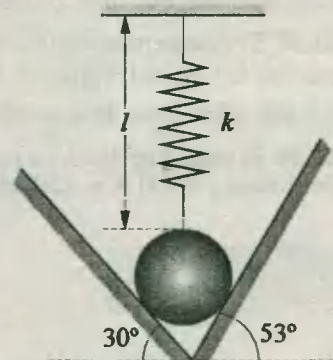


Fig. Prob. 11.32

Teorema de Lami

11.33. Calcular la tensión en la cuerda, si se sabe que la esferilla mostrada cuyo peso es 36 N está en equilibrio. La fuerza F es horizontal.

11.34. Sabiendo que la barra mostrada pesa 24 N y se encuentra en equilibrio, y la reacción normal en la pared vertical es 10 N , calcular la reacción total del piso sobre la parte inferior de la barra.

11.35. La barra mostrada es uniforme y homogénea, y pesa 100 N . Si M es el punto medio de la barra, ¿Cuáles son los valores correspondientes de la reacción en A y la tensión en la cuerda MN?

11.36. Entre dos superficies planas y lisas una barra AB se encuentra en equilibrio. Sabiendo que la reacción en A es 18 N , calcular el peso de la barra y la reacción en B.

11.37. La barra de la figura pesa 24 N ; además es uniforme y homogénea, y está sostenida por una cuerda en el punto M (punto medio de la barra) y por una bisagra en el punto A. Calcular la reacción en el punto A y el peso del bloque C.

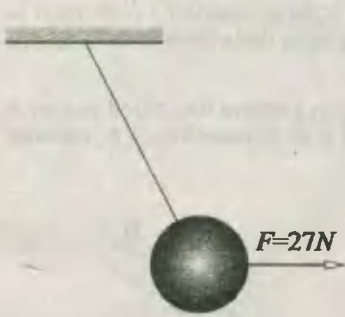


Fig. Prob. 11.33

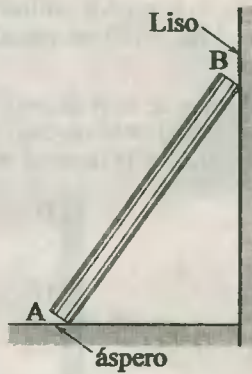


Fig. Prob. 11.34

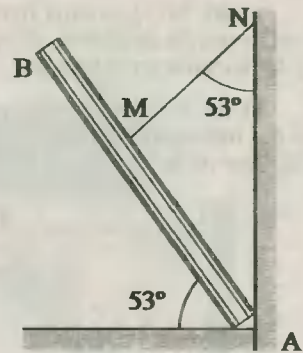


Fig. Prob. 11.35

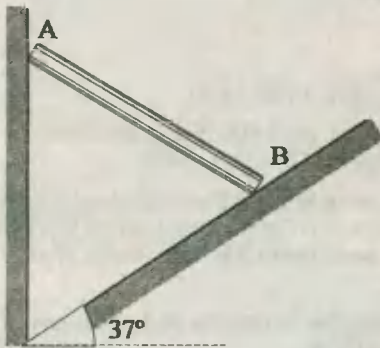


Fig. Prob. 11.36

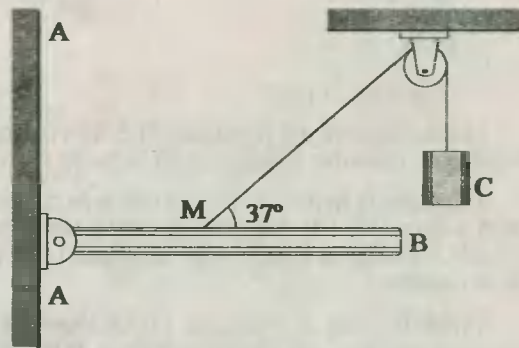


Fig. Prob. 11.37

11.38. Se tiene una barra AB uniforme y homogénea que se encuentra en equilibrio, pesa 80 N y se encuentra apoyada en B a una superficie lisa. Calcular la reacción en la bisagra A y el apoyo B.

11.39. En la figura se muestra una barra uniforme no homogénea que pesa 50 N , y está sostenida en sus extremos por dos cuerdas AB y CD, manteniéndose en posición horizontal. Si $\alpha = 37^\circ$ y $\beta = 53^\circ$, calcular la tensión en cada uno de los cables.

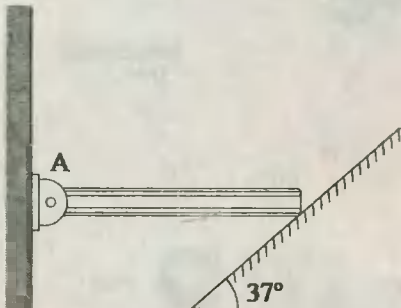


Fig. Prob. 11.38

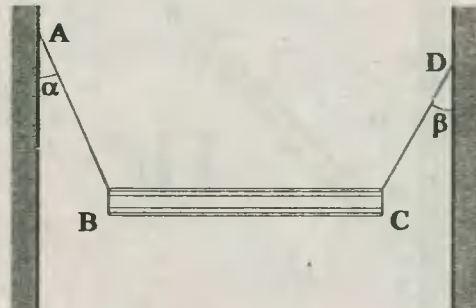


Fig. Prob. 11.39

11.40. En el sistema físico mostrado, la barra AB uniforme y homogénea de 64 N de peso se encuentra en equilibrio. Si $AC = 80\text{ cm}$, y $BC = 120\text{ cm}$, calcular el valor de la tensión en la cuerda y la reacción en la bisagra.

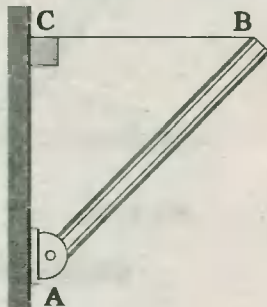


Fig. Prob. 11.40

11.41. Una barra uniforme y homogénea de 20 N de peso se apoya contra una pared lisa en A y por una cuerda inelástica en C. Si la carga Q tiene un peso igual al de la reacción en A, calcular el valor de la tensión en la cuerda y la reacción de la pared en A.

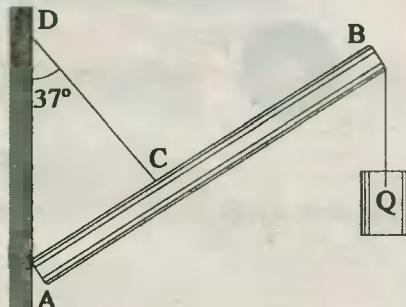


Fig. Prob. 11.41

11.42. La barra del problema 11.5.d es uniforme y homogénea, pesa 600 N y se encuentra en equilibrio. Calcular la reacción en la pared y la tensión de la cuerda ($\beta = 2\alpha = 74^\circ$).

11.43. En la figura se muestra una grúa de mástil, y consta de un brazo AB articulado al mástil en A y la cadena CB. Del extremo B del brazo pende el peso $P = 70\text{ N}$, y los ángulos $\alpha = 37^\circ$ y $\beta = 127^\circ$. Calcular la tensión T de la cadena CB y el esfuerzo Q en el brazo AB. Despreciar el peso de la cadena.

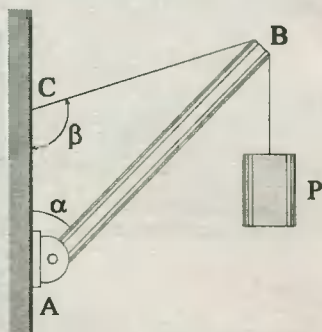


Fig. Prob. 11.43

11.44. En base al problema 11.3.c, donde $\alpha = \theta = 30^\circ$, calcular la tensión en la cuerda y la reacción del piso, sabiendo que el peso de la esfera es $P = 10\sqrt{10}\text{ N}$.

11.45. La esfera del problema 11.3.a pesa 400 N y la cuerda que la sostiene mide 20 cm . Si su radio es 30 cm , calcular la reacción de la pared en A y la tensión de la cuerda.

11.46. Se tienen cuerdas dispuestas según se muestra en la figura. Si ellas soportan dos cargas, una de las cuales es de 200 N , calcular cuál debe ser el peso P de la esfera para que el sistema se mantenga en equilibrio.

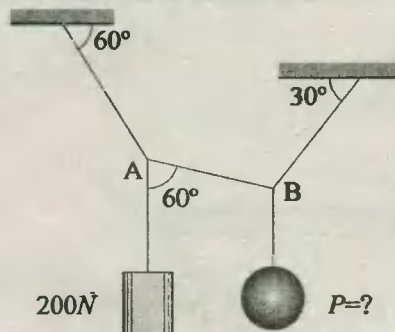


Fig. Prob. 11.46

11.47. Dos poleas de pesos $P = 96\text{ N}$ y $Q = 21\text{ N}$ pueden deslizar sin fricción a lo largo de dos varillas rígidas AC y BC , y además están unidas por una cuerda DE , según se muestra en la figura. Determinar la posición de equilibrio definida por el ángulo θ .

11.48. Dos esferas compactas, homogéneas y lisas de igual tamaño y pesos $= 196\text{ N}$ y $P_B = 300\text{ N}$. Si sus centros se encuentran en un mismo plano vertical que contiene al centro O de la superficie semicilíndrica de modo que el conjunto se mantiene en equilibrio, calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio.

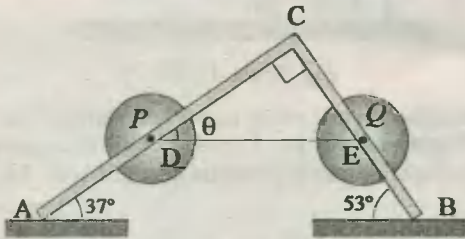


Fig. Prob. 11.47

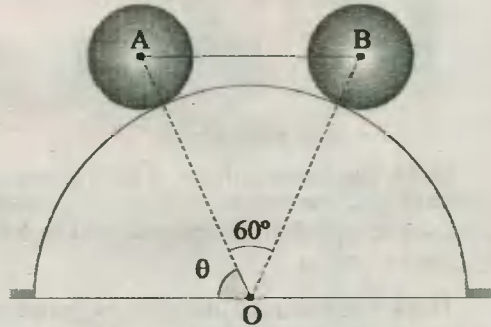


Fig. Prob. 11.48

11.49. En la figura se muestra un sistema compuesto por tres esferas compactas y homogéneas, en el cual las más grandes son de igual peso $P = 140\text{ N}$, y están sostenidas por dos cuerdas de igual longitud separadas entre sí un ángulo $\theta = 74^\circ$. Calcular el peso que debe tener la esfera menor para que se mantenga el equilibrio mostrado con $\alpha = 37^\circ$.

11.50. Calcular las reacciones en la superficie curva en A y B , si se sabe que no existe rozamiento, y que el peso del cilindro O es 117 N . $\theta = 53^\circ$, $\alpha = 16^\circ$.

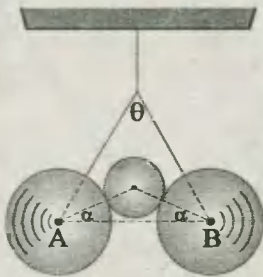


Fig. Prob. 11.49

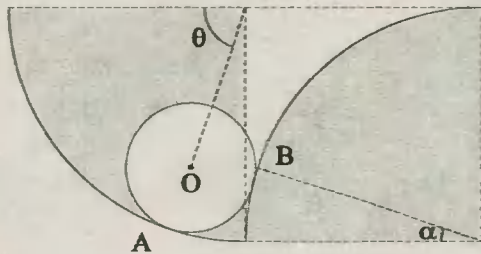


Fig. Prob. 11.50

11.51. En la estructura en equilibrio mostrada se sabe que los lados del triángulo ABC miden $AB = 4\text{ m}$, $BC = 6\text{ m}$ y $AC = 5\text{ m}$. Sabiendo además que el peso de la carga Q es 80 N , calcular la tensión que experimenta la cuerda BC y la reacción en la bisagra. Despreciar el peso de la barra.

11.52. Una tabla uniforme AB de 300 N de peso está conectada en B al peso $P = 150\text{ N}$, y sostenida tal como se muestra en la figura. Calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio.

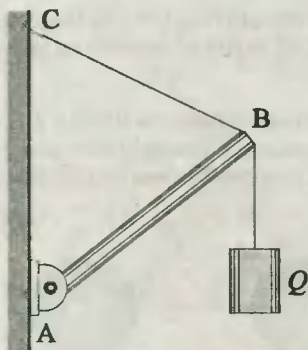


Fig. Prob. 11.51

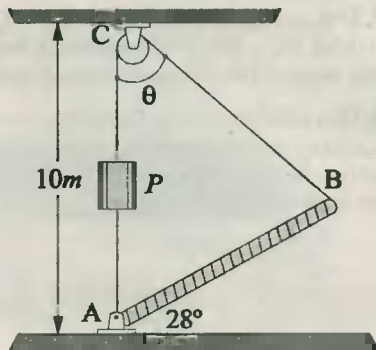


Fig. Prob. 11.52

11.53. Una barra uniforme y homogénea se encuentra apoyada sobre una pared vertical lisa, y sostenida por una cuerda inelástica. El extremo A logra resbalar por la pared hasta alcanzar su posición de equilibrio. Calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio. $AB = 2\text{ m}$, $BC = \sqrt{13}\text{ m}$.

11.54. Una barra AB uniforme y homogénea cuyo peso es $P = 8\sqrt{5}\text{ N}$ se mantiene en equilibrio en la posición mostrada en la figura. Si la tensión del cable es $T = 10\text{ N}$, calcular la medida del ángulo θ .

11.55. Una cadena uniforme y homogénea cuelga según como se indica en la figura. La tensión en la argolla B es 100 N , y el peso total de la cadena es $P = 140\text{ N}$. Calcular la tensión en la argolla A, si además $\alpha + \beta = \sigma/3\text{ rad}$.

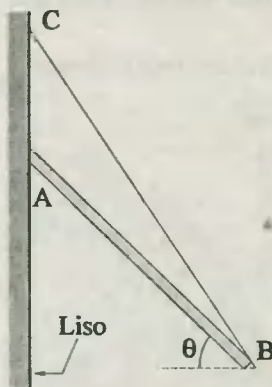


Fig. Prob. 11.53

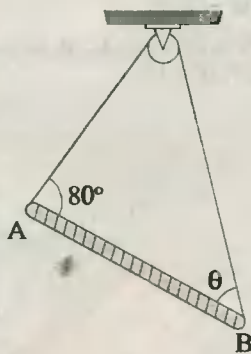


Fig. Prob. 11.54

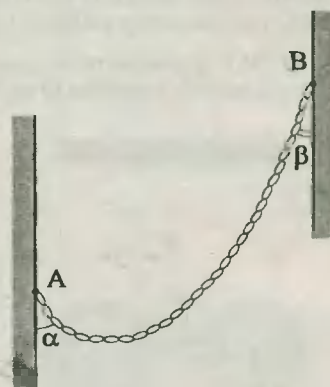


Fig. Prob. 11.55

11.56. Una viga homogénea AB de peso P se apoya situada en un plano vertical sobre dos planos lisos CE y DE. El primero de éstos forma con el horizonte un ángulo $\alpha = 37^\circ$. Hallar el ángulo θ de inclinación de la viga con la horizontal en la posición de equilibrio.

11.57. En la figura se muestra una varilla rígida, uniforme y homogénea de 70 cm de longitud. Esta varilla se encuentra parcialmente introducida en una cavidad semiesférica lisa de 50 cm de radio. Calcular el ángulo ϕ que define su posición de equilibrio.

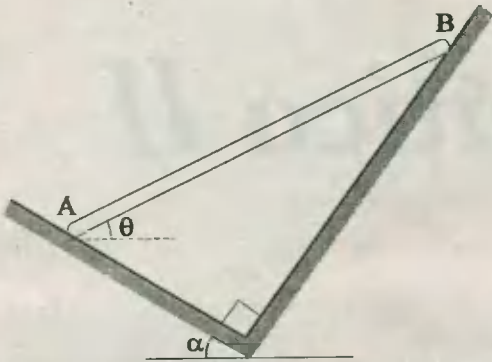


Fig. Prob. 11.56

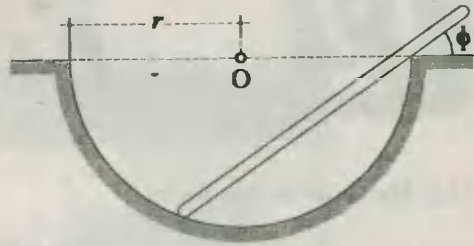


Fig. Prob. 11.57

12

Estática II

12.1. Momento de una fuerza

$$M = \pm F \cdot b \quad (12.1)$$

siendo b el brazo de palanca, igual a la longitud del segmento perpendicular trazado desde el centro de momento (giro) hasta la recta de acción de la fuerza (F). El signo será positivo (+) si el giro provocado por la fuerza F es de sentido antihorario, y negativo (-) si el giro es horario. En el SI el momento se expresa en $N.m$.

12.2. Cupla o par de fuerzas

$$C = \pm F \cdot d \quad (12.2)$$

siendo C el momento del par, y d la distancia entre las rectas de acción de las fuerzas (F).

12.3. Teorema de Varignon

El momento de la fuerza resultante es igual a la suma de los momentos de todas las fuerzas participantes.

$$(M_R)_O = \Sigma(M_F)_O \quad (12.3)$$

12.4. Segunda condición de equilibrio

Un cuerpo estará en equilibrio rotacional si el momento resultante sobre él es nulo.

$$\Sigma \bar{M} = \bar{0} \quad (12.4)$$

12.5. Equilibrio total

Un cuerpo estará en equilibrio si a la vez satisface la 1ª y 2ª condiciones de equilibrio.

PROBLEMAS

Momentos

12.1. Calcular el momento resultante de las fuerzas mostradas respecto al punto A.

12.2. En la figura se muestra una placa de forma hexagonal regular cuyo lado mide $4 m$. Calcular el módulo del momento resultante respecto al punto O debido a las fuerzas que se aplican sobre los vértices del hexágono. $F_1 = 8\sqrt{2} N$; $F_2 = 10\sqrt{3} N$; $F_3 = 20 N$; $F_4 = 5\sqrt{3} N$; $F_5 = 40 N$.

12.3. En la figura, el momento de la fuerza P respecto al punto D es $480\text{ N}\cdot\text{m}$. Calcular el momento de P respecto al punto B . Asimismo, si el momento de la fuerza F respecto al punto C es $750\text{ N}\cdot\text{m}$, calcular su momento con respecto al punto A .

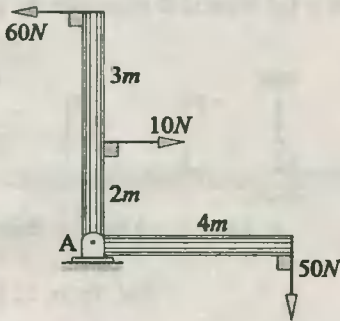


Fig. Prob. 12.1

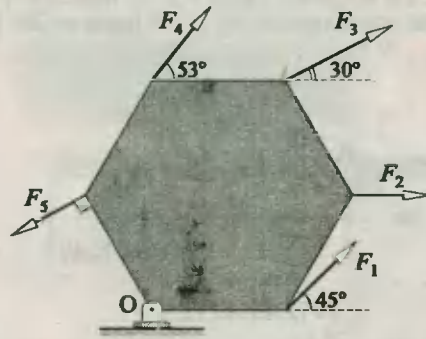


Fig. Prob. 12.2

12.4. Calcular bajo qué ángulo debería aplicarse la fuerza $F = 80\text{ N}$, de modo que el momento que produce respecto al punto O sea máximo, y también cuál es el valor de este momento.

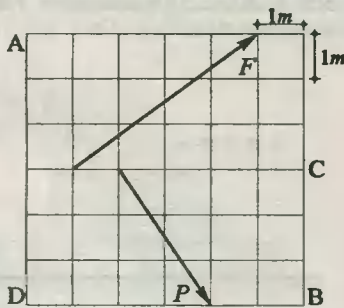


Fig. Prob. 12.3

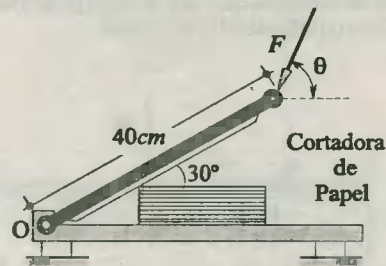


Fig. Prob. 12.4

12.5. Reemplazar el par de fuerzas mostradas en la figura, cuyos módulos son 26 N cada una, por otra equivalente de tal modo que las fuerzas que la generan también estén aplicadas en A y B , pero que sean de módulo mínimo. Dar como respuesta el módulo de una de estas fuerzas.

Teorema de Varignon

12.6. Calcular la resultante de las fuerzas mostradas, y su ubicación respecto a O .

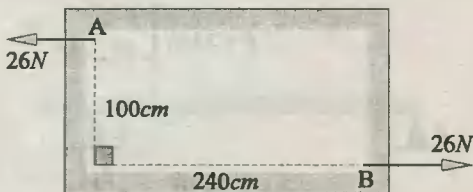


Fig. Prob. 12.5



Fig. Prob. 12.6

12.7. Determinar el módulo de la resultante de las fuerzas mostradas y su ubicación respecto al extremo A.

12.8. Encontrar los valores de las fuerzas P y F , de tal manera que las cuatro fuerzas de la figura produzcan una resultante de 150 N hacia arriba, y que actúe a $1,2\text{ m}$ hacia la izquierda del gozne A.

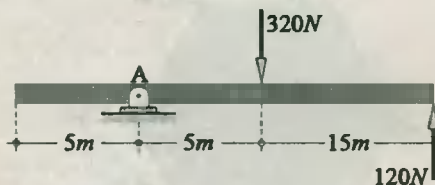


Fig. Prob. 12.7

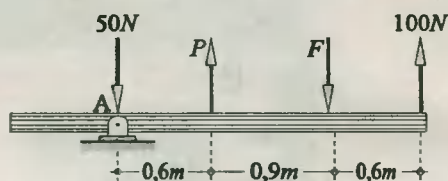


Fig. Prob. 12.8

12.9. Sobre una barra horizontal AB de 1 m de longitud están actuando tres fuerzas verticales, según como se indica en la figura. Determinar la posición x que ocupa la fuerza resultante de dicho conjunto respecto al punto A.

12.10. La figura muestra un conjunto de ladrillos idénticos de longitud L , y colocados uno sobre otro, de modo que estén distanciados igualmente uno del otro la distancia constante a . Calcular el número de ladrillos que se pueden apilar sin que el conjunto pierda su equilibrio. Nota: $a = Ln$, siendo $n =$ número natural adimensional.

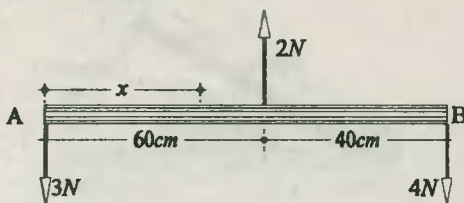


Fig. Prob. 12.9

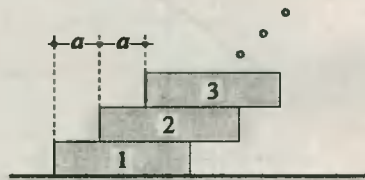


Fig. Prob. 12.10

Equilibrio de fuerzas paralelas

12.11. La barra mostrada pesa 20 N y está en reposo. Calcular la longitud de la barra, si además se sabe que la reacción en el apoyo B es 5 N .

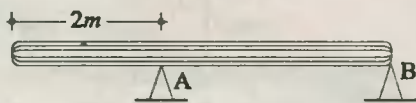


Fig. Prob. 12.11

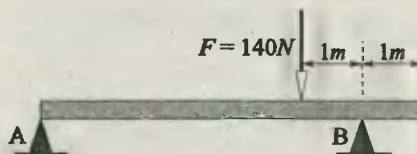


Fig. Prob. 12.12

12.12. La barra horizontal mostrada pesa 70 N , mide 8 m y está en reposo. Calcular las reacciones en los apoyos A y B.

12.13. En la figura se muestra una barra uniforme y homogénea de 6 m de longitud cuyo peso es 50 N , sostenida por una cuerda en A y por un gozne en B. Sabiendo que la tensión en la cuerda es igual al peso de la carga Q, calcular dicha tensión.

12.14. Calcular la longitud de la barra, si se sabe que está en reposo, y las tensiones en las cuerdas A y B están en la relación de 5 a 1.



Fig. Prob. 12.13

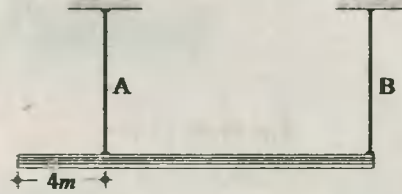


Fig. Prob. 12.14

12.15. Calcular la reacción en el pasador A, si la barra uniforme y homogénea pesa 60 N , y las poleas son lisas e ingravidas.

12.16. La barra en reposo mostrada pesa 150 N , y el peso de la carga Q es 30 N . Calcular las tensiones en las cuerdas BE y BD.

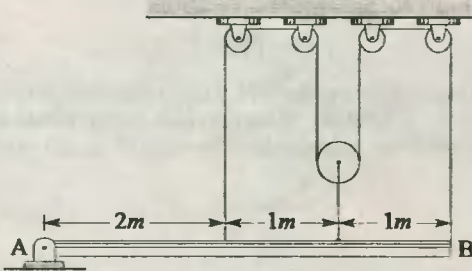


Fig. Prob. 12.15

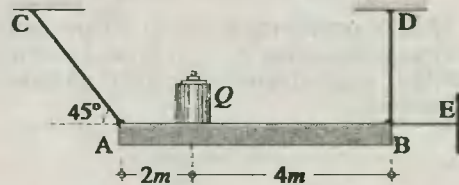


Fig. Prob. 12.16

12.17. Calcular la tensión en la cuerda que sostiene a la barra de 100 N de peso. Se sabe además que la carga Q pesa 200 N .

12.18. Sabiendo que el sistema está en reposo, calcular la reacción en el pasador. Se sabe además que la barra pesa 3 N , es uniforme y homogénea, y la carga Q pesa 20 N .

12.19. Si el sistema mostrado se encuentra en reposo, calcular la reacción en el pasador. Se sabe que la barra pesa 80 N , mide 6 m y es uniforme y homogénea, y la carga Q pesa 60 N .

12.20. La barra mostrada de peso despreciable está en equilibrio. Calcular el peso de las cargas P, si la longitud natural del resorte es $l_0 = 15\text{ cm}$, y su constante de elasticidad es $k = 4\text{ N/cm}$.

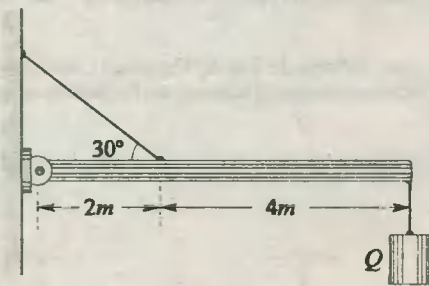


Fig. Prob. 12.17

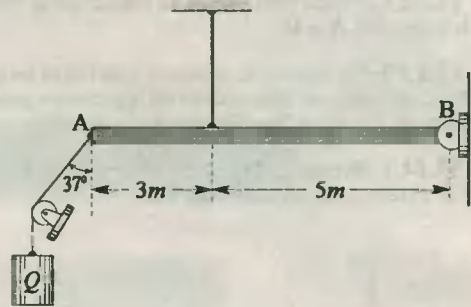


Fig. Prob. 12.18

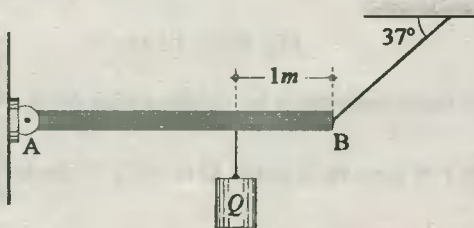


Fig. Prob. 12.19

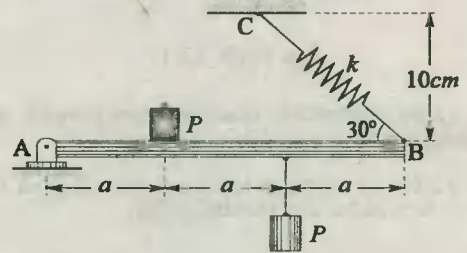


Fig. Prob. 12.20

12.21. En el sistema mostrado, la barra uniforme y homogénea pesa 50 N , y está sostenida por tres resortes de constantes $k_1 = 10\text{ N/cm}$, $k_2 = 16\text{ N/cm}$, y $k_3 = 5\text{ N/cm}$. Sabiendo que la barra está en equilibrio, y que el resorte 2 presenta un estiramiento de 5 cm , calcular la deformación de los otros dos resortes.

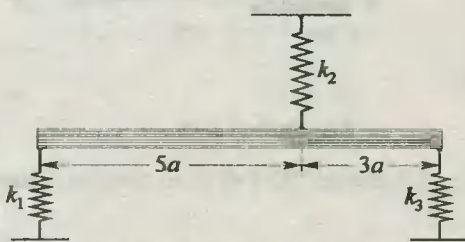


Fig. Prob. 12.21

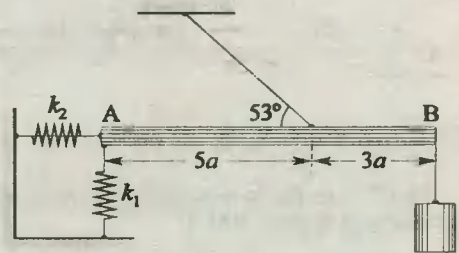


Fig. Prob. 12.22

12.22. La barra mostrada está en equilibrio, pesa 200 N , y es uniforme y homogénea. El bloque pesa 60 N , y las constantes de elasticidad de los resortes son $k_1 = 4\text{ N/cm}$, y $k_2 = 48\text{ N/cm}$. Calcular la deformación de cada resorte.

12.23. Una barra de acero que pesa $1\ 320\ N$ descansa en un plano horizontal y una cuña C. En el extremo B cuelga un bloque que pesa $1\ 000\ N$. Un equilibrista de $800\ N$ de peso inicia su movimiento desde A. ¿En qué punto respecto a C la barra quedará en posición horizontal?

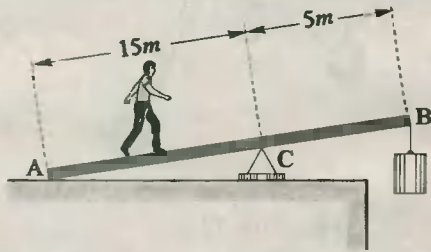


Fig. Prob. 12.23

12.24. Una barra AB de $14\ m$ de longitud pesa $400\ N$, es rígida, uniforme y homogénea, y se apoya en una bisagra en C. Por los puntos A y B se suspenden dos bloques de $520\ N$ y $50\ N$ de peso respectivamente. Calcular cuál deberá ser el peso de un bloque Q que al colocarse en D logre que la barra quede en posición horizontal (Ver figura).

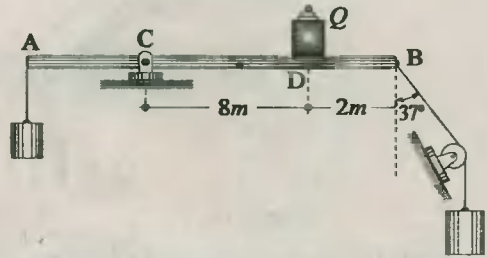


Fig. Prob. 12.24

12.25. Una barra uniforme y homogénea de $130\ N$ de peso y $12\ m$ de longitud se apoya en la bisagra A. Si en la posición indicada en la figura se encuentra en equilibrio, calcular el peso apropiado del bloque Q que producirá una compresión de $60\ N$ sobre la barra.

12.26. El sistema mostrado se encuentra en equilibrio. Se sabe que el peso de la barra es $P_b = 15\ N$ y mide $15\ m$, y además el peso del bloque suspendido es $5\ N$. Calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio.
 Nota: G = centro de gravedad de la barra horizontal.

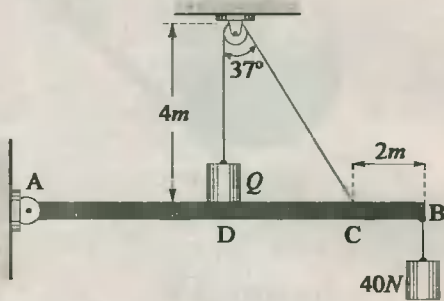


Fig. Prob. 12.25

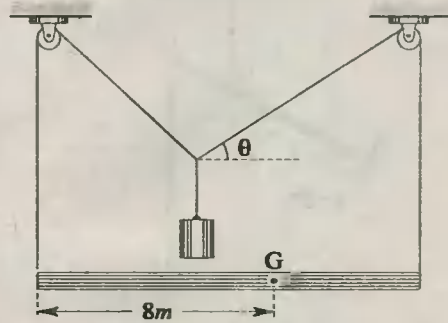


Fig. Prob. 12.26

12.27. La armadura mostrada es imponderable y se encuentra en equilibrio sostenido en sus extremos por dos cargas $P = 20\ N$ y $Q = 70\ N$. Calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio del sistema. No existe rozamiento en O. $AB = 90\ cm$.

12.28. La figura muestra una estructura de peso despreciable. En los extremos A y B se encuentran soldadas dos pequeñas esferas de pesos $P_A = 60\ N$ y $P_B = 10\ N$. Calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio del sistema.

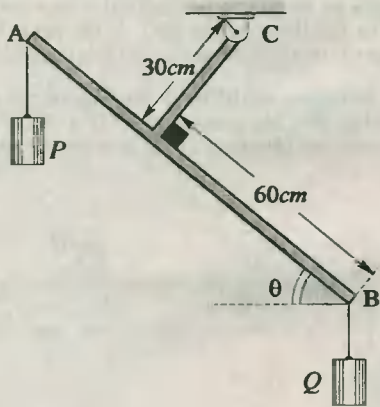


Fig. Prob. 12.27

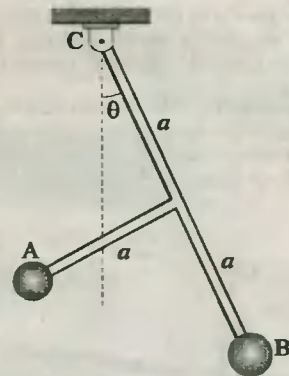


Fig. Prob. 12.28

12.29. Una varilla uniforme y homogénea de 40 cm de longitud es doblada en su punto medio B, formando un ángulo agudo. Calcular la longitud x para que el lado BC permanezca en posición vertical.

12.30. En la figura se muestra una puerta de forma rectangular, uniforme y homogénea que se encuentra en equilibrio. Si su peso es 60 N, calcular cuál debe ser el peso del cilindro homogéneo colocado encima de ella, cuyo radio es 15 cm.

Nota: La cuerda BC mide 10 cm, AB = 30 cm, y $\theta = 37^\circ$.

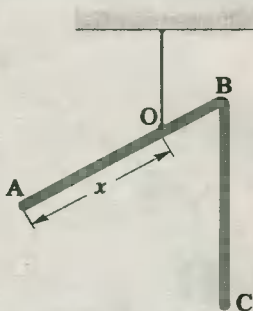


Fig. Prob. 12.29

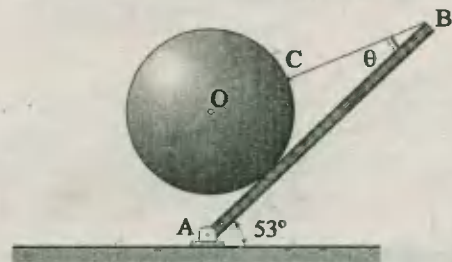


Fig. Prob. 12.30

12.31. La figura muestra dos esferas de igual radio, unidas por una barra rígida e impenetrable, apoyadas sobre una superficie semiesférica. Si el peso de las esferas es $P_1 = 80\text{ N}$ y $P_2 = 50\text{ N}$, calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio del sistema mecánico. No existe rozamiento.

12.32. En la figura se muestran dos esferas del mismo material cuyos radios son $a = 3\text{ cm}$ y $b = 2\text{ cm}$, apoyadas sobre una superficie hemisférica de radio $R = 11\text{ cm}$. Sabiendo que no hay rozamiento entre las superficies en contacto, y que $\sin\beta = 1/6$, calcular la medida del ángulo α que define la posición de equilibrio.

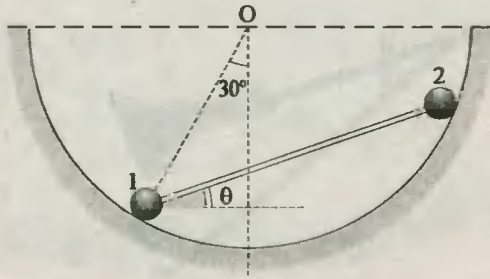


Fig. Prob. 12.31

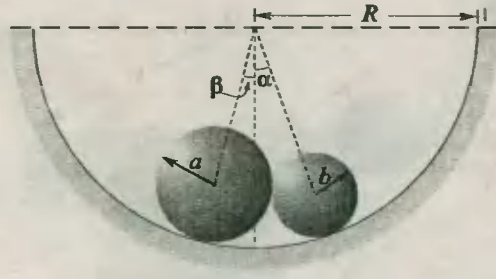


Fig. Prob. 12.32

12.33. La figura muestra una barra homogénea doblada en forma de *L*. Calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio, si en el sistema se verifica la siguiente relación: $a^2 + 2ab = b^2$, siendo *a* y *b* las dimensiones de la barra.

12.34. Tres pequeñas esferas cuyos pesos son $P_A = 30\text{ N}$, $P_B = 20\text{ N}$, y $P_C = 10\text{ N}$, pueden moverse en un aro circular vertical debido a que están enlazadas por tres varillas de peso despreciable e igual longitud. Calcular la medida del ángulo que define la posición de equilibrio.

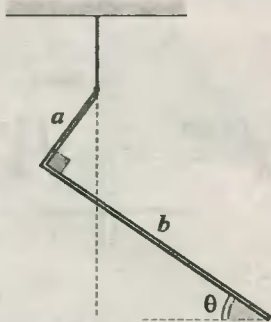


Fig. Prob. 12.33

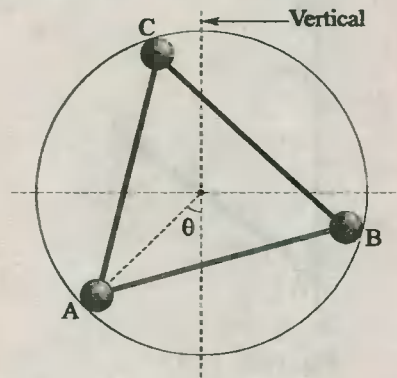


Fig. Prob. 12.34

12.35. En la figura, los discos cilíndricos son de igual radio *r*. A, B y C pesan 4 *N* cada uno. Calcular el peso del disco D para que el sistema se mantenga en equilibrio en la posición mostrada, sabiendo además que descansan sobre una superficie semicilíndrica de radio 5*r*.

12.36. En la figura se muestra una varilla delgada, uniforme y homogénea doblada en B, de modo que al apoyarse en A adopta su posición de equilibrio. Si $BC = 3AB$, calcular el ángulo θ que define dicha posición.

Equilibrio de fuerzas no paralelas

12.37. Determinar la tensión en el cable CD, si se sabe que su valor coincide con el peso de la barra uniforme y homogénea. El bloque Q pesa 15 *N*, y el sistema está en equilibrio. $AB = 10\text{ m}$, y $CB = 4\text{ m}$.

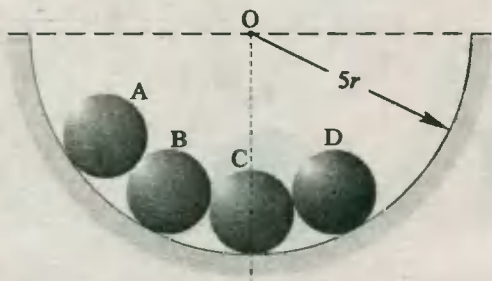


Fig. Prob. 12.35

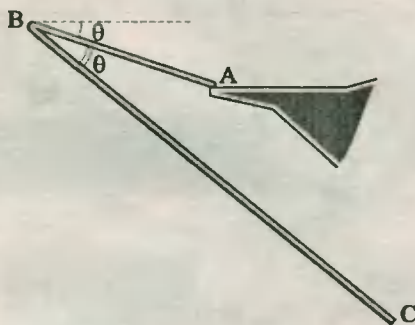


Fig. Prob. 12.36

12.38. La estructura mostrada está formada por tres varillas rígidas, imponderables y en equilibrio. Si la carga P pesa 160 N , calcular la fuerza de compresión que experimenta la varilla AC , cuya longitud es 20 cm .

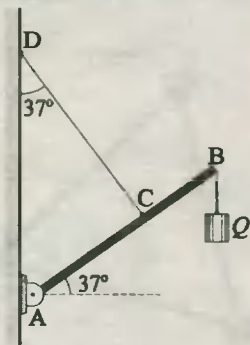


Fig. Prob. 12.37

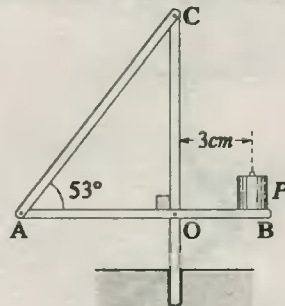


Fig. Prob. 12.38

12.39. En la figura mostrada, $AB = 15\text{ m}$, $L = 4\text{ m}$ y $F = 4\text{ N}$. Calcular el módulo de la fuerza P para que la barra de masa despreciable, pero rígida, se mantenga en equilibrio.

12.40. Sabiendo que el sistema mostrado se encuentra en equilibrio, determinar la reacción de parte de la barra AB en C , si se sabe que dicha barra es uniforme, homogénea, tiene 20 m de longitud y pesa 400 N . No existe rozamiento.

12.41. Una placa de forma hexagonal regular y homogénea de 10 m de lado y $6\,000\text{ N}$ de peso se encuentra en equilibrio en la posición mostrada. Calcular la tensión en la cuerda AB y la reacción en la bisagra C .

12.42. Para el sistema mostrado, calcular la tensión en la cuerda, si la barra uniforme y homogénea pesa $10\sqrt{3}\text{ N}$ y tiene una longitud L .

12.43. En la figura, una palanca está articulada en B y sujeta por un cable en A . Si $P = 200\text{ N}$, calcular la tensión en el cable.

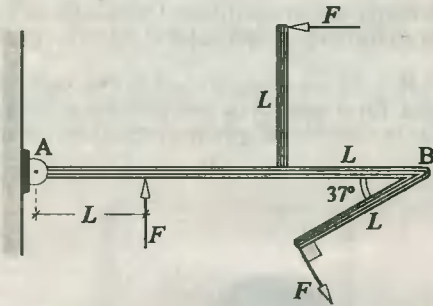


Fig. Prob. 12.39

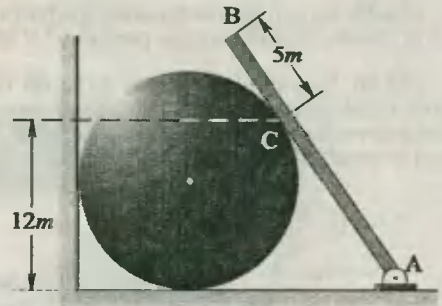


Fig. Prob. 12.40

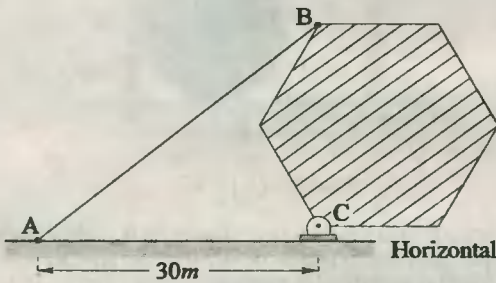


Fig. Prob. 12.41

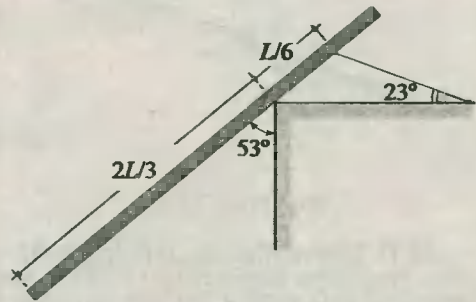


Fig. Prob. 12.42

12.44. En el sistema en equilibrio mostrado, la barra es uniforme y homogénea, y pesa 60 N. Si el bloque suspendido pesa 25 N, determinar la medida del ángulo θ .

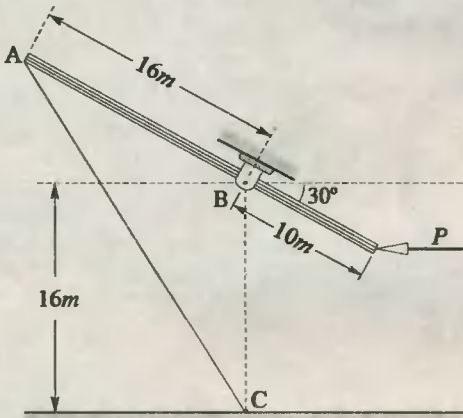


Fig. Prob. 12.43

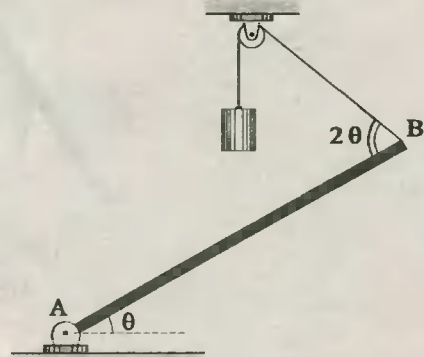


Fig. Prob. 12.44

12.45. En la figura se muestra una barra uniforme y homogénea en equilibrio. Calcular la tensión en la cuerda, si la barra cuyo peso es 63 N se logra colocar en forma perpendicular al plano inclinado.

12.46. Un cilindro circular recto sin tapas de radio $R = 20\text{ cm}$ descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento, tal como se muestra en la figura. En el interior de este cilindro se colocan dos esferas de igual peso $P = 100\text{ N}$ e iguales radios $r = 12\text{ cm}$. Calcular el mínimo peso Q del cilindro con la condición de que no vuelque.

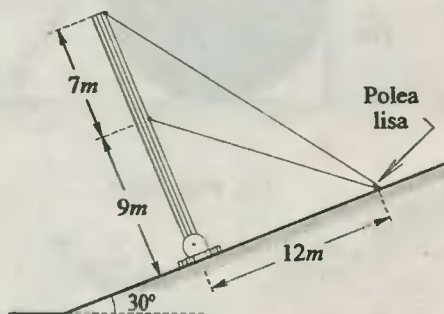


Fig. Prob. 12.45

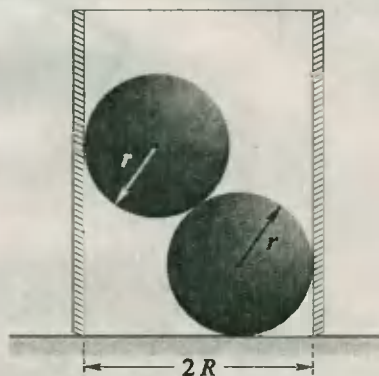


Fig. Prob. 12.46

12.47. Una varilla delgada de longitud $L = 2\text{ m}$ y peso P está sujeta a un collarín en B , y descansa sobre un cilindro liso de radio $r = 27\text{ cm}$. Sabiendo que el collarín puede deslizarse libremente a lo largo de la guía vertical, calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio de la varilla.

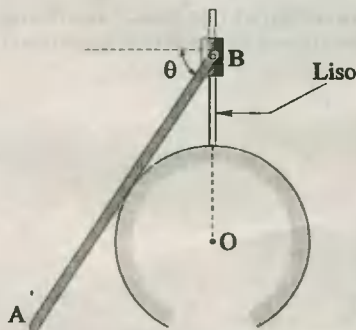


Fig. Prob. 12.47

13

Centro de Gravedad

13.1. Características del CG para sólidos

a) Ocupa un lugar apoyado, la línea de acción del peso debe intersectar a la base de apoyo.

13.2. Tipos de equilibrio

13.2.a. Equilibrio estable (h_1).

13.2.b. Equilibrio inestable (h_2).

13.2.c. Equilibrio indiferente (h_3).

$$h_3 < h_1 < h_2 \quad (13.1)$$

siendo h la altura del CG respecto a la base de apoyo.

13.3. Fórmulas del CG

13.3.a. Pesos :

$$X = \frac{\sum P_i \cdot x_i}{P_{\text{tot}}} \quad ; \quad Y = \frac{\sum P_i \cdot y_i}{P_{\text{tot}}} \quad (13.2)$$

13.3.b. Masas:

$$X = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{m_{\text{tot}}} \quad ; \quad Y = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{m_{\text{tot}}} \quad (13.3)$$

13.3.c. Volúmenes :

$$X = \frac{\sum V_i \cdot x_i}{V_{\text{tot}}} \quad ; \quad Y = \frac{\sum V_i \cdot y_i}{V_{\text{tot}}} \quad (13.4)$$

13.3.d. Áreas :

$$X = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{A_{\text{tot}}} \quad ; \quad Y = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A_{\text{tot}}} \quad (13.5)$$

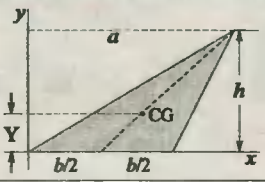
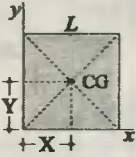
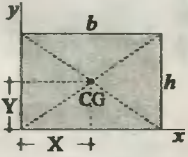
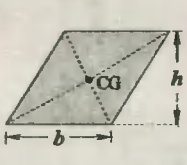
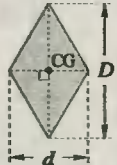
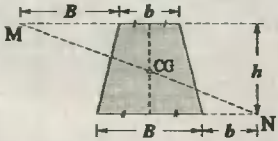
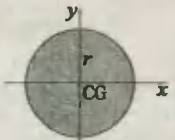
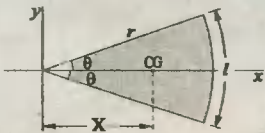
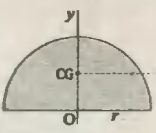
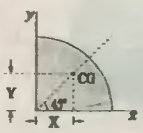
13.3.e. Longitudes :

$$X = \frac{\sum L_i \cdot x_i}{L_{\text{tot}}} \quad ; \quad Y = \frac{\sum L_i \cdot y_i}{L_{\text{tot}}} \quad (13.6)$$

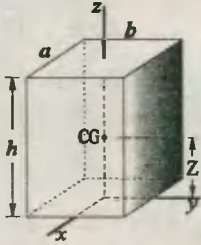
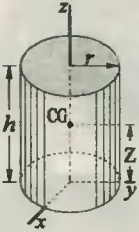
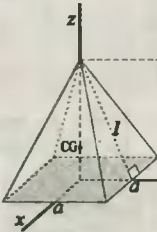
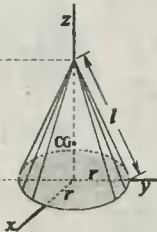
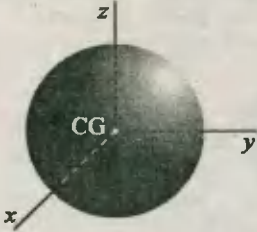
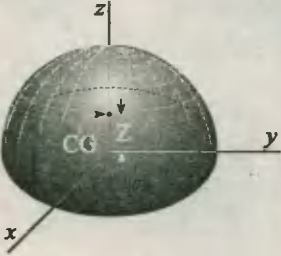
Figuras lineales (Cuadro 13.1)

NOMBRE	FIGURA	X	Y	LONGITUD
SEGMENTO RECTO		$L/2$	0	L
TRIANGULO		El CG se ubica en el incentro del triángulo formado al unir los puntos medios de los lados.		$a + b + c$
CUADRILATEROS		El CG se ubica en el punto de intersección de las diagonales. $Y = h/2$		Suma de los lados
CIRCUNFERENCIA		0	0	$2\pi r$
ARCO DE CIRCUNFERENCIA		$\frac{r \text{ sen } \theta}{\theta}$	0	$2\theta r$
SEMI - CIRCUNFERENCIA		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
CUADRANTE DE CIRCUNFERENCIA		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$

Superficies planas (Cuadro 13.2)

NOMBRE	FIGURA	X	Y	AREA
TRIANGULO		$\frac{a+b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
CUADRADO		$L/2$	$L/2$	L^2
RECTANGULO		$b/2$	$h/2$	bh
PARALELOGRAMO			$h/2$	bh
ROMBO		Punto de intersección de las diagonales		$\frac{1}{2} Dd$
TRAPECIO		Intersección de MN con la línea que une los puntos medios de las bases		$\frac{h}{3} \frac{(B+2b)}{B+b}$ $\frac{(B+b)h}{2}$
CIRCULO		0	0	πr^2
SECTOR CIRCULAR		$\frac{2r \text{ sen } \alpha}{3\alpha}$	0	$\frac{1}{2} lr = \theta r^2$
SEMICIRCULO		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
CUARTO DE CIRCULO		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$

Volumenes (Cuadro 13.3)

NOMBRE	FIGURA	Z	AREA	VOLUMEN
PRISMA RECTO		$h/2$	$2(ab + ah + bh)$	abh
CILINDRO		$h/2$	$2\pi r(r + h)$	$\pi r^2 h$
PIRAMIDE RECTA		$\frac{h}{4}$	$a^2 + 2 la$	$\frac{Ah}{3}$
CONO RECTO		$h/4$	$\pi r(r + l)$	$1/3 \pi r^2 h$
ESFERA		0	$4\pi r^2$	$4/3 \pi r^3$
SEMIESFERA		$\frac{3r}{8}$	$2 \pi r^2$	$2/3 \pi r^3$

PROBLEMAS

Pesos y masas

13.1. Se unen dos varillas uniformes y homogéneas AB de 40 N de peso y otra varilla BC semicircular de 60 N de peso. Determinar la abscisa del centro de gravedad del conjunto.

13.2. Determinar el centro de gravedad del sistema mostrado, si se sabe que los pesos para cada elemento son $P_1 = 4\text{ N}$, $P_2 = 8\text{ N}$, $P_3 = 3\text{ N}$, y $P_4 = 5\text{ N}$.

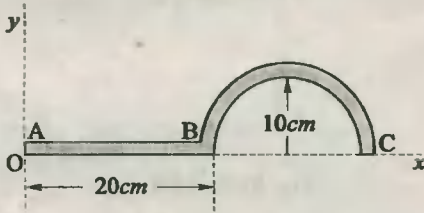


Fig. Prob. 13.1

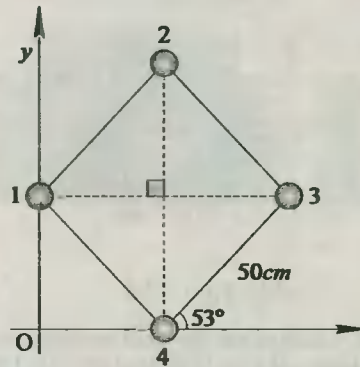


Fig. Prob. 13.2

13.3. En los vértices ABC de un triángulo rectángulo en B cuyo cateto AB mide 20 cm se han colocado las masas $m_A = 2\text{ kg}$, $m_B = 2,5\text{ kg}$, y $m_C = 8\text{ kg}$. Sabiendo que la recta OT pasa por el centro de gravedad del sistema, calcular la medida del ángulo θ .

13.4. Calcular el valor de la masa m_4 para que el centro de masa del sistema se ubique sobre el eje de ordenadas (Y), sabiendo que $m_1 = 8\text{ kg}$, $m_2 = 4\text{ kg}$, y $m_3 = m_4$.

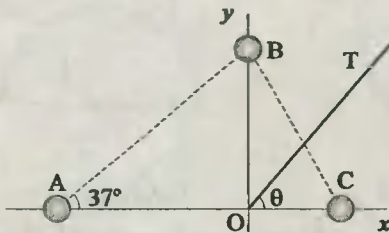


Fig. Prob. 13.3

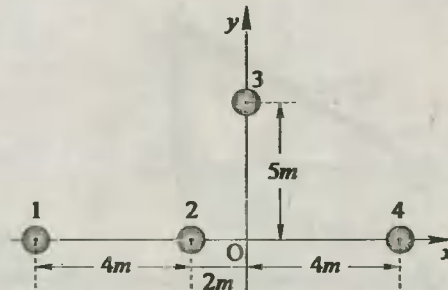


Fig. Prob. 13.4

13.5. En la figura se muestran cuatro losetas cuadradas de lados iguales a $2a$. El centro de masa del sistema tiene abscisa $X = +2a$. ¿Cuál es la densidad superficial de la loseta 4, si las otras tienen densidades $d_1 = 8\text{ kg/m}^2$, $d_2 = 6\text{ kg/m}^2$, $d_3 = 17\text{ kg/m}^2$?

Figuras lineales

13.6. Calcular las coordenadas del CG de la letra F, si ella está formada por alambres del mismo material y sección. $AB = BC = 10 \text{ cm}$; $CD = 12 \text{ cm}$, $BE = 8 \text{ cm}$.

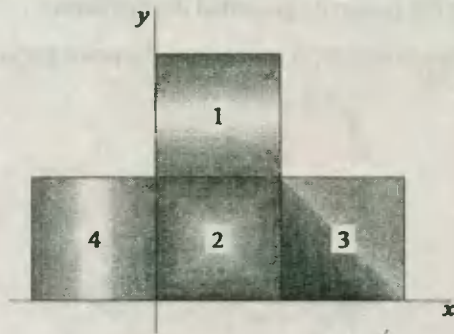


Fig. Prob. 13.5

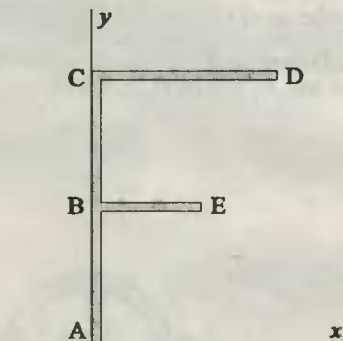


Fig. Prob. 13.6

13.7. Determinar las coordenadas del CG del triángulo mostrado, formado por alambres del mismo material y de la misma sección recta. $AC = 50 \text{ cm}$.

13.8. Un alambre se ha doblado en la forma que se muestra en la figura. Calcular la abscisa del CG, si $r = 55 \text{ cm}$.

13.9. Calcular la ordenada del CG del alambre mostrado, si se sabe que $r = 18 \text{ cm}$. Considerar que $\pi \approx 22/7$.

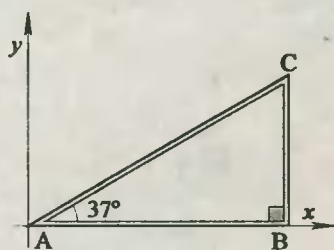


Fig. Prob. 13.7

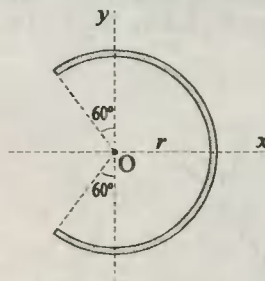


Fig. Prob. 13.8



Fig. Prob. 13.9

13.10. En la figura se muestra un sistema formado por tres alambres del mismo material y de igual sección. Determinar la ordenada del CG ($\pi \approx 22/7$).

13.11. En la figura se muestra una sección de un elemento espiral. Sabiendo que $a = 77 \text{ cm}$, ¿Cuáles son las coordenadas del CG de todo el alambre, suponiendo que éste es uniforme y homogéneo?. Los puntos A, C y B son respectivamente los centros de los alambres 1, 2 y 3. ($\pi \approx 22/7$).

13.12. Un alambre en forma de gancho está formado por una semicircunferencia y un segmento de recta. Si $r = \sqrt{5} \text{ m}$, Calcular la longitud del segmento BC para que la abscisa del CG del conjunto sea $X = 0$ ($\pi \approx 22/7$).

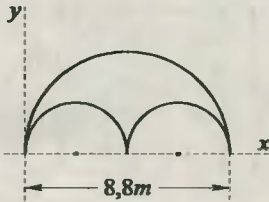


Fig. Prob. 13.10

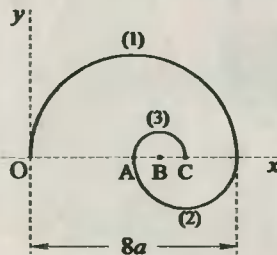


Fig. Prob. 13.11

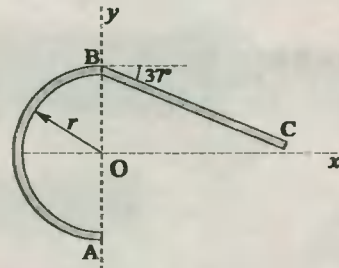


Fig. Prob. 13.12

Areas

13.13. Determinar las coordenadas del CG del triángulo ABC mostrado en la figura, siendo $a = 6 \text{ m}$, $b = 9 \text{ m}$, y $h = 6 \text{ m}$.

13.14. En la figura se muestra un trapecio rectangular cuyas bases miden $a = 6 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, y altura $h = 9 \text{ cm}$. Determinar las coordenadas del CG de la figura.

13.15. En la figura se muestra un rombo cuyo CG tiene abscisa $X = 3/4 a$, siendo a el lado del rombo. Calcular la medida del ángulo α .

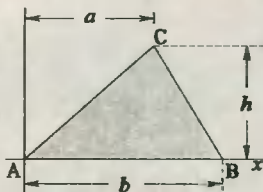


Fig. Prob. 13.13

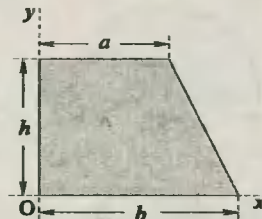


Fig. Prob. 13.14

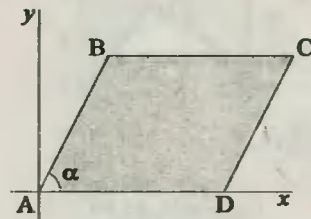


Fig. Prob. 13.15

13.16. Determinar la altura h del triángulo isósceles, para que el CG de la lámina mostrada se ubique en el origen de coordenadas.

13.17. Dos láminas del mismo material e igual espesor tienen su CG en el punto de contacto entre ellos. Sabiendo que $r = \sqrt{3/\pi} \text{ m}$, calcular la altura h del triángulo isósceles.

13.18. Se ha practicado un corte semicircular a un cuadrado de lado $L = 51 \text{ cm}$. Determinar el CG de la lámina que queda ($\pi \approx 22/7$).

13.19. Determinar la altura h del triángulo isósceles que se debe extraer del cuadrado mostrado cuyo lado mide $L = 2(3 + \sqrt{3}) \text{ m}$, para que el CG de la parte que queda concuerde con el vértice M del triángulo.

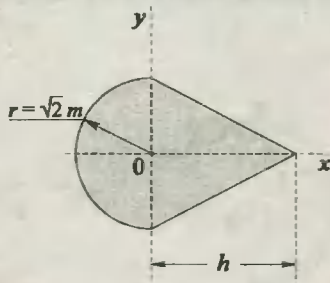


Fig. Prob. 13.16

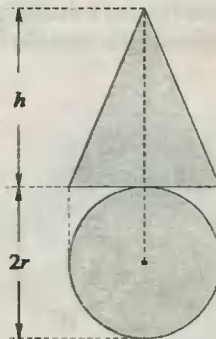


Fig. Prob. 13.17

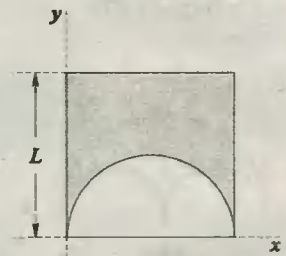


Fig. Prob. 13.18

13.20. Calcular la posición del CG de la lámina mostrada, a la cual se le ha practicado un corte semicircular de radio igual a 99 cm ($\pi \approx 22/7$).

13.21. A una lámina plana circular homogénea se le ha extraído una placa circular cuyo radio es $r = 30\text{ cm}$, tangente a su periferia. Determinar el CG de la parte que queda.

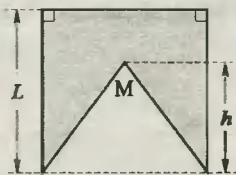


Fig. Prob. 13.19

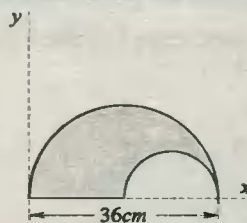


Fig. Prob. 13.20

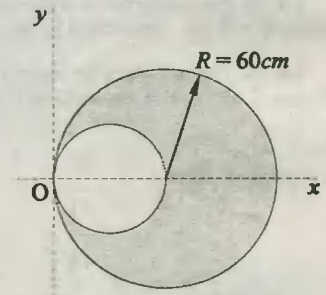


Fig. Prob. 13.21

13.22. Determinar el CG del segmento circular mostrado. $L = 12\text{ cm}$, y $\pi \approx 22/7$.

Volumenes

13.23. Determinar el CG del sistema mostrado, formado por un cubo y una esfera del mismo material. Se sabe también que el lado del cubo es $L = 32\text{ cm}$.

13.24. Un sólido está compuesto de un cono recto y un cilindro. A este último se le ha practicado una cavidad semiesférica en su base de apoyo. Determinar la altura del cono para que la ordenada del CG del sistema sea $Y = 2R$ ($R = \sqrt{11}\text{ m}$).

13.25. Calcular la altura h que debe tener el cono para que el CG del sistema mostrado coincida con el punto de contacto entre la esfera y el cono. Se sabe también que la densidad de la esfera es el doble que la del cono ($R = \sqrt{2}\text{ m}$).

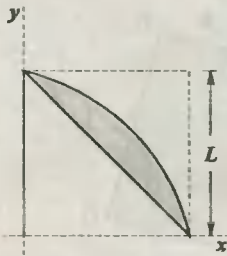


Fig. Prob. 13.22

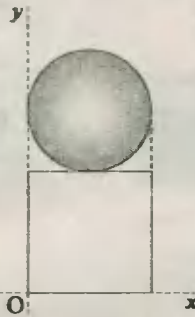


Fig. Prob. 13.23

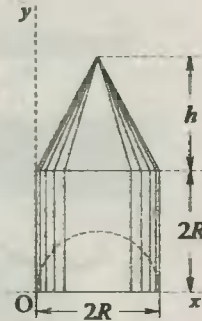


Fig. Prob. 13.24

13.26. Se tornea una de las bases de un cilindro recto de madera de altura $H = 100\text{ cm}$, generándose un agujero cónico cuya base coincide con la del cilindro. ¿Qué altura h deberá tener el cono para que el CG del sólido que queda coincida con su vértice?

13.27. A un hemisferio de radio $R = 24\text{ cm}$ se le ha practicado un agujero esférico tangente a aquel. ¿Cuál es la ordenada del CG del sólido que queda?

Aplicaciones a la Estática

13.28. ¿Qué radio r debe tener el hemisferio del cuerpo sólido mostrado, para que éste retorne siempre a su posición de equilibrio cada vez que su parte superior sea oscilada hacia cualquier lado?. Tanto el cono como el hemisferio son homogéneos y del mismo material.

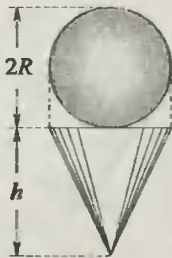


Fig. Prob. 13.25

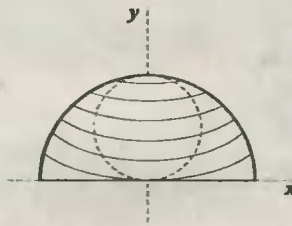


Fig. Prob. 13.27

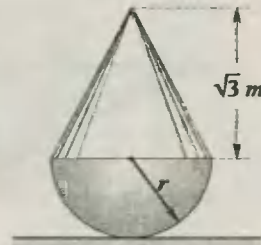


Fig. Prob. 13.28

13.29. Se tiene un alambre semicircular que cuelga de uno de sus extremos. ¿Qué ángulo hace la línea AB con la vertical cuando el alambre adopte su posición de equilibrio?

13.30. La figura muestra una placa cuadrada homogénea cuyo lado mide $L = 80\text{ cm}$ en posición de equilibrio. Si $OB = 10\text{ cm}$, calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio.

13.31. En la figura se muestra una lámina de forma triangular que está colgada del punto D del lado AB mediante un hilo. ¿Cuánto debe medir el segmento AD para que AB quede horizontal en la posición de equilibrio?. La altura relativa al lado AB divide a éste en dos segmentos de longitudes $AH = 27\text{ cm}$, y $HB = 9\text{ cm}$.

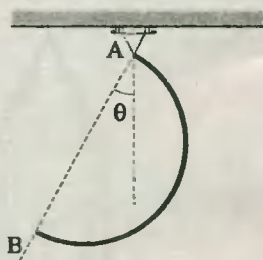


Fig. Prob. 13.29

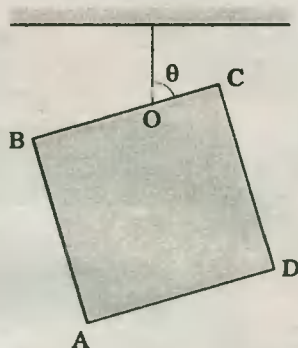


Fig. Prob. 13.30

13.32. Se ha suspendido un alambre uniforme y homogéneo doblado en ángulo recto en B, tal como se indica en la figura. Calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio. $AB = \sqrt{3} \text{ m}$, $BC = 2 \text{ m}$.

13.33. Dos esferillas de masas $m_1 = 8 \text{ kg}$ y $m_2 = 6 \text{ kg}$ están unidas mediante un alambre flexible e imponderable, tal como se muestra en la figura. Calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio. Despreciar todo tipo de rozamiento.

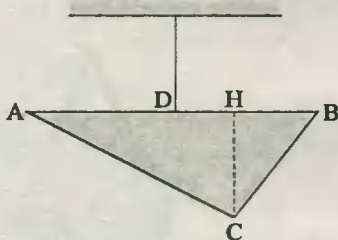


Fig. Prob. 13.31

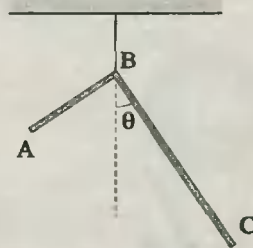


Fig. Prob. 13.32

13.34. La estructura mostrada se encuentra en equilibrio. Calcular el valor de la masa m_A , si $m_B = 15 \text{ kg}$. Además $AD = 10 \text{ cm}$, $DB = 35 \text{ cm}$, $CD = 20 \text{ cm}$, y $\theta = 37^\circ$.

13.35. Un semicilindro que pesa 33 N se encuentra en equilibrio apoyado en un pasador en A y por una pared en B. Calcular la reacción de la pared. Despreciar el rozamiento.

13.36. Un semicilindro de 66 N de peso se encuentra en equilibrio sostenido por una cuerda en A, el cual experimenta una tensión de 19 N . Calcular la medida del ángulo θ . No existe rozamiento ($\pi \approx 22/7$).

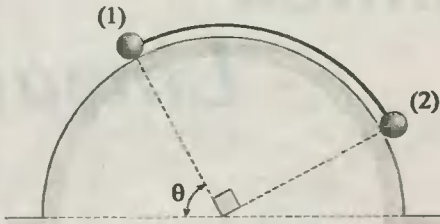


Fig. Prob. 13.33

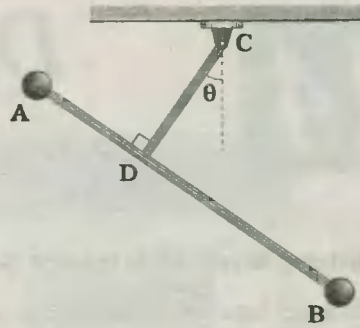


Fig. Prob. 13.34

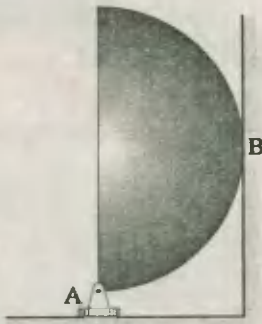


Fig. Prob. 13.35

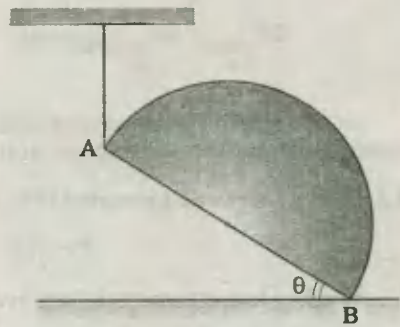


Fig. Prob. 13.36

14

Dinámica Lineal

14.1. Sistema de referencia inercial (S.R.I.)

Es aquel lugar del espacio que se encuentra en reposo absoluto o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme.

14.2. Segunda ley de Newton desde un S.R.I.

$$\bar{F}_R = m\bar{a} \quad (14.1)$$

$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a} \quad (14.2)$$

$$\Sigma F_{\substack{\text{a favor} \\ \text{de } a}} - \Sigma F_{\substack{\text{en contra} \\ \text{de } a}} = ma \quad (14.3)$$

siendo F_R la resultante de todas las fuerzas externas al cuerpo o sistema elegido, m la masa del mismo, y a su aceleración respecto al sistema elegido.

14.3. Peso o fuerza de gravedad (P)

$$\bar{P} = m\bar{g} \quad (14.4)$$

siendo g la aceleración de la gravedad local.

14.4. Ley de D'Alembert válido en un S.R. no I.

$$\bar{F}_I = m(-\bar{a}) \quad (14.5)$$

siendo F_I la fuerza de inercia que experimenta un cuerpo de masa m , el que a su vez presenta una aceleración a visto desde un S.R.I.

14.5. Segunda ley de Newton en un S.R. no I.

$$\Sigma \bar{F} + m(-\bar{a}_0) = m\bar{a}_i \quad (14.6)$$

siendo a_0 la aceleración del sistema respecto a Tierra, y a_i la aceleración del cuerpo de masa m respecto al sistema de referencia no inercial (S.R. no I).

14.6. Gravedad en sistemas acelerados

$$\bar{g}_{ef} = \bar{g} + (-\bar{a}) \quad (14.7)$$

En base a la Ley de D'Alembert se define la gravedad efectiva (g_{ef}) como la resultante de la gravedad terrestre (\bar{g}) con el opuesto de la aceleración que presenta el sistema respecto a Tierra ($-\bar{a}$).

El vector g_{ef} determina siempre la orientación que mantienen los cuerpos cuando alcanzan su posición de equilibrio en el sistema.

PROBLEMAS

Nota: Para todos los problemas considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$, y despreciar la fricción en poleas, a menos que se indique lo contrario.

Sistemas inerciales

14.1. Un bloque de masa $m = 40 \text{ kg}$ se encuentra inicialmente en reposo descansando sobre un plano horizontal liso. De pronto una fuerza constante $F = 80 \text{ N}$ lo empuja en dirección horizontal durante $t = 10 \text{ s}$. Calcular:

- La aceleración del bloque.
- La velocidad que adquiere al término de los 10 s .
- El espacio recorrido durante dicho tiempo.

14.2. Un automóvil que pesa 10^4 N se detiene a los 30 s de frenarlo, y durante este tiempo recorre una distancia de 360 m . Calcular:

- La velocidad inicial del automóvil.
- La fuerza de frenado.

14.3. Un rifle cuyo cañón tiene 60 cm de longitud dispara una bala de 200 g de masa, que luego de $0,01 \text{ s}$ lo abandona. Calcular la fuerza media que desarrollaron los gases sobre la bala.

14.4. Una bala de 300 g de masa impacta contra un tablón fijo de 10 cm de espesor. Si ingresa con $v_1 = 300 \text{ m/s}$ y sale con $v_2 = 200 \text{ m/s}$, ¿Cuál es la fuerza media de rozamiento que le imprimió el tablón, considerándola constante?.

14.5. Una persona pesa 600 N sobre la superficie terrestre. ¿Cuánto pesará esta persona sobre la superficie lunar, donde la aceleración de la gravedad es $1/6$ de la que existe en la superficie terrestre?

14.6. Una argolla metálica de 10 kg de masa puede deslizar por una guía horizontal lisa. La argolla está unida a un resorte de 15 cm de longitud natural. ¿Qué aceleración experimenta dicha argolla en la posición mostrada en la figura? ($k = 80 \text{ N/cm}$).

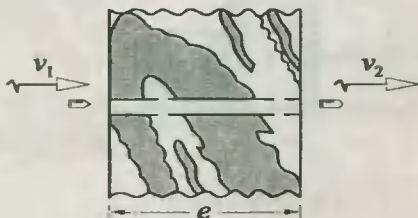


Fig. Prob. 14.4

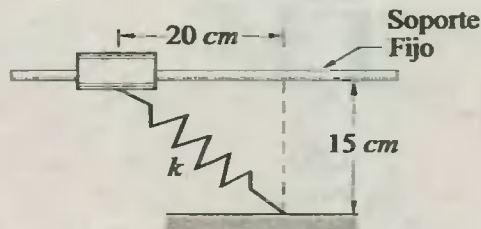


Fig. Prob. 14.6

14.7. El vagón mostrado experimenta una aceleración $a = 5 \text{ m/s}^2$. Si la masa del carrito es $m = 20 \text{ kg}$, ¿Cuál es la lectura del dinamómetro? (No hay rozamiento).

14.8. Sabiendo que el bloque mostrado presenta una aceleración $a = 6 \text{ m/s}^2$, calcular el valor de la fuerza de fricción que lo afecta durante su movimiento, si $F = 350 \text{ N}$.

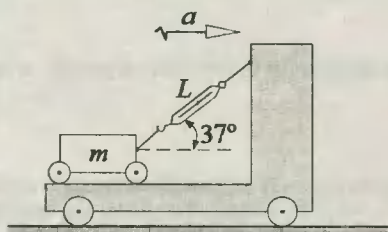


Fig. Prob. 14.7

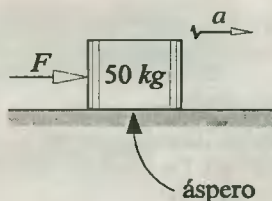


Fig. Prob. 14.8

14.9. Si el bloque mostrado tiene una masa $m = 5 \text{ kg}$, y posee una aceleración $a = 5 \text{ m/s}^2$, calcular:

- El valor de la fuerza F_1 , si $F_2 = 30 \text{ N}$, y $\theta = 37^\circ$.
- La fuerza de compresión N entre el bloque y el piso.

14.10. Sobre una piedra de masa m actúan dos fuerzas F_1 y F_2 simultáneamente. Cuando F_1 actúa sola, le produce una aceleración $a_1 = 7 \text{ m/s}^2$, y cuando F_2 actúa sola le produce una aceleración $a_2 = 15 \text{ m/s}^2$. ¿Qué aceleración le producirán ambas fuerzas a la vez, si se aplican formando un ángulo $\theta = 53^\circ$?

14.11. Cuando una fuerza F actúa sobre un cuerpo de masa m le produce una aceleración $a_1 = 6 \text{ m/s}^2$, y cuando actúa sobre un cuerpo de masa M le produce una aceleración $a_2 = 4 \text{ m/s}^2$. ¿Qué aceleración le producirá a ambos a la vez?

14.12. Los bloques de la figura poseen las siguientes masas: $m_1 = 15 \text{ kg}$, y $m_2 = 5 \text{ kg}$. Ambos son empujados por una fuerza externa $F = 100 \text{ N}$. Si se sabe que sólo existe rozamiento entre el bloque 2 y el piso, siendo la fuerza de fricción $f = 20 \text{ N}$, calcular:

- La aceleración del conjunto de bloques.
- La fuerza de compresión entre ellos.

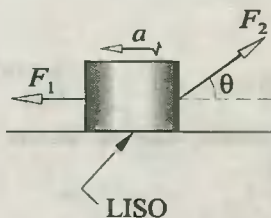


Fig. Prob. 14.9



Fig. Prob. 14.12

14.13. Dos bloques sujetos por una cuerda son elevados con una fuerza $Q = 240 \text{ N}$. Si $m_1 = 6 \text{ kg}$, y $m_2 = 9 \text{ kg}$, calcular la tensión en la cuerda que los une.

14.14. Una soga de 20 kg de masa y 5 m de longitud es jalada verticalmente hacia arriba por una fuerza $R = 300 \text{ N}$. Calcular la fuerza de tensión a 2 m del extremo inferior, sabiendo que es uniforme y homogénea.

14.15. Un paracaidista y su equipo tienen una masa de 100 kg, y está cayendo con velocidad constante de 30 m/s. Cuando abre su paracaídas a una altura de 800 m, encuentra una resistencia atmosférica al avance de 1 056 N. Calcular su velocidad de aterrizaje.

14.16. Un bloque de masa $m = 40\text{ kg}$ resbala por un plano inclinado, según se muestra. Si no existe rozamiento entre el bloque y el plano inclinado, calcular:

- a) La aceleración del bloque.
- b) La reacción normal del plano inclinado sobre el bloque.

14.17. Calcular la aceleración del bloque de la figura, si se sabe que su masa es 20 kg, y $F = 250\text{ N}$. La fuerza F es siempre horizontal.



Fig. Prob. 14.13

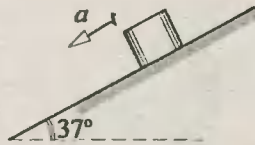


Fig. Prob. 14.16

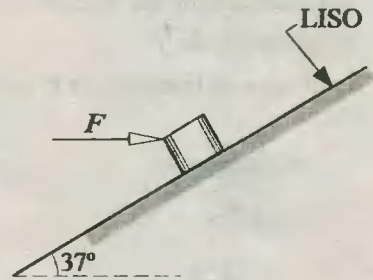


Fig. Prob. 14.17

14.18. Para el sistema de bloques mostrado, calcular:

- a) La aceleración del sistema.
- b) La tensión en la cuerda.

14.19. Dado el siguiente sistema libre de fricción, calcular la fuerza de contacto horizontal entre el bloque A y el coche C. $m_A = 10\text{ kg}$; $m_B = 50\text{ kg}$; $m_C = 40\text{ kg}$.

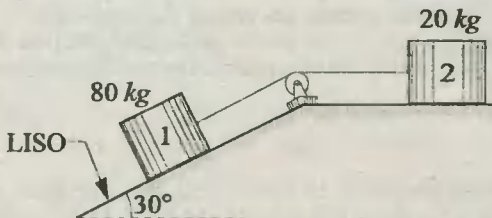


Fig. Prob. 14.18

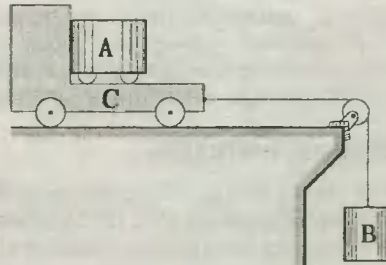


Fig. Prob. 14.19

14.20. En el sistema mostrado libre de rozamiento se tienen los bloques 1 y 2 inicialmente en reposo, con masas $m_1 = 20 \text{ kg}$, y $m_2 = 30 \text{ kg}$. Si logramos cortar la cuerda que une al bloque 1 con el piso, se pide calcular:

- La aceleración que adquieren los bloques.
- El tiempo que emplea el bloque 2 en llegar al piso.

14.21. Determinar la fuerza F necesaria que evitará que el coche de masa $m = 10 \text{ kg}$ resbale sobre la cuña de masa $M = 90 \text{ kg}$, siendo $\theta = 37^\circ$. No existe rozamiento.

14.22. Un péndulo de masa $m = 3 \text{ kg}$ cuelga de una cuerda suspendida de un extremo del techo de un coche de masa $M = 9 \text{ kg}$. Cuando el sistema es jalado con una fuerza $F = 35 \text{ N}$, permanente y según como se indica en la figura, la cuerda del péndulo se separa de la vertical un ángulo θ . Calcular:

- La aceleración del sistema.
- La medida de θ .
- El valor de la tensión en la cuerda.

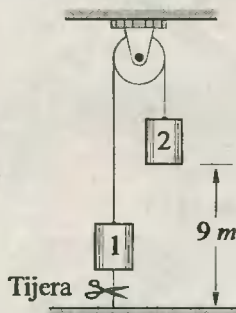


Fig. Prob. 14.20

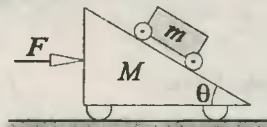


Fig. Prob. 14.21

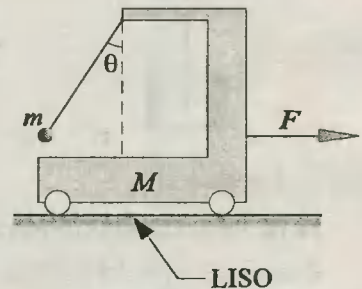


Fig. Prob. 14.22

14.23. Un aerostato de masa M comenzó a descender con una aceleración constante a . Determinar la masa del lastre que es necesario tirar por la borda para que el aerostato tenga la misma aceleración, pero dirigida hacia arriba. Despreciar la resistencia del aire.

14.24. El sistema mostrado se encuentra en equilibrio, siendo las cargas de pesos iguales a $P = 30 \text{ N}$ cada uno. ¿Qué peso P_1 debe ser agregado a uno de los platos para que la lectura del dinamómetro no varíe después de ser retirado un peso $P_2 = 10 \text{ N}$ del otro plato?. Despreciar las masas de las poleas, cuerda, dinamómetro y platos.

Sistemas no inerciales

14.25. En el interior de un cohete se encuentra un bloque de 10 kg de masa suspendido de un dinamómetro. Cuando la nave inicia su movimiento lo hace con una aceleración $a = 4,2 \text{ m/s}^2$. ¿Cuál será la lectura del dinamómetro durante el despegue? ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

14.26. Un hombre de 60 kg de masa va dentro de un ascensor que se mueve verticalmente. Calcular la lectura de la balanza que se encuentra bajo los pies del hombre cuando el ascensor acelera a razón de 6 m/s^2 , primero hacia arriba y después hacia abajo.

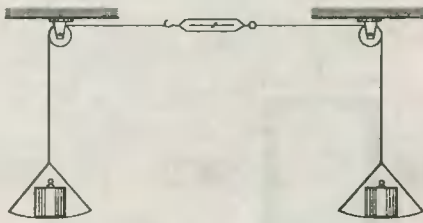


Fig. Prob. 14.24

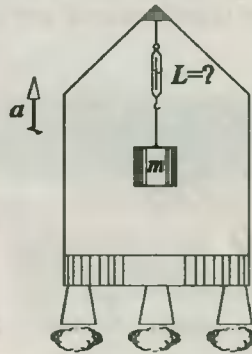


Fig. Prob. 14.25

14.27. Un bloque de masa m se encuentra resbalando sobre un plano inclinado ($\theta = 30^\circ$) que viaja en un ascensor que acelera hacia arriba con $a = 4 \text{ m/s}^2$. Calcular la aceleración a' con que el bloque se desliza respecto al plano inclinado.

14.28. Dos bloques de masas $m_1 = 4 \text{ kg}$, y $m_2 = 8 \text{ kg}$ están unidas por una cuerda, según se muestra en la figura. Ambos viajan en un ascensor que acelera hacia abajo con $a = 4 \text{ m/s}^2$. Calcular la aceleración de cada bloque respecto a un observador ubicado en Tierra.

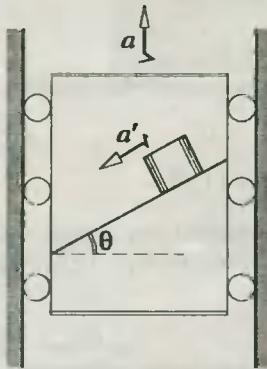


Fig. Prob. 14.27

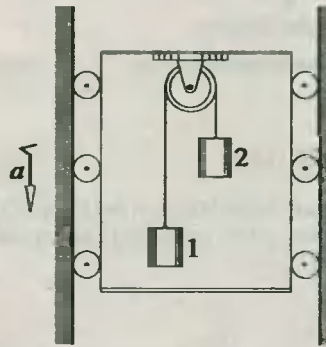


Fig. Prob. 14.28

14.29. Una carga de masa $m = 10 \text{ kg}$ está colgada del gancho de un dinamómetro de masa despreciable, el que a su vez está prendido del techo de un vagón que acelera a razón de $a = 24 \text{ m/s}^2$. ¿Cuánto marca el dinamómetro?

14.30. Determinar la máxima aceleración que puede experimentar la plataforma mostrada, de tal modo que el paralelepípedo de lados $l = 0,3 \text{ m}$ y $h = 0,5 \text{ m}$ no llegue a volcar.

14.31. Calcular la aceleración que debe tener el coche de la figura para que la barra AB, uniforme y homogénea conserve el ángulo $\theta = 53^\circ$ indicado en la figura.

14.32. El coche de la figura posee una masa $M = 19 \text{ kg}$, y es jalado con una fuerza constante

$F = 100 \text{ N}$. Un bloque de masa $m = 1 \text{ kg}$ resbala por un plano inclinado colocado dentro del coche ($\theta = 37^\circ$). Calcular la aceleración a' con que dicho bloque resbala respecto del plano inclinado (No hay rozamiento).

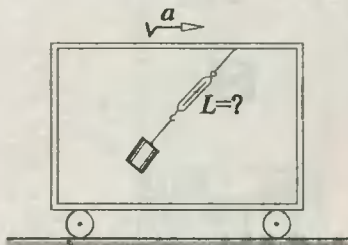


Fig. Prob. 14.29

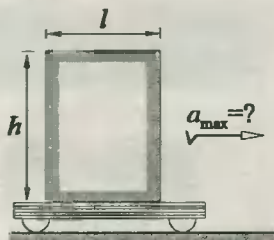


Fig. Prob. 14.30

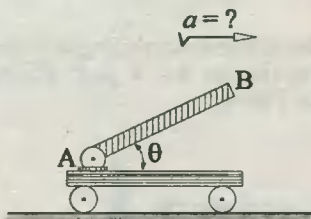


Fig. Prob. 14.31

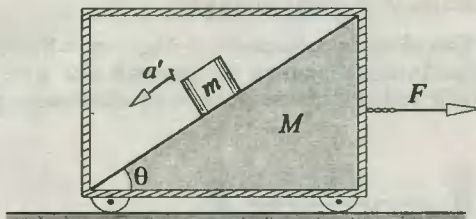


Fig. Prob. 14.32

14.33. Determinar la aceleración del bloque 3 para el sistema mecánico representado en la figura. No existe rozamiento, y las masas de la polea y de la cuerda se desprecian. $m_1 = 15 \text{ kg}$; $m_2 = 50 \text{ kg}$; $m_3 = 10 \text{ kg}$; y $\theta = 37^\circ$.

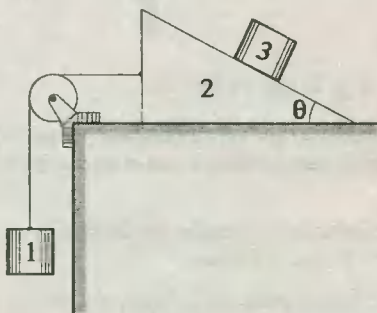


Fig. Prob. 14.33

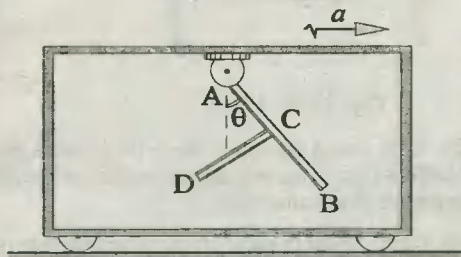


Fig. Prob. 14.34

14.34. Dos barras AB y CD uniformes, homogéneas y del mismo material están unidas entre sí solidariamente en ángulo recto, de modo que $AB = 2CD$. ¿Qué aceleración a debe experimentar el coche mostrado para la barra AB quede en posición vertical?

Movimientos dependientes

14.35. Sabiendo que en el sistema mostrado $a_1 = 3 \text{ m/s}^2$, y $a_2 = 5 \text{ m/s}^2$, se pide calcular la tensión en la cuerda que sostiene al bloque 3. Además, $m_3 = 4 \text{ kg}$.

14.36. El sistema mostrado es dejado en libertad de movimiento. Además $m_1 = m_2$ y se desprecia la masa de la polea. Calcular:

- a) La aceleración de los bloques.
- b) El tiempo que demora el bloque 2 en llegar al piso.

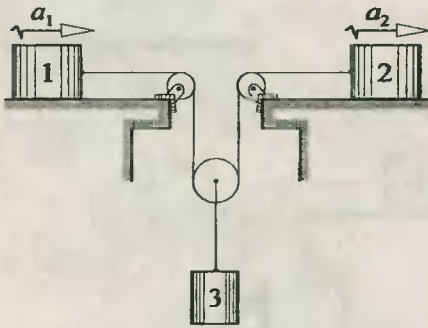


Fig. Prob. 14.35

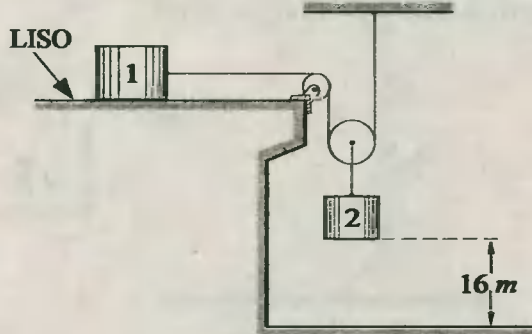


Fig. Prob. 14.36

14.37. Dos bloques de masas $m_1 = 16 \text{ kg}$, y $m_2 = 10 \text{ kg}$, inicialmente en reposo, son jalados a través de una cuerda que pasa por una polea de masa $m_p = 4 \text{ kg}$, que a su vez es afectada por una fuerza F que actúa sobre ella permanentemente. Calcular el valor que debe tener F para que el bloque 1 deje de presionar el piso sin separarse de él.

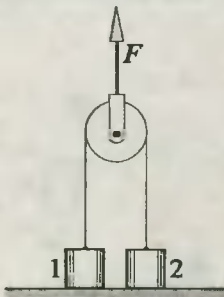


Fig. Prob. 14.37

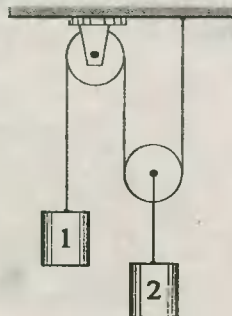


Fig. Prob. 14.38

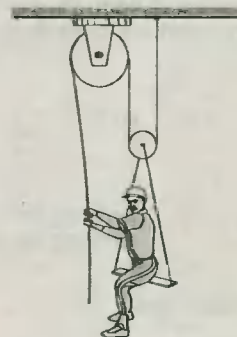


Fig. Prob. 14.39

14.38. Para el sistema de bloques mostrado, calcular la aceleración de cada bloque, sabiendo que $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, y la masa de la polea móvil es $m_p = 2 \text{ kg}$.

14.39. Un hombre que pesa 600 N se está izando a sí mismo sentado en una silla, según se indica. Calcular su aceleración en el instante que está jalando la cuerda con una fuerza de 220 N .

14.40. Por una polea fija cuya masa se desprecia pasa una cuerda imponderable. De uno de sus cabos pende un cuerpo de masa $M = 25 \text{ kg}$, y del otro cabo se ha colgado un mono de 20 kg de masa, que trepa por él. ¿Con qué aceleración a trepa el mono, si el cuerpo permanece a la misma altura durante todo el tiempo?

14.41. Si las cuñas inician su movimiento desde el reposo, calcular el desplazamiento que habrá experimentado la cuña B cuando la cuña A llegue a tocar el piso. $m_A = 2 \text{ kg}$; $m_B = 8 \text{ kg}$; $a = 10 \text{ cm}$, y $b = 60 \text{ cm}$.

14.42. El sistema mostrado se encuentra en equilibrio. Si se sabe que no existe rozamiento, calcular la aceleración del bloque A inmediatamente después de cortar la cuerda que lo une con la pared vertical. $m_A = 16 \text{ kg}$; $m_B = 6 \text{ kg}$.

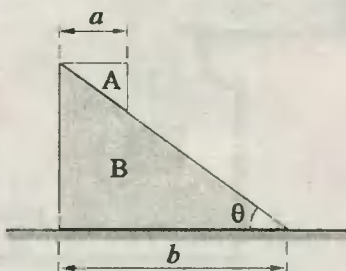


Fig. Prob. 14.41

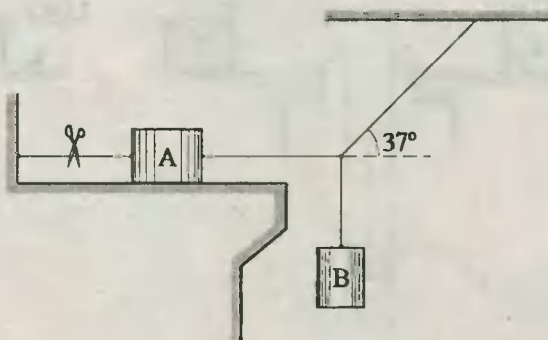


Fig. Prob. 14.42

14.43. Un semicilindro de peso P newtons, uniforme y homogéneo se apoya sobre un coche de peso igual. Calcular la aceleración que se presenta inmediatamente después de sacar el perno quedando el sistema liberado. No existe rozamiento.

14.44. Determinar el valor de la fuerza F que impedirá que el bloque de masa $m_1 = 5 \text{ kg}$ resbale sobre el coche de masa $M = 32 \text{ kg}$, sabiendo además que $m_2 = 3 \text{ kg}$. La masa de la cuerda, polea y rozamiento entre los bloques es despreciable.

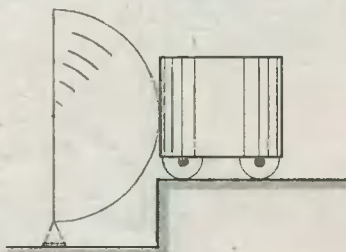


Fig. Prob. 14.43

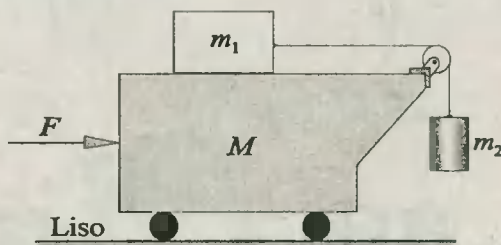


Fig. Prob. 14.44

14.45. En el sistema dado, carente de rozamiento, se conocen las masas del cubo m y de la cuña M , así como el ángulo α de la última. Las masas de las poleas y el hilo son despreciables. Determinar la aceleración de la cuña M .

14.46. Si el sistema mostrado, carente de fricción, comienza a moverse desde el reposo, hallar la aceleración del bloque A , sabiendo que: $m_A = 60\text{kg}$, $m_B = m_C = 20\text{kg}$. Se desprecia el peso de las poleas.

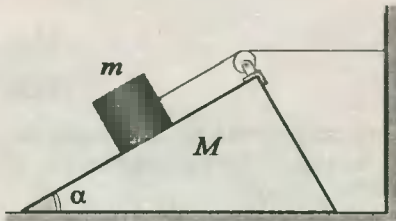


Fig. Prob. 14.45

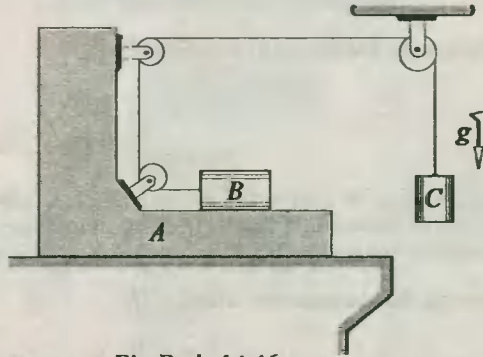


Fig. Prob. 14.46

14.47. En el aparato mostrado, la bola 1 tiene una masa $n = 1,8$ veces mayor que la de la barra 2, cuya longitud es $l = 1\text{ m}$. La bola se establece a un mismo nivel con el extremo inferior de la barra y se suelta. ¿Al cabo de qué tiempo la bola cruza el extremo superior de la barra?.

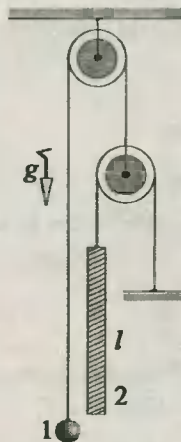


Fig. Prob. 14.47

15.1 Fuerza de rozamiento estático (f_e)

$$0 \leq f_e \leq f_{em} \quad (15.1)$$

$$f_{em} = \mu_e N \quad (15.2)$$

siendo f_{em} la fuerza de rozamiento estático máximo que se presenta en el instante del movimiento inminente, N la fuerza de compresión normal entre las superficies en contacto, y μ_e el coeficiente de rozamiento estático entre los materiales en contacto.

15.2 Fuerza de rozamiento cinético (f_c)

$$f_c = \mu_c N \quad (15.3)$$

siendo μ_c el coeficiente de rozamiento cinético entre los materiales.

15.3 Fuerza de reacción total (R)

$$R = \sqrt{f^2 + N^2} \quad (15.4)$$

siendo f la fuerza de fricción, sea ésta de tipo estático o cinético.

15.4. Angulo de fricción (ϕ)

$$\operatorname{tg} \phi_e = f_{em} / N = \mu_e \quad (15.5)$$

$$\operatorname{tg} \phi_c = f_c / N = \mu_c \quad (15.6)$$

siendo ϕ el ángulo que forma la reacción total R con la normal a las superficies en contacto.

$$\phi_e > \phi_c \quad (15.7)$$

$$\mu_e > \mu_c \quad (15.8)$$

$$0 \leq \mu \leq 1 \quad (\text{en la mayoría de los casos}) \quad (15.9)$$

PROBLEMAS

Nota: Para todos los problemas considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$, a menos que se diga lo contrario.

Fricción estática

15.1. Calcular la fuerza F mínima que es necesario aplicar al ladrillo de 10 kg de masa para sacarlo del reposo, sabiendo que $Q = 400 \text{ N}$, y $\mu_e = 0,8$.

15.2. Un ladrillo de 40 kg se encuentra en reposo sobre un piso horizontal con el cual $\mu_c = 0,5$. De pronto es afectado por una fuerza externa horizontal F hacia la derecha. Calcular el valor de la fuerza de fricción en la base del ladrillo para los siguientes casos:

- a) Cuando $F = 100 N$.
- b) Cuando $F = 150 N$.
- c) Cuando $F = 196 N$.

15.3. Un cajón de 10 kg de masa descansa sobre un piso horizontal con el cual $\mu = 0,5$ y $0,8$. Si la fuerza que lo afecta es horizontal, y su módulo es 75 N, calcular el ángulo de fricción.

15.4. Un bloque de metal de 120 N de peso descansa sobre un plano horizontal rugoso. Se pide calcular el valor de la reacción total del piso y el ángulo de fricción cuando se le aplican fuerzas horizontales hacia la derecha, cuyos módulos son:

- a) $F = 90 N$ (El bloque no resbala).
- b) $F = 160 N$ (El bloque está a punto de resbalar).

15.5. Una caja de 10kg de masa descansa sobre un plano horizontal con el cual $\mu_c = 0,5$. Un resorte imponderable es instalado en un costado, y se jala lentamente hacia la derecha. ¿En cuánto se habrá estirado el resorte cuando la caja esté a punto de resbalar? ($k = 49 N/cm$).

15.6. Un cajón de 500 N de peso se encuentra apoyado sobre un plano inclinado giratorio de superficie áspera. Calcular:

- a) El valor de la fuerza de fricción cuando el ángulo del plano sea $\theta = 53^\circ$ (En esta condición el cajón está a punto de resbalar).
- b) El valor de μ_c entre el cajón y el plano inclinado.
- c) El valor de la fuerza de fricción cuando θ se haya reducido a 16° .

15.7. Calcular el mínimo peso que debe tener el bloque A para mantener el equilibrio del sistema. Peso de B = 300 N.

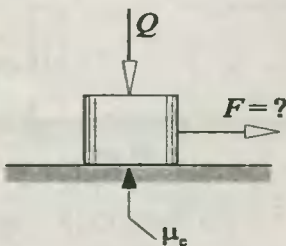


Fig. Prob. 15.1

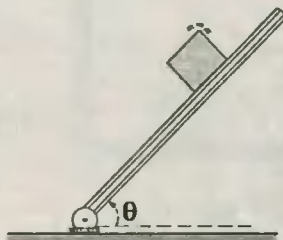


Fig. Prob. 15.6

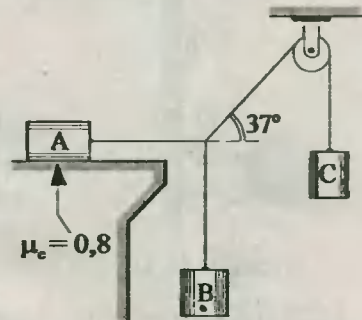


Fig. Prob. 15.7

15.8. Calcular el valor de la fuerza F mínima y necesaria para sacar del reposo al bloque de la figura, si se sabe que su masa es $m = 11 kg$, $\mu_c = 0,5$, y $\theta = 37^\circ$.

15.9. Calcular el mínimo valor de F capaz de sacar al bloque A, sabiendo que $\mu_c = 1/4$, y que el peso de los bloques A y B son 400 N y 170 N respectivamente. Se sabe también que entre A y B no existe rozamiento, y $\theta = 37^\circ$.

15.10. ¿Entre qué valores máximo y mínimo deberá estar comprendido el valor de F para que el bloque de 30 N de peso no llegue a resbalar?. ($\mu = 1/3$ y $1/5$; $\theta = 37^\circ$).

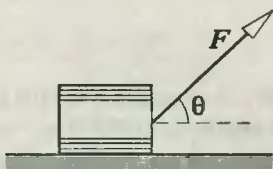


Fig. Prob. 15.8

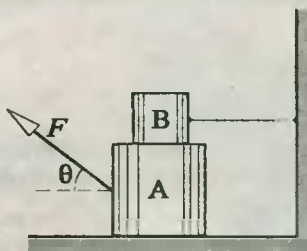


Fig. Prob. 15.9

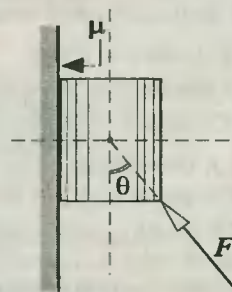


Fig. Prob. 15.10

15.11. El sistema mostrado está en equilibrio, siendo el peso de la esfera lisa y homogénea 100 N . ¿Cuál sería el máximo peso posible que puede tener el bloque Q , si entre éste y la pared vertical existe un $\mu_e = 0,8$? ($\theta = 37^\circ$).

15.12. Calcular el ángulo α que define la posición de equilibrio del sistema mostrado, donde el semicilindro de peso P soporta a un cilindro de peso $2P$. Despreciar el rozamiento entre los cilindros.

15.13. Una fuerza $F = 18\text{ N}$ es aplicada a un bloque rectangular que pesa 50 N , cuya base mide 20 cm , y que se encuentra inicialmente en reposo sobre un piso con el cual $\mu = 0,4$ y $0,2$. Determinar:

- El valor de la fuerza de fricción.
- La posición de la fuerza de compresión normal respecto al vertice B.

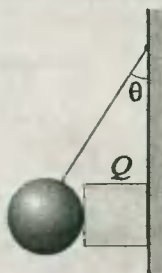


Fig. Prob. 15.11

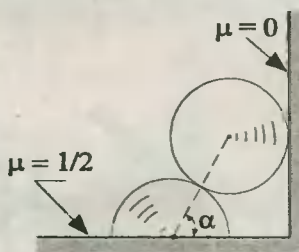


Fig. Prob. 15.12

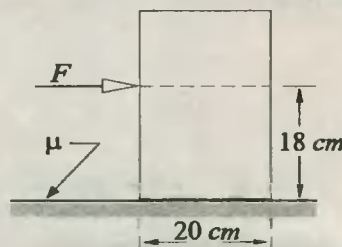


Fig. Prob. 15.13

15.14. Una barra uniforme y homogénea se encuentra apoyada entre dos paredes: Una vertical lisa y la otra áspera con $\mu_e = 0,375$. ¿Para qué ángulo θ formado por la barra y el piso aquella empezará a resbalar?

15.15. Cada una de las barras de $0,5\text{ m}$ de longitud tiene una masa $m = 10\text{ kg}$, y están articuladas en B. Si el coeficiente de rozamiento en C es $7/12$, calcular el máximo ángulo θ para el equilibrio.

15.16. Determinar la fuerza F mínima que será necesario aplicar de modo permanente al coche de masa $M = 50\text{ kg}$ para que el bloque de masa $m = 10\text{ kg}$ no llegue a resbalar por su cara delantera, siendo $\mu_e = 0,4$ entre el coche y el bloque.

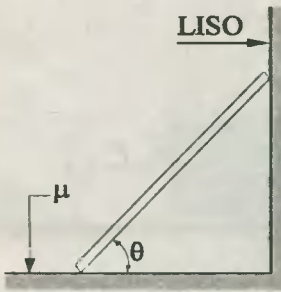


Fig. Prob. 15.14

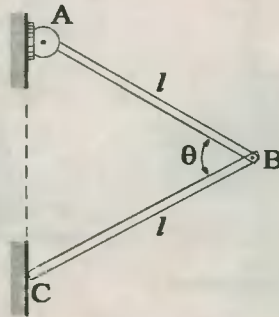


Fig. Prob. 15.15

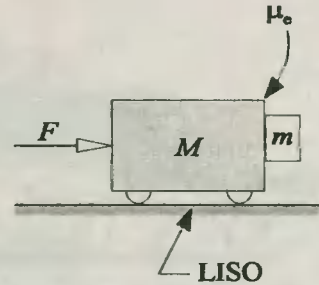


Fig. Prob. 15.16

15.17. Un coche de masa $M = 8 \text{ kg}$ lleva un cajón de masa $m = 2 \text{ kg}$ sobre su parte superior. El coche recibe una fuerza permanente $F = 80 \text{ N}$, según se muestra. Calcular cuál es el mínimo valor del coeficiente de fricción μ entre el coche y el cajón para que éste no llegue a resbalar sobre aquel.

15.18. ¿Cuál es la máxima fuerza F que es posible aplicar sobre el cajón de masa $m = 4 \text{ kg}$, de tal modo que no llegue a resbalar sobre el coche de masa $M = 20 \text{ kg}$, con el cual mantiene un $\mu_e = 0,5$?

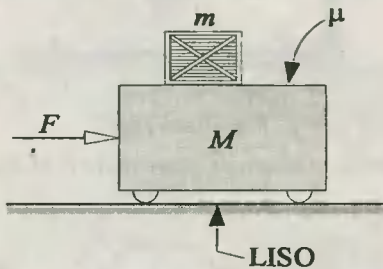


Fig. Prob. 15.17

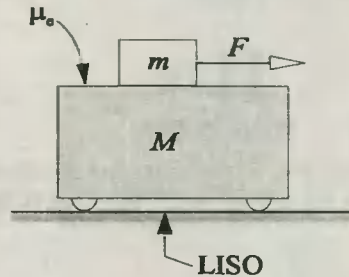


Fig. Prob. 15.18

15.19. Calcular la fuerza F mínima que iniciará el movimiento del bloque B hacia la derecha. Los pesos de A y B son 240 N y 300 N respectivamente, y $Q = 80 \text{ N}$. Además, $\mu = 1/3$ para todas las superficies en contacto ($\theta = 37^\circ$).

15.20. Calcular la fuerza que se requiere para extraer una hoja de papel de las páginas centrales de un libro de $0,8 \text{ kg}$ de masa, si el coeficiente de rozamiento entre las hojas es $0,2$.

15.21. Para el mecanismo de freno mostrado, el coeficiente de rozamiento es $0,8$, calcular el valor mínimo de F que le impide girar al tambor. ($R = 40 \text{ cm}$, y $r = 10 \text{ cm}$).

15.22. Un cilindro homogéneo de peso $P = 170 \text{ N}$ descansa sobre una esquina. Si el coeficiente de fricción en todas las superficies de contacto es $\mu = 0,25$, determinar el momento M que ha de actuar sobre el cilindro para que se inicie la rotación en sentido antihorario.

15.23. La esfera mostrada posee un peso $P = 30\sqrt{7} \text{ N}$, y en dicha posición se encuentra en equilibrio. La longitud de la cuerda que lo sostiene es $L = 17,3 \text{ cm}$, está tensa y tiene una dirección tangente a la esfera. Calcular el valor de μ_e y la reacción de la pared, si $R = 10 \text{ cm}$.

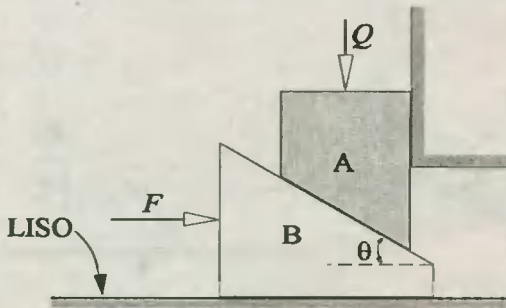


Fig. Prob. 15.19



Fig. Prob. 15.20

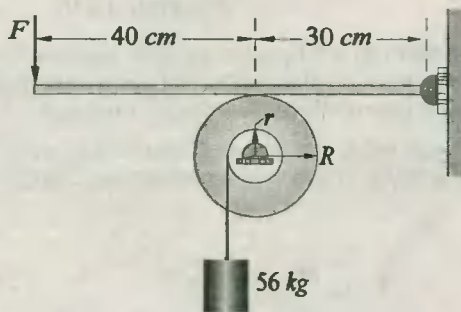


Fig. Prob. 15.21

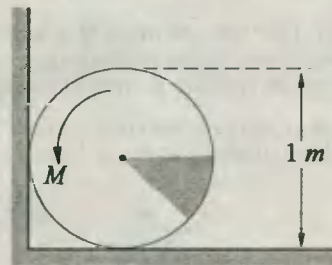


Fig. Prob. 15.22

15.24. Los discos mostrados son concéntricos y solidarios, y tienen un peso total $3P$. Hallar los valores de μ y θ que definen la posición de equilibrio.

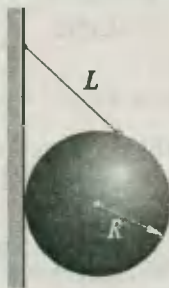


Fig. Prob. 15.23

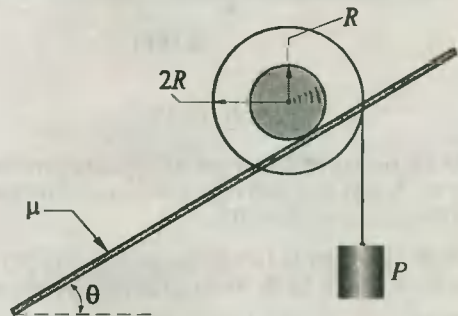


Fig. Prob. 15.24

15.25. Un pequeño cubo cuya masa es $m = 5 \text{ kg}$ descansa sobre un plano rugoso que está inclinado 30° respecto a la horizontal. Si $\mu_e = \sqrt{3/5}$, determinar la fuerza horizontal F mínima con que hay que empujar el cubo para que empiece a moverse. La fuerza se encuentra paralela al plano inclinado.

15.26. Hallar la máxima aceleración que puede alcanzar el automóvil mostrado, con tracción posterior y sobre una pista horizontal, si el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y el pavimento es μ_e .

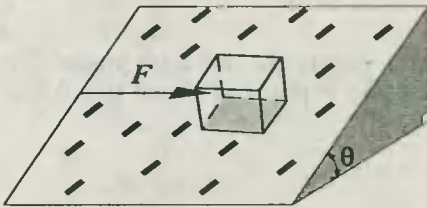


Fig. Prob. 15.25

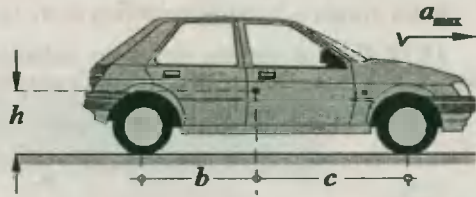


Fig. Prob. 15.26

15.27. Un cilindro macizo, uniforme y homogéneo de masa m descansa sobre una plataforma que acelera hacia arriba con una aceleración a . Si entre el cilindro y la plataforma existe un coeficiente de fricción μ , determinar las condiciones que deben cumplir los valores de F y h para hacer volcar al cilindro.

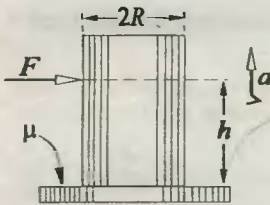


Fig. Prob. 15.27

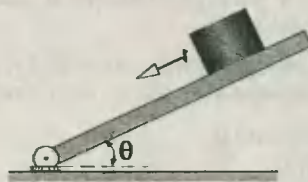


Fig. Prob. 15.29

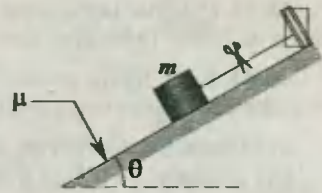


Fig. Prob. 15.30

Fricción dinámica

15.28. Un cuerpo de 6 kg de masa inicialmente en reposo descansa sobre un plano horizontal rugoso, con el cual los coeficientes de rozamiento son $0,8$ y $0,5$. Si de pronto es afectado por una fuerza horizontal $F = 60 \text{ N}$ hacia la derecha, calcular:

- La aceleración del cuerpo.
- La velocidad adquirida luego de recorrer 10 m .

15.29. Un ladrillo de 80 N de peso se encuentra descendiendo por un plano inclinado áspero. Calcular:

- El valor de la fuerza de fricción cuando $\theta = 37^\circ$, si en esta condición resbala a velocidad constante.
- El valor de μ_c entre el ladrillo y el plano inclinado.
- El valor de la aceleración cuando el ángulo de inclinación aumenta hasta 60° , mientras el ladrillo continúe descendiendo.

15.30. Si logramos cortar la cuerda, ¿Cuál será la aceleración que adquiere el bloque? $m = 5 \text{ kg}$, $\theta = 37^\circ$, $\mu = 0,8$ y $0,5$.

15.31. Una goma de borrar se lanza sobre una superficie horizontal con el cual $\mu_c = 0,6$. Si la goma ingresa a la rampa con una velocidad $v_0 = 30 \text{ m/s}$, calcular:

- a) El tiempo que demora en detenerse.
 b) La distancia máxima recorrida sobre la superficie.

15.32. Para el sistema mostrado, calcular la tensión en la cuerda que une a los bloques, si $m_A = 12 \text{ kg}$, y $m_B = 8 \text{ kg}$. Se sabe que existe fricción sólo entre B y el piso, con el cual $\mu_c = 0,5$, y $F = 100 \text{ N}$.

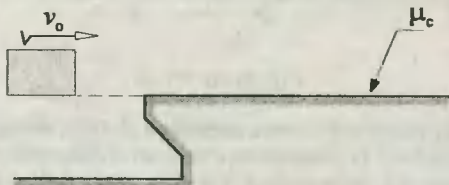


Fig. Prob. 15.31

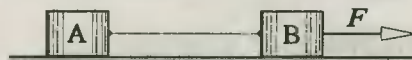


Fig. Prob. 15.32

15.33. Calcular la masa del bloque A para que el bloque B pueda descender aceleradamente a razón de 2 m/s^2 (Masa del bloque B = 24 kg).

15.34. En la figura se muestra un bloque de masa $M = 48 \text{ kg}$, que lleva una esferilla de masa $m = 2 \text{ kg}$ atada a una cuerda que forma un ángulo θ con la vertical. Cuando $F = 600 \text{ N}$, $\theta = 37^\circ$. Calcular:

- a) El valor del coeficiente de rozamiento μ_c .
 b) La medida de θ cuando $F = 950 \text{ N}$.

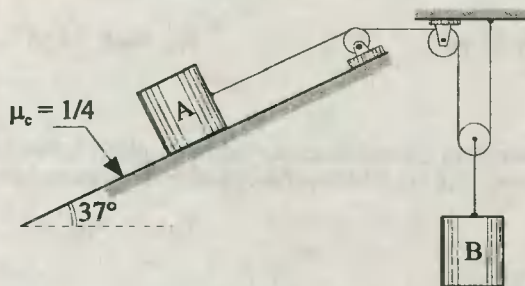


Fig. Prob. 15.33

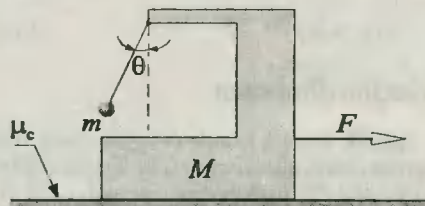


Fig. Prob. 15.34

15.35. En la figura se muestra un coche de masa $M = 10 \text{ kg}$, que es empujado por una fuerza $F_1 = 44 \text{ N}$. El coche lleva en su interior un cajón de masa $m = 2 \text{ kg}$, que a su vez es jalado por una fuerza $F_2 = 2 \text{ N}$. Calcular la aceleración que experimenta cada cuerpo, si además entre ellos existe un $\mu_c = 0,2$.

15.36. Un bloquecito A comienza a deslizarse desde el vértice superior de un plano inclinado cuya base mide $l = 5 \text{ m}$. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie del plano es $\mu = 0,75$. Calcular:

- a) El ángulo de inclinación del plano (α) que hace mínimo el tiempo de deslizamiento del bloque.
 b) ¿Cuál es dicho tiempo?.

15.37. Una viga de masa $M = 20 \text{ kg}$ y $l = 9 \text{ m}$ de longitud está apoyada sobre un plano horizontal liso. Sobre ella hay un cuerpo de masa $m = 1 \text{ kg}$. Si el coeficiente de rozamiento entre la viga y el cuerpo es $\mu = 2/7$, ¿Dentro de cuánto tiempo el cuerpo caerá de la viga?. $F = 100 \text{ N}$.

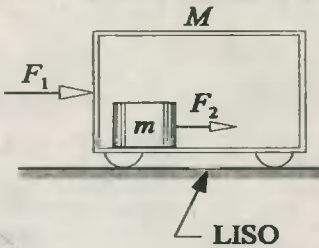


Fig. Prob. 15.35

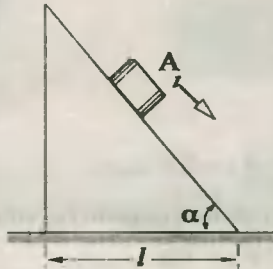


Fig. Prob. 15.36

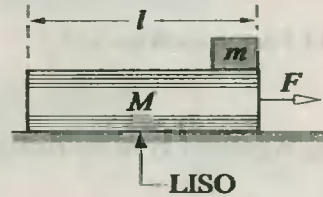


Fig. Prob. 15.37

15.38. Sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal se arrastra una barra de masa m , a velocidad constante mediante un hilo y hacia arriba. El coeficiente de rozamiento es igual a μ . Hallar el ángulo β que debe formar el hilo con el plano inclinado para que la tensión del primero sea mínima. ¿A qué será igual esta tensión?

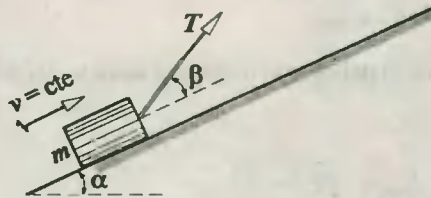


Fig. Prob. 15.38

16

Dinámica Circular

16.1 Fuerza centrípeta (F_c)

$$\bar{F}_c = \Sigma \bar{F}_{\text{radicales}} \quad (16.1)$$

16.2 Segunda Ley de Newton para un movimiento curvilíneo

$$\bar{F}_c = m\bar{a}_c \quad (16.2)$$

$$\Sigma \bar{F}_{\text{radicales}} = m\bar{a}_c \quad (16.3)$$

$$\Sigma F_{\text{van al centro}} - \Sigma F_{\text{salen del centro}} = ma_c \quad (16.4)$$

siendo a_c la aceleración centrípeta del cuerpo o sistema de masa m .

16.3 Fuerza tangencial (F_t)

$$\bar{F}_t = \Sigma \bar{F}_{\text{tangenciales}} \quad (16.5)$$

$$\bar{F}_t = m\bar{a}_t \quad (16.6)$$

siendo a_t la aceleración tangencial del cuerpo o sistema medido desde Tierra.

16.4 Fuerza total (F_{tot})

$$F_{\text{tot}} = \sqrt{F_c^2 + F_t^2} \quad (16.7)$$

16.5 Fuerza centrífuga (F_{cf})

$$\bar{F}_{\text{cf}} = m(-\bar{a}_c) \quad (16.8)$$

Esta es una fuerza de inercia que se rige por la Ley de D'Alembert.

16.6 Gravedad efectiva en un sistema rotacional

$$\bar{g}_{\text{ef}} = \bar{g} + (-\bar{a}_c) \quad (16.9)$$

PROBLEMAS

Nota: Para todos los problemas considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$, a menos que se indique lo contrario.

16.1. Una piedra de 3 kg de masa gira uniformemente en un plano horizontal gracias a una cuerda de longitud $l = 2 \text{ m}$, y con un periodo $T = \pi \text{ s}$. ¿Cuál es la fuerza centrípeta que experimenta la piedra?

16.2. Una bola de masa $m = 4 \text{ kg}$ se encuentra inicialmente en reposo, y está atada a una cuerda de longitud $l = 3 \text{ m}$. Si experimenta la acción de una fuerza tangencial constante de 2 N , que actúa desde el principio de manera perpendicular a la cuerda, calcular al cabo de qué tiempo la fuerza centrípeta será de 12 N .

16.3. Una bolita de 6 kg de masa se encuentra atada a una cuerda de 2 m de longitud, y gira en un plano vertical. Si en el instante mostrado su velocidad tangencial es $v = 5 \text{ m/s}$, ¿Cuál es la tensión en la cuerda? $\theta = 53^\circ$.

16.4. Un cuerpo de 5 kg de masa describe un arco de circunferencia de 4 m de radio. En la posición mostrada dicho cuerpo está animado de una velocidad $v = 8 \text{ m/s}$. Calcular:

- El valor de la fuerza de tensión en la cuerda.
- El módulo de la aceleración angular.

16.5. ¿En qué razón se encuentran las fuerzas con las que un coche hace presión en el centro de un puente convexo y de un puente cóncavo?. El radio de curvatura de los puentes en ambos casos es 9 m , y la velocidad del coche es 6 m/s .

16.6. Un avión que vuela a razón de 360 km/h "riza un rizo". ¿Qué radio deberá tener el "rizo" para que la fuerza máxima con que el piloto comprime su asiento sea 5 veces su peso?.

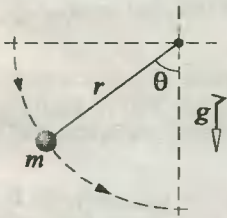


Fig. Prob. 16.3

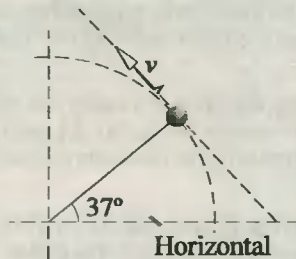


Fig. Prob. 16.4

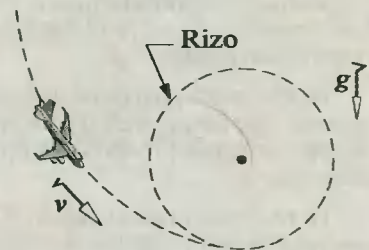


Fig. Prob. 16.6

16.7. Una piedra atada a una cuerda de longitud r gira en un plano vertical. Determinar la mínima velocidad lineal que debe tener la piedra en la parte más alta de su trayectoria para que pueda dar vueltas.

16.8. ¿Con qué velocidad angular mínima ω hay que hacer girar un balde en el plano vertical para que el agua que contiene no se derrame?. El radio de giro del balde es $2,5 \text{ m}$.

16.9. Un péndulo se sostiene en reposo en la posición mostrada mediante la cuerda horizontal. Si la llama del palito de fósforo quema la cuerda, ¿Por qué factor quedará momentáneamente reducida la tensión original en el alambre OA?.

16.10. Dos masas puntuales iguales giran con velocidad angular ω , según como se muestra. Se pide determinar la tensión en el hilo 1.

16.11. Un bloque pequeño de 4 kg de masa descansa sobre una plataforma horizontal que gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular $\omega = 5 \text{ rad/s}$. El resorte tiene una constante $k = 180 \text{ N/m}$. Calcular la deformación del resorte, si se sabe que cuando no está deformado tiene una longitud de 40 cm .

16.12. Un cuerpo suspendido de un hilo de longitud $L = 5 \text{ m}$ se mueve uniformemente por una circunferencia en un plano horizontal. Hallar el periodo de rotación de dicho cuerpo, si durante su movimiento el hilo forma con la vertical un ángulo $\theta = 37^\circ$. ($g \approx \pi^2 \text{ m/s}^2$).

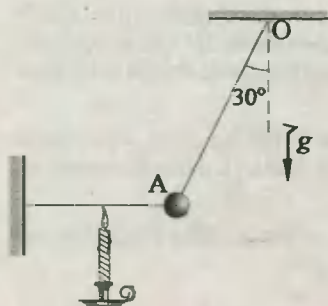


Fig. Prob. 16.9

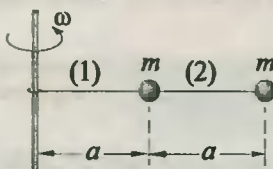


Fig. Prob. 16.10

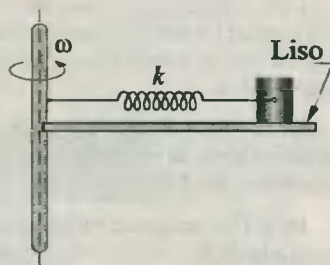


Fig. Prob. 16.11

16.13. Dos bolas de masas $m_1 = 18 \text{ kg}$ y $m_2 = 4 \text{ kg}$, se encuentran unidas por una cuerda imponderable, de modo que la porción de cuerda de longitud l que sostiene a m_1 , siempre forma con la vertical un ángulo θ . ¿Cuál es la velocidad angular de rotación del péndulo cónico formado?.

16.14. Un péndulo cónico doble gira alrededor de un eje vertical de manera que los dos hilos se encuentran siempre en un mismo plano, y forman con la vertical ángulos constantes $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 37^\circ$. Las longitudes de los hilos son las mismas e iguales a $l = 33 \text{ cm}$. Calcular la velocidad angular de rotación del péndulo.

16.15. En el vagón de un tren que se desplaza por una curva con la velocidad de 126 km/h se está pesando una carga en un dinamómetro sostenido del techo. El peso de la carga es 480 N , pero el dinamómetro indica 500 N . Determinar el radio de curvatura de la línea férrea (Despreciar la masa del dinamómetro).

16.16. Determinar el ángulo θ que define la posición de equilibrio relativo de una partícula P apoyada en una vasija lisa de forma hemisférica que gira alrededor de su eje geométrico EE' con velocidad angular ω . Radio del hemisferio $= R$.

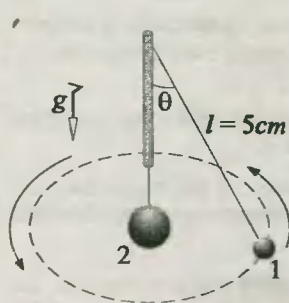


Fig. Prob. 16.13

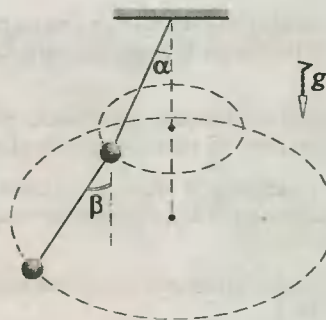


Fig. Prob. 16.14

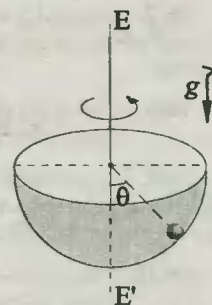


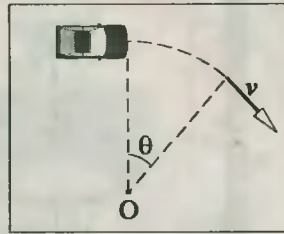
Fig. Prob. 16.16

16.17. Un avión gira en un plano horizontal describiendo un arco de 480 m de radio, y con una velocidad de 216 km/h . ¿Qué ángulo deberá inclinar sus alas respecto a la horizontal para poder realizar su operación?.

16.18. Un motociclista marcha por un plano horizontal describiendo un arco de radio $r = 30 \text{ m}$. Si

el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y la pista es $\mu = 0,75$, calcular:

- a) La velocidad mínima v con la que puede marchar el motociclista.
- b) Qué ángulo de inclinación formará respecto de la vertical.



16.19. Un automóvil arranca, y aumentando la velocidad uniformemente avanza por un tramo de carretera horizontal en forma de arco de circunferencia con ángulo $\theta = \sqrt{3}/6 \text{ rad}$. El radio de la circunferencia es $r = 180 \text{ m}$. ¿Con qué velocidad máxima v puede salir el automóvil a la parte recta de la carretera? El coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y el pavimento es $\mu = 0,25$.

16.20. Hallar la mínima velocidad angular de la plataforma circular para que el cilindro macizo C logre subir por el ladrillo L que se encuentra fijo a la plataforma. ($R =$ radio del cilindro $= 10 \text{ cm}$).

16.21. Una carretera tiene una curva de radio $r = 54 \text{ m}$ y un peralte $\theta = 37^\circ$. Se sabe que el coeficiente de fricción entre los neumáticos y el pavimento es $\mu = 1/3$. ¿Cuál es la máxima velocidad que puede mantener el automóvil sin salir resbalando por la carretera?

16.22. En la figura se muestra un automovilista en una acción temeraria venciendo a la gravedad. Si se conocen los valores de $\mu = 0,5$ y $r = 20 \text{ m}$. ¿Qué velocidad lineal mínima debe mantener dicho piloto para que no fracase en su intento?

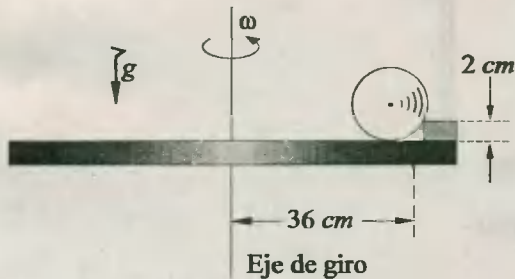


Fig. Prob. 16.20

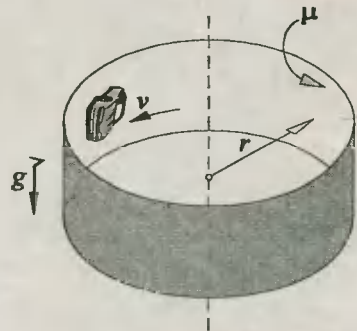


Fig. Prob. 16.22

16.23. En la figura se muestra una plataforma horizontal que parte del reposo y rota acelerando uniformemente con $\alpha = 0,5 \text{ rad/s}^2$. Sobre ésta se encuentra una caja de fósforos a una distancia $r = 25 \text{ cm}$ del eje. ¿Después de cuántas vueltas la caja saldrá despedida de la plataforma, si $\mu = \pi/4$, y $a = 2 \text{ m/s}^2$.

16.24. Un péndulo cónico de longitud $L = 2 \text{ m}$ gira con un periodo $T = \pi \text{ s}$, y se encuentra dentro de un ascensor que acelera hacia abajo con $a = 6 \text{ m/s}^2$. ¿Cuál es el ángulo θ que la cuerda forma con la posición de equilibrio del péndulo?

16.25. Dos barras de iguales masas y longitudes $l = 2,5 \text{ m}$, uniformes y homogéneas se encuentran unidas por un pasador en B , y el conjunto a un eje vertical por medio de otro pasador en A . ¿Cuál es la medida del ángulo θ cuando el sistema gire con una velocidad angular $\omega = 2 \text{ rad/s}$?

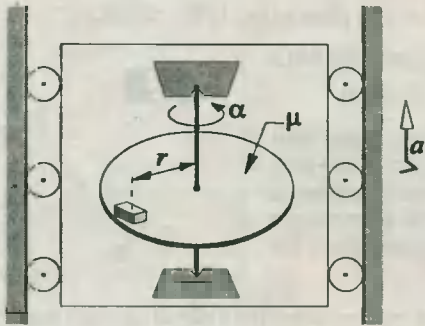


Fig. Prob. 16.23

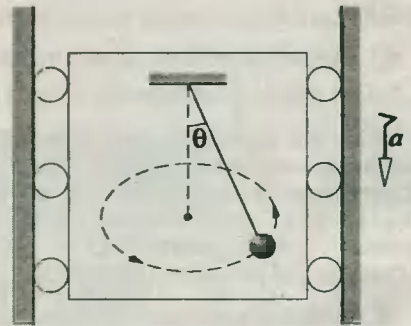


Fig. Prob. 16.24

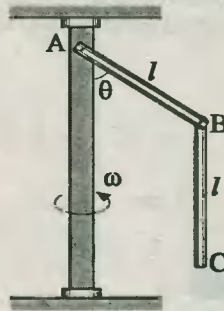


Fig. Prob. 16.25

17

Trabajo y Potencia

17.1. Trabajo realizado por una fuerza constante (W)

$$W = F \cdot d \cdot \cos\theta \quad (17.1)$$

siendo θ el ángulo que forman los vectores fuerza F y desplazamiento d . En el SI el trabajo se expresa en *joule* (J): $1 J = 1 N \cdot m$.

17.2. Trabajo de una fuerza tangencial constante

$$W_t = \pm F_t \cdot e \quad (17.2)$$

siendo e la longitud de la trayectoria curva; el signo será positivo si la dirección de la fuerza coincide con la del movimiento.

17.3. Trabajo neto

$$W_n = \Sigma W \quad (17.3)$$

$$W_n = W_{F_R} = \pm mad \quad (17.4)$$

siendo W_{F_R} el trabajo realizado por la fuerza resultante, m la masa del cuerpo afectado, a su aceleración, y d el desplazamiento. El signo será positivo si el movimiento es acelerado.

17.4. En un gráfico Fuerza vs Posición, el área bajo la curva coincidirá en valor y signo con el trabajo realizado por dicha fuerza.

17.5. Potencia media

$$Pot = W/t \quad (17.5)$$

En el SI la potencia se expresa en *watt* (W): $1 W = 1 J/s$. Además: $1 HP = 746 W$, y $1 CV = 735 W$.

17.6. Potencia instantánea

$$Pot = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta W / \Delta t) \quad (17.6)$$

$$Pot = F \cdot v \cdot \cos\theta \quad (17.7)$$

siendo θ el ángulo comprendido entre los vectores fuerza y velocidad instantánea.

17.7. Eficiencia

$$\eta_{\%} = \frac{Pot_{\acute{u}til}}{Pot_{sum}} \cdot 100\% \quad (17.8)$$

$$\eta_{\%} = \frac{W_{\acute{u}til}}{W_{sum}} \cdot 100\% \quad (17.9)$$

PROBLEMAS

Nota: Para todos los problemas, considere $g = 10 \text{ m/s}^2$, salvo que se indique lo contrario.

Trabajo

17.1. Una fuerza horizontal F constante empuja un bloque sobre un plano inclinado, efectuando un trabajo $W = 96 \text{ J}$ al trasladarlo desde A hasta B. ¿Cuál es el módulo de F ?

17.2. El bloque mostrado se encuentra afectado por fuerzas que le permiten desplazarse desde A hasta B. ¿Cuál es el trabajo neto que realizan las fuerzas mostradas sobre el bloque?

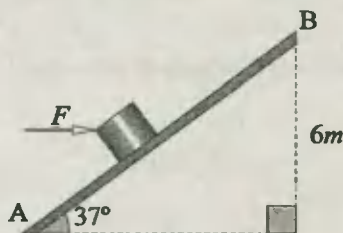


Fig. Prob. 17.1

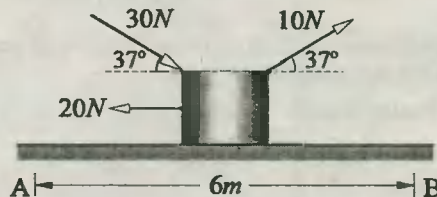


Fig. Prob. 17.2

17.3. Un cajón de 50 N de peso es jalado por una fuerza $F = 70 \text{ N}$, paralela al plano inclinado de modo que al desplazarse desde A hasta B se efectuó un trabajo neto de 600 J . ¿Cuál es la medida del ángulo θ ? (No hay rozamiento).

17.4. Una persona de 70 kg de masa camina por una escalera y sube hasta el 3^{er} piso de un edificio. ¿Qué trabajo realizó su peso durante el recorrido, si se sabe que cada piso tiene 4 m de altura?

17.5. Un cajón es jalado por una fuerza F constante y paralela al plano inclinado, siendo su peso 10 N . Si $\mu = 0,5$, ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza F en el trayecto de A hasta B, sabiendo además que el movimiento se hizo con velocidad constante?

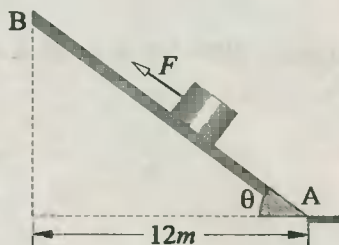


Fig. Prob. 17.3

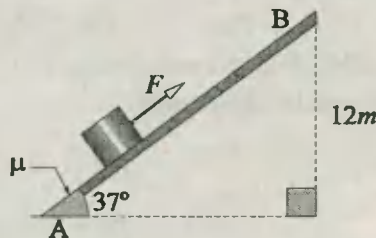


Fig. Prob. 17.5

17.6. Un bloque de 40 kg de peso se encuentra inicialmente en reposo, y es levantada por un hombre a través de una cuerda, jalándola con una fuerza de 500 N. ¿Qué trabajo realizó el hombre durante los 6 primeros segundos?

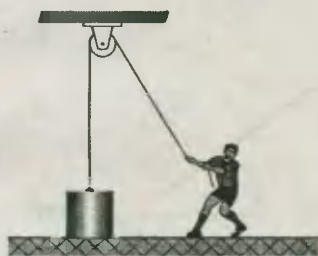


Fig. Prob. 17.6

17.7. Un cuerpo es trasladado desde A hasta B, y durante el trayecto estuvo afectado por una fuerza central F de módulo constante, y que en todo momento se orienta hacia el punto C. Si el trabajo realizado por dicha fuerza es 40 J, ¿Cuál es el valor de F ?

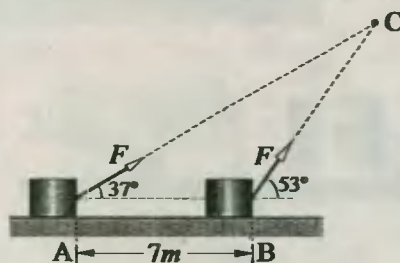


Fig. Prob. 17.7

17.8. Se desea levantar un bloque de 5 kg en un lugar donde el campo de gravedad forma 53° con la vertical. ¿Qué trabajo debe realizar un agente externo para desplazarlo lentamente desde A hasta B?

17.9. En el interior de un vagón que acelera hacia la izquierda con $a = 24 \text{ m/s}^2$ se encuentra un cuerpo de masa $m = 5 \text{ kg}$, que se traslada desde A hasta C utilizando el trayecto ABC, siendo $AB = 2 \text{ m}$, y $BC = 4,8 \text{ m}$. ¿Qué trabajo demandará realizar el traslado (muy lentamente) para un observador dentro del vagón?

17.10. Una partícula es afectada por una fuerza $F = 50 \text{ N}$, que mantiene permanentemente el ángulo $\theta = 37^\circ$ respecto a la tangente. ¿Cuál será el trabajo realizado por dicha fuerza en el trayecto de A hacia B? ($\pi \approx 22/7$).

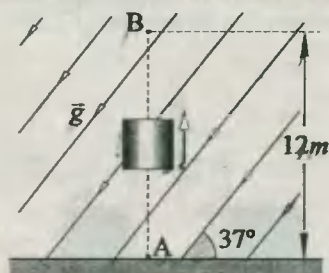


Fig. Prob. 17.8

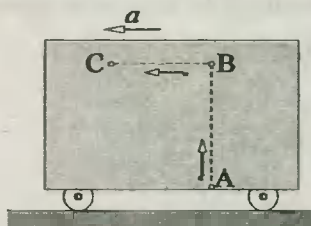


Fig. Prob. 17.9

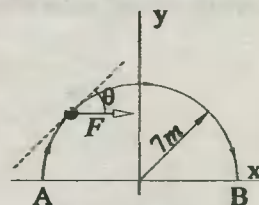


Fig. Prob. 17.10

17.11. Una partícula de 6 kg de masa e inicialmente en reposo es sometida a una fuerza tangente y constante que le imprime un MCUV cuyo radio es 50 cm. Si el trabajo que realiza esta fuerza en el quinto segundo es 108 J, ¿Cuál es la aceleración angular que experimenta?

17.12. Una fuerza horizontal de 20 N hacia la derecha actúa durante 2 s sobre una masa de 2 kg inicialmente en reposo (respecto de Tierra), y que se encuentra sobre una superficie horizontal lisa. Calcular el trabajo hecho desde el punto de vista de un observador que se mueve a una velocidad constante de 15 m/s hacia la derecha respecto de Tierra.

17.13. ¿Qué trabajo debe realizar F para que el bloque A de 20 kg recorra 10 m , partiendo del reposo con una aceleración constante de 20 cm/s^2 . Despreciar la masa de la polea, y considere $\mu = 0,4$.

17.14. Una fuerza aplicada a un cuerpo lo desplaza en la dirección X, y su valor varía de acuerdo con la gráfica F -vs- x . Calcular el trabajo realizado desde $x = 0\text{ m}$ hasta $x = 10\text{ m}$.

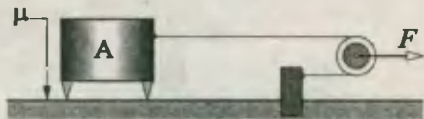


Fig. Prob. 17.13

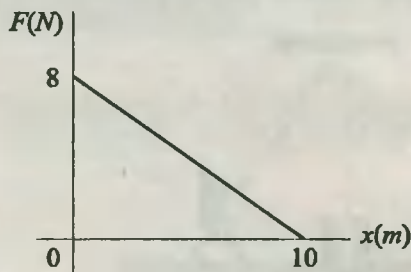


Fig. Prob. 17.14

17.15. Un hombre carga sobre sus hombros un saco de arena de 50 kg , el cual debe levantar hasta una altura de 6 m . Si el saco presenta un orificio por donde la arena sale uniformemente de modo que al llegar a su destino no queda ningún grano en el saco, ¿Qué trabajo realizó el hombre durante su recorrido?

17.16. Un resorte de constante $k = 10\text{ N/cm}$ se encuentra estirado $x_1 = 20\text{ cm}$. Se desea averiguar cuánto trabajo costará estirarlo adicionalmente $\Delta x = 10\text{ cm}$.

17.17. Una fuerza F varía con el desplazamiento x tal como se indica en la Figura. Si el trabajo realizado por esta fuerza F es 96 J cuando el cuerpo se traslada desde $x = 0\text{ m}$ hasta $x = 10\text{ m}$, ¿Cuál es el valor de F para $x = 14\text{ m}$?

17.18. Para extraer un cilindro sumergido en agua con una fuerza externa F se requiere que ésta verifique la siguiente relación: $F = 10 + 50x$, donde F está en *newtons*, y x en *metros*. ¿Cuánto trabajo costará sacar al cilindro fuera del agua, si su altura es 20 cm ?

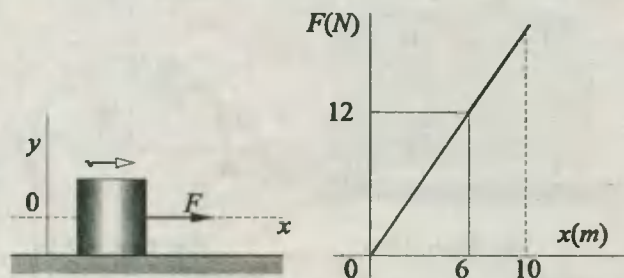


Fig. Prob. 17.17

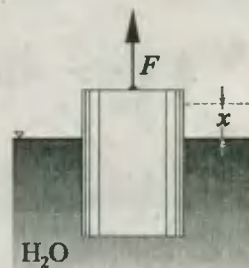


Fig. Prob. 17.18

Potencia

17.19. Un resorte de $1,04\text{ m}$ de longitud natural se encuentra instalado del modo indicado en la figura. Si el collarín se desplaza a razón de 6 m/s en la posición mostrada, ¿Cuál es la potencia que desarrolla el resorte en el instante señalado? ($k = 60\text{ N/cm}$).

17.20. Hallar qué potencia desarrollará el motor de un automóvil de 1 tonelada (1 t) de masa, sabiendo que marcha a velocidad constante de 36 km/h por una carretera horizontal. El rozamiento que ejerce el pavimento sobre los neumáticos es el 7% de su peso neto. (1 t = 10³ kg).

17.21. Un automóvil tiene en un instante dado una velocidad de 25 m/s, y el motor aplica una fuerza de tracción de 800 N sobre sus ruedas. ¿Qué velocidad poseerá el automóvil cuando la tracción ejercida sea de 500 N?

17.22. Un camión de carga puede ascender una pendiente de 1 por 60 a la velocidad de 12 km/h. Si hay una fuerza de fricción igual a 1/40 del peso del camión, ¿Con qué velocidad puede bajar por la misma pendiente, suponiendo que la potencia desarrollada por su motor es constante ?.

17.23. Un tranvía se mueve con una aceleración $a = 49 \text{ cm/s}^2$. Hallar el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y los rieles, sabiendo que el 50% de la potencia del motor se invierte en vencer la fuerza de rozamiento, y el 50% restante en aumentar la velocidad ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

17.24. Un cuerpo de masa $m = 8 \text{ kg}$ se lanzó bajo un ángulo $\alpha = 37^\circ$ hacia el horizonte, con una velocidad $v_0 = 25 \text{ m/s}$. Determinar la potencia media desarrollada por la fuerza de gravedad durante el movimiento del cuerpo, y la potencia instantánea de esta fuerza en $t = 1,2 \text{ s}$.

17.25. A un motor se le suministra 16 HP de potencia, la que a su vez moviliza una grúa. Se sabe que el motor es usado, y sólo rinde el 75%, y que la grúa, que es antigua, sólo rinde el 50% de lo que se espera de ella. Calcular a qué velocidad subirá una carga de 3 t jalada por la grúa.

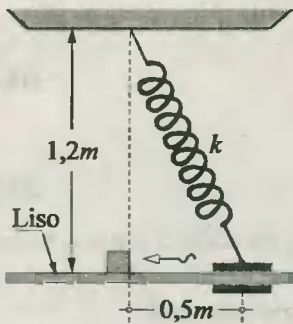


Fig. Prob. 17.19

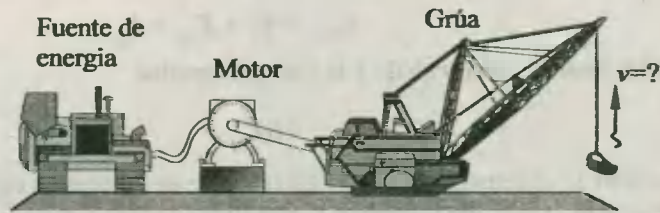


Fig. Prob. 17.25

17.26. Una camioneta pesa 10⁴ N, y al moverse en una pista horizontal experimenta una fuerza de rozamiento constante igual al 10% de su peso. ¿Qué cantidad de gasolina en kg consumirá el motor de la camioneta para aumentar su velocidad desde 36 km/h hasta 108 km/h en una distancia de 10 km ? La eficiencia del motor es 26%, y el poder energético de la gasolina es 5.10⁶ J/kg.

18

Energía

18.1 Energía cinética (E_c)

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (18.1)$$

18.2 Energía potencial gravitatoria (E_{pg})

$$E_{pg} = mgh \quad (18.2)$$

18.3 Energía potencial elástica (E_{pe})

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2 \quad (18.3)$$

siendo k la constante de elasticidad del cuerpo (resorte) o sistema.

18.4 Energía mecánica total (E_{mec})

$$E_{mec} = E_c + E_{pg} + E_{pe} \quad (18.4)$$

18.5 Teorema del trabajo y la energía cinética

$$W_{neto} = \Delta E_c \quad (18.5)$$

siendo E_c el trabajo que realiza la resultante de las fuerzas externas, sin excepción (peso, fuerzas elásticas,, etc.).

18.6 Teorema del trabajo de las fuerzas conservativas y la energía potencial

$$W = - \Delta E_p \quad (18.6)$$

siendo E_p la energía potencial debido a fuerzas elásticas, gravitatorias, eléctricas,, etc.

18.7 Teorema del trabajo y la energía mecánica

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} \quad (18.7)$$

siendo W_{ext} el trabajo que hacen todas las fuerzas exteriores a un sistema, y que no incluye el trabajo de las fuerzas conservativas (peso, fuerzas elásticas, eléctricas,, etc.).

18.8 Teorema de conservación de la energía mecánica

$$E_{mec}^{inic} = E_{mec}^{fin} \Leftrightarrow W_{ext} = 0 \quad (18.8)$$

PROBLEMAS

Nota: Para todos los problemas, considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$

18.1. Un bloque de 8 kg de masa, que descansa sobre un piso horizontal liso, es afectado por una fuerza $F = 40 \text{ N}$, horizontal y constante. ¿Cuál será la energía cinética del bloque al cabo de un tiempo $t = 3 \text{ s}$?

18.2. Sobre un cuerpo de 3 kg de masa, inicialmente en reposo, actúa una fuerza vertical, constante y hacia arriba de 50 N . ¿En qué relación se encuentran la energía cinética y potencial del bloque 5 s después de iniciada la acción de la fuerza?

18.3. Un cuerpo es soltado desde una altura $H = 240 \text{ m}$. ¿En qué relación se encuentran las energías potencial y cinética al cabo de un tiempo $t = 4 \text{ s}$?

18.4. Un cuerpo de masa $m = 5 \text{ kg}$ es lanzado pendiente abajo con una velocidad $v_0 = 4 \text{ m/s}$. Se desea averiguar qué trabajo neto realizarán las fuerzas externas a él hasta el instante en que su velocidad es $v_f = 10 \text{ m/s}$.

18.5. Una bola de acero de masa $m = 5 \text{ kg}$ parte desde el reposo del punto A, y desliza sin fricción por una rampa. Calcular el trabajo realizado por el peso hasta el punto B.

18.6. Un bloque de 5 kg de masa se desplaza sobre un eje X horizontal, de modo que en la posición $x_0 = 0 \text{ m}$ presenta una velocidad $v_0 = 6 \text{ m/s}$. Es también a partir de dicha posición que el bloque experimenta una fuerza F variable que actúa en la misma dirección del movimiento. ¿Cuál es la velocidad que presenta el bloque cuando desaparece la acción de la fuerza?

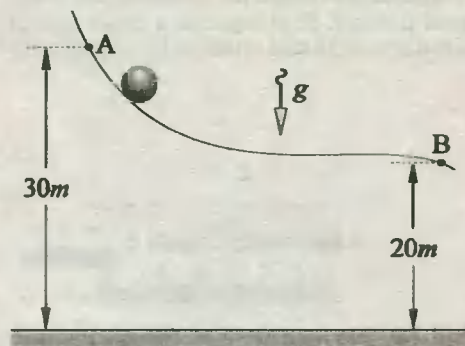


Fig. Prob. 18.5

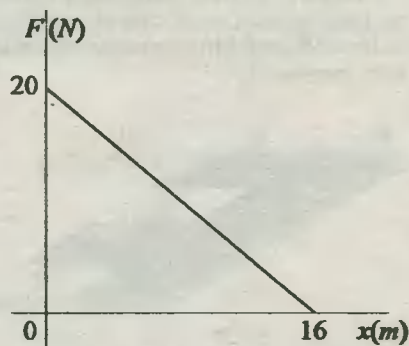


Fig. Prob. 18.6

18.7. Un bloque de masa $m = 10 \text{ kg}$ es empujado desde el reposo en A por una fuerza F horizontal y constante, de modo que al pasar por B lo hace con una velocidad $v = 4 \text{ m/s}$. Si no existe rozamiento, ¿Cuál es el valor de F ?

18.8. Un bloque de masa $m = 5 \text{ kg}$ es jalado por una fuerza F constante, de modo que al pasar por los puntos A y B lo hace con las velocidades de 6 m/s y 10 m/s . Si $\mu = 0.2$. ¿Cuál es el valor de F ?

18.9. Encontrar el trabajo que es necesario realizar sobre la varilla, si se desea pasar de la posición vertical a la posición indicada por $\theta = 53^\circ$. La varilla es uniforme, homogénea y de masa $m = 6 \text{ kg}$.

18.10. Una cortina de ventana de 1 kg de masa y 2 m de longitud se enrolla en forma de un rodillo sobre la ventana. ¿Qué trabajo se realiza en este caso?. Despreciar la fricción.

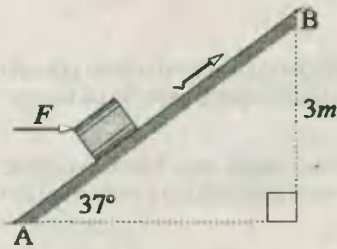


Fig. Prob. 18.7

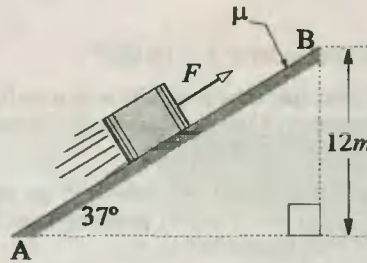


Fig. Prob. 18.8

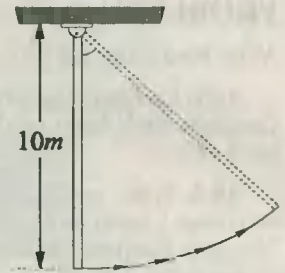


Fig. Prob. 18.9

18.11. Una piedra de masa $m = 4 \text{ kg}$ es dejada caer desde una altura $h = 20 \text{ m}$, llegando al suelo con una velocidad $v = 15 \text{ m/s}$. ¿Cuál es el trabajo que realizan las fuerzas de rozamiento del aire contra la piedra?.

18.12. Una caja de fósforos de masa m es lanzada horizontalmente sobre un piso con una velocidad $v_0 = 25 \text{ m/s}$. Si el coeficiente de rozamiento con el piso es $\mu = 1/5$, ¿Qué velocidad poseerá la caja luego de recorrer una distancia $d = 6 \text{ m}$?

18.13. Un bloque es lanzado horizontalmente por sobre dos placas metálicas de diferentes rugosidades μ_1 y μ_2 . Si la velocidad de ingreso en A es 25 m/s , y la de salida en B es 20 m/s , ¿Cuáles son los valores de los coeficientes de fricción, si además se sabe que $\mu_1 - \mu_2 = 5/8$? $l = 5 \text{ m}$.

18.14. Un tablón uniforme y homogéneo de 2 m de longitud es lanzado horizontalmente sobre un piso áspero con el cual el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0,5$. Si al ingresar a dicho piso el extremo B del tablón tenía una velocidad $v_0 = 5 \text{ m/s}$, ¿Qué espacio recorrerá el tablón hasta detenerse por completo?.

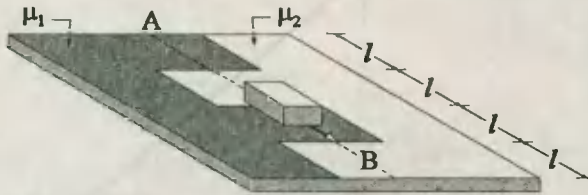


Fig. Prob. 18.13

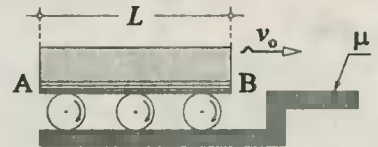


Fig. Prob. 18.14

18.15. ¿Qué fuerza hace falta aplicar para sacar de una tabla un clavo de 80 mm de longitud, si ha sido clavado de seis golpes con un martillo de masa $m = 0,5 \text{ kg}$, cuya velocidad un instante antes de cada golpe es $v = 2 \text{ m/s}$? Despreciar la masa del clavo.

18.16. ¿Qué trabajo hay que realizar para hacer que una tabla larga que descansa sobre el suelo gire en el plano horizontal alrededor de uno de sus extremos un ángulo α ? La longitud de la tabla es L , la masa m , y el coeficiente de rozamiento entre la tabla y el suelo es μ .

18.17. Un pequeño objeto es soltado desde el borde A de una rampa curva lisa, e ingresa por B a un plano horizontal áspero donde el coeficiente de fricción relativo es $\mu = 0,2$. ¿A qué distancia de B se detendrá el cuerpo?

18.18. Un pequeño cuerpo es soltado desde A, e ingresa a una cavidad esférica de radio $R = 8\text{ m}$, para luego ingresar desde B a un plano inclinado, donde $\mu = 1/4$. Se desea averiguar en qué punto C definido por h se detendrá el cuerpo. Considere $\theta = 37^\circ$.

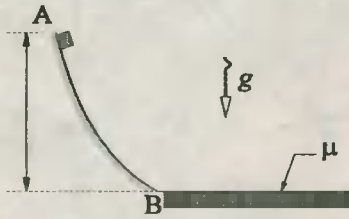


Fig. Prob. 18.17

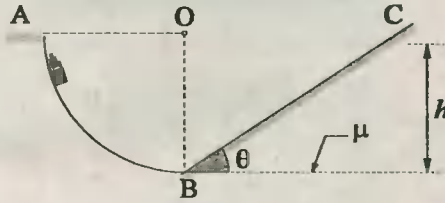


Fig. Prob. 18.18

18.19. Una piedra es soltada desde una altura $h = 4\text{ m}$ por encima de un terreno fangoso. Se desea averiguar a qué profundidad ingresa en el fango, si se sabe que la piedra recibe de parte de aquel una fuerza de fricción que es igual al triple de su peso.

18.20. Una viga uniforme y homogénea se encuentra inicialmente en posición horizontal y sujeta a un resorte de longitud $l = 40\text{ cm}$, y constante elástica $k = 100\text{ N/m}$. Al extremo B de la barra se aplica una fuerza F que lo coloca en la misma vertical del punto A. Si la barra tiene una masa $m = 4\text{ kg}$, ¿Qué trabajo habrá realizado la fuerza F en dicha trayectoria?

18.21. Un bloque es dejado en libertad en el borde de un agujero semiesférico completamente liso. Si su peso es 5 N , ¿Cuál será la lectura de la balanza instalada en la parte más baja de la trayectoria cuando el bloque pasa sobre él?

18.22. Un cuerpo es liberado en A de modo que desciende por un canal liso en forma de arco de circunferencia de radio R . ¿En qué punto B del canal definido por θ la aceleración de dicho cuerpo es horizontal?

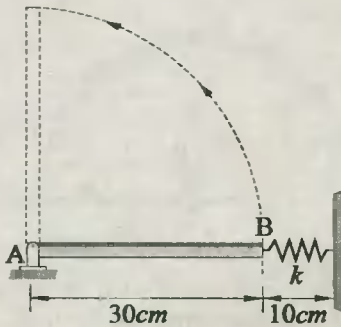


Fig. Prob. 18.20

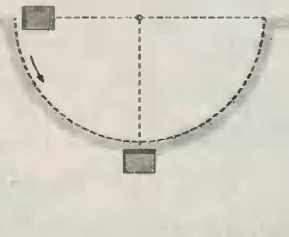


Fig. Prob. 18.21

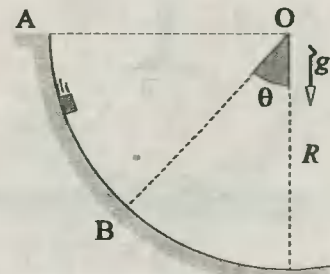


Fig. Prob. 18.22

18.23. Una bolita de masa $m = 4\text{ kg}$, que pende de un hilo de longitud L se desvía hacia un lado de manera que dicho hilo ocupa la posición horizontal A, y se suelta sin empujarlo. Abajo, a la distancia $h = (2/3)L$ del punto de suspensión O hay un clavo C. ¿Cuál es la tensión en el hilo en el instante que ocupa la posición horizontal B?

18.24. Un paquete de masa m se suelta en A, y oscila en un plano vertical. Si la cuerda que lo sostiene se rompe cuando su tensión es igual al doble del peso del paquete, se pide encontrar a qué altura h debajo de A se rompe la cuerda.

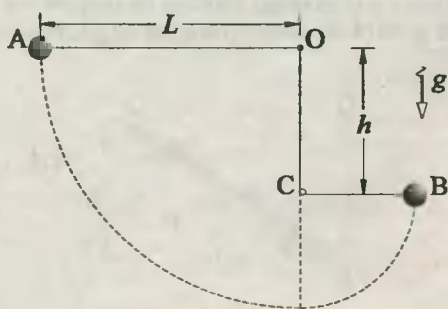


Fig. Prob. 18.23

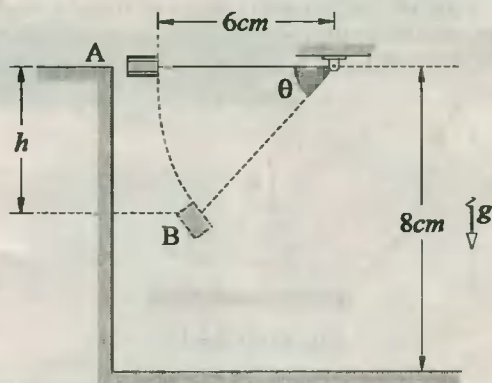


Fig. Prob. 18.24

18.25. Un cuerpo de masa $m = 4\text{ kg}$ gira en una circunferencia vertical atada a una cuerda inelástica. ¿Cuál es la diferencia de tensiones máxima y mínima que se presentan en la cuerda durante el movimiento?

18.26. ¿Hasta qué altura h máxima logrará elevarse una esferilla, que luego de soltarse en A ingresa a un tubo doblado en forma de arco de circunferencia, deslizándose sin fricción y abandonándolo en B? Se sabe también que $R = 8\text{ m}$, y $\theta = 60^\circ$.

18.27. Desde la cima de un hemisferio se suelta un pequeño objeto que desciende sin fricción hasta abandonarla. ¿Cuál es el ángulo θ que define esta posición?

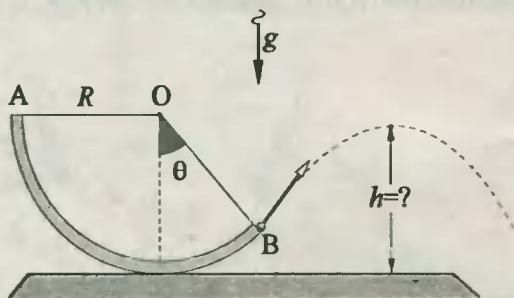


Fig. Prob. 18.26

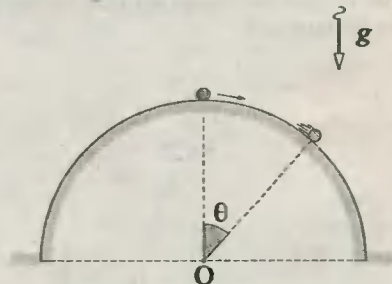


Fig. Prob. 18.27

18.28. Un pequeño tejo A se desliza desde el reposo y de la cúspide de una rampa lisa de altura H , que tiene un trampolín horizontal de altura h . Determinar:

- La distancia x a la que logra llegar el tejo en el piso.
- El valor de h para que x sea máxima.

18.29. Alrededor de un eje horizontal O puede girar libremente una palanca liviana cuyos brazos son iguales a $l_1 = 2m$, y $l_2 = 1m$. En los extremos de esta palanca están sujetas sendas cargas cuyas masas son iguales. ¿Qué velocidad tendrá la carga 1 en el punto inferior, si la palanca se encontraba inicialmente en reposo?

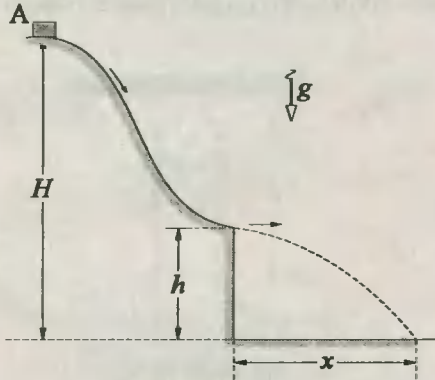


Fig. Prob. 18.28

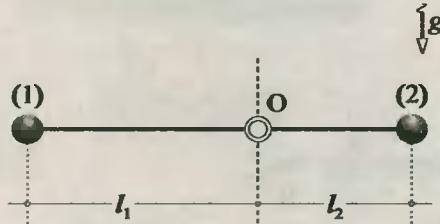


Fig. Prob. 18.29

18.30. Si en el sistema mostrado cortamos la cuerda vertical, los cuerpos empiezan a moverse por efecto de gravedad. Se desea calcular la energía cinética máxima que adquirirá el sistema. $m_2 = 3m_1 = 6\text{ kg}$, y $l_2 = 2l_1 = 4\text{ metros}$.

18.31. En la figura se muestra un sistema formado por dos bloques cuyas masas son m_1 y m_2 , tal que $m_1 = 3m_2$, e inicialmente en reposo. A continuación, si el sistema se deja en libertad, ¿Qué velocidad poseen los bloques cuando se cruzan?

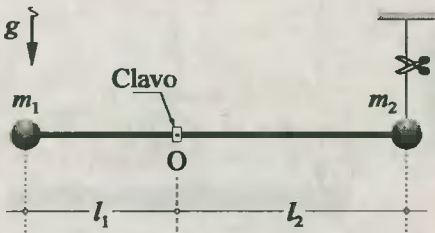


Fig. Prob. 18.30

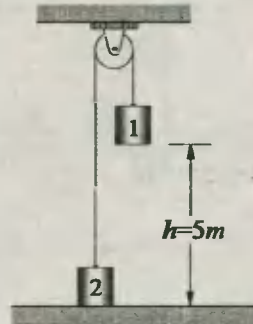


Fig. Prob. 18.31

18.32. Uno de los extremos de una cadena de masa $m = 9\text{ kg}$, y $l = 2\text{ m}$, que se encuentra sobre una mesa lisa, cuelga del borde de la misma con una porción igual $al/3$. ¿Qué trabajo mínimo se deberá realizar sobre la cadena para colocarla totalmente sobre la mesa?

18.33. Una cadena delgada y homogénea de longitud L está colocada inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción ABC , y en la posición indicada. ¿Cuál será la velocidad de toda la cadena cuando el último eslabón abandone el plano horizontal?

18.34. Una cadena delgada y homogénea de longitud L cuelga en la forma indicada. ¿Cuál es la velocidad de dicha cadena cuando el último eslabón abandone la polea? Despreciar toda forma de rozamiento, y considerar que $a < L/2$.

18.35. Una argolla de masa $m = 4\text{ kg}$ puede deslizarse sin fricción por una guía horizontal, gracias a un resorte de longitud natural $l = 0,3\text{ m}$, y constante elástica $k = 400\text{ N/m}$. Si la argolla parte del reposo en A, ¿Con qué velocidad pasará por B?

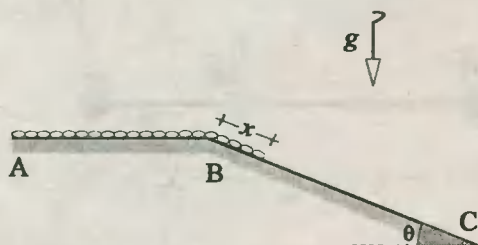


Fig. Prob. 18.33

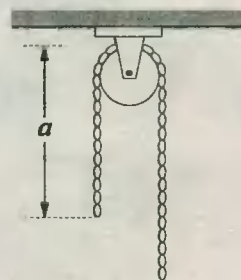


Fig. Prob. 18.34

18.36. Un objeto A de masa $m = 3\text{ kg}$ se deja en libertad y cae sobre una plataforma B, y debido al impacto comprime a un resorte de constante elástica $k = 1\,800\text{ N/m}$ y longitud $l = 0,15\text{ m}$. ¿A qué distancia del piso se logra detener el objeto, si $h = 0,2\text{ m}$? (Considerar despreciable la masa de la plataforma).

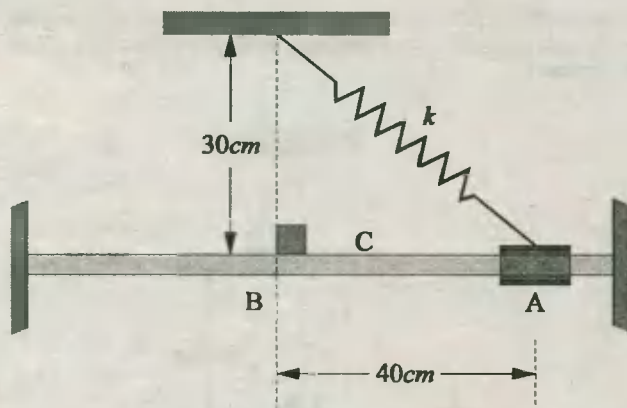


Fig. Prob. 18.35

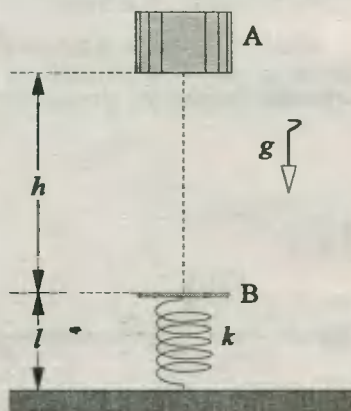


Fig. Prob. 18.36

18.37. Un bloque de masa m se ha colocado "suavemente" sobre un resorte vertical de longitud l y constante elástica k , teniendo su otro extremo fijo al piso. ¿En qué relación se encuentran la deformación máxima x_m con la deformación x_0 que presenta el bloque cuando el sistema queda en reposo?

18.38. Sabiendo que para la posición mostrada el sistema está en reposo, y el resorte se encuentra sin deformar, ¿Cuál será la máxima deformación x_m que experimentará el resorte cuando dicho sistema se deje en libertad? $m = 1\text{ kg}$; $k = 400\text{ N/m}$. Despreciar la masa de la polea móvil.

18.39. Dos esferas A y B se encuentran enlazadas por una cuerda inelástica, e inicialmente en reposo. Si el sistema carece de rozamiento, y las esferas se liberan simultáneamente, se pide calcular la velocidad de B cuando la esfera A llegue al punto Q. $m_A = 11 \text{ kg}$, $m_B = 25 \text{ kg}$.

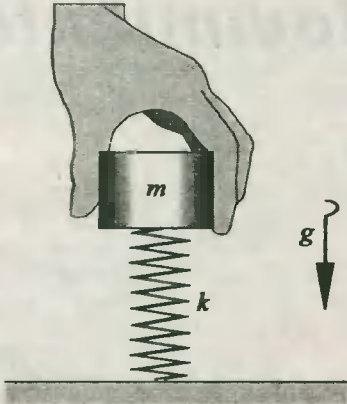


Fig. Prob. 18.37

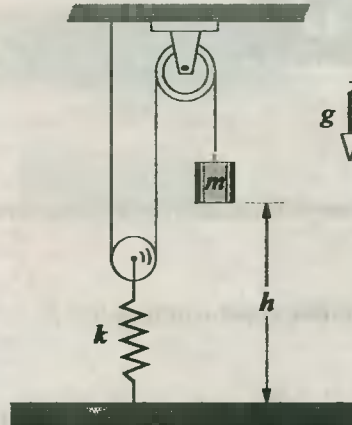


Fig. Prob. 18.38

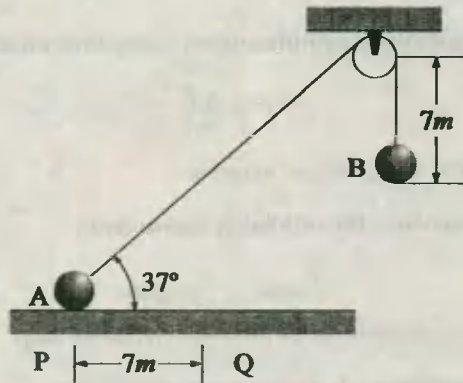


Fig. Prob. 18.39

19

Cantidad de Movimiento

19.1. Momentum lineal o cantidad de movimiento (P)

$$\bar{P} = m\bar{v} \quad (19.1)$$

19.2. Impulso, ímpetu o impulsión (J)

$$\bar{J} = \bar{F} \cdot \Delta t \quad (19.2)$$

19.3. Teorema del impulso y la cantidad de movimiento

$$\bar{J} = \Delta \bar{P} \quad (19.3)$$

19.4. En un gráfico *fuerza - vs - tiempo*, el área bajo la curva coincide con el cambio producido en la cantidad de movimiento.

19.5. Principio de variabilidad de la cantidad de movimiento de un sistema

$$\bar{F} = \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta t} \quad (19.4)$$

siendo F la fuerza resultante de las fuerzas externas.

19.6. Principio de conservación de la cantidad de movimiento

$$\bar{P}_{\text{antes}} = \bar{P}_{\text{después}} \quad (19.5)$$

Esto se cumplirá sólo si la resultante de las fuerzas externas es **nula**.

19.7. Velocidad del centro de masa de un sistema de partículas

$$\bar{v}_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i \cdot \bar{v}_i}{m_{\text{sistema}}} \quad (19.6)$$

19.8. Ecuación del centro de masa de un sistema de partículas

$$\bar{F} = m_{\text{sist}} \cdot \frac{\Delta \bar{v}_{\text{cm}}}{\Delta t} = m_{\text{sist}} \cdot \bar{a}_{\text{cm}} \quad (19.7)$$

siendo \bar{F} la resultante de las fuerzas externas.

COLISIONES

19.9. Coeficiente de restitución

$$e = \frac{v_{\text{relajamiento}}}{v_{\text{relacercamiento}}} \quad (19.8)$$

19.10. Ley de la reflexión para choques

$$e = \frac{\operatorname{tg} i - \mu}{\operatorname{tg} r + \mu} \quad (19.9)$$

siendo μ el coeficiente de rozamiento, i el ángulo de incidencia, y r el ángulo de reflexión.

PROBLEMAS

Cantidad de Movimiento

19.1. La bola mostrada cuya masa es $0,5 \text{ kg}$ choca contra la pared con una velocidad $v_1 = 12 \text{ m/s}$, y rebota con $v_2 = 8 \text{ m/s}$. Hallar:

- El impulso que recibe la bola durante el choque.
- La fuerza media, si el choque dura $\Delta t = 0,05 \text{ s}$.

19.2. Un bloque de 20 kg de masa es abandonado desde una altura $h = 5 \text{ m}$, cayendo sobre una balanza de resorte. Si el impacto duró $\Delta t = 0,2 \text{ s}$, ¿Cuál fue la lectura media de la balanza?

19.3. Una pelota de $0,2 \text{ kg}$ de masa rebota contra un piso horizontal. Si $v_0 = 12 \text{ m/s}$, y $v_f = 5 \text{ m/s}$, ¿Qué fuerza media recibió la pelota durante el choque, si éste duró $\Delta t = 0,01 \text{ s}$? Despreciar la gravedad.

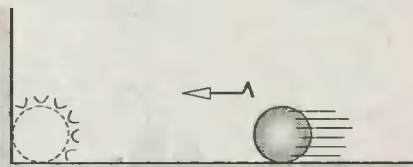


Fig. Prob. 19.1

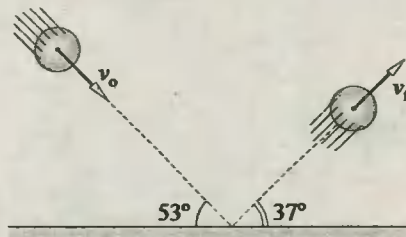


Fig. Prob. 19.3

19.4. Una partícula de $0,2 \text{ kg}$ de masa se desplaza a lo largo del eje X con velocidad $v_0 = -20\mathbf{i} \text{ (m/s)}$. Desde el instante $t = 0$ experimenta una fuerza variable, tal como se muestra en la figura. ¿Qué velocidad tendrá la partícula cuando $t = 8 \text{ s}$?

19.5. Para el sistema de partículas mostrado, determinar la aceleración del centro de masa, si todas las fuerzas indicadas son externas.

19.6. En la figura se muestran tres partículas cuyas velocidades son: $v_1 = 5\mathbf{j}$, $v_2 = -25\mathbf{i}$, $|\mathbf{v}_3| = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$. Encontrar la velocidad del centro de masa, si además: $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 6 \text{ kg}$, $m_3 = 3 \text{ kg}$.

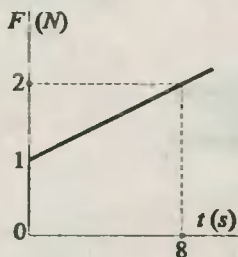


Fig. Prob. 19.4

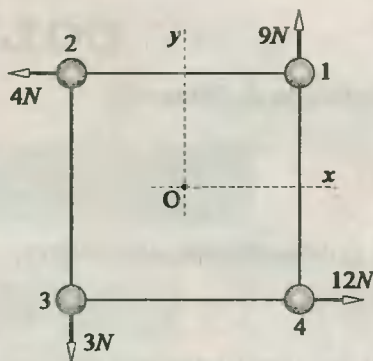


Fig. Prob. 19.5

19.7. Dos bolas idénticas se desplazan sobre una misma recta con velocidades $v_1 = 10 \text{ m/s}$ y $v_2 = 6 \text{ m/s}$. Si experimentan un choque frontal, se pide calcular la velocidad del centro de masa antes y después del choque, si se desplazaban:

- En la misma dirección (1 detrás de 2).
- En direcciones opuestas.

19.8. Dos partículas de masas iguales se desplazan en direcciones perpendiculares sobre una superficie lisa. Si $v_1 = 8 \text{ m/s}$, y $v_2 = 6 \text{ m/s}$, calcular:

- La velocidad del centro de masa del sistema.
- La velocidad que tendrá cada uno, si chocan en O y continúan unidos.

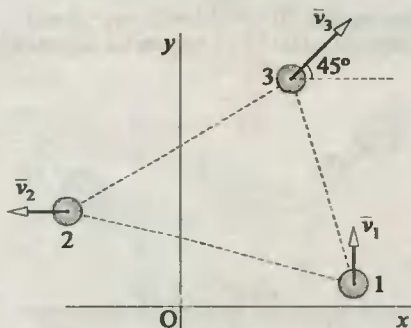


Fig. Prob. 19.6

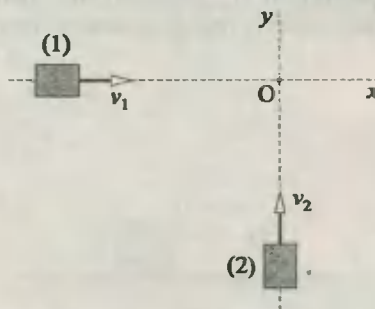


Fig. Prob. 19.8

19.9. Un hombre de 72 kg de masa va corriendo con una velocidad de 5 m/s , y da alcance a un vagón de 328 kg que marcha a razón de 3 m/s , y se monta en él. ¿Qué velocidad adquirirán ambos, si el vagón se movía en la misma dirección que el hombre?

19.10. Un hombre de 50 kg de masa que viaja en un coche de masa $M = 450 \text{ kg}$ con $v_0 = 20 \text{ m/s}$ empieza a correr sobre él con una velocidad relativa $u = 10 \text{ m/s}$ respecto al coche y en dirección opuesta. ¿Cuál será la velocidad del hombre respecto al piso?

19.11. Un hombre de masa m que viaja en un coche de masa M salta a un carro delantero de masa M con una velocidad u respecto a su carro. Si los carros se movían inicialmente con velocidades iguales a v_0 , ¿Qué velocidad poseerán los carros después que el hombre haya saltado?

19.12. Sobre una lancha (L) en reposo cuya masa es $M = 368 \text{ kg}$, y en aguas tranquilas, dos personas A y B de masas $m_A = 82 \text{ kg}$ y $m_B = 50 \text{ kg}$ parten de los extremos de la lancha con velocidades relativas a la lancha $u_A = 5 \text{ m/s}$ y $u_B = 4 \text{ m/s}$. Calcular la velocidad de la lancha durante el suceso.

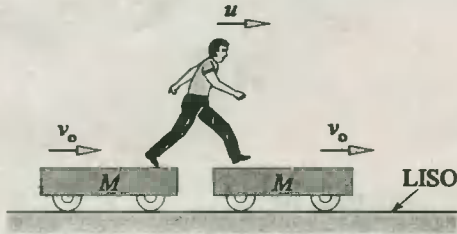


Fig. Prob. 19.11

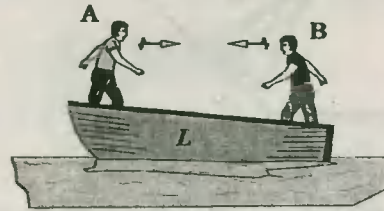


Fig. Prob. 19.12

19.13. Una persona de 60 kg de masa empieza a moverse desde el extremo de una plataforma de masa $M = 240 \text{ kg}$ hacia el otro extremo. ¿A qué distancia de la pared quedará el hombre cuando haya llegado al otro extremo?

19.14. Un sapo de masa m está sentado en el extremo de una tabla de masa $M = 5m$ y $2m$ de longitud que se encuentra flotando en un lago. Si el sapo salta a lo largo de la tabla formando un ángulo de 37° con la horizontal, ¿Con qué velocidad deberá saltar el sapo para llegar de un solo salto al extremo opuesto de la tabla?

19.15. Una granada de masa m avanza horizontalmente con una velocidad de 49 m/s , y explota en tres fragmentos de masas diferentes, con velocidades v_1 y v_2 . Los fragmentos van hacia arriba y hacia abajo, y el tercero sale con una velocidad que es la semisuma de los otros dos. ¿Cuáles son los valores de las velocidades de los fragmentos?

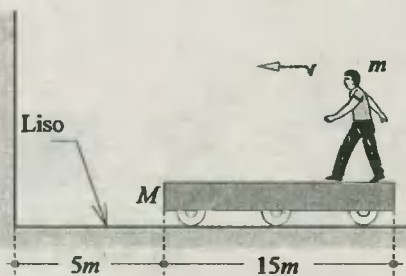


Fig. Prob. 19.13

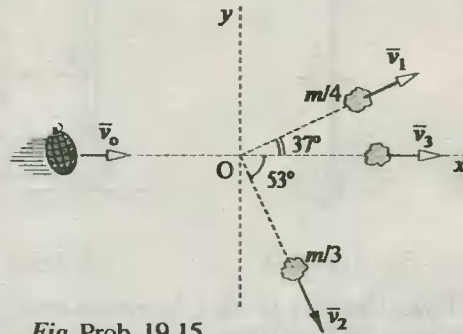


Fig. Prob. 19.15

19.16. De un cañón de masa M que se encuentra en el pie de un plano inclinado se dispara un proyectil de masa m con una velocidad v_0 , tal como se muestra en la figura. ¿A qué altura subirá el cañón como resultado de la repercusión, si el sistema se encontraba inicialmente en reposo? $\alpha = 45^\circ$, $\theta = 15^\circ$, $\mu = 0,5$.

19.17. En el gráfico se muestra una bala de masa m que impacta con el bloque de masa M con una velocidad v_0 . ¿Qué altura alcanzará el conjunto, si dicha bala queda incrustada en el bloque?.

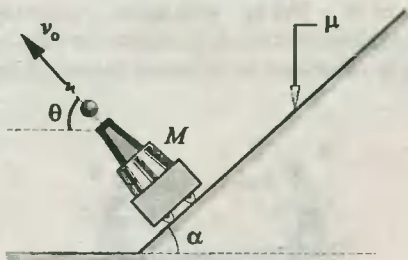


Fig. Prob. 19.16

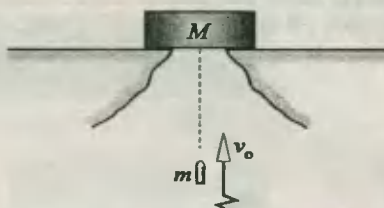


Fig. Prob. 19.17

19.18. Se dispara un proyectil cuya masa es $m = 100\text{ g}$ sobre un péndulo balístico cuya masa es $M = 9,9\text{ kg}$. Cuando el péndulo está en su altura máxima, la cuerda forma un ángulo θ con la vertical. Si $L = 0,5\text{ m}$, hallar la medida del ángulo θ , sabiendo que el proyectil impacta en el péndulo con una velocidad de 200 m/s ($g = 10\text{ m/s}^2$).

19.19. Una esfera de masa M pende de un hilo de longitud L . La esfera es golpeada horizontalmente por un proyectil de masa m , y que se introduce en ella. ¿Cuál debe ser la velocidad mínima del proyectil para que después de golpear a la esfera, ésta alcance a realizar una vuelta completa en el plano vertical?.

19.20. Un carrito de masa M puede moverse sin fricción sobre un plano horizontal. Sobre el carrito fue instalado un péndulo simple de masa m y longitud $L = 50\text{ cm}$. Inicialmente el sistema estaba en reposo, tal que $\theta = 60^\circ$. ¿Cuál será la velocidad del carrito en el instante en que el péndulo pase por su posición vertical luego de cortar el cable X? $M = 9m$; $g = 10\text{ m/s}^2$.

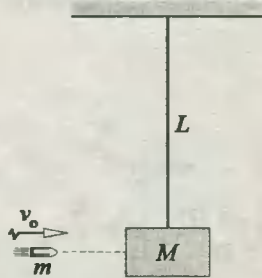


Fig. Prob 19.18

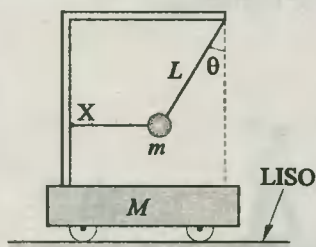


Fig. Prob. 19.20

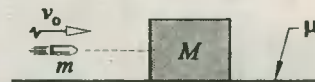


Fig. Prob. 19.21

19.21. Una bala de 400 g de masa se desplaza horizontalmente con una velocidad de 250 m/s , y al impactar contra un bloque de masa $M = 4,6\text{ kg}$, inicialmente en reposo, queda incrustada en él. ¿Hasta qué distancia logrará avanzar el conjunto, si $\mu = 0,4$? ($g = 10\text{ m/s}^2$).

19.22. Un bloque de masa M se encuentra unido a un coche de masa M_0 por intermedio de un resorte ingravido de constante de elasticidad k , todo inicialmente en reposo. Una bala de masa m es disparada con velocidad v_0 , incrustándose en el bloque. Despreciando todo tipo de rozamiento, encontrar la máxima deformación x del resorte.

19.23. Una esferilla de masa m ingresa horizontalmente con una velocidad v_0 a la superficie curva de un coche de masa M . Si la esferilla logra subir por la curva, ¿Con qué velocidad la abandona?. Despreciar el rozamiento.

Colisiones

19.24. Dos bolas de billar de masas $m_1 = 5 \text{ kg}$ y $m_2 = 3 \text{ kg}$ chocan frontal y elásticamente con velocidades $v_1 = 9 \text{ m/s}$ y $v_2 = 5 \text{ m/s}$. Se pide encontrar las velocidades de cada bola después del choque, si ellos se mueven:

- a) En la misma dirección (1 detrás de 2).
- b) En direcciones opuestas.

19.25. Dos deslizadores de masas m_1 y m_2 son libres de moverse en una superficie completamente lisa. Uno se encuentra en reposo, y el otro se dirige hacia él. El choque es elástico, luego del cual los deslizadores tienen velocidades iguales y opuestas. Determinar la relación entre sus masas (m_1/m_2).

19.26. Una molécula de gas que tiene una velocidad de 300 m/s choca elásticamente con otra molécula de la misma masa que está inicialmente en reposo. Después del choque, la primera molécula se mueve siguiendo un ángulo de 30° con su dirección inicial. Encontrar la velocidad de cada molécula después del choque.

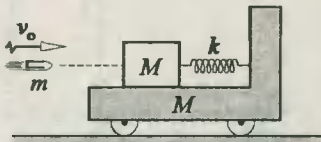


Fig. Prob. 19.22

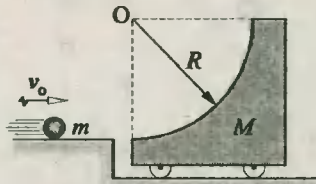


Fig. Prob. 19.23

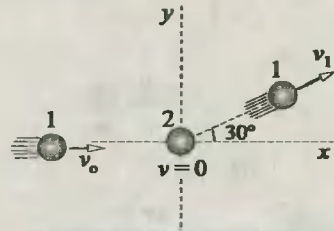


Fig. Prob. 19.26

19.27. Una partícula de masa m_1 chocó elásticamente con otra en reposo, de masa m_2 . ¿Qué parte relativa de la energía cinética perdió la partícula en movimiento, si ella rebotó bajo un ángulo recto a la dirección inicial de su movimiento?.

19.28. Un cuerpo de masa m choca elásticamente contra una cuña de masa M . Si m fue lanzado con velocidad v , y M empieza a deslizar sin fricción, hallar la velocidad con la cual el cuerpo empieza su movimiento vertical.

19.29. En la figura, las cuñas de igual masa M y ángulos de inclinación de 45° descansan sobre una pista sin fricción. Desde una altura $H = 18 \text{ m}$ se suelta una bolita de masa $m = M/8$, la cual efectúa choques elásticos siguiendo la trayectoria mostrada. ¿Hasta qué altura rebotará m ?.

19.30. Una cuña de masa M cuyo ángulo de inclinación respecto a la horizontal es 30° descansa sobre un plano horizontal. Desde una altura de 18 metros cae libremente una esferita de masa m , y después de golpear elásticamente la cuña, rebota formando un ángulo de 30° con la horizontal. Si $M = 6m$, y no hay fricción, ¿Hasta qué altura se elevará la esferita?.

19.31. Una pelota de tenis es dejada caer desde una altura $h_1 = 9\text{ m}$ respecto de un piso horizontal, rebotando hasta una altura $h_2 = 4\text{ m}$. ¿Cuál es el coeficiente de restitución e entre la pelota y el piso?

19.32. Una bola de billar de 300 g de masa choca frontalmente contra una pared con una velocidad $v_0 = 20\text{ m/s}$. Si el coeficiente de restitución es $e = 0,5$, encontrar:

- La velocidad de rebote.
- El impulso que recibe de parte de la pared.
- La fuerza media que experimenta, si el impacto dura $\Delta t = 0,05\text{ s}$.
- La energía que se convierte en calor durante el choque.

19.33. Dos bolas de billar de igual masa chocan frontal e inelásticamente con velocidades $v_1 = 22\text{ m/s}$ y $v_2 = 12\text{ m/s}$. Si $e = 0,8$, encontrar las velocidades de las bolas después del choque, si ellas se movían:

- En la mismo dirección (1 detrás de 2).
- En direcciones opuestas.

19.34. Una masa $m_1 = 2\text{ kg}$, que se mueve con velocidad $v = 20\text{ m/s}$ choca contra una masa $m_2 = 4\text{ kg}$, que cuelga de una cuerda de longitud $L = 10\text{ m}$, según se indica en la figura. Sabiendo que $e = 0,5$, hallar hasta qué altura se elevará la masa m_2 .

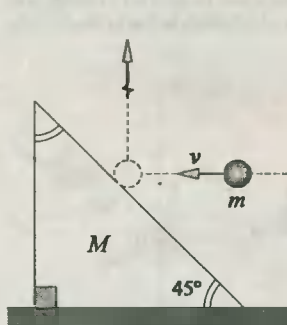


Fig. Prob. 19.28

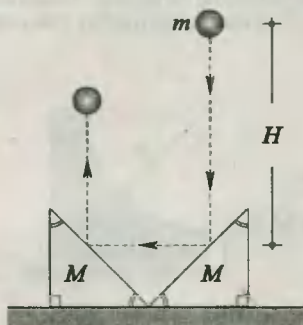


Fig. Prob. 19.29

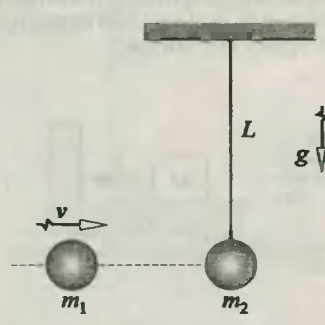


Fig. Prob. 19.34

19.35. En el sistema mecánico mostrado, la esferita de masa m es abandonada en A. Al descender lo hace sobre una superficie cilíndrica de radio R y completamente lisa. Hallar la máxima deformación del resorte cuya constante elástica es k después del choque entre la esfera y el bloque de masa M , si el coeficiente de restitución entre ellos es e .

19.36. Una pelota de goma impacta elásticamente sobre un piso horizontal según se muestra en la figura. Si $i = 53^\circ$, y $r = 45^\circ$, ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento entre la pelota y el piso?

19.37. Con los datos del problema anterior, si el choque es inelástico con $\mu = 0,75$ y $v_1 = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$, calcular:

- a) El coeficiente de restitución entre la pelota y el piso.
- b) La velocidad de rebote v_2 .

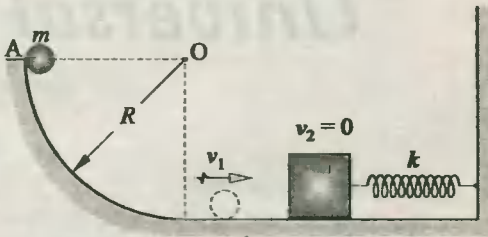


Fig. Prob. 19.35

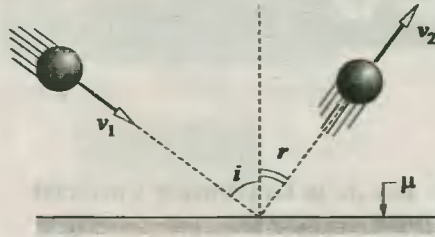


Fig. Prob. 19.36

19.38. Una pelota es lanzada horizontalmente contra una pared inclinada, donde $\mu = 1/3$, y $e = 12/13$. Si logra rebotar verticalmente, según se muestra, calcular θ .

19.39. Se suelta una pelota desde una altura $h = 45 \text{ m}$. Calcular el tiempo que tiene que transcurrir para que la pelota deje de rebotar contra el piso, si el coeficiente de restitución es $e = 0,5$ ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

19.40. Se lanza oblicuamente una bola con una velocidad v_0 y en la dirección α con el horizonte. Si el coeficiente de restitución con el piso es e , hallar la distancia horizontal recorrida por la bola hasta antes de dejar de rebotar. Despreciar el rozamiento.

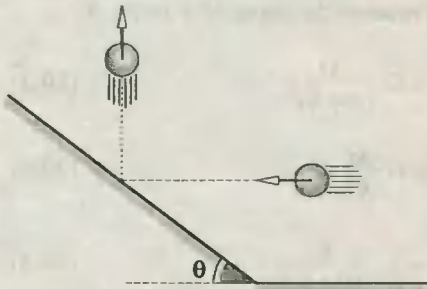


Fig. Prob. 19.38

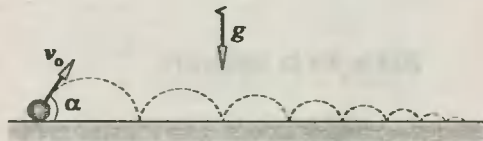
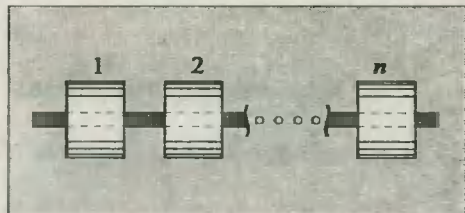


Fig. Prob. 19.40

19.41. n collares iguales de acero pueden deslizar libremente sin fricción sobre la barra horizontal fija. El collar 1 avanza con una velocidad de 100 m/s , y todos los demás se encuentran en reposo. Si la velocidad que adquiere el último collar después del correspondiente choque es $65,61 \text{ m/s}$, y el coeficiente de restitución entre los collares es $e = 0,8$, calcular el número de collares presentes sobre la barra.



20

Gravitación Universal

20.1. Ley de la Gravitación Universal

$$F_g = G \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \quad (20.1)$$

siendo G constante de gravitación universal ($6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$), y F_g es la fuerza de gravedad.

20.2. *Los cuerpos dentro de cascarones esféricos no experimentan fuerza de atracción gravitatoria por parte de dicho cascarón.*

20.3. Intensidad de campo gravitatorio (g)

$$g = \frac{F_g}{m} \quad ; \quad g = G \frac{M}{d^2} \quad (20.2)$$

20.4. Campo creado por una esfera homogénea y maciza de masa M y radio R

20.4.a. A una altura h :
$$g_e = G \frac{M}{(R+h)^2} \quad (20.3)$$

20.4.b. En la superficie:
$$g_s = G \frac{M}{R^2} \quad (20.4)$$

(*) Relacionando (20.3) y (20.4):
$$g_e = g_s \frac{R^2}{(R+h)^2} \quad (20.5)$$

20.4.c. En el interior de la esfera y a una distancia r de su centro:

$$g_i = (GM/R^3)r \quad (20.6)$$

(*) Relacionando (20.4) y (20.6):
$$g_i = (g_s/R)r \quad (20.7)$$

20.5. Energía potencial gravitatoria (E_{pg})

$$E_{pg} = -G \frac{Mm}{d} \quad (20.8)$$

20.6. Velocidad de un satélite en órbita

$$v = \sqrt{GM/d} \quad (20.9)$$

20.7. Velocidades cósmicas de los satélites para un sistema de referencia ubicado en la Tierra

20.7.a. Primera velocidad cósmica, o velocidad orbital

$$v_1 = \sqrt{GM/R} = 8 \text{ km/s} \quad (20.10)$$

20.7.b. Segunda velocidad cósmica, o velocidad parabólica de escape

$$v_2 = \sqrt{2} \cdot v_1 = 11 \text{ km/s} \quad (20.11)$$

MOVIMIENTO PLANETARIO

20.8. Leyes de Kepler

20.8.a. *Ley de las órbitas*.- Las trayectorias que describen los planetas alrededor del Sol son elípticas, las mismas que se colocan dentro de los focos de la elipse.

20.8.b. *Ley de las áreas*.- Los radios vectores barren áreas proporcionales a los tiempos de recorrido.

$$S \propto t \quad (20.12)$$

20.8.c. *Ley de los periodos*.- Los cuadrados de los periodos de giro de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.

$$T^2 \propto r^3 \quad (20.13)$$

PROBLEMAS

20.1. Dos masas se atraen con una fuerza $F_1 = 160 \text{ N}$. Si la distancia entre ellas se duplica y la masa de una se triplica, ¿Cuál es la nueva fuerza F_2 entre las dos?.

20.2. Dos masas puntuales están colocadas a una distancia d , siendo sus valores $m_1 = 12 \text{ kg}$ y $m_2 = 2 \text{ kg}$. Se desea extraer una masa m de una de ellas y entregarla a la otra, de modo que la fuerza entre ellas sea máxima. ¿Cuál es el valor de m que satisface esta condición?.

20.3. En la figura se tiene una esfera maciza y homogénea de masa M y radio a , concéntrica a un cascarón esférico de masa M y espesor a . Se desea encontrar la intensidad del campo gravitatorio en los puntos A, B y C.

20.4. Determinar a qué altura de la superficie terrestre la aceleración de la gravedad es la novena parte que la existente sobre su superficie (Radio terrestre = 6 400 km).

20.5. De acuerdo con datos bastante aproximados, se sabe que la masa de la Luna es 1/100 de la masa terrestre, y su radio es 1/6 del radio terrestre. Con estos datos, encontrar la aceleración de la gravedad en la superficie lunar ($g_{\text{Tierra}} = 10 \text{ m/s}^2$).

20.6. Utilizando los datos del problema anterior, se pide encontrar a qué altura sobre la superficie terrestre la aceleración de la gravedad a causa de la Tierra es igual a la aceleración de la gravedad en la superficie lunar ($R = \text{radio terrestre}$).

20.7. En un planeta esférico de radio R se mide la intensidad del campo gravitatorio a una altura x y una profundidad igual, consiguiéndose en ambos lugares el mismo valor. ¿Cuál es el valor de x que satisface esta propiedad del campo?

20.8. ¿A qué distancia del centro del planeta A sobre la recta AB la aceleración creada por él será el doble de la aceleración creada por el planeta B? $M_A = 18M_B$.

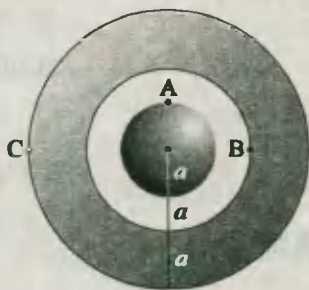


Fig. Prob. 20.3

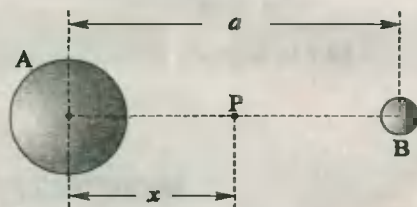


Fig. Prob. 20.8

20.9. Encontrar la intensidad del campo gravitatorio creado por las masas puntuales mostradas en el punto P. $m_A = 8 \cdot 10^{17} \text{ kg}$; $m_B = 54 \cdot 10^{17} \text{ kg}$; $x = \sqrt{6,67} \text{ km}$.

20.10. Un hombre pesa 700 N sobre la superficie terrestre. Suponiendo que el radio de la Tierra se duplicara, manteniendo constante su densidad promedio, ¿Cuál sería su nuevo peso?

20.11. Teniendo en cuenta que la Tierra rota con velocidad angular ω , se pide encontrar la lectura de la balanza para una persona ubicada sobre un punto de la línea ecuatorial. $R =$ radio terrestre; $g_s =$ aceleración de la gravedad en la superficie.

20.12. Del problema anterior, se pide encontrar el periodo de rotación T de la Tierra, para el cual las personas ubicadas en el Ecuador saldrían disparadas libremente al espacio circundante ($g_s = 10 \text{ m/s}^2$).

20.13. Según el problema anterior, se sabe que a causa de la rotación de la Tierra la lectura de una balanza en el Ecuador es menor que en los Polos. ¿A qué altura h sobre la superficie del planeta en uno de los Polos la lectura de la balanza será igual a la que se obtiene sobre la superficie en el Ecuador?

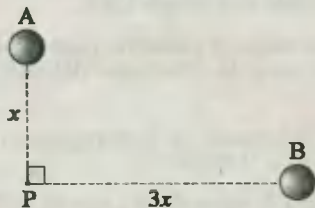


Fig. Prob. 20.9

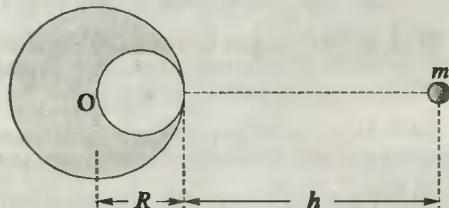


Fig. Prob. 20.14

20.14. En la figura se muestra una esfera de masa M y radio R que está frente a otra masa m ubicada a la distancia $h = 3R$, y así se atraen con una fuerza de 49 N . A la esfera M se le ha

practicado una perforación esférica de radio $R/2$, y ubicada según como lo muestra el gráfico. ¿Cuál será la nueva fuerza de atracción sobre m ?

20.15. Encontrar la energía potencial gravitatoria del sistema mostrado en la figura.

20.16. Calcular el mínimo trabajo que debe realizar un agente externo para llevar una partícula de masa $m = 10 \text{ kg}$ del punto B al punto A ($m_1 = 3m_2 = 6m$).

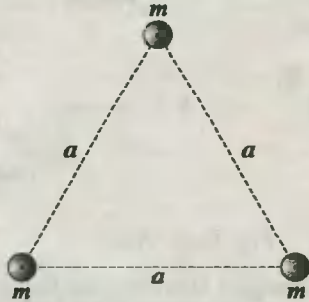


Fig. Prob. 20.15

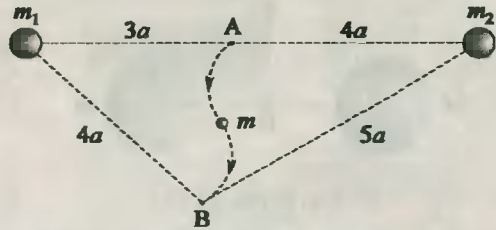


Fig. Prob. 20.16

20.17. En el sistema mostrado (página siguiente) se abandona una partícula en el punto A, la que debido a las fuerzas de gravedad empieza a moverse en la dirección AB. Se pide encontrar la velocidad de la partícula en el punto B, sabiendo que: $R_C = R_D = R$; $AC = AD = 4R$; $CB = BD$ ($M =$ masa de cada esfera).

20.18. Encontrar la energía mecánica de un satélite de masa m que gira alrededor de un planeta de masa M y a la distancia d de su centro.

20.19. Calcular la velocidad de un satélite artificial que se mueve en una órbita en donde la aceleración de la gravedad es $1/4$ de la gravedad en la superficie terrestre.

20.20. Un cuerpo de masa m se encuentra en reposo a una altura $h = 8R$, siendo R el radio terrestre. Se pide averiguar la velocidad que tendrá al llegar a la superficie de la Tierra cuando al caer solo se vea afectado por la fuerza de gravedad ($m \ll M_{\text{Tierra}}$).

20.21. Utilizando los datos del problema anterior, consideremos que la partícula se introdujera en un túnel recto que lo llevase hasta el centro de la Tierra después de llegar a la superficie terrestre. Se pide encontrar la velocidad que tendría al pasar por dicho lugar.

20.22. Dos masas M y m se encuentran separadas una distancia infinita, y van acercándose poco a poco por atracción gravitatoria. ¿Cuál es la velocidad relativa entre ellas cuando se encuentren a una distancia d una de la otra?

MOVIMIENTO PLANETARIO

20.23. Dos planetas M_1 y M_2 giran alrededor del Sol en órbitas circulares de radios R_1 y R_2 respectivamente, tal que $R_2 = 4R_1$. Si el periodo de M_1 es 200 días terrestres, hallar el periodo de M_2 .

20.24. Dos satélites de la Tierra de masas iguales tienen sus periodos en la siguiente relación: $T_2 : T_1 = 8 : 1$. Calcular en qué relación se encuentran sus energías cinéticas.

20.25. La figura muestra las órbitas de los satélites de Marte: **Phobos** y **Deimos**. Si el apogeo y perigeo de Deimos es 2 800 km y 2 000 km más que los de Phobos respectivamente, calcular el periodo de Phobos, si el de Deimos es 343 días terrestres. $b = 4a = 4\ 000\text{ km}$.

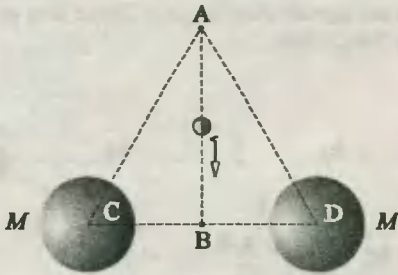


Fig. Prob. 20.17

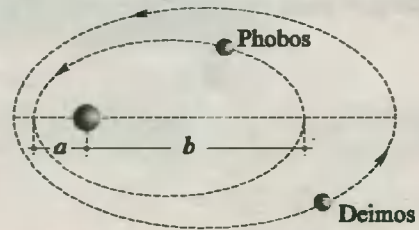


Fig. Prob. 20.25

20.26. La figura muestra la órbita elíptica de un planeta que gira alrededor del Sol con un periodo igual a 3 años terrestres. Si el planeta demora 6 meses terrestres en ir del perihelio al punto A, y 2 años 6 meses terrestres en ir del punto B al afelio, ¿Qué parte de la elipse es el área sombreada?

20.27. En el sistema mostrado se sabe que el satélite m gira alrededor del foco F. Si el tiempo para ir desde D hasta A es 5 veces mayor que el empleado para ir desde C hasta D, calcular qué fracción de la superficie elíptica es la región sombreada (BE es el eje menor, y AC es el eje mayor).

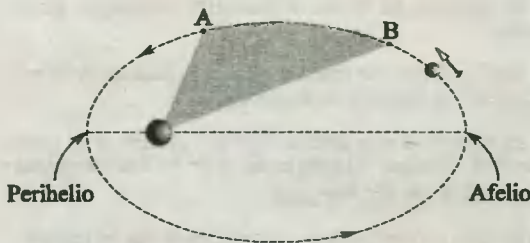


Fig. Prob. 20.26

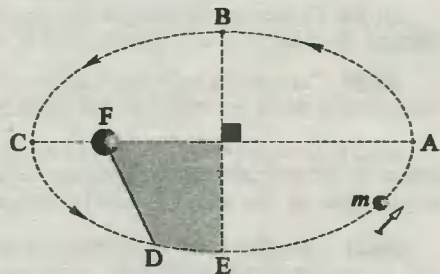


Fig. Prob. 20.27

21

Movimiento Armónico Simple

21.1. Concepto de MAS

"Es todo movimiento rectilíneo y vibratorio que se repite del mismo modo, y que presenta una aceleración directamente proporcional a la posición del móvil, pero de signo contrario".

$$a \propto -x \quad (21.1)$$

21.2. Elongación o posición (x)

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad (21.2)$$

$$x = A \cos \omega t \quad (21.3)$$

donde A es la amplitud o elongación máxima; ω la frecuencia angular; t es el tiempo, y ϕ es el ángulo de fase en rad . La relación (21.3) es válida para todo MAS que se inicie en un extremo de las oscilaciones, para lo cual $\phi = 0 rad$. La relación (21.2) es completamente equivalente a $x = A \sin(\omega t + \phi)$.

21.3. Velocidad (v)

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \quad (21.4)$$

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad (21.5)$$

$$v_{\text{máx}} = \omega A \Leftrightarrow x = 0 \quad (21.6)$$

$$v_{\text{mín}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm A \quad (21.7)$$

21.4 Aceleración (a)

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (21.8)$$

$$a = -\omega^2 x \quad (21.9)$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A \Leftrightarrow x = \pm A \quad (21.10)$$

$$a_{\text{mín}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (21.11)$$

donde el vector aceleración siempre apunta hacia la posición de equilibrio.

21.5. Fuerza en un oscilador mecánico

$$F = -kx \quad (21.12)$$

siendo el vector F la resultante sobre el sistema oscilante, y que satisface la ley de Hooke. Además, k es la constante de elasticidad, y x es el vector posición o deformación.

21.6. Frecuencia angular de un oscilador mecánico (ω)

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (21.13)$$

siendo k la constante de elasticidad, y m la masa del oscilador.

21.7. Periodo de un oscilador mecánico (T)

$$T = 2\pi \sqrt{m/k} \quad (21.14)$$

21.8. Frecuencia de un oscilador mecánico (f)

$$f = 1/T = 1/2\pi \sqrt{m/k} \quad (21.15)$$

En el SI, f se expresa en *hertz* (Hz): $1 \text{ Hz} = 1 \text{ osc/s}$.

21.9. Energía mecánica de un oscilador mecánico (E)

$$E = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (21.16)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (21.17)$$

21.10. Acoplamiento de resortes en serie

$$x_T = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (21.18)$$

$$F_T = F_1 = F_2 = \dots = F_n \quad (21.19)$$

$$k_{eq}^{-1} = k_1^{-1} + k_2^{-1} + \dots + k_n^{-1} \quad (21.20)$$

21.11. Acoplamiento de resortes en paralelo

$$x_T = x_1 = x_2 = \dots = x_n \quad (21.21)$$

$$F_T = F_1 + F_2 + \dots + F_n \quad (21.22)$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (21.23)$$

PROBLEMAS

21.1. Una partícula que oscila armónicamente toma 1 s para pasar por dos puntos de su trayectoria con la misma velocidad, que se encuentran separados 20 cm. En 2 s más vuelve a pasar de regreso por el segundo punto. Calcular el periodo y la amplitud del movimiento.

21.2. Determinar la ecuación del movimiento de la proyección sobre un diámetro de un punto que describe una circunferencia de 35 cm de radio, sabiendo que al comenzar el movimiento la proyección incide en los $4/5$ del radio respecto al centro, y luego de 4 s su proyección da en los $3/5$ del radio. Indique también el periodo del movimiento.

21.3. Una partícula oscila armónicamente con una amplitud $A = 25 \text{ cm}$, de modo que inicia su movimiento en un extremo. Cuando ella se encuentra a 7 cm de la posición de equilibrio su velocidad es $v = 48 \text{ cm/s}$. ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones?.

21.4. Un cuerpo oscila armónicamente con una frecuencia $f = 5\text{ Hz}$, de modo que al llegar a un extremo su aceleración es $10\pi^2\text{ m/s}^2$. ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones?

21.5. Un objeto experimenta un MAS, de modo que al pasar por la posición de equilibrio su velocidad es 15 m/s . Calcular el módulo de la aceleración en aquel punto de la trayectoria donde la velocidad es 12 m/s , si además se sabe que la posición de dicho punto viene dado por $x = 9\text{ m}$.

21.6. Una plataforma oscila horizontalmente con una amplitud $A = 1,2\text{ m}$ y frecuencia $f = 15\text{ osc/min}$. Calcular el mínimo valor que debe tener el coeficiente de fricción para que un cuerpo colocado sobre la plataforma no resbale sobre ella durante las oscilaciones ($g = \pi^2\text{ m/s}^2$).

21.7. En el oscilador horizontal sin fricción de la figura, se pide encontrar la máxima amplitud que pueden tener las oscilaciones, de modo que el bloque superior no resbale. El coeficiente de fricción entre m y M es μ .

21.8. Una caja de masa $M = 8\text{ kg}$ está sobre una mesa horizontal. En la caja se encuentra suspendida una carga de masa $m = 2\text{ kg}$ por medio de un muelle de constante de elasticidad $k = 400\text{ N/m}$. ¿Con qué amplitud de las oscilaciones de la carga la caja empezará a saltar sobre la mesa?

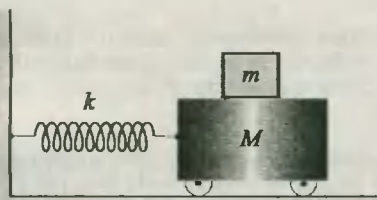


Fig. Prob. 21.7

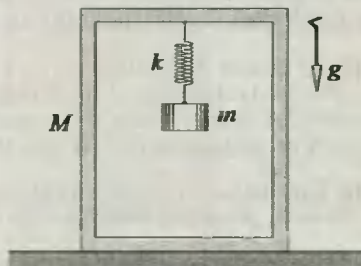


Fig. Prob. 21.8

21.9. Un bloque de masa m unido por un resorte de constante elástica k a una caja de masa M oscila armónicamente sin fricción. ¿Con qué amplitud de las oscilaciones del bloque comenzará la caja a moverse por la mesa?

21.10. Dos bloques de igual masa m están firmemente unidos a un muelle de constante elástica k , los que se muestran en equilibrio en la figura. Determinar la altura máxima x que se puede hacer descender el bloque superior, de modo que el bloque inferior no llegue a saltar durante las oscilaciones.

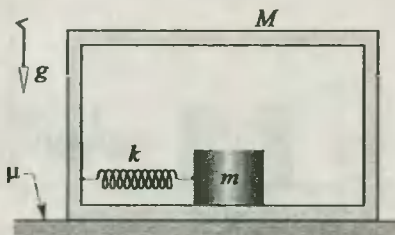


Fig. Prob. 21.9

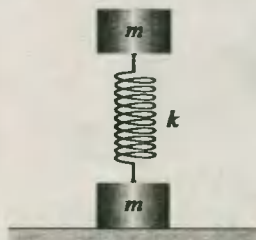


Fig. Prob. 21.10

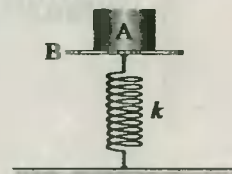


Fig. Prob. 21.15

21.11. Se tiene un sistema compuesto de una masa m y un resorte de constante k . Si se corta el resorte por la mitad, y se cuelga la misma masa m con una mitad de aquella, determinar:

- La nueva constante elástica k' .
- El nuevo periodo.

21.12. Supongamos que tenemos un bloque de masa desconocida y un resorte de constante elástica también desconocida. Sin embargo, se sabe que al suspender el bloque del resorte, éste experimenta una deformación $x_0 = 20 \text{ cm}$. ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones del sistema bloque-resorte?

21.13. A un resorte que cuelga de una pared se le suspende una carga $m_1 = 10 \text{ g}$, estirándose una longitud $x_1 = 8 \text{ cm}$. Cuando el sistema se estaciona en su posición de equilibrio, una segunda carga de masa $m_2 = 40 \text{ g}$ es enganchada debajo de m_1 , que obliga al sistema a oscilar vertical y armónicamente. Encontrar la ecuación que describe el movimiento ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

21.14. Un resorte de 20 cm de longitud natural cuelga de una pared. Si a su extremo inferior se le acopla una masa de 40 g y otra de 80 g , colocándose esta última debajo de la anterior, provocan que el resorte se estire hasta medir 26 cm . Si ahora se deja caer la masa inferior, ¿Cuál es la velocidad del oscilador en la posición de equilibrio? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

21.15. El bloque A de masa $m_A = 4 \text{ kg}$ se apoya sin unirse sobre una plataforma B de masa despreciable unida al resorte, el que se encuentra animado de un MAS. Si el coeficiente de elasticidad del resorte es $k = 80 \text{ N/m}$, calcular el máximo valor que debe tener la amplitud de las oscilaciones, de modo que A no se desprenda de B ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

21.16. Una masa m realiza un MAS suspendido de un resorte de constante k . Si la amplitud de la oscilación es A , ¿Para qué posición x las energías cinética y potencial estarán en la relación 1 : 3?

21.17. Una bolita de masa $m = 9 \text{ kg}$, sujeta a un muelle cuya constante elástica es $k = 16\pi^2 \text{ N/m}$ realiza oscilaciones armónicas de amplitud $A = 40 \text{ cm}$. A la distancia $A/2$ de la posición de equilibrio se coloca una plancha de acero de gran masa, en la cual la bolita rebota elásticamente. Hallar el periodo de las oscilaciones en este caso.

21.18. Un dardo es impulsado con una velocidad $v_0 = 200 \text{ m/s}$, y se incrusta en un bloque de masa $M = 95 \text{ g}$. Si el dardo tiene una masa $m = 5 \text{ g}$, ¿Cuál es la ecuación que describe el movimiento oscilatorio?. Además, $k = 10 \text{ N/m}$, y no existe rozamiento.

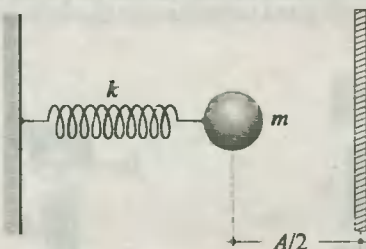


Fig. Prob. 21.17

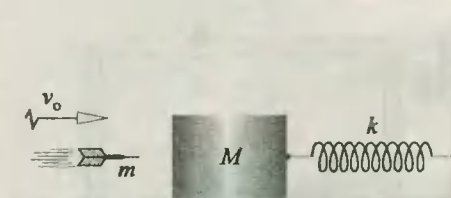


Fig. Prob. 21.18

21.19. El bloque de la figura oscila con MAS de amplitud $A = 6 \text{ cm}$. En el instante que pasa por su posición de equilibrio se deja caer verticalmente sobre el bloque una masa de barro de 100 g de masa, quedando adherida a él. Determinar los nuevos valores del periodo y de la amplitud. $m = 100 \text{ g}$, $k = 4 \text{ N/m}$.

21.20. Dos resortes ideales de constantes elásticas $k_1 = 60 \text{ N/cm}$, y $k_2 = 30 \text{ N/cm}$ se han acoplado en serie, de modo que el extremo libre del resorte 1 se sujeta a un techo, y en el extremo libre del resorte 2 se instala una carga de peso $P = 180 \text{ N}$. Determinar las deformaciones que presentan cada uno de los resortes, así como el periodo de las oscilaciones libres ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

21.21. Una plancha metálica de forma rectangular de masa $M = 4 \text{ kg}$ se encuentra apoyada a cuatro resortes colocados en sus vértices, siendo todos iguales y de constante elástica $k = 100 \text{ N/m}$. ¿Cuál será el periodo de las oscilaciones que podría experimentar el sistema?.

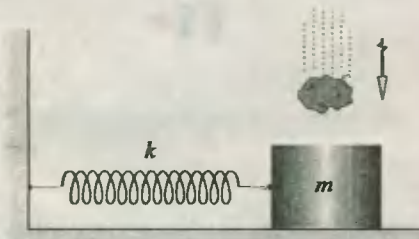


Fig. Prob. 21.19

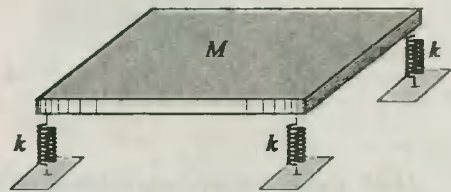


Fig. Prob. 21.21

21.22. Un oscilador mecánico está compuesto de un coche de masa $m = 3 \text{ kg}$ y dos resortes de constantes elásticas $k_1 = 25 \text{ N/m}$, y $k_2 = 50 \text{ N/m}$. Si empujamos el coche hacia un lado, ¿Cuál será la frecuencia de las oscilaciones?. No hay rozamiento.

21.23. Dos muelles cuyas constantes elásticas son $k_1 = 80 \text{ N/m}$ y $k_2 = 20 \text{ N/m}$ están, en el instante mostrado en la figura, estirado y comprimido las longitudes $x_1 = 0,5 \text{ m}$ y $x_2 = 0,3 \text{ m}$, respectivamente. Si la masa del bloque es $m = 4 \text{ kg}$, determinar el periodo y la amplitud de las oscilaciones.

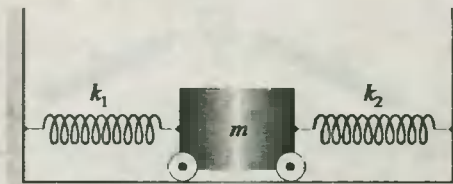


Fig. Prob. 21.22

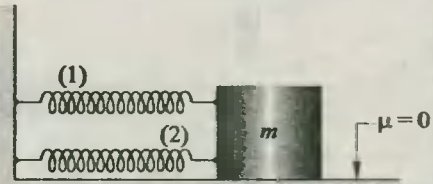


Fig. Prob. 21.23

21.24. Un oscilador mecánico compuesto de un resorte de constante elástica $k = 200 \text{ N/m}$ y un coche de masa $m = 2 \text{ kg}$, oscila en un plano inclinado liso. Determinar el periodo de las oscilaciones y la ecuación que define al movimiento ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

21.25. Determinar la frecuencia angular del sistema mostrado, si se sabe que no existe rozamiento en la polea cuya masa es despreciable, y además $k = 80 \text{ N/m}$, y $m = 5 \text{ kg}$.

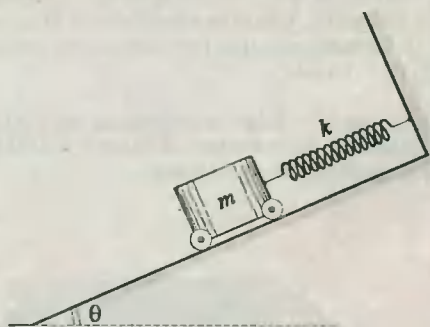


Fig. Prob. 21.24

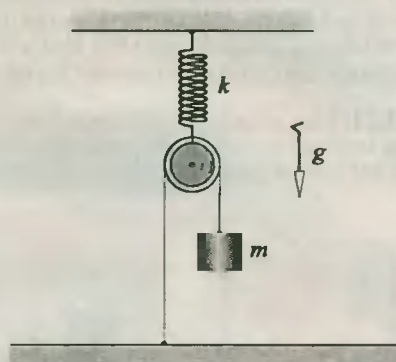


Fig. Prob. 21.25

21.26. Una barra imponderable OA de longitud b , en cuyo extremo se ha colocado una carga de masa $m = 4 \text{ kg}$, puede girar alrededor del gozne O . Si la constante elástica del resorte mostrado es $k = 900 \text{ N/m}$, determinar el periodo de las oscilaciones de la carga, si en estado de equilibrio la barra toma una posición horizontal ($a = 2 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$).

21.27. En la figura se muestra una masa $m = 4 \text{ kg}$ que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento, sujeta entre dos resortes de constante elástica $k = 200 \text{ N/m}$. Los resortes están sostenidos por clavos A y B , y tienen una longitud natural $l_0 = 15 \text{ cm}$. Determinar:

- La fuerza recuperadora para el desplazamiento lateral x .
- La ecuación del movimiento para valores pequeños de x .

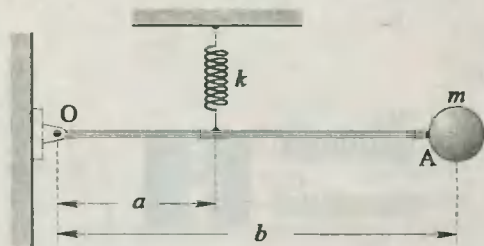


Fig. Prob. 21.26

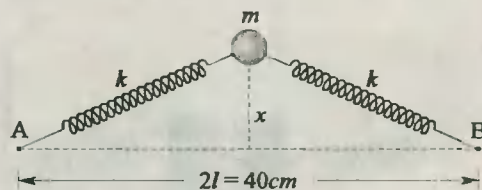


Fig. Prob. 21.27

Péndulo Simple

22.1. Definición de péndulo simple

"Oscilador mecánico compuesto de una cuerda y una masa que desarrolla un MAS".

22.2. Leyes del péndulo simple

1^{ra} ley.- Ley del isocronismo.- "El movimiento pendular tiene un periodo que es independiente de la amplitud angular" (siempre que no exceda los 10°).

2^{da} ley.- "El periodo pendular es independiente de la masa".

3^{ra} ley.- "El periodo es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud pendular".

4^{ta} ley.- "El periodo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad local".

22.3. Periodo de un péndulo simple

$$T = 2\pi \sqrt{L/g} \quad (22.1)$$

$$T = 2\pi \sqrt{L/g} (1 + \theta^2/16) \Leftrightarrow \theta \leq \pi/12 \text{ rad} = 15^\circ \quad (22.2)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1}{2^2} \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dots \right] \quad \forall \theta \quad (22.3)$$

siendo θ la amplitud angular en *radianes*. Cuando $\theta = 10^\circ = \pi/18 \text{ rad}$, el periodo difiere aproximadamente en 0,2% del obtenido con la relación (22.1).

22.4. Frecuencia de un péndulo simple

$$f = 1/2\pi \sqrt{g/L} \quad (22.4)$$

válido sólo para péndulos de pequeña amplitud angular.

22.5. Frecuencia angular del péndulo (ω)

$$\omega = \sqrt{g/L} \quad (22.5)$$

22.6. Péndulo que bate segundos

Es aquel péndulo cuyo periodo es dos segundos (2 s).

22.7. Ecuación cinemática del péndulo

$$\theta = \theta_m \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (22.6)$$

siendo θ_m la amplitud angular.

PROBLEMAS

22.1. Calcular la longitud de un péndulo simple, si al aumentar ésta en 1 m , su periodo aumenta en $0,4\text{ s}$.

22.2. El periodo de un péndulo es 5 s . ¿Cuál será su nuevo periodo si su longitud se incrementa en 44% ?

22.3. Si la aceleración de la gravedad en la Luna fuese $1/6$ de la aceleración de la gravedad en la Tierra, calcular el periodo de un péndulo en la Luna, si en la Tierra es $\sqrt{6}\text{ s}$.

22.4. Para calcular la altura H de una habitación se emplea el dispositivo de la figura. Al encontrarse el péndulo simple a la altura $h_1 = 0,2\text{ m}$ oscila a razón de 10 Hz , y cuando se encuentra a la altura $h_2 = 1,2\text{ m}$ oscila a razón de 15 Hz . ¿Cuál es el valor de H en metros?

22.5. Un péndulo simple tiene un movimiento oscilatorio de amplitud $A = 2\text{ m}$. Si la masa pendular presenta una velocidad máxima $v = 1\text{ m/s}$, calcular la longitud del péndulo ($g = 10\text{ m/s}^2$).

22.6. La longitud de un péndulo es $l = 4\text{ m}$, y para iniciar el movimiento oscilatorio de la masa pendular se le retira 5 cm de su posición de equilibrio. Determinar la ecuación que describe el MAS ($g = \pi^2\text{ m/s}^2$).

22.7. Un péndulo simple de 2 m de longitud tiene una amplitud de $0,4\text{ m}$, y su lenteja posee una masa $m = 5\text{ kg}$. Calcular la tensión que soporta la cuerda del péndulo cuando éste pasa por su posición de equilibrio ($g = 10\text{ m/s}^2$).

22.8. Un péndulo posee una masa pendular m , e inicia su movimiento cuando la cuerda forma con la vertical un ángulo θ pequeño. Determinar una expresión para la tensión de la cuerda cuando el péndulo pasa por su posición de equilibrio.

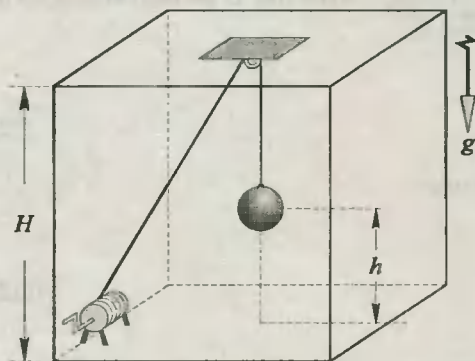


Fig. Prob. 22.4

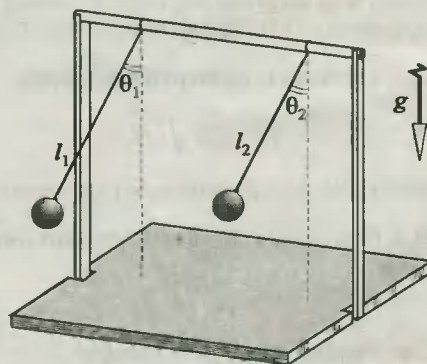


Fig. Prob. 22.9

22.9. En la figura se tiene dos péndulos que oscilan en planos paralelos. Si sus longitudes son $l_1 = 6,25m$ y $l_2 = 2,25m$, e inician sus movimientos desde el mismo lado, ¿Al cabo de qué tiempo como mínimo los péndulos volverán a estar como en su fase inicial? ($g = \pi^2 m/s^2$).

22.10. Calcular a qué distancia de la superficie terrestre el periodo de un péndulo simple se duplica. Considerar el radio de la Tierra como $R_T = 6\,400\,km$.

22.11. Un péndulo simple tiene un periodo $T_0 = \sqrt{2} s$ en la superficie terrestre. Si duplicamos su longitud y lo elevamos hasta una altura $h = R_T$, ¿Cuál será el nuevo periodo del péndulo en dicho lugar?. (Radio de la Tierra: $R_T = 6\,400\,km$).

22.12. El periodo de un reloj de péndulo es $2s$ cuando $g_1 = 9,8 m/s^2$. Si el péndulo es llevado a un lugar donde $g_2 = 9,75 m/s^2$, calcular:

- a) Cuánto se habrá atrasado el reloj después de 1 día en este lugar.
- b) La nueva longitud que debería tener el péndulo para mantener la hora correctamente en dicho lugar.

22.13. Un reloj de péndulo dá la hora exacta cuando se encuentra al nivel del mar. Si se le lleva a una montaña se atrasará $\Delta t = 10,8 s$ por día. ¿Cuál será la altura de la montaña, si el radio de la Tierra se considera $R_T = 6\,400\,km$?

22.14. En la figura se muestra un péndulo simple, el cual al pasar por su posición de equilibrio choca contra un obstáculo. Sabiendo que el tiempo total de una oscilación es $3,5 s$, calcular la altura h del muro (θ_A y θ_B son muy pequeños; además $g = \pi^2 m/s^2$).

22.15. Un péndulo tiene un periodo $T_1 = 1,8s$. Si se le instala en el interior de un ascensor, sus nuevas oscilaciones tienen un periodo $T_2 = 1,5s$, calcular el valor y dirección de la aceleración a del ascensor ($g = 10 m/s^2$).

22.16. Un péndulo simple se encuentra instalado en el techo de un vagón que acelera horizontalmente con una aceleración $a = 7,5 m/s^2$. Calcular el ángulo ϕ que define la nueva posición de equilibrio y el nuevo periodo, sabiendo que el periodo es $T_0 = \sqrt{5} s$ cuando el vagón se encuentra en reposo (Considerar $g = 10 m/s^2$).

22.17. Un péndulo simple de longitud $l = 3 m$ tiene una masa pendular $m = 3 kg$, la que a su vez se encuentra sujeta a un resorte cuya constante elástica es $k = 47\pi^2 N/m$, el cual sin deformar permite que el péndulo se mantenga en su posición de equilibrio. Calcular el periodo que tendrán las pequeñas oscilaciones del sistema péndulo-resorte.

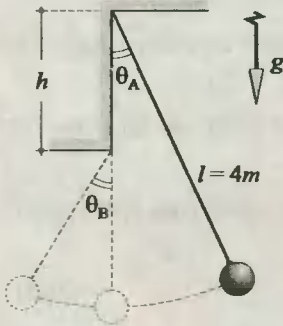


Fig. Prob. 22.14

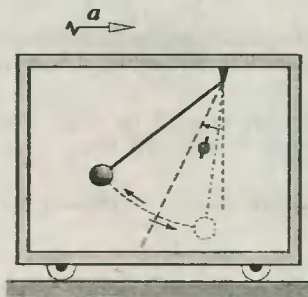


Fig. Prob. 22.16

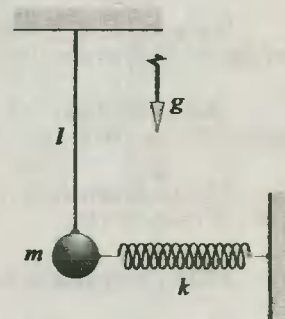


Fig. Prob. 22.17

Ondas Mecánicas- Sonido

ONDAS MECANICAS

23.1. Concepto de onda mecánica

Es toda perturbación producida en un medio que se transmite por vibraciones de sus moléculas, transportando energía sin el movimiento mismo del medio.

23.2. Tipos de ondas mecánicas

23.2.a) Ondas transversales.- En estas ondas las moléculas vibran perpendicularmente a la dirección del movimiento de aquéllas.

23.2.b) Ondas longitudinales.- Aquí las moléculas oscilan en la misma dirección en que se desplazan las ondas.

23.3. Función de onda

Es aquella relación matemática que nos permite encontrar la elongación y de una partícula del medio, conociéndose su abscisa x , la velocidad v de las ondas y el instante de tiempo t de la vibración.

$$y = f(x \pm vt) \quad (23.1)$$

donde el signo será (+) si las ondas se desplazan hacia el lado negativo de las abscisas, y será (-) si ellas se dirigen hacia el lado positivo de las abscisas.

23.4. Ondas mecánicas senoidales

Son aquellas en donde las partículas del medio oscilan con movimiento armónico simple. La función de onda es una función trigonométrica armónica: **seno** o **coseno**.

23.4.a) Periodo (T).- Tiempo que emplea un ciclo completo en pasar por un plano de observación perpendicular a la dirección del movimiento.

23.4.b) Frecuencia (f).- Número de ciclos completos por unidad de tiempo que pasan por el plano de observación.

23.4.c) Frecuencia angular (ω).- $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ (23.2)

23.4.d) Longitud de onda (λ).- Distancia entre dos crestas o valles consecutivos. Asimismo, es la distancia recorrida por la onda en un tiempo igual al periodo.

23.4.e) Número de onda (k).- $k = 2\pi/\lambda$ (23.3)

23.4.f) Velocidad de onda (v).- Característica importante de las ondas, que nos da la distancia que ellas recorren en su medio de propagación, en cada unidad de tiempo.

$v = \lambda T = \lambda f$ (23.4)

$v = \omega/k$ (23.5)

23.4.g) Ecuación general de la onda.- $y = A \sin(kx \pm \omega t)$ (23.6)

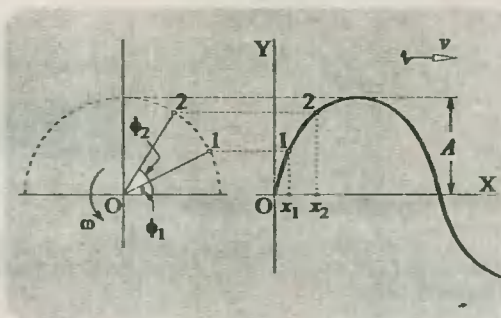
siendo A la amplitud de las oscilaciones de las partículas del medio. El signo en la ecuación será (+) o (-) si las ondas se mueven hacia el lado negativo o positivo de las abscisas respectivamente.

23.4.h) Diferencia de fase ($\Delta\phi$).- Es la diferencia angular de las oscilaciones, proyectadas en un círculo de observación coplanar al plano de vibraciones. Dos puntos vibran en fase si $\Delta\phi = n(2\pi \text{ rad})$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$

$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ (23.7)

$\Delta\phi = \frac{\omega}{v} (x_2 - x_1)$ (23.8)

donde $\Delta x = x_2 - x_1$ es la diferencia de los caminos recorridos.



23.5. Velocidad de onda en una cuerda tensa

$v = \sqrt{T/\mu}$ (23.9)

siendo T la tensión en la cuerda, μ la densidad lineal de masa, tal que $\mu = m/L$, en el cual m es la masa de la cuerda y L su longitud.

23.6. Principio de superposición

Las partículas del medio experimentan un desplazamiento neto que viene dado por la suma de los desplazamientos que cada onda produce en ellas de manera independiente, y cuyas características no se pierden si sus amplitudes son mucho menores con respecto a las longitudes de onda.

23.7. Interferencia de ondas

23.7.a) Interferencia constructiva

$\Delta\phi = n(2\pi) \Rightarrow x_2 - x_1 = n\lambda$ (23.10)

23.7.b) Interferencia destructiva

$\Delta\phi = (2n + 1)\pi \Rightarrow x_2 - x_1 = (2n + 1)\lambda/2$ (23.11)

siendo n el número que determina el orden de interferencia. Además, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

23.8. Reflexión de ondas

Fenómeno por el cual las ondas llegan a los límites del medio y retornan al mismo manteniendo la misma frecuencia. Si el límite es fijo, el pulso reflejado se desfasa en 180° , y si es libre se refleja en fase.

23.9. Ondas estacionarias

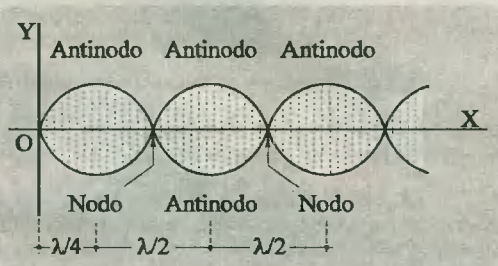
Son aquellas formadas por la superposición de dos ondas de igual amplitud y frecuencia que avanzan en direcciones contrarias. La forma de la onda resultante permanece estacionaria. Si las componentes son:

$$y_1 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

$$\Rightarrow y = 2A \operatorname{sen} kx \cdot \cos \omega t$$

(23.12)



SONIDO

23.10. Naturaleza del sonido

Es la perturbación que, producida en el medio donde nos encontremos (líquido o gaseoso), tiene la característica de estimular nuestro sentido auditivo. El sonido está compuesto por ondas longitudinales.

23.11. Velocidad del sonido

Las perturbaciones sonoras se desplazan en los medios elásticos con una velocidad cuyo valor depende de sus características elásticas y su densidad. Si el medio es uniforme, isótropo y está en reposo, el sonido se mueve con velocidad constante en todas direcciones.

$$23.11.a) \text{ En varillas sólidas : } v = \sqrt{E/d} \quad (23.13)$$

siendo E el *módulo de Young* del material de la varilla, y d su densidad.

$$23.11.b) \text{ En un líquido : } v = \sqrt{B/d} \quad (23.14)$$

siendo B el *módulo de compresibilidad* del líquido, y d su densidad.

$$23.11.c) \text{ En un gas : } v = \sqrt{\gamma p/d} = \sqrt{\gamma RT/M} \quad (23.15)$$

siendo γ la relación de calores específicos del gas. Para el aire y otros gases diatómicos $\gamma = 1,4$; p la presión, d la densidad, R la constante universal de los gases, T la temperatura absoluta y M la masa molecular. En el aire, a 15°C , la velocidad del sonido es 340 m/s .

23.12. Reflexión de las ondas sonoras

Las ondas sonoras se reflejan en superficies tales como paredes, montañas, nubes o el suelo. El oído es capaz de reconocer sonidos diferentes si ellos están separados en no menos de $0,1 \text{ s}$. El eco se produce si la superficie reflectora está por lo menos a 17 m del oyente.

23.13. Refracción del sonido

Es el cambio de dirección del movimiento del sonido cuando pasa de un medio a otro. Por ello, en las superficies cálidas el sonido se refracta alejándose de ella, y si la superficie es fría, el sonido se refracta acercándose a ella.

23.14. Efecto Doppler

Es aquel fenómeno por el cual una onda sonora experimenta un aparente cambio de frecuencia y/o de longitud de onda debido al movimiento del oyente, del foco emisor y/o del propio medio.

23.14.a) Oyente fijo y foco móvil

$$*) \text{ Longitud de onda aparente: } \lambda' = \left(\frac{v_s - v_F}{v_s} \right) \lambda_0 \quad (23.16)$$

$$**) \text{ Frecuencia aparente: } f' = \left(\frac{v_s}{v_s - v_F} \right) f \quad (23.17)$$

siendo v_s y v_F las velocidades del sonido y del foco respectivamente. Asimismo, f es la frecuencia de las ondas que salen del foco emisor. El signo de v_F será positivo (+) si se acerca al oyente, y será negativo (-) si se aleja del oyente.

23.14.b) Oyente móvil y foco fijo

$$*) \text{ Frecuencia aparente: } f' = \left(\frac{v_s - v_o}{v_s} \right) f \quad (23.18)$$

siendo v_o la velocidad del oyente. El signo de v_o será positivo (+) si el oyente se aleja del foco, y será (-) si el oyente se acerca al foco.

23.14.c) Oyente y foco móviles

$$*) \text{ Frecuencia aparente: } f' = \left(\frac{v_s - v_o}{v_s - v_F} \right) f \quad (23.19)$$

La regla de los signos es la misma que la establecida en los ítems a y b.

23.14.d) Oyente, foco y medio móviles

$$*) \text{ Frecuencia aparente: } f' = \left(\frac{v_s - v_m - v_o}{v_s - v_m - v_F} \right) f \quad (23.20)$$

siendo v_m la velocidad del medio con relación a la Tierra.

PROBLEMAS**Ondas mecánicas**

23.1. Al lado de un observador inmóvil que permanece en la orilla de un lago pasaron 4 crestas de onda en el transcurso de 6 s. La primera cresta dista 12 m de la tercera. Calcular:

- El periodo de oscilaciones de las partículas de agua.
- La longitud de onda.
- La velocidad de propagación

23.2. Un bote anclado oscila verticalmente debido a las olas, de manera que al pasar de un valle a una cresta emplea 2 s. Si las olas viajan con una velocidad de 5 m/s, ¿Cuál es la distancia entre dos crestas consecutivas?

23.3. Una motonave se mueve en el mar a la velocidad de 54 km/h. La distancia entre las crestas de las olas es 10 m, y el periodo de oscilación de las partículas del agua en la ola es 2 s. ¿Con qué frecuencia chocan las olas contra el cuerpo de la motonave cuando ésta se mueve en la dirección de propagación de las olas y al encuentro de las olas?

23.4. Un pulso emplea 1 s para recorrer una cuerda de 0,2 kg de masa cuando está sometida a una tensión de 10 N. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

23.5. La ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda de longitud $L = 0,8$ m y masa $m = 5$ kg está dada por: $y = 12 \cdot \text{sen} 2\pi(x/16 - t/0,1)$, donde x e y están en centímetros, y t en segundos. Calcular:

- El número de onda y frecuencia angular.
- La longitud de onda y el periodo de oscilaciones.
- La velocidad de propagación de las ondas.
- La tensión de la cuerda.
- El desplazamiento (y) de la partícula ubicada a 24 cm del origen en el instante $t = 2/15$ s.
- La velocidad y aceleración transversal máximas de las partículas de la cuerda.

23.6. Calcular la longitud de una onda estacionaria, si la distancia entre los puntos que oscilan con los mismos desplazamientos son iguales a 5 y 15 cm. Los puntos se encuentran en un mismo rayo.

23.7. La ecuación de las oscilaciones de un vibrador es $y_0 = 3 \text{sen} 20\pi t$ (cm). Considerando que la onda es plana, definir el desplazamiento (y) del punto, el cual dista 5 m de la fuente de oscilaciones, pasados 0,1 s después de iniciadas éstas, siendo la velocidad de propagación de la onda igual a 200 m/s.

23.8. Los valores de la amplitud para el desplazamiento y la velocidad transversal de una onda plana son $A = 0,3$ m y $v_{\text{máx}} = 15$ m/s respectivamente. Considerando que la velocidad de propagación de las oscilaciones en el medio dado es 10 m/s, escribir la ecuación de la onda de desplazamiento y de la velocidad transversal. Determinar los valores instantáneos del desplazamiento y de la velocidad en el punto que dista $x = \lambda/4$ del vibrador al cabo de $t = 3/4 T$ desde que comenzaron las oscilaciones.

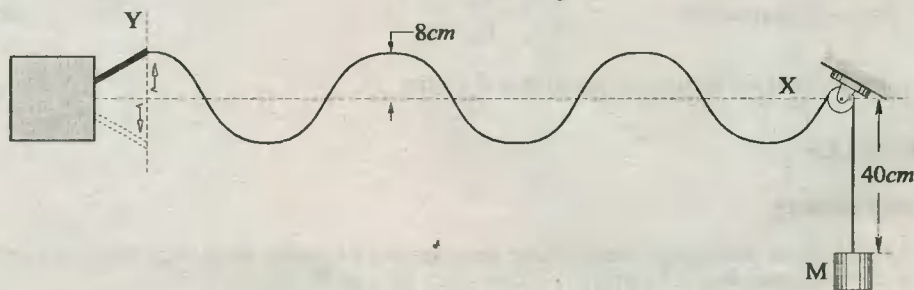


Fig. Prob. 23.9

23.9. Una cuerda de 2 m de longitud y 400 g de masa se encuentra en posición horizontal, vibrando con una frecuencia angular de 25 rps. Sabiendo que la masa del bloque suspendido es 1,92 kg, determinar:

- La ecuación que describe el movimiento ondulatorio.
- El número de ondas completas que pueden ser vistas en la cuerda horizontal sin considerar la reflexión de las mismas ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

23.10. Una cuerda de longitud $L = 20 \text{ m}$ y masa $m = 5 \text{ kg}$ está suspendida del techo, y en su extremo inferior se coloca una masa $M = 8 \text{ kg}$. Si en el extremo inferior se producen ondas con una frecuencia $f = 0.05 \text{ Hz}$, ¿Qué longitud λ tendrán las ondas a la distancia $x = 8 \text{ m}$? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

23.11. Dos puntos ubicados en un mismo rayo, y que están alejados de la fuente de oscilaciones $x_1 = 11 \text{ m}$ y $x_2 = 14 \text{ m}$, oscilan con una frecuencia de fase de $3\pi/2 \text{ rad}$. Determinar la velocidad de propagación de las oscilaciones en el medio dado, si el periodo de oscilaciones de la fuente es $T = 10^{-2} \text{ s}$.

23.12. ¿Cuál será la diferencia de fase entre dos puntos del espacio 1 y 2 cuya distancia hacia el vibrador O es $d_1 = 8 \text{ m}$ y $d_2 = 10 \text{ m}$, y la longitud de la onda es igual a 4 m?

23.13. En la figura se muestran dos focos F_A y F_B puntuales y coherentes (de igual frecuencia) que irradian ondas en toda dirección, y de longitud $\lambda = 2 \text{ m}$. Determinar el tipo de interferencia (constructiva o destructiva) que se presenta en los puntos 1 y 2.

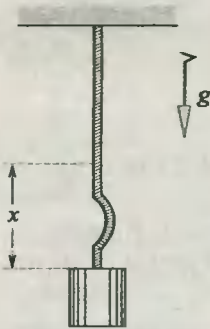


Fig. Prob. 23.10

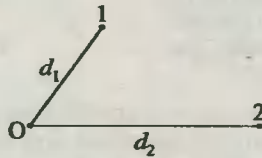


Fig. Prob. 23.12

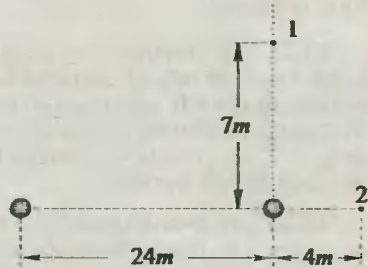


Fig. Prob. 23.13

23.14. Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación $y = 5\text{sen}(\pi x/3) \cdot \cos 40\pi t$, donde x e y están en cm, y t en s. Calcular:

- La amplitud y velocidad de las ondas componentes cuya superposición puede dar lugar a esta vibración.
- La distancia que hay entre los nodos.
- La velocidad de una partícula de la cuerda en la posición $x = 1 \text{ cm}$ cuando $t = 9/8 \text{ s}$.

Sonido

Nota: Para los siguientes problemas, considerar que la velocidad del sonido en el aire es igual a 340 m/s, a menos que se indique lo contrario.

23.15. Un oyente que dista 4 800 m de un cañón oyó el sonido del disparo al cabo de 15 s después de ver el fogonazo. Calcular la velocidad del sonido en este lugar.

23.16. El hombre percibe los sonidos con la frecuencia desde 16 hasta 20 000 Hz. Determinar el intervalo de las longitudes de onda que percibe el hombre.

23.17. Determinar la longitud de una onda sonora en el agua, si su longitud en el aire constituye 0,797 m. La velocidad del sonido en el agua es igual a 1 483 m/s.

23.18. Desde un barco inmóvil se emite una señal ultrasónica por el agua, que es recibida en el agua por el receptor de otro barco también inmóvil dos veces: al cabo del tiempo $t_1 = 24$ s y $t_2 = 25$ s desde el instante que salió del primer barco. Considerando que el fondo es horizontal, y que la velocidad del sonido en el agua es igual a 1 400 m/s, calcular la profundidad H del mar.

23.19. Un avión se dirige de B hacia C tal como se indica en la figura. El ruido del motor emitido en B alcanza al observador en A en el instante en que el avión llega a C. Calcular la velocidad del avión.

23.20. Un avión vuela horizontalmente a la altura $h = 3,4$ km sobre la superficie de la Tierra a velocidad supersónica. El ruido llega al observador después de 6 s de haber pasado el avión sobre él. Determinar la velocidad v_a del avión.

23.21. La velocidad del viento en un determinado lugar es $v_v = 50$ m/s. ¿Cuál será, en caso de tiempo ventoso, la velocidad de propagación (u') del sonido para dos oyentes; uno inmóvil respecto al aire y el otro fijo a la Tierra?.

23.22. Un automóvil se desplaza con una velocidad $v_f = 60$ m/s, el cual toca la bocina entre dos oyentes fijos A y B, según como se indica en la figura. Si la longitud de onda propia del sonido de la bocina es $\lambda_0 = 17$ m, ¿Cuál es la longitud de las ondas que perciben dichos oyentes?.

23.23. La sirena de una fábrica emite una señal sonora de frecuencia $f_0 = 17$ kHz. Un trabajador se acerca a la fábrica montado en una moto y moviéndose con una velocidad $v_o = 10$ m/s. Determinar la longitud de las ondas que percibe el trabajador.

23.24. Un tren y un automóvil viajan en vías paralelas y en la misma dirección con velocidades $v_f = 60$ m/s y $v_o = 40$ m/s respectivamente. Si el silbato del tren emite ondas cuya longitud es $\lambda_0 = 15$ m, ¿Qué longitud tendrán las ondas que percibe el conductor del automóvil?.

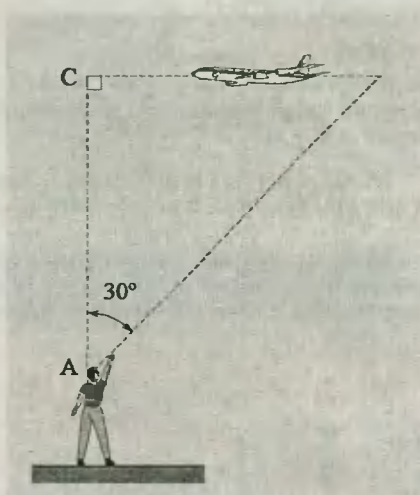


Fig. Prob. 23.19

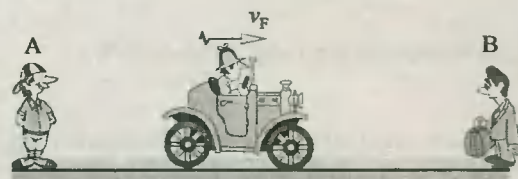


Fig. Prob. 23.22

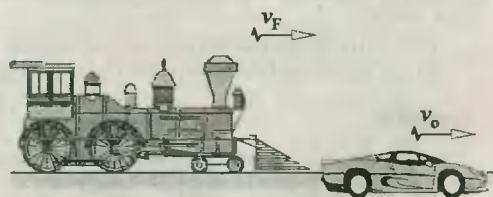


Fig. Prob. 23.24

HIDROSTATICA

24.1. Densidad absoluta

$$d = \frac{m}{V} \left(\frac{\text{masa}}{\text{Volumen}} \right) \quad (24.1)$$

24.2. Peso específico

$$\rho = \frac{P}{V} \left(\frac{\text{peso}}{\text{Volumen}} \right) \quad (24.2)$$

$$\rho = dg \quad (24.3)$$

$$P = dgV \quad (24.4)$$

24.3. Presión media

$$p = F/A \quad (24.5)$$

siendo F la resultante de las fuerzas normales distribuidas sobre una superficie de area A . La unidad de presión es el *pascal* (Pa). $1 Pa = 1 Nm^{-2}$. Además $1 Bar = 10^5 Pa$.

24.4. Presión hidrostática (p_h)

$$p_h = d_L gh \quad (24.6)$$

$$p_T = p_o + p_h \quad (24.7)$$

siendo d_L la densidad del líquido, g la aceleración de la gravedad del lugar donde se encuentra el líquido, y h la profundidad medida de forma paralela al vector \vec{g} desde el nivel libre del líquido. Además, p_T es la presión total, y p_o la presión en la superficie libre.

24.5. Teorema fundamental de la Hidrostática

$$\Delta p = d_L \cdot g \Delta h \quad (24.8)$$

siendo p la presión hidrostática o total, y Δh la diferencia de profundidades de dos puntos ubicados en la misma masa líquida.

24.6. Vasos comunicantes

En todas las ramas, un líquido en equilibrio alcanzará el mismo nivel horizontal.

24.7. Principio de Pascal

"Toda variación de presión en un punto de un líquido en equilibrio se transmite íntegramente y en toda dirección a todos los otros puntos del mismo".

24.8. Prensa hidráulica

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{e_1}{e_2} \quad (24.9)$$

siendo F la fuerza, A el área y e el desplazamiento de los émbolos.

24.9. Fuerza sobre superficies sumergidas en líquidos en equilibrio

$$F = d_L \cdot gAh_{CG} \quad (24.10)$$

$$F_x = d_L \cdot gA_p h_{CG} \quad (24.11)$$

siendo F la fuerza neta y normal sobre la superficie de área A . El término h_{CG} es la profundidad del centro geométrico de la superficie. F_x es la componente horizontal de la fuerza neta, y A_p es el área proyectada en un plano vertical.

24.10. Principio de Arquímedes

$$E = d_L \cdot gV_S \quad (24.12)$$

$$E = \text{Peso del líquido desalojado} \quad (24.13)$$

$$E = P_{\text{real}} - P_{\text{aparente}} \quad (24.14)$$

siendo V_S el volumen sumergido, y g la aceleración de la gravedad del lugar donde se encuentra el líquido. El vector \vec{E} es opuesto al vector gravedad \vec{g} , Además, la línea de acción del empuje E pasa por el centroide del volumen sumergido.

NEUMOSTÁTICA

24.11. Presión atmosférica al nivel del mar (p_0)

$$p_0 = 76 \text{ cm Hg} \approx 101\,300 \text{ N/m}^2 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

24.12. Teorema fundamental de la Hidrostática aplicado a los gases en equilibrio

$$p_1 - p_2 = d_g \cdot g(h_2 - h_1) \quad (24.15)$$

24.13. Ecuación barométrica

$$24.13.a) \text{ Para pequeñas alturas: } p_0 - p = d_{\text{aire}} \cdot gh \quad (24.16)$$

$$\text{Variación de } 1 \text{ cm Hg} \ll 105 \text{ m de altura} \quad (24.17)$$

24.13.b) Para grandes alturas:
$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-h/h_0} \quad (24.18)$$

siendo h una altura que se mide desde el nivel del mar, y e es la base de los logaritmos neperianos ($e \approx 2,72$).

24.14. Empuje neumostático

$$E = d_{\text{aire}} \cdot gV_S \quad (24.19)$$

siendo d_{aire} la densidad del aire. A la temperatura de 0°C al nivel del mar esta densidad es igual a $1,29 \text{ kg/m}^3$.

PROBLEMAS

Nota: Para todos los problemas considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$, salvo que se indique lo contrario, y densidad del agua $d_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Presión

24.1. Un tubo en U contiene mercurio, y en una de sus ramas se ha vertido una columna de agua de altura $h_1 = 44 \text{ cm}$, y en la otra un líquido de densidad $d_2 = 6 \text{ g/cm}^3$ y altura $h_2 = 30 \text{ cm}$. Determinar la distancia vertical entre los niveles de mercurio en ambas ramas ($d_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ g/cm}^3$).

24.2. En el sistema físico mostrado, se pide encontrar la presión hidrostática en el punto X del tubo cerrado, si $d_1 = 2\,000 \text{ kg/m}^3$, y $d_2 = 1\,500 \text{ kg/m}^3$.

24.3. ¿Cuál es la diferencia de presiones entre los puntos A y B de los depósitos de la figura?. $h_1 = 15 \text{ cm}$, $h_2 = 10 \text{ cm}$, $h_3 = 25 \text{ cm}$.

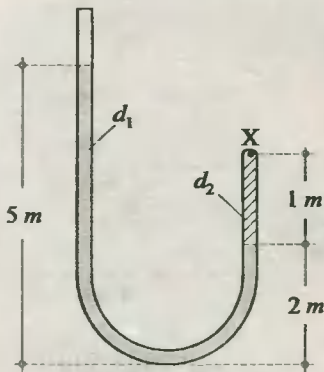


Fig. Prob. 24.2

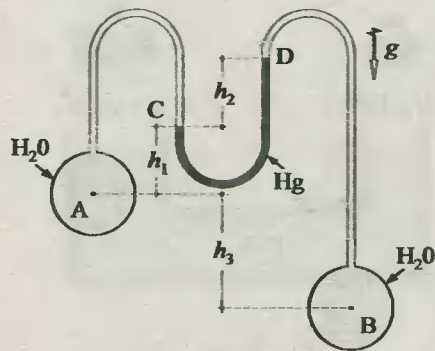


Fig. Prob. 24.3

24.4. Un recipiente abierto en sus dos extremos tiene una masa $m = 1,76 \text{ kg}$, y presenta secciones rectas circulares cuyos radios son $r_1 = 7 \text{ cm}$ y $r_2 = 3 \text{ cm}$. En la posición mostrada su base cierra herméticamente con el piso. Se desea averiguar para qué altura h de agua en el tubo vertical el recipiente se desprenderá del piso ($\pi \approx 22/7$).

24.5. En la prensa hidráulica mostrada, ¿Qué peso máximo se puede levantar, si se sabe que $F = 10 \text{ N}$? ($a = 4b$; $A_2 = 3A_1$).

24.6. Una prensa hidráulica llena de agua tiene émbolos de secciones 500 cm^2 y 10 cm^2 . Sobre el émbolo grande se pone una persona cuya masa es 70 kg . ¿A qué altura se elevará el émbolo pequeño respecto al grande después de eso?. Despreciar el peso de los émbolos y todo efecto de rozamiento.

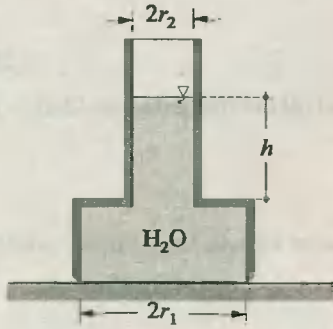


Fig. Prob. 24.4

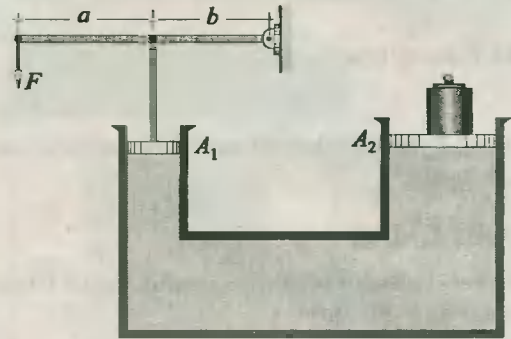


Fig. Prob. 24.5

24.7. En los cilindros comunicantes verticales de la figura, se desea instalar los émbolos que se muestran, y cuyas masas son $m = 100\text{ g}$ y $M = 800\text{ g}$. Se desea averiguar las posiciones de dichos émbolos cuando el sistema llegue al equilibrio. Considerar que los émbolos cierran herméticamente los cilindros y que no existe rozamiento.

24.8. Un recipiente en forma de paralelepípedo cuyas dimensiones se indican en la figura, ha sido llenado con agua. Se desea averiguar la fuerza hidrostática sobre cada una de las caras del recipiente.

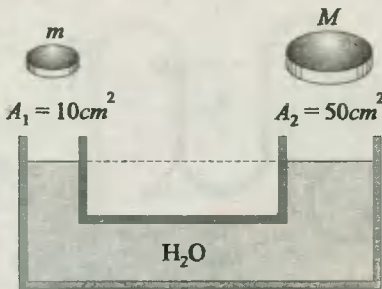


Fig. Prob. 24.7

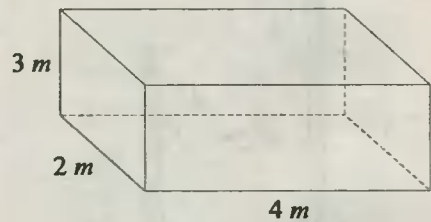


Fig. Prob. 24.8

24.9. En la figura se muestra dos cilindros verticales comunicantes, cuyos émbolos tienen masas $M_1 = 2\text{ kg}$ y $M_2 = 3\text{ kg}$. Cuando la pesa de masa $m = 1\text{ kg}$ se coloca en el émbolo 1, éste resulta estar $h = 12\text{ cm}$ más abajo que el émbolo 2 en la posición de equilibrio. Si la pesa se pone en 2, éste se ubica $h = 12\text{ cm}$ debajo de 1. ¿Cómo estarán ubicados los émbolos cuando se retire la pesa del sistema?

24.10. Una compuerta rectangular de dimensiones $OA = 50\text{ cm}$ y $OB = 20\text{ cm}$ se encuentra apoyada en una bisagra ubicada en la arista OA , y parcialmente por una capa de agua. Se desea averiguar la altura h de dicha capa para que el resorte cuya constante elástica es $k = 900\text{ N/m}$ se logre comprimir

2 cm, haciendo que la compuerta adopte una posición vertical.

Nota: La fuerza hidrostática sobre la compuerta se ubica siempre a la distancia $h/3$ de la bisagra O, siendo h la distancia a la línea húmeda de la compuerta.

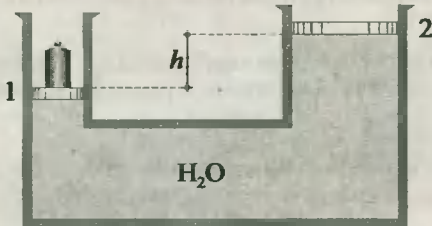


Fig. Prob. 24.9

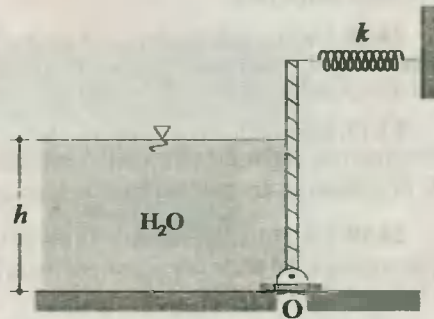


Fig. Prob. 24.10

24.11. ¿Qué altura de agua hará girar la compuerta mostrada en sentido horario? La compuerta tiene un ancho de 80 cm. Despreciar el rozamiento y el peso de la compuerta. ($M = 36 \text{ kg}$, $OA = 1,25 \text{ m}$).

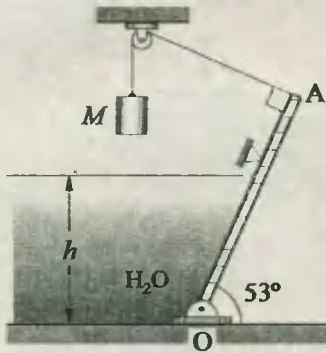


Fig. Prob. 24.11

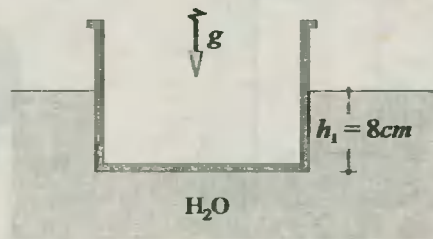


Fig. Prob. 24.16

Principio de Arquímedes

24.12. Un cuerpo pesa 500 N en el vacío, y sumergido completamente en agua pesa 300 N. ¿Cuál es la densidad de dicho cuerpo?

24.13. Un cuerpo que pesa $P = 300 \text{ N}$ reduce su peso aparentemente a $P_1 = 220 \text{ N}$ al sumergirse completamente en agua, y a $P_2 = 180 \text{ N}$ al sumergirse completamente en las mismas condiciones en otro líquido L. ¿Cuál es la densidad de este líquido?

24.14. Un submarino emerge 1/9 de su volumen cuando flota parcialmente en la superficie del mar. Para hacerlo sumergir por completo es preciso de dejar ingresar en su interior un volumen de 50 000 l de agua de mar cuya densidad es 1.026 g/cm^3 . ¿Cuál es el peso del submarino?

24.15. Una balsa de madera de dimensiones $2 \times 3,5 \text{ m}^2$ y 40 cm de espesor cuya densidad es 600 kg/m^3 flota en el agua. ¿Cuántas personas de 70 kg de masa pueden permanecer parados sobre la balsa sin mojarse los pies?

24.16. Una caja de madera de base $A = 800 \text{ cm}^2$, abierta por su parte superior flota en agua, según muestra la figura. La caja se hunde $\Delta h = 5 \text{ cm}$ más al colocar una masa desconocida m dentro de la caja. ¿Cuál es el peso de la caja y el valor de la masa m ?

24.17. Un cilindro recto, macizo y homogéneo de altura $H = 80 \text{ cm}$ tiene una densidad $d_c = 0,9 \text{ g/cm}^3$. El cilindro se deposita en un líquido cuya densidad es $d_l = 1,2 \text{ g/cm}^3$. Determinar la parte x que sobresale de él cuando se encuentre flotando y en equilibrio.

24.18. Un trozo de hielo de 100 cm^3 de volumen se encuentra flotando en agua. Se desea averiguar qué volumen del hielo se encontrará fuera del agua cuando adquiera su posición de equilibrio ($d_{\text{hielo}} = 0,9 \text{ g/cm}^3$).

24.19. Una pelota de voley de $2 \cdot 10^4 \text{ cm}^3$ de volumen y 400 g de masa se ha sumergido completamente en agua con ayuda de una fuerza vertical F . Se desea averiguar el mínimo valor de la fuerza F necesaria que lo mantendrá completamente sumergida.

24.20. ¿Qué trabajo mínimo debe realizar F para sumergir completamente a un cilindro de altura $H = 5 \text{ m}$, si el desplazamiento se produce a partir de la posición de equilibrio mostrada en la figura con $F = 0$? A (área de la base) $= 0,01 \text{ m}^2$, $d_{\text{cilindro}} = 600 \text{ kg/m}^3$.

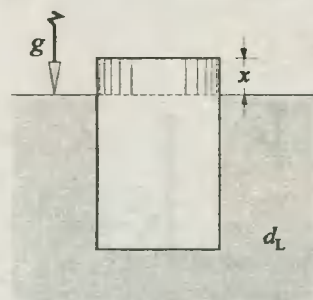


Fig. Prob. 24.17

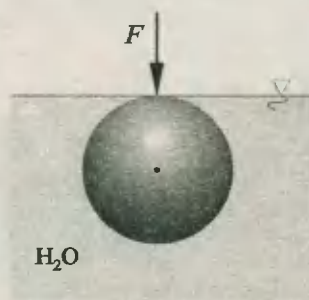


Fig. Prob. 24.19

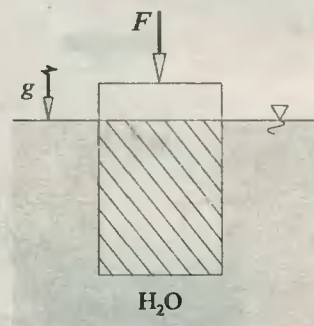


Fig. Prob. 24.20

24.21. En un estanque de fondo rectangular de dimensiones $2 \times 3 \text{ m}^2$ hay agua, y sobre él flota una cubeta en equilibrio. Se vierte arena en el interior de la cubeta hasta completar 60 kg , lo que provoca el inminente hundimiento de la cubeta. ¿Cuál será el desnivel del agua producido en el estanque?

24.22. Un bloque cúbico de madera de arista $a = 10 \text{ cm}$ y densidad $d_m = 0,5 \text{ g/cm}^3$ flota en un recipiente con agua. Se vierte en el recipiente aceite de densidad $d_a = 0,8 \text{ g/cm}^3$ hasta que la superficie superior de la capa de aceite se encuentre 4 cm por debajo de la cara superior del bloque. ¿Cuál es el espesor de la capa de aceite?

24.23. En la superficie de separación de dos líquidos con densidades d_1 y d_2 flota un cilindro de densidad d . La altura del cilindro es h . Determinar a qué profundidad se sumergirá ésta en el segundo líquido.

24.24. Determinar la fuerza con la cual los troncos de masa $m = \sqrt{3} \text{ kg}$ presionan sobre las paredes de un canal. El tronco superior está sumergido a medias en el agua, y el inferior roza la superficie del agua con su parte superior.

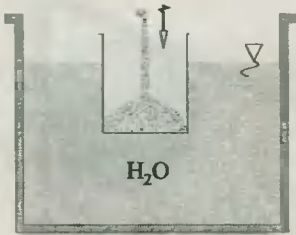


Fig. Prob. 24.21

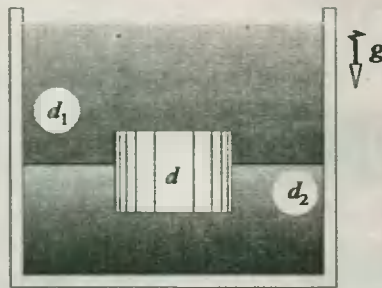


Fig. Prob. 24.23

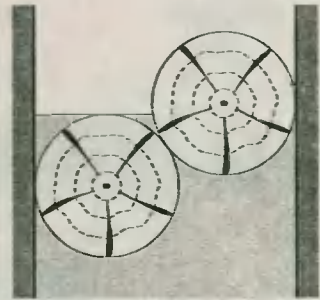


Fig. Prob. 24.24

24.25. Un flotador de corcho de densidad $d_c = 300 \text{ kg/m}^3$ se encuentra unido a un lastre metálico de densidad $d_m = 5\,200 \text{ kg/m}^3$. El conjunto flota totalmente sumergido en agua. Se pide determinar el volumen del lastre, si el volumen del corcho es $V_c = 6 \text{ m}^3$.

24.26. Calcular la densidad de la esfera A, si se sabe que al ser suspendida de un resorte, lo estira $x_1 = 15 \text{ cm}$, y sumergida totalmente en agua lo comprime $x_2 = 5 \text{ cm}$.

24.27. Dos esferas del mismo volumen, y pesos $P_1 = 20 \text{ N}$ y $P_2 = 60 \text{ N}$ se mantienen sujetas por un resorte de constante $k = 5\,000 \text{ N/m}$ y en equilibrio. Se pide determinar:

- a) La fuerza de empuje que experimenta cada esfera.
- b) La fuerza interna en el resorte.
- c) La deformación del resorte.

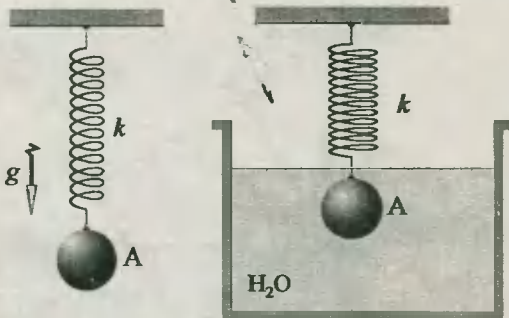


Fig. Prob. 24.26

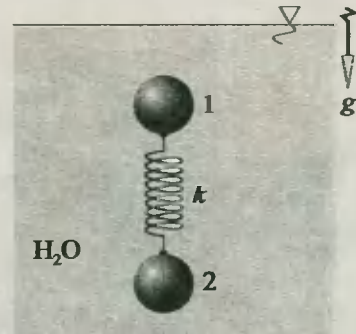


Fig. Prob. 24.27

24.28. Se tienen tres bloques A, B y C. Los pesos de los dos primeros son 30 N y 50 N respectivamente. El bloque C tiene un volumen de $2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, y se encuentra totalmente sumergido en un líquido de densidad $d_L = 500 \text{ kg/m}^3$. Si en la posición mostrada el sistema está en equilibrio de modo que $\alpha_1 = \arccos(1/15)$, ¿Cuál será la medida de α_2 cuando el bloque C sea retirado del líquido?.

24.29. Una esfera de volumen $V = 0,08 \text{ m}^3$ se encuentra aprisionada en la esquina de un recipiente que contiene agua. Si el peso de la esfera es $P = 200 \text{ N}$, se pide determinar la fuerza de reacción de las paredes del recipiente en A y en B. Despreciar toda forma de rozamiento.

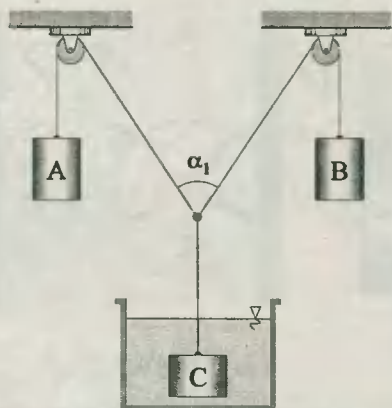


Fig. Prob. 24.28

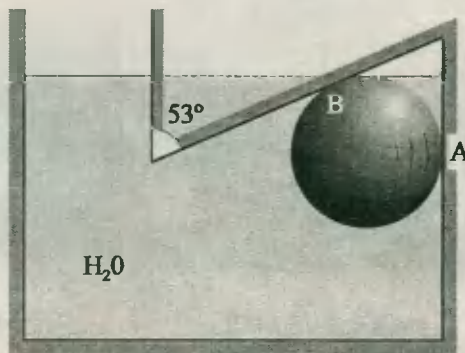


Fig. Prob. 24.29

24.30. Una barra de densidad $d_b = 3,2 \text{ g/cm}^3$ y longitud $l = 50 \text{ cm}$ que tiene sección recta y uniforme ha sido instalado de modo que en su extremo A está sujeta a una bisagra, y el otro extremo sobresale de una capa de aceite ($d_a = 0,8 \text{ g/cm}^3$) de altura $h = 28 \text{ cm}$. Determinar el ángulo de inclinación θ que forma la barra con la horizontal cuando adquiere su posición de equilibrio.

24.31. Un cubo de 2 m de arista y densidad $d_c = 800 \text{ kg/m}^3$ flota parcialmente en agua, de modo que en la arista A está instalada una bisagra. Se desea averiguar el peso del bloque suspendido de la cuerda que sale de B.

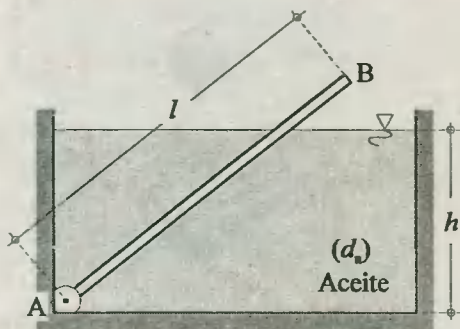


Fig. Prob. 24.30

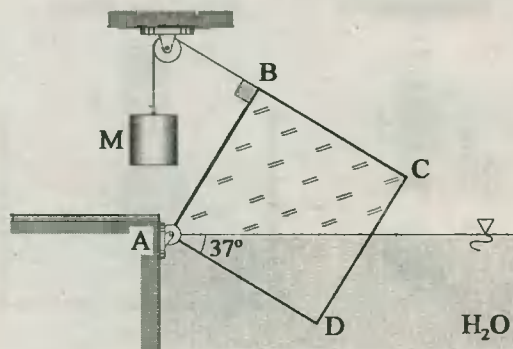


Fig. Prob. 24.31

24.32. Una pieza de metal cuya densidad es $d_m = 5000 \text{ kg/m}^3$ se suelta desde el nivel libre de un lago de agua dulce de 100 m de profundidad. Si se desprecia toda forma de rozamiento, calcular:

- La aceleración que experimenta la pieza metálica.
- El tiempo que demora en llegar al fondo.
- La velocidad que posee antes de chocar con el fondo.

24.33. Un objeto es soltado desde una altura h respecto al nivel libre de un líquido. Si se observa que dicho objeto se detiene justo en el fondo luego de desacelerar uniformemente su movimiento, calcular en qué relación se encuentran la densidad del cuerpo con la del líquido. Despreciar toda forma de rozamiento.

Sistemas acelerados

24.34. En un coche que se desplaza con MRUV, se desea averiguar la presión hidrostática en el punto B interior debido al agua que se encuentra viajando en el coche.

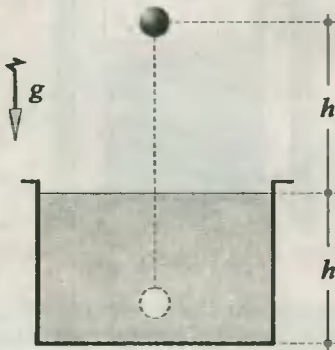


Fig. Prob. 24.33

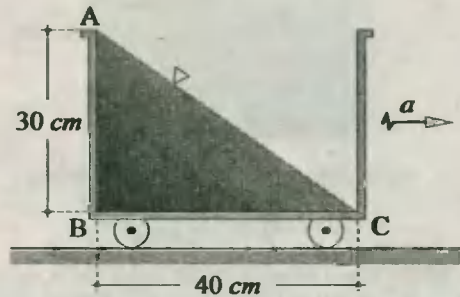


Fig. Prob. 24.34

24.35. Sobre un carrito que se mueve con aceleración constante $a = 1 \text{ m/s}^2$ se halla un depósito lleno de agua hasta el tope. Determinar la presión hidrostática en el punto A, que se encuentra a una profundidad $h = 0,6 \text{ m}$, y alejado una distancia $l = 2 \text{ m}$ de la pared delantera. El depósito está cerrado herméticamente con una tapa que no ejerce presión sobre el agua durante el movimiento.

24.36. Un péndulo tiene una masa pendular de densidad d_c , y se encuentra sumergido en agua. Se sabe que el coche acelera uniformemente hacia la derecha, provocando que el nivel de agua forme un ángulo $\alpha = 37^\circ$ con la horizontal. Calcular el ángulo θ que se desvía el péndulo respecto a la vertical.

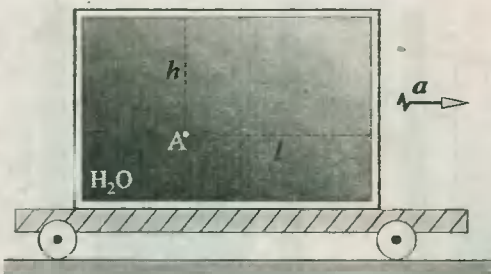


Fig. Prob. 24.35

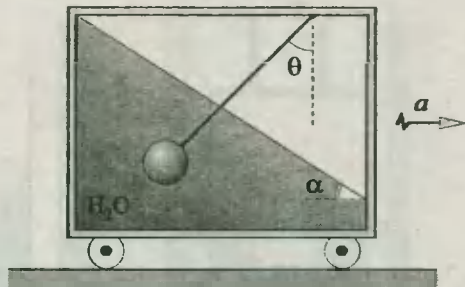


Fig. Prob. 24.36

24.37. En una cubeta se ha depositado agua, y en su fondo se ha instalado una cuerda que sujeta a una esfera compacta de densidad $d_c = 700 \text{ kg/m}^3$ y volumen $V = 0,04 \text{ m}^3$. Si a continuación la cubeta

experimenta una aceleración horizontal $a = 7,5 \text{ m/s}^2$, ¿Qué tensión soportará la cuerda durante el movimiento uniformemente acelerado?

24.38. Determinar la presión hidrostática en el fondo del recipiente mostrado, si la altura del nivel del agua es $h = 30 \text{ cm}$, y su aceleración es $a = 2 \text{ m/s}^2$.

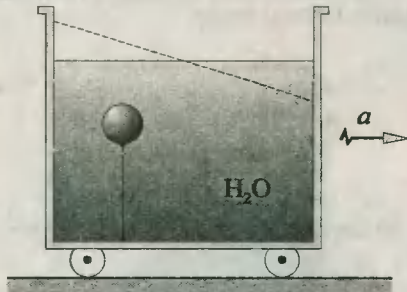


Fig. Prob. 24.37

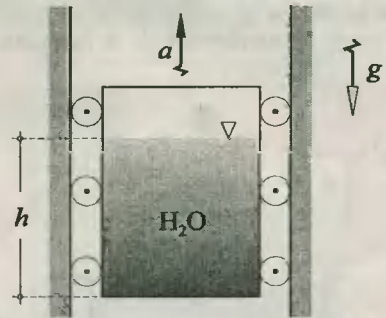


Fig. Prob. 24.38

24.39. En el interior de un ascensor se encuentra un pequeño cilindro macizo flotando en agua con el 20% de su volumen fuera de aquella. Se sabe que en tal circunstancia el ascensor se encuentra acelerando uniformemente con $a = 2,8 \text{ m/s}^2$. Si la altura del cilindro es $H = 50 \text{ cm}$, el área de su base es $A = 0,02 \text{ m}^2$, y $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, se pide calcular:

- La presión hidrostática en la base del cilindro.
- El empuje que experimenta.

24.40. Un trozo de hielo flota en el agua contenida en un recipiente inicialmente en reposo. A continuación, el recipiente se acelera hacia abajo con $a = 4 \text{ m/s}^2$. Se desea averiguar si el trozo de hielo se sumerge más en el agua, o emerge más de él.

24.41. Un bloque de volumen $V = 0,2 \text{ m}^3$ y densidad $d_b = 800 \text{ kg/m}^3$ se encuentra sumergido en agua, y atada mediante una cuerda al fondo de un recipiente que acelera uniformemente hacia arriba con $a = 2 \text{ m/s}^2$. ¿Cuál es la tensión que soporta la cuerda?

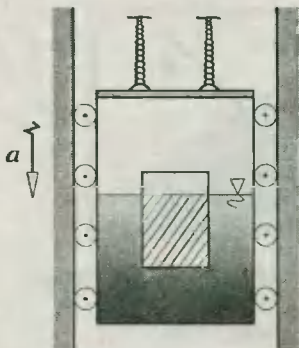


Fig. Prob. 24.39

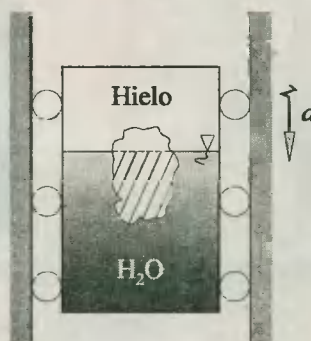


Fig. Prob. 24.40

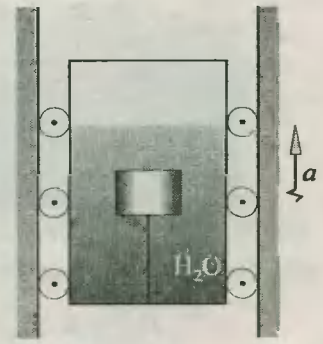


Fig. Prob. 24.41

Neumostática

Nota: Para todos los problemas considerar $p_{atm} = 101 \text{ kPa}$, salvo que se indique lo contrario.

24.42. En la figura mostrada, la densidad del líquido empleado es $d_L = 1\,000 \text{ kg/m}^3$. Calcular la presión del gas encerrado en el tubo en U.

24.43. Un gas se encuentra en equilibrio en un cilindro vertical encerrado por un émbolo. Si el área de éste es $A = 2.10^{-2} \text{ m}^2$, pesa $P = 600 \text{ N}$ y puede deslizarse sin fricción, calcular la presión que experimenta el gas.

24.44. El émbolo que cierra la rama izquierda pesa 80 N y presenta un área $A = 0,04 \text{ m}^2$. Se pide determinar la presión del gas 2, si en la posición mostrada el émbolo se encuentra en equilibrio. $d_A = 2.10^3 \text{ kg/m}^3$ y $d_B = 3.10^3 \text{ kg/m}^3$.

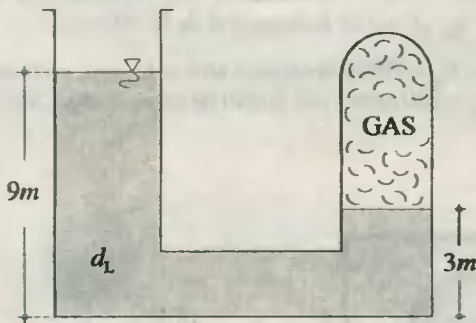


Fig. Prob. 24.42

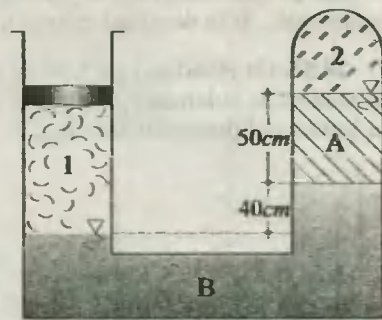


Fig. Prob. 24.44

24.45. Determinar el valor de la fuerza F que se debe aplicar sobre el émbolo de área $A = 0,02 \text{ m}^2$ y peso despreciable, para que el gas encerrado experimente una presión $p_B = 11 \text{ kPa}$, y el sistema quede en equilibrio.

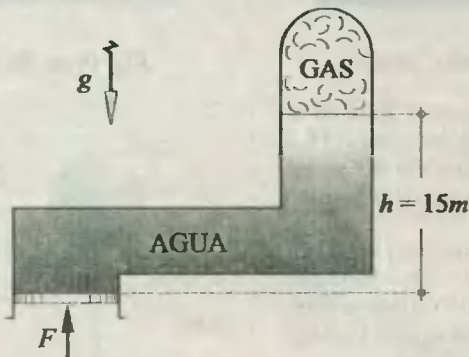


Fig. Prob. 24.45

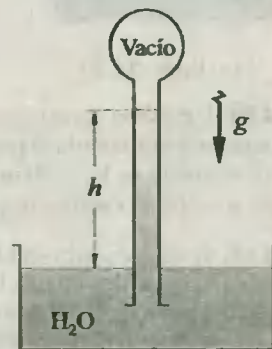


Fig. Prob. 24.48

24.46. Un vaso de 10 cm de altura se llena con agua. se tapa con cartulina y se invierte de modo que el agua no caiga. Calcular la presión en el fondo del vaso.

24.47. Una paloma se encuentra volando a una altura tal que soporta una presión de 95 kPa. Calcular a qué altura se encuentra volando el ave. Considerar $d_{\text{aire}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$.

24.48. En un tubo capilar se ha introducido agua. Calcular la altura máxima h de la columna de agua que se puede tener en equilibrio dentro del tubo.

24.49. Un tubo de metal cerrado por un extremo tiene una masa de aire encerrado y en equilibrio. Determinar la presión que soporta el gas, si $h = 2 \text{ m}$.

24.50. Si en el problema anterior el área de la sección interior del tubo es $A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, y su peso es $P = 4 \text{ N}$, calcular la altura x del gas encerrado.

24.51. Un barómetro marca $H_1 = 76 \text{ cm Hg}$ al nivel del mar, y cuando es llevado a la cima de una montaña marca $H_2 = 72 \text{ cm Hg}$. ¿A qué altura se encuentra la cima de la montaña?

24.52. Una esfera maciza y homogénea flota en un líquido de densidad d_L con 1/8 de su volumen sumergido. Si la densidad del gas que lo rodea es d_g , ¿Cuál es la densidad de la esfera?

24.53. Un globo de $V_g = 5 \text{ m}^3$ de volumen y peso $P_g = 100 \text{ N}$ flota en el aire, y sujeta a un bloque de madera de volumen $V_m = 0,02 \text{ m}^3$ y densidad $d_m = 500 \text{ kg/m}^3$ por medio de una cuerda. Calcular la lectura del dinamómetro. $d_{\text{aire}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$.

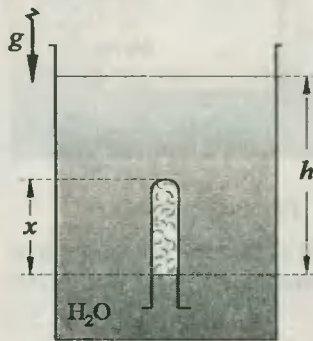


Fig. Prob. 24.49

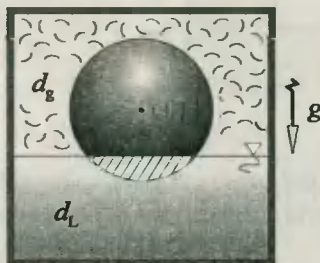


Fig. Prob. 24.52

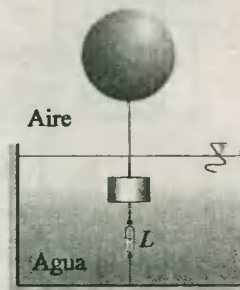


Fig. Prob. 24.53

24.54. Un globo aerostático contiene hidrógeno, y flota en el aire sujeto por una cuerda al piso. Si la masa del globo es $m_g = 18,2 \text{ kg}$ y su volumen es $V_g = 20 \text{ m}^3$, calcular la aceleración del globo cuando se corte la cuerda. $d_{\text{aire}} = 1,29 \text{ kg/m}^3$, $d_{\text{H}_2} = 0,09 \text{ kg/m}^3$.

24.55. Se ha colocado un bloque de latón de masa $m_1 = 100 \text{ kg}$ en uno de los platillos de una balanza de brazos iguales. Se desea averiguar el valor de la masa m_2 de un bloque de plomo que se debe colocar en el otro platillo para equilibrar la balanza. $d_{\text{aire}} = 1,29 \text{ kg/m}^3$, $d_{\text{latón}} = 8,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $d_{\text{plomo}} = 1,14 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$.

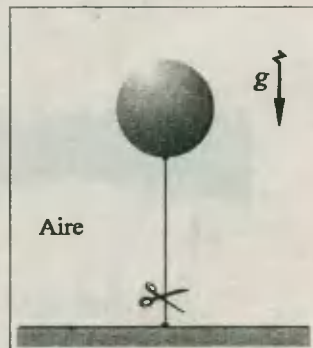


Fig. Prob. 24.54

Termometría - Dilatación

TERMOMETRIA

25.1. Ley Cero de la Termodinámica

$$T_A = T_C \wedge T_B = T_C \Rightarrow T_A = T_B \quad (25.1)$$

siendo T_A , T_B y T_C las temperaturas de los sistemas A, B y C respectivamente.

25.2. Escalas termométricas

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9} = \frac{K - 273}{5} = \frac{R - 492}{9} \quad (25.2)$$

siendo C , K , F y R las lecturas (valores) de una misma temperatura en las escalas *centígrada*, *kelvin*, *fahrenheit* y *rankine* respectivamente.

25.3. Relación entre las divisiones termométricas

$$1 \text{ div } (^{\circ}\text{C}) = 1 \text{ div } (\text{K}) \wedge 1 \text{ div } (^{\circ}\text{F}) = 1 \text{ div } (\text{R}) \quad (25.3)$$

$$1 \text{ div } (^{\circ}\text{C}) = 1,8 \text{ div } (^{\circ}\text{F}) \wedge \Delta^{\circ}\text{C} = 9/5 \Delta^{\circ}\text{F} \quad (25.4)$$

DILATACION

25.4. Dilatación lineal

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T ; L_f = L_0 [1 + \alpha(T_f - T_0)] \quad (25.5)$$

siendo α el coeficiente de dilatación lineal del material.

25.5. Dilatación superficial

$$\Delta A = A_0 \beta \Delta T ; A_f = A_0 [1 + \beta(T_f - T_0)] \quad (25.6)$$

siendo β el coeficiente de dilatación superficial del material.

25.6. Dilatación volumétrica

$$\Delta V = V_0 \gamma \Delta T ; V_f = V_0 [1 + \gamma(T_f - T_0)] \quad (25.7)$$

siendo γ el coeficiente de dilatación volumétrica del material.

25.7. Relación aproximada entre los coeficientes de dilatación

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2} \quad (25.8)$$

25.8. Los agujeros se dilatan como si estuvieran llenos del mismo material que los rodea.

25.9. Variación de la densidad con la temperatura

$$d_f = \frac{d_0}{1 + \gamma(T_f - T_0)} \Rightarrow d_f \approx d_0 [1 - \gamma(T_f - T_0)] \quad (25.9)$$

siendo d_0 la densidad a la temperatura T_0 , y d_f la densidad a la temperatura T_f .

25.10. Comportamiento anómalo del agua

"El agua al elevar su temperatura desde 0°C hasta 4°C , en vez de dilatarse se contrae, y viceversa, al disminuir su temperatura de 4°C hasta 0°C , en lugar de contraerse se dilata".

PROBLEMAS**Termometría**

25.1. ¿Para qué temperatura en $^\circ\text{C}$ se cumplirá la siguiente relación: $K + 2F = 2R - 9C$?

25.2. ¿A qué temperatura en grados *kelvin* se verifica que las lecturas en la escala *centígrada* y *fahrenheit* satisfacen la siguiente relación: $C + F = 60$?

25.3. A un cuerpo que estaba a 10°C se le incrementó su temperatura en 18°F ; luego se le disminuyó en 5 grados *kelvin*, y finalmente se le incrementó en 36R . ¿Cuál será su temperatura final en $^\circ\text{C}$?

25.4. En un termómetro malogrado cuya escala está en $^\circ\text{F}$ el agua hierve a 178°F . ¿A qué temperatura debe congelar el agua en dicho termómetro?

25.5. Una escala termométrica absoluta Q marca $160Q$ para -43°C . Para una sustancia que inicialmente estaba a -16°F y que experimenta un calentamiento de $80Q$, ¿Cuál será su temperatura final en $^\circ\text{F}$?

25.6. Se tienen dos escalas termométricas A y B , de tal modo que el agua hierve a 240°A y 180°B . Si aumentar la temperatura en 1°A equivale a aumentar ésta en 1.5°B , calcular a qué temperatura coinciden las escalas A y B .

25.7. Se tiene una escala termométrica absoluta X , y se sabe que el agua hierve a $969X$. ¿A cuántos grados X hierve el calcio, si su punto de ebullición es 1480°C ?

Dilatación

25.8. Al maquinar una polea de fierro fundido en un torno, la temperatura de la polea se elevó hasta 200°C . ¿Qué diámetro deberá tener la polea a esta temperatura para que al enfriarse hasta 0°C su diámetro resulte igual a 400mm ? $\alpha_{\text{fierro fundido}} = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

25.9. ¿Cuál es el cambio de temperatura que ha ocasionado un aumento de 0.3cm de longitud en una varilla, si se sabe que al aumentar su temperatura en 15°C adicionales se obtiene una dilatación total de 0.8cm ?

25.10. El sistema mostrado está compuesto de dos alambres del mismo material y de una barra que en conjunto forman un cuadrado con el techo, y todo a la temperatura ambiente $T_0 = 20^\circ\text{C}$. ¿A qué temperatura se observará que los alambres forman con la barra un ángulo de 74° ? Despreciar los efectos de deformación por elasticidad. $\alpha_{\text{alambre}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; $\alpha_{\text{barra}} = 5,88 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

25.11. Una varilla metálica de 50 cm de longitud se ha formado con dos trozos de metales cuyos coeficientes de dilatación lineal son $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ y $9 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Si la varilla se calienta en 100°C , se observa que se dilata $0,063 \text{ cm}$. ¿Cuál es la longitud de cada trozo participante?

25.12. Una varilla de cobre ($\alpha_{\text{Cu}} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) de 3 m de longitud se encuentra sujeta por un extremo y apoyada sobre dos rodillos de 1 cm de diámetro, y se calienta por acción de una corriente eléctrica desde 20°C hasta 220°C , lo cual hace girar a los rodillos. ¿Cuánto giran cada uno de los rodillos debido a la dilatación de la varilla?. Despreciar los efectos térmicos sobre los rodillos.



Fig. Prob. 25.10

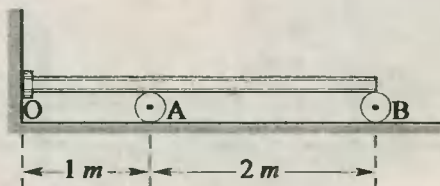


Fig. Prob. 25.12

25.13. Una wincha metálica de 5 m de longitud es exacta a 15°C . Un día en que la temperatura del ambiente es 35°C se mide un terreno, obteniéndose 100 m de longitud. ¿Cuál es la verdadera longitud del terreno, sabiendo que $\alpha_{\text{metal}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$?

25.14. Con una cinta métrica de aluminio se mide una varilla de bronce a 20°C , obteniéndose un valor de 80 cm . ¿Cuál sería la lectura de la medida obtenida a 40°C , si la cinta es exacta a 20°C ? $\alpha_{\text{aluminio}} = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; $\alpha_{\text{bronce}} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

25.15. La altura de una columna de mercurio medida en una escala de latón a la temperatura $T_1 = 0^\circ\text{C}$ es $H_1 = 10 \text{ cm}$. ¿Cuál será la altura H_2 de la columna en dicha escala a la temperatura $T_2 = 10^\circ\text{C}$? $\alpha_{\text{latón}} = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\gamma_{\text{mercurio}} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

25.16. Un alambre circular rodea totalmente una moneda de 50 cm de radio. Si existe un incremento de 100°C en la temperatura del sistema, ¿Qué separación existirá entre el alambre y la moneda? $\alpha_{\text{alambre}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\alpha_{\text{moneda}} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

25.17. Una lámina ($\alpha_{\text{lámina}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) posee un agujero de 50 mm de diámetro, y se desea hacer pasar una esfera de 52 mm de diámetro por este agujero. ¿Cuánto debe incrementarse la temperatura de la lámina para que se logre el objetivo deseado?

25.18. Las varillas mostradas en la figura presentan las longitudes L_1 y L_2 a la temperatura de 0°C . Se desea calcular el incremento de temperatura ΔT que debe experimentar el sistema para que los extremos libres lleguen a tocarse.

25.19. Dos varillas, una de acero y otra de bronce, presentan la característica de que a cualquier temperatura tienen una diferencia de longitudes de 50 cm . ¿Cuáles son las longitudes que ambos presentan a la temperatura de 0°C ? $\alpha_{\text{acero}} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\alpha_{\text{bronce}} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

25.20. En un laboratorio se quiere instalar un reloj de péndulo de las siguientes características: Debe estar hecho de acero inoxidable con un periodo de vibración de $0,2s$ y que trabaje normalmente a $18^{\circ}C$. Si un día la temperatura media del laboratorio fue $28^{\circ}C$, ¿Cuál deberá ser la corrección del péndulo para tener la hora correcta? $\alpha_{\text{acero}} = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}C^{-1}$.

25.21. Un reloj de péndulo metálico adelanta $t_1 = 3s$ por día a una temperatura $T_1 = 5^{\circ}C$, y atrasa $t_2 = 30s$ por día a una temperatura $T_2 = 30^{\circ}C$. Con estos datos calcular el coeficiente de dilatación lineal del metal del péndulo.

25.22. Una varilla metálica de coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ }^{\circ}C^{-1}$ presenta una dilatación que viene dada por el gráfico *longitud* - vs - *temperatura* mostrado. Calcular la longitud de la varilla a $0^{\circ}C$.

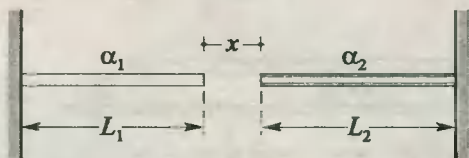


Fig. Prob. 25.18

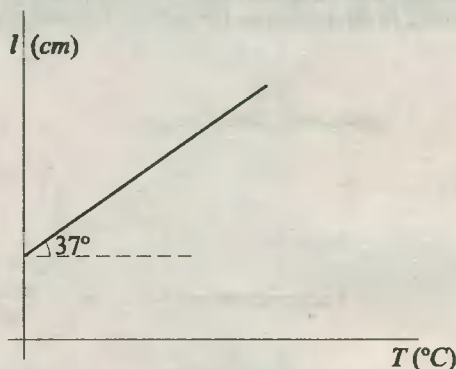


Fig. Prob. 25.22

25.23. Una lámina metálica ($\gamma = 6 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}C^{-1}$) experimenta un incremento de $0,8 \text{ cm}^2$ en su superficie cuando su temperatura pasa de $0^{\circ}C$ hasta $400^{\circ}C$. Se desea calcular el área de su superficie a $400^{\circ}C$.

25.24. Una lámina delgada de latón a $10^{\circ}C$ tiene la misma superficie que una lámina delgada de acero a $20^{\circ}C$. ¿Cuál es la temperatura común a la cual ambas láminas volverán a tener la misma superficie? $\alpha_{\text{latón}} = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}C^{-1}$, $\alpha_{\text{acero}} = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}C^{-1}$.

25.25. Una varilla metálica tiene una longitud L_0 y una sección S_0 a $0^{\circ}C$. Al variar la temperatura su sección se incrementa en un 6%. Calcular la variación porcentual que experimenta su longitud al final del proceso.

25.26. Un recipiente de vidrio pyrex ($\alpha_v = 10^{-5} \text{ }^{\circ}C^{-1}$) presenta un volumen $V_v = 1\,080 \text{ cm}^3$ a la temperatura $T_0 = 10^{\circ}C$. A esta temperatura se introduce en él un volumen $V_L = 1\,006 \text{ cm}^3$ de un líquido ($\gamma_L = 4 \cdot 10^{-4} \text{ }^{\circ}C^{-1}$). ¿Hasta qué temperatura como máximo se debe calentar el sistema sin que el líquido se derrame?

25.27. En un recipiente metálico cerrado ($\gamma_m = 3 \cdot 10^{-4} \text{ }^{\circ}C^{-1}$) se ha vertido un líquido ($\gamma_L = 4 \cdot 10^{-4} \text{ }^{\circ}C^{-1}$) sin llegar a llenarlo completamente, y todo a la temperatura ambiente. ¿Qué porcentaje del volumen del recipiente debe ocupar el líquido para que el volumen de la parte vacía sea siempre el mismo a cualquier temperatura?

25.28. Se tiene dos esferas huecas concéntricas de radios $R_1 = R$ y $R_2 = 3R$, ambos a la misma temperatura. Se desea calcular el coeficiente de dilatación lineal de la esfera 1, si el de la esfera 2 es $1,1 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}C^{-1}$, y además se sabe que a cualquier otra temperatura el volumen comprendido entre las esferas se mantiene constante.

25.29. Calcular la densidad del mercurio a la temperatura de 50°C , si su densidad a 0°C es 13.6 g/cm^3 . $\gamma_{\text{mercurio}} = 1.8 \cdot 10^{-4}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

25.30. Un cilindro de platino tiene un volumen de 0.05 m^3 a 20°C , y se encuentra sumergido en keroseno a la misma temperatura, en cuyo caso su densidad es $d_0 = 800\text{ kg/m}^3$. Calcular la variación que experimenta la lectura del dinamómetro cuando el sistema alcance la temperatura de 45°C ($\alpha_{\text{platino}} = 9 \cdot 10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, $\gamma_{\text{keroseno}} = 1 \cdot 10^{-3}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$).

25.31. Sobre una cubeta con agua flota un trozo de hielo de 100 cm^3 de volumen. La temperatura del sistema es 0°C , y se desea saber qué sucede con el nivel h del agua cuando se haya derretido el hielo: Sube, baja o se mantiene igual.

25.32. Un trozo de hielo contiene una moneda de 20 g de masa, y todo está flotando sobre agua, a 0°C . Calcular el desnivel del agua en el recipiente cuando el hielo se derrita. Densidad de la moneda = 2 g/cm^3 ; Area del fondo del recipiente (A) = 50 cm^2 .

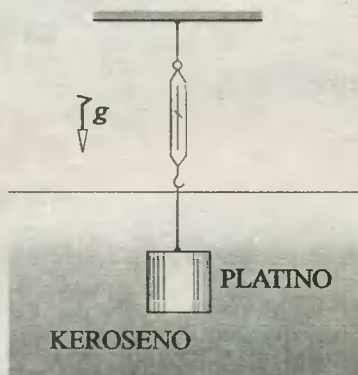


Fig. Prob. 25.30

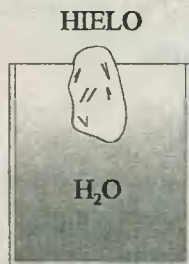


Fig. Prob. 25.31

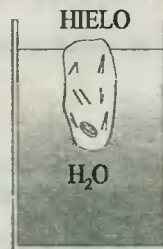


Fig. Prob. 25.32

CALORIMETRIA

26.1. Capacidad calorífica (K)

$$K = Q/\Delta T \Rightarrow Q = K \cdot \Delta T \quad (26.1)$$

siendo Q la energía calorífica, y ΔT la variación de temperatura.

26.2. Capacidad calorífica específica (Ce)

$$Ce = \frac{Q}{m \cdot \Delta T} \quad (26.2)$$

siendo m la masa del cuerpo. Ce se conoce también como **calor específico**. $Ce_{H_2O} = 1 \text{ cal/g} \cdot ^\circ C = 1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ C = 4187 \text{ J/kg} \cdot ^\circ C$.

26.3. Relación entre la capacidad calorífica y la masa del cuerpo

$$K = m \cdot Ce \quad (26.3)$$

26.4. Ley de Dulong y Petit

$$M \cdot Ce \approx 6,22 \quad (26.4)$$

siendo M la masa atómica del elemento, y Ce su calor específico, expresado en $\text{cal/g} \cdot ^\circ C$.

26.5. Calor sensible (Q_s)

$$Q_s = m \cdot Ce \cdot \Delta T \quad (26.5)$$

26.6. Equivalente en agua de un calorímetro (M_{H_2O})

$$M_{H_2O} \cdot Ce_{H_2O} = m_{cal} \cdot Ce_{cal} \quad (26.6)$$

siendo m_{cal} y Ce_{cal} respectivamente la masa y el calor específico del calorímetro.

26.7. Teorema fundamental de la Calorimetría

$$Q_{\text{ganan cuerpos fríos}} = Q_{\text{pierden cuerpos calientes}} \quad (26.7)$$

donde los calores sensibles del segundo miembro de la igualdad se conseguirán de modo que las variaciones de temperatura (ΔT) se obtienen restando la temperatura menor de la mayor. De este modo se garantiza que el valor obtenido sea positivo, así como el calor del primer miembro.

CAMBIOS DE FASE

26.8. Calor latente (Q_L)

Energía calorífica que una sustancia debe ganar o perder para cambiar de fase sin alterar su temperatura.

26.9. Calor latente específico (L)

$$L = Q_L/m ; Q_L = L.m \quad (26.8)$$

siendo m la masa que experimenta el cambio de fase.

26.10. Calor latente específico de fusión del H_2O

$$L_f = 80 \text{ call/g} = 3,35 \cdot 10^5 \text{ J/kg} \quad (26.9)$$

$$Q_{L_f} = 80m \quad (26.10)$$

siendo Q_{L_f} el calor latente de fusión, que concuerda en módulo con el calor latente de solidificación. Además, m es la masa expresada en *gramos* (g), y Q_{L_f} en *calorías*.

26.11. Calor latente específico de vaporización del H_2O

$$L_v = 540 \text{ call/g} = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \quad (26.11)$$

$$Q_{L_v} = 540m \quad (26.12)$$

siendo Q_{L_v} el calor latente de vaporización, que concuerda en módulo con el calor latente de condensación. Asimismo, m está en *gramos* y Q_{L_v} en *calorías*.

PROBLEMAS

Nota: Salvo que se indique lo contrario, en los problemas de Calorimetría las unidades a emplear serán: **Masa:** g; **Temperatura:** °C; **Calor:** cal; **Capacidad calorífica:** call°C; **Calor específico:** callg.°C; **Calor latente específico:** callg.

Calorimetría

26.1. Un cuerpo tiene una capacidad calorífica de $6 \text{ call}^\circ\text{C}$, y su masa es 300 g. Si su temperatura pasa de 16°C a 26°C , ¿Qué cantidad de calor habrá absorbido, y cuál es su calor específico?

26.2. Una esfera de plata de 200 g se encuentra a la temperatura de 200°C , y se sumerge completamente en un líquido. Luego de un cierto tiempo se extrae la esfera, verificándose que su temperatura descendió hasta 70°C . ¿Cuánto calor cedió la esfera al líquido durante su permanencia en ella?. $Ce_{Ag} = 0,056 \text{ callg.}^\circ\text{C}$.

26.3. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se introduce un bloque de hierro ($Ce_{Fe} = 0,11 \text{ kcal/kg.}^\circ\text{C}$) de 2 kg de masa a 200°C . Se sabe además que en dicho recipiente existe 1 l de agua que está a 0°C . Al cabo de un cierto tiempo se retira el bloque, y la temperatura del agua es 33°C . ¿Cuál fue la temperatura del bloque cuando salió del agua?

26.4. Se introducen 53,5 g de agua a 100°C en un calorímetro de cobre de 500 g de masa que se encuentra a la temperatura de 20°C . Si no hay ganancia ni pérdida de calor con el exterior, ¿Cuál será la temperatura de equilibrio?. $Ce_{Cu} = 0,093 \text{ callg.}^\circ\text{C}$.

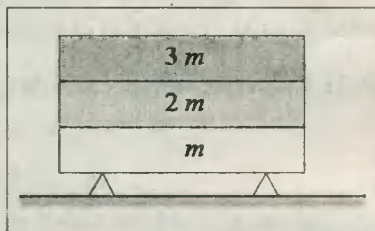
26.5. Se tiene un termómetro de 50 g de masa cuyo calor específico es $0,2 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$, que marca la temperatura del medio ambiente $T_1 = 19^\circ\text{C}$. A continuación se sumerge el termómetro en 200 g de agua, y luego de un cierto tiempo marca $T_e = 39^\circ\text{C}$. ¿Cuál era la temperatura del agua antes de introducir el termómetro?. Despreciar toda pérdida de calor con el exterior.

26.6. Una pieza de metal de 80 g se encuentra a la temperatura de 300°C , y se sumerge en 100 g de agua a 10°C contenida en un calorímetro cuya capacidad calorífica es $50 \text{ cal}^\circ\text{C}$. Al cabo de un tiempo la temperatura del sistema se estacionó en 50°C . Con estos datos, determinar el calor específico del metal.

26.7. De un horno cuya temperatura es $T_2 = 200^\circ\text{C}$ se extrae una pieza metálica cuya masa es 50 g, y de calor específico $0,2 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$, y se le introduce en un calorímetro cuyo equivalente en agua es 890 g. Si en el calorímetro se encontraban 100 g de agua a 20°C , ¿Cuál será la temperatura final del sistema?.

26.8. Se tienen tres masas de agua $m_1 = 40 \text{ g}$, $m_2 = 25 \text{ g}$ y $m_3 = 35 \text{ g}$, a las temperaturas $T_1 = 10^\circ\text{C}$, $T_2 = 40^\circ\text{C}$, $T_3 = 100^\circ\text{C}$. Si introducimos todas estas masas a un mismo recipiente cuya capacidad calorífica es despreciable, ¿Cuál será la temperatura final de equilibrio?.

26.9. Se tienen tres lingotes de un mismo mineral, de masas m , $2m$ y $3m$. Se colocan uno sobre otro del modo que se indica en la figura. Sabiendo que el lingote central y superior se encontraban a las temperaturas de 120°C y 20°C respectivamente, y además la temperatura inicial del lingote inferior es la misma al final del proceso, calcular la temperatura final del sistema.



26.10. Se tiene 100 g de una aleación de oro y cobre a la temperatura de $75,5^\circ\text{C}$, la cual se introduce en un calorímetro con 540 g de agua a 25°C . La temperatura de equilibrio es $25,5^\circ\text{C}$. Calcular la composición de la aleación. $C_{e \text{ Au}} = 0,03 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$; $C_{e \text{ Cu}} = 0,09 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$. Despreciar la capacidad calorífica del calorímetro.

26.11. En un frasco de aluminio de 100 g de masa se calientan 60 g de anilina hasta 68°C , y se introducen en un calorímetro cuyo equivalente en agua es 523 g, elevándose la temperatura de ésta desde 13°C hasta 18°C . Se saca el frasco y se le añade 40 g de anilina, calentándolo hasta $68,3^\circ\text{C}$. A continuación se vuelve a introducir la anilina en el calorímetro, elevándose su temperatura ahora desde $8,73^\circ\text{C}$ hasta 16°C . Determinar los calores específicos de la anilina y del aluminio.

26.12. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se encuentra un líquido a la temperatura $T_1 = 10^\circ\text{C}$. Si ahora se introduce un cubo metálico a la temperatura $T_2 = 200^\circ\text{C}$, se alcanza una temperatura de equilibrio $T_e = 60^\circ\text{C}$. A continuación se extrae el cubo, y cuando el líquido se encuentra a la temperatura $T_1' = 20^\circ\text{C}$ se vuelve a introducir el cubo, alcanzándose una temperatura de equilibrio $T_e' = 40^\circ\text{C}$. ¿Cuál era la temperatura inicial del cubo en este segundo caso?.

26.13. Las temperaturas iniciales de m gramos del líquido A, $2m$ gramos del líquido B y $3m$ gramos del líquido C son respectivamente 30°C , 20°C y 10°C ; mezclando los líquidos A y B la temperatura final es 25°C ; mezclando los líquidos B y C, la temperatura final es $14,5^\circ\text{C}$. ¿Cuál será la temperatura final si se mezclan los líquidos A y C?. Despreciar la capacidad calorífica del calorímetro y supóngase que no hay reacciones químicas durante la mezcla de líquidos.

26.14. Se tiene dos cubos del mismo material y de aristas a y $2a$ a las temperaturas T y $2T$ respectivamente, los cuales se ponen en contacto por una de sus caras y durante un cierto tiempo, hasta llegar al equilibrio. Determinar la temperatura de equilibrio.

26.15. Una cacerola de aluminio ($Ce_{Al} = 0,217 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$) de 400 g de masa contiene 113,2 g de agua a 20°C . A continuación se coloca la cacerola sobre una hornilla que proporciona un flujo de 50 *calls*. ¿Después de cuánto tiempo el sistema llegará a la temperatura de 80°C ?

26.16. En una cacerola se introducen 20 kg de agua, y luego de 4 min logra ascender su temperatura en ΔT . Si esta experiencia se realiza con 83,74 kg de mercurio, se comprueba que en 30 s logra elevar su temperatura en la misma cantidad. ¿Cuál es el calor específico del mercurio?. Despreciar la capacidad calorífica de la cacerola, y considerar $Ce_{H_2O} = 4187 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$.

26.17. En un depósito se tiene $1,8 \text{ m}^3$ de agua a 5°C , y se dispone de agua a 65°C que se vierte por un grifo a razón de 100 cm^3/s . Calcular el tiempo que debe estar abierto el grifo para que la temperatura de la mezcla sea 35°C . Despreciar toda influencia externa sobre el sistema.

26.18. Una barra de acero de 600 g de masa se sumerge en un líquido caliente, de modo que su longitud experimenta un incremento de 0,2%. ¿Qué cantidad de calor habrá recibido la barra durante el proceso?. $Ce_{\text{acero}} = 460 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$; $\alpha_{\text{acero}} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Fusión - Cristalización

26.19. Se proporcionan 4,56 kcal a un trozo de hielo de 40 g de masa que se encuentra a -18°C . Se desea averiguar en qué fase y a qué temperatura quedará el agua al término de la transferencia de calor. ($Ce_{\text{hielo}} = 0,5 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$).

26.20. Se deja caer una gota de agua de 0,2 g de masa a 90°C sobre un gran bloque de hielo a -10°C . Se desea averiguar qué cantidad de calor habrá cedido la gota al bloque hasta el instante que termina su enfriamiento.

26.21. Un trozo de hielo de 30 g de masa a -20°C se encuentra dentro de un calorímetro de capacidad calorífica despreciable. Calcular qué cantidad de agua a 60°C se requiere introducir en el sistema para lograr fundir exactamente todo el hielo.

26.22. ¿Cuántos gramos de hielo a -20°C deben dejarse caer sobre 500 g de agua a 90°C para que la temperatura final de equilibrio sea 30°C ?. Despreciar la ganancia y pérdida de calor con el exterior.

26.23. Se tiene m gramos de hielo a 0°C , y se sumerge en m gramos de agua a 100°C . ¿Cuál será la temperatura final del sistema?. Despreciar toda ganancia o pérdida de calor con el exterior.

26.24. Un trozo de hielo de 40 g de masa y -10°C de temperatura se encuentra dentro de un recipiente de capacidad calorífica despreciable. Si se introduce en él una masa de 25 g de agua a la temperatura de 40°C , calcular:

- ¿Cuál será la temperatura final del sistema.
- Su composición final.

26.25. En un recipiente cuyo equivalente en agua es 50 g se encuentran 150 g de agua a la temperatura de 45°C . Se deja caer sobre el agua un bloque de hielo de 200 g de masa a -10°C . Determinar la composición final del sistema. $Ce_{\text{hielo}} = 0,5 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$.

26.26. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se ha introducido un volumen de hielo a 0°C y nueve volúmenes iguales de agua a 19°C . ¿Cuál será la temperatura final de equilibrio? ($d_{\text{hielo}} = 0,9 \text{ g/cm}^3$).

26.27. Un cubo de hielo cuya masa es de 96 g y su temperatura es -20°C se deja caer dentro de un estanque con agua a 0°C . Si la masa de agua en el estanque es muy grande, ¿Qué cantidad de agua se solidificará alrededor del cubo?

26.28. Se tiene 1 kg de agua en estado de sobrefusión a la temperatura de -16°C . Si ahora se deja caer un pequeñísimo trozo de hielo, se provoca una congelación brusca. Determinar la composición final del sistema.

26.29. Determinar hasta qué temperatura por debajo de 0°C puede subenfriarse el agua, si se sabe que la máxima cantidad de hielo que puede formarse después de una agitación brusca es el 50% de la masa original de agua.

26.30. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se mantiene en estado de sobrefusión 400 g de agua a -8°C . Si se introducen en él 10 g de agua a 8°C se provoca una congelación brusca. Se pide calcular la cantidad de hielo que se forma.

Vaporización - Condensación

26.31. Se han suministrado $62,8\text{kcal}$ a 100g de agua que se encontraban a 60°C . Se pide determinar la temperatura final del sistema. ($C_{e\text{ vapor}} = 0,48\text{ cal/g}\cdot^{\circ}\text{C}$).

26.32. Se tiene un cubo de hielo de 10 g de masa a 0°C . Si se le suministran $4,5\text{ kcal}$ ¿A qué temperatura quedará, y cuál es la composición final del sistema?

26.33. Una muestra de mineral de 10 g de masa recibe calor de modo que su temperatura tiene un comportamiento como el mostrado en la figura. Determinar:

- Las temperaturas de cambio de fase.
- Los calores específicos de cada fase.
- Los calores latentes específicos de fusión y vaporización.

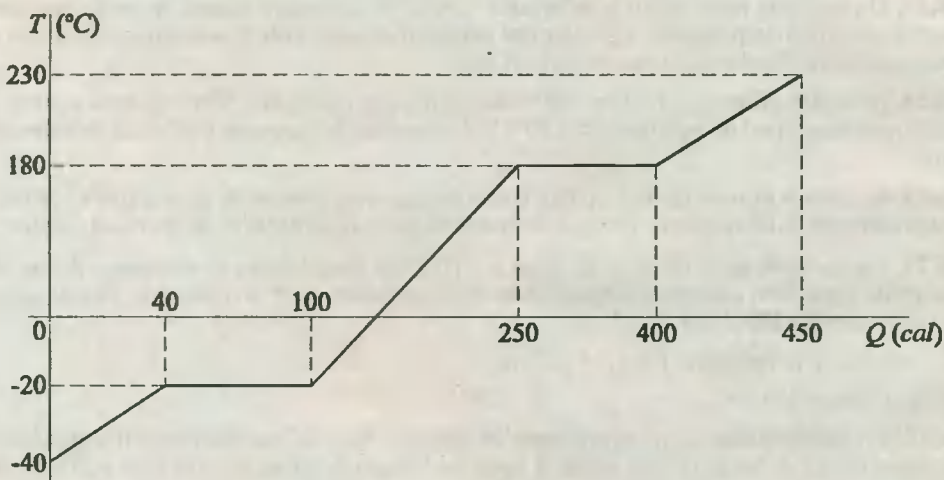


Fig. Prob. 26.33

26.34. ¿Cuántos gramos de vapor a 100°C se necesitan condensar para que se logren calentar 54 g de agua desde 0°C hasta 100°C con el calor desprendido?

26.35. En un cierto proceso se condensa vapor de agua para que se pueda derretir hielo aprovechando el calor desprendido. Calcular qué masa de vapor debe condensarse para derretir exactamente 135 g de hielo a 0°C .

26.36. En una cacerola se echa agua fría a la temperatura de 10°C , y se pone a calentar sobre un hornillo eléctrico. Al cabo de 10min el agua empieza a hervir. ¿Cuánto tiempo tardará en evaporarse totalmente?.

26.37. Un recipiente calorimétrico de cobre tiene una capacidad calorífica de $40\text{ cal}^{\circ}\text{C}$, y contiene 100 g de agua. El sistema se encuentra inicialmente a 0°C . Se hacen circular dentro del calorímetro 20 g de vapor de agua a 100°C . ¿Cuál es la temperatura final del calorímetro y su contenido?.

26.38. Se introducen $272,4\text{ g}$ de vapor de agua a 210°C en un calorímetro con 24 g de agua a 100°C . Se pide determinar el estado final del sistema. Despreciar la capacidad calorífica del calorímetro y la ganancia o pérdida de calor con el exterior.

26.39. Por medio de un tubo se conducen 350 g de vapor de agua a 150°C hacia un recipiente de capacidad calorífica despreciable, el cual contiene agua a 20°C . Si en el equilibrio hay vapor y 12 g de agua en el recipiente, ¿Qué cantidad de agua había originalmente en el recipiente?.

26.40. En un recipiente de aluminio de capacidad calorífica $K = 90\text{ cal}^{\circ}\text{C}$ se encuentra un trozo de hielo a la temperatura de -10°C . Se hace ingresar a este sistema una masa de vapor de 20 g a 100°C . Si la temperatura final del sistema es 40°C , ¿Qué masa tenía el trozo de hielo?.

26.41. Se tiene $3m\text{ gramos}$ de hielo a -20°C , y se mezcla con $m\text{ gramos}$ de vapor de agua a 150°C en un recipiente de capacidad calorífica despreciable. ¿Cuál es la temperatura final del sistema?.

27

Teoría Cinética de los Gases

27.1. Masa molecular

Se define como el número adimensional que representa las veces en que la masa de una molécula contiene a $1/12$ de la masa de un átomo de carbono. Cada sustancia tiene una masa molecular definida.

27.2. Masa molar (M)

Se define como la masa que en *gramos* es numéricamente igual a la masa molecular de una sustancia, y se expresa en *g/mol*. En el SI se expresa en *kg/mol*.

27.3. Cantidad de sustancia (n)

Si m es la masa en *gramos* de un cuerpo y M su masa molar, entonces se define como cantidad de sustancia n del cuerpo a la relación:

$$n = m/M \quad (27.1)$$

En el S.I m se expresa en *kg*, M en *kg/mol* y n en *moles*.

27.4. Número de Avogadro (N_A)

Es el número de moléculas que hay por *cadamol* de una sustancia, y es el mismo cualquiera que sea la sustancia. Si N es el número total de moléculas contenidas en n *moles*, se cumple lo siguiente:

$$N_A = N/n = 6.023 \cdot 10^{23} \text{ (moléculas/mol)} \quad (27.2)$$

27.5. Masa de una molécula (m_m)

$$m_m = M/N_A \text{ (kg/molécula)} \quad (27.3)$$

27.6. Cantidad de moléculas por unidad de masa (n_m)

$$n_m = N_A/M \text{ (moléculas/kg)} \quad (27.4)$$

27.7. Condiciones normales (C.N.)

Se llama así al estado en el cual la presión atmosférica que soporta una sustancia es :
 $p = 1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, y su temperatura es $T = 0^\circ \text{C} = 273 \text{ K}$.

27.8. Cantidad de moléculas por unidad de volumen (n_v)

$$n_v = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{M} \cdot d \text{ (moléculas/m}^3\text{)} \quad (27.5)$$

siendo d la densidad de la sustancia.

27.9 Velocidad cuadrática media

$$v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}{N}} \quad (27.6)$$

siendo v_i la velocidad instantánea de una molécula, y N el número total de moléculas.

27.10. Cálculo cinético de la presión de un gas ideal

$$p = \frac{1}{3} m_m \cdot \left(\frac{N}{V}\right) v^2 = \frac{1}{3} m_m \cdot n_v \cdot v^2 \quad (27.7)$$

$$p_0 = 1/3 d_0 \cdot v^2 \quad (\text{a condiciones normales}) \quad (27.8)$$

27.11. Constante universal de los gases (R)

$$R = 8,31 \text{ J/mol.K}$$

27.12. Constante de Boltzmann (k)

$$k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/molécula.K}$$

27.13. Energía cinética molecular promedio (E_{cmp})

$$E_{\text{cmp}} = 1/2 m_m v^2 \quad (27.9)$$

$$E_{\text{cmp}} = 1/2 i k T \quad (27.10)$$

siendo m_m la masa de una molécula. Además, i representa la cantidad de grados de libertad, y su valor es igual a 3, 5 ó 6 para gases monoatómicos, diatómicos o triatómicos respectivamente. T es la temperatura absoluta del gas.

27.14. Energía interna de un gas ideal (U)

$$U = 1/2 i N k T \quad (27.11)$$

$$U = 1/2 i n R T \quad (27.12)$$

$$U = 1/2 i p V \quad (27.13)$$

27.15. Ecuación de estado de un gas ideal

$$pV = nRT = (m/M)RT \quad (27.14)$$

siendo R la constante universal de los gases, la cual se obtiene experimentalmente de manera que un mol de gas a condiciones normales presenta un volumen de $22,4 \text{ l}$, de este modo al reemplazar estos datos en la relación anterior se encuentra que $R = 8,31 \text{ J/mol.K}$.

27.16. Ecuación de procesos

$$\frac{pV}{T} = \text{constante} \quad (27.15)$$

Esta relación se verifica sólo si la masa del gas permanece constante.

27.17. Leyes fundamentales de los gases**27.17.a) Ley de Boyle - Mariotte.- Proceso isotérmico**

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Leftrightarrow T = \text{constante} \quad (27.16)$$

27.17.b) Ley de Charles.- Proceso isobárico

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Leftrightarrow p = \text{constante} \quad (27.17)$$

27.17.c) Ley de Gay - Lussac.- Proceso isovolumétrico

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Leftrightarrow V = \text{constante} \quad (27.18)$$

27.18. Capacidad calorífica molar (C)

$$C = \frac{Q}{n \cdot \Delta T} \quad (J/mol.K) \quad (27.19)$$

siendo Q la cantidad de energía calorífica, n el número de moles, y ΔT la variación de temperatura.

27.19. Capacidad calorífica molar a volumen constante (C_V)

$$C_V = \frac{1}{2} i R \quad (27.20)$$

27.20. Capacidad calorífica molar a presión constante (C_P)

$$C_P = \left(\frac{i+2}{2} \right) R \quad (27.21)$$

Se verifica que $C_P > C_V$.

27.21. Exponente adiabático (γ)

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i} \quad (27.22)$$

donde γ tiene valores de $5/3$, $7/5$ y $4/3$ para un gas monoatómico, diatómico y triatómico respectivamente.

PROBLEMAS**Interpretación cinética de la presión y la temperatura**

27.1. Calcular la cantidad de moléculas que contiene 1 kg de dióxido de carbono. Determinar además la masa de una molécula, y la concentración de moléculas por metro cúbico (m^3) para las condiciones normales de presión y temperatura, si en tales condiciones la densidad del CO_2 es $d_o = 1,98 \text{ kg/m}^3$. Considerar que $M_{CO_2} = 44 \text{ g/mol}$.

27.2. Calcular el valor de la energía cinética media del movimiento de traslación de una molécula

de helio, que a la presión de 100 kPa posee la densidad de $0,12 \text{ kg/m}^3$. La masa molar del gas es $M = 4 \text{ g/mol}$, y se sabe que el helio es monoatómico.

27.3. Calcular la velocidad cuadrática media de las moléculas del dióxido de carbono:

- A condiciones normales.
- A la temperatura de 100°C .

27.4. La velocidad cuadrática media de las moléculas de acetileno (C_2H_2) encerrado en una botella es igual a 500 m/s . La densidad del gas es 18 kg/m^3 . Calcular:

- La energía del movimiento de traslación para una molécula.
- La energía total del conjunto de moléculas.
- La presión del gas, si su masa es $7,2 \text{ kg}$ ($M_{\text{C}_2\text{H}_2} = 26 \text{ g/mol}$).

27.5. Determinar la presión para la cual 1 m^3 de gas monoatómico a la temperatura de 60°C contiene $2,4 \cdot 10^{26}$ moléculas.

27.6. En condiciones de laboratorio se practica un alto vacío, es decir, una presión muy pequeña, igual a $1,33 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}$. ¿Cuántas moléculas quedan en 1 m^3 en este caso, considerando que la temperatura es 293 K ?

Ecuación de estado del gas ideal

27.7. En un cilindro se encontraba un gas perfecto a la presión de $4 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ y 300 K de temperatura. Después, tres quintas partes del gas contenido en aquella fueron expulsadas, y la temperatura se redujo hasta 240 K . ¿Bajo qué presión se encontrará el gas sobrante?

27.8. La temperatura de una habitación es $T_1 = 10^\circ\text{C}$. Después de encender la estufa, su temperatura se eleva hasta $T_2 = 20^\circ\text{C}$. El volumen de la habitación es $V = 50 \text{ m}^3$, y la presión en ella es $p = 97 \text{ kPa}$. ¿Cuánto habrá variado la masa de aire que había en dicha habitación?. La masa molar del aire es $M = 29 \text{ g/mol}$.

27.9. Una botella de helio a la presión $p_1 = 6,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ y la temperatura $T_1 = -3^\circ\text{C}$ tiene la masa $m_1 = 21 \text{ kg}$, y a la presión $p_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ y la misma temperatura tiene la masa $m_2 = 20 \text{ kg}$. ¿Qué masa de helio contiene la botella a la presión $p = 1,5 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ y a la temperatura $T = 27^\circ\text{C}$?

27.10. Un balón de vidrio es pesado tres veces a temperatura constante: a) al vacío (es decir, después de extraer el aire de él); b) Lleno de aire a presión atmosférica $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, y c) Lleno de un gas desconocido a la presión $p_g = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, obteniéndose respectivamente que $m_1 = 200 \text{ g}$, $m_2 = 205 \text{ g}$, y $m_3 = 212 \text{ g}$. Determinar la masa molar del gas desconocido M_g . La masa molar del aire es $M_a = 29 \text{ g/mol}$.

27.11. ¿Qué porcentaje de aire se deja de respirar al subir a la Sierra, donde la temperatura es -3°C , y la presión atmosférica es $p = 9/10 p_0$. Considerar que en la Costa $T_0 = 21^\circ\text{C}$, y $p_0 =$ presión atmosférica normal.

27.12. Un tubo de vidrio de 1 cm^2 de sección transversal tiene cerrado uno de sus extremos. Se le llena totalmente de mercurio y se le inyecta $1,39 \cdot 10^{-4}$ moles de gas ideal como se indica en la figura. Se observa que a $T = 300 \text{ K}$ y presión atmosférica normal, $h_1 = 10 \text{ cm}$. ¿Cuál será el valor de h_2 ? ($p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $\rho_{\text{Hg}} = 136\,000 \text{ N/m}^3$).

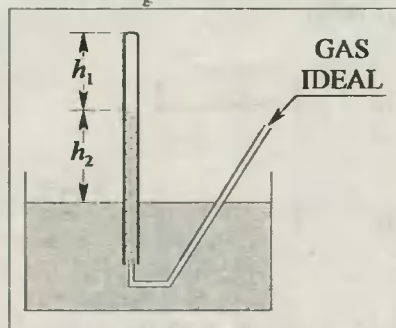


Fig. Prob. 27.12

Ecuación de procesos

27.13. ¿Qué presión crean 40 l de oxígeno a la temperatura de 103°C , si en condiciones normales esta misma masa de gas ocupa el volumen de 9,1 l? Calcular además la masa del gas ($M_{\text{O}_2} = 32\text{ g/mol}$).

27.14. Un gas ocupa el volumen de 855 l a la presión de $3 \cdot 10^5\text{ Pa}$ y temperatura de 27°C . ¿Cuál será la presión si esa misma masa de gas a la temperatura de 320 K ocupa el volumen de 800 l?

27.15. Un gas ocupa el volumen de 586 l, siendo la presión de 6 atm y la temperatura de 293 K. Hallar el volumen que ocupará esa misma masa de gas a la temperatura de 248 K y 4 atm de presión.

27.16. A la presión de $7,2 \cdot 10^5\text{ Pa}$ y 288 K de temperatura el volumen de cierto gas es igual a $0,6\text{ m}^3$. ¿A qué temperatura esa misma masa de gas ocupará un volumen de $1,6\text{ m}^3$, si la presión se hace igual a $2,25 \cdot 10^5\text{ Pa}$?

27.17. Al elevar en 1 K la temperatura de un gas a volumen constante, la presión aumentó un 0,2%. ¿A qué temperatura inicial se encontraba el gas?

27.18. Para obligar a emerger a un submarino, los tanques de lastre de éste, llenos de agua, se barren con aire comprimido. El barrido se efectúa a una profundidad de 25 m, con la particularidad de que el aire adquiere la temperatura del agua circundante, que es de 277 K. ¿Qué volumen de agua puede expulsarse de los tanques de lastre impulsando en ellos el aire de una botella de 30 l de capacidad, si la presión del aire en ella a 285 K es $1,47 \cdot 10^7\text{ Pa}$, y la densidad del agua de mar es $1\,030\text{ kg/m}^3$.

Energía interna

27.19. Un gas monoatómico experimenta un proceso isobárico a 6 kPa , de modo que su volumen se incrementa en 4 m^3 . Calcular la variación que experimenta su energía interna.

27.20. Se tiene un gas diatómico que se calienta mediante un proceso isovolumétrico desde la presión de 10 kPa hasta la presión de 20 kPa . Sabiendo que la energía interna se incrementó en 50 kJ , calcular el volumen V del gas.

27.21. Dos moles de un gas monoatómico experimentan los procesos que se indican a continuación:

a) 1-2: Proceso isovolumétrico, siendo $T_1 = 27^{\circ}\text{C}$, y $p_2 = 2p_1$.

b) 2-3: Proceso isobárico, siendo $V_3 = 2V_2$.

Calcular el cambio experimentado por la energía interna entre los estados inicial y final.

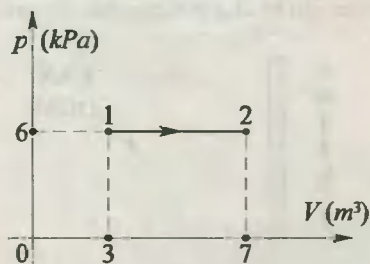


Fig. Prob. 27.19

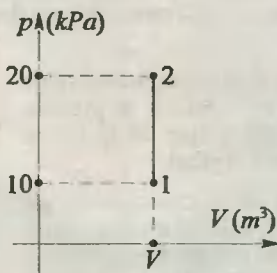


Fig. Prob. 27.20

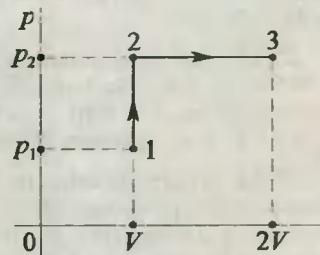


Fig. Prob. 27.21

27.22. En un recipiente cerrado se encuentran $n = 2$ moles de un gas monoatómico, los cuales reciben $200 J$ de calor. Determinar el cambio producido en su temperatura.

27.23. Cierta gas diatómico se expandió isobáricamente de modo que su temperatura pasó de $T_1 = 27^\circ C$ hasta $T_2 = 127^\circ C$. Si el calor absorbido durante el proceso fué $450 J$, calcular cuántos moles de gas había en el recipiente.

Aplicaciones neumostáticas

27.24. Una burbuja de aire emerge de un lago de agua dulce, de manera que al llegar a la superficie su radio se duplica. ¿A qué profundidad se encontraba la burbuja?. Considerar que la temperatura es la misma durante todo el proceso, y que la presión atmosférica es la normal: $p_0 = 10^5 Pa$ ($\rho_{H_2O} = 10\,000 N/m^3$).

27.25. El tubo de un barómetro defectuoso de $80 cm$ de longitud tiene algo de aire sobre el mercurio, y marca $74 cm$ cuando la altura barométrica correcta es $76 cm$. ¿Cuál será la presión atmosférica verdadera cuando el barómetro defectuoso marque $72 cm$?. Considerar la temperatura del aire igual en ambos casos.

27.26. La rama corta y cerrada de un tubo de Mariotte está lleno de aire en una longitud de $18 cm$. ¿Qué altura de mercurio habrá que echar en la rama abierta si se quiere reducir a $2/3$ el volumen de aire en la rama corta?.

27.27. ¿A qué altura sobre el nivel del mercurio en el recipiente hay que levantar el extremo superior del tubo mostrado para que dentro de éste el nivel del mercurio quede igual al nivel del mercurio en el recipiente?.

27.28. ¿Cómo varía el nivel de mercurio en el tubo, si la temperatura se eleva de $27^\circ C$ a $77^\circ C$?. Se desprecia la dilatación del tubo, y la presión atmosférica es la normal.

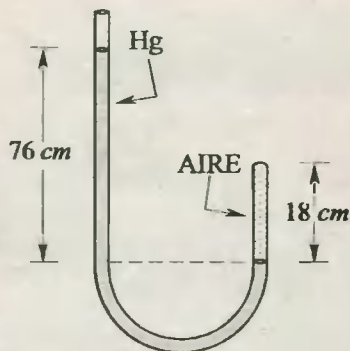


Fig. Prob. 27.26

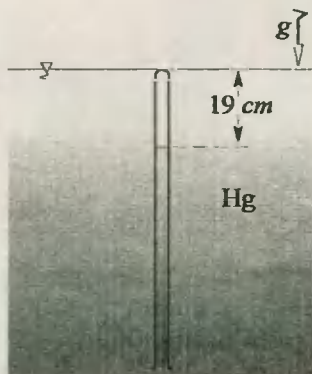


Fig. Prob. 27.27

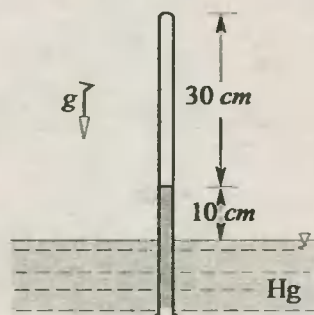


Fig. Prob. 27.28

27.29. En el cilindro mostrado hay aire encerrado. El émbolo tiene un área $A = 4 \cdot 10^{-3} m^2$ y masa $m = 10 kg$. Si se quita la pesa M , el volumen que ocupa el aire encerrado se duplica, y su temperatura se hace dos veces menor. Determinar la masa de la pesa, si la presión atmosférica es $p_0 = 10^5 Pa$ ($g = 10 m/s^2$).

27.30. En el cilindro mostrado, bajo el émbolo de área $A = 100 cm^2$ se encuentra una mol de nitrógeno a la temperatura $T_1 = 100^\circ C$. Del émbolo de masa despreciable se halla colgada una pesa

de masa $M = 100 \text{ kg}$ por medio de un sistema de poleas. El cilindro se enfría hasta $T_2 = 0^\circ\text{C}$. ¿A qué altura Δh se elevará la pesa?. La presión atmosférica es $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

27.31. Dentro de un cilindro cerrado por ambos extremos, del cual se ha extraído el aire, un émbolo se encuentra suspendido de un muelle que se desliza sin rozamiento, cuya posición de equilibrio se encuentra en el fondo del cilindro. Debajo del émbolo se inyecta una cantidad de gas tal, que aquel se eleva a la altura $h = 5 \text{ cm}$. ¿A qué altura h_1 se establecerá el émbolo, si este gas se calienta desde la temperatura inicial T hasta la temperatura $T_1 = 4T$?

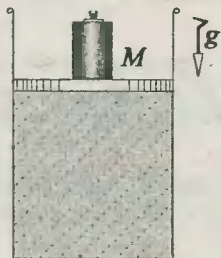


Fig. Prob. 27.29

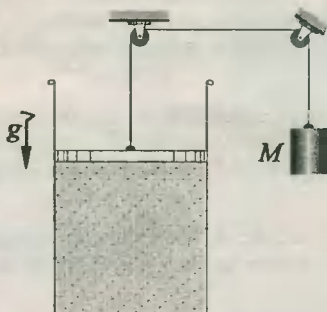


Fig. Prob. 27.30

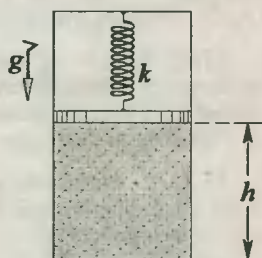


Fig. Prob. 27.31

28.1. Equivalente mecánico del calor

“Una cantidad definida de trabajo produce una cantidad definida de calor”.

$$1 J = 0,24 cal \Rightarrow Q (cal) = 0,24 W (J) \quad (28.1)$$

$$1 cal = 4,187 J \Rightarrow W (J) = 4,187 Q (cal) \quad (28.2)$$

donde W puede ser un trabajo mecánico, energía mecánica, eléctrica, luminosa, , etc. En general, es preferible usar las unidades del S.I tanto para el calor Q como para el trabajo W , para así evitar engorrosas operaciones con las equivalencias aquí señaladas.

28.2. Trabajo realizado por un gas ideal

a) Proceso isobárico ($p = \text{constante}$)

$$W = p \cdot \Delta V = nR \cdot \Delta T \quad (28.3)$$

b) Proceso isovolumétrico ($V = \text{constante}$)

$$W = 0 \quad (28.4)$$

c) Proceso isotérmico ($T = \text{constante}$)

$$W = C \cdot \ln(V_f/V_o) \quad (28.5)$$

$$\text{donde: } C = p_o \cdot V_o = p_f \cdot V_f = nRT \quad (28.6)$$

d) Proceso adiabático ($Q = 0$)

$$W = \frac{p_o \cdot V_o^\gamma - p_f \cdot V_f^\gamma}{\gamma - 1} \quad (28.7)$$

siendo γ el coeficiente adiabático del gas definido en el item (27.1).

28.3. En un gráfico *presión* - vs - *volumen*, el área bajo la curva concuerda con el trabajo realizado, el cual será de signo positivo si se trata de un proceso de expansión (incremento de volumen), y negativo si el proceso es de compresión.

28.4. Variación de energía interna

a) Para gases monoatómicos: $\Delta U = 3/2 nR\Delta T \quad (28.8)$

b) Para gases diatómicos: $\Delta U = 5/2 nR\Delta T \quad (28.9)$

c) Para un proceso isovolumétrico: $\Delta U = n \cdot C_v \cdot \Delta T \quad (28.10)$

siendo C_v la capacidad calorífica molar a volumen constante del gas, y cuyo valor dependerá del tipo de gas.

28.5. Primera Ley de la Termodinámica

a) Para procesos: "El calor que gana o pierde un sistema durante un proceso se utiliza para realizar trabajo y/o cambiar su energía interna".

$$Q = W + \Delta U \quad (28.11)$$

b) Para ciclos: "El calor neto que gana o pierde un sistema durante un ciclo se convierte en trabajo neto".

$$Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}} \quad (28.12)$$

en el cual el signo del calor Q será positivo o negativo según el sistema lo absorba o lo ceda respectivamente, y el signo del trabajo W será positivo o negativo según el sistema lo realice o lo reciba respectivamente.

28.6. En un gráfico p - vs - V el área encerrada por un ciclo termodinámico coincide con el trabajo neto, el que a su vez será positivo si el ciclo es de sentido horario, y negativo si es de sentido antihorario.

28.7. Máquina térmica

Absorbe calor para convertirlo en trabajo, y su eficiencia viene dada por:

$$\eta = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{\text{sum}}} = \frac{Q_A - Q_B}{Q_A} = 1 - \frac{Q_B}{Q_A} \quad (28.13)$$

28.8. Máquina refrigeradora

Recibe trabajo para extraer calor de una zona de baja temperatura y cederla a otra zona de mayor temperatura. Su coeficiente de performance (COP) es:

$$COP = Q_B/W \quad (28.14)$$

28.9. Segunda ley de la Termodinámica

"Es imposible que una máquina térmica sea 100% eficiente, de manera que durante un ciclo termodinámico trabaje con una sola fuente de calor y lo convierta íntegramente en trabajo".

28.10. Ciclo de Carnot

Está constituido por dos procesos isotérmicos y dos procesos adiabáticos.

28.11. Eficiencia de una máquina térmica que desarrolla el ciclo de Carnot

$$\eta_C = 1 - T_B/T_A \quad (28.15)$$

28.12. Relación de Kelvin

$$\frac{Q_B}{Q_A} = \frac{T_B}{T_A} \quad (28.16)$$

siendo Q_A y Q_B el calor ganado y perdido durante el ciclo a las temperaturas T_A y T_B respectivamente, tal que $Q_A > Q_B$ y $T_A > T_B$. Las temperaturas deben estar en kelvin.

PROBLEMAS

Equivalente mecánico del calor

28.1. Un hombre convierte energía durante su trabajo a razón de 125 W . ¿Qué cantidad de pan con mermelada, cuyo calor de combustión es 720 cal/g , debe comer para poder trabajar una hora?. Masa de un pan con mermelada = $14,4\text{ g}$.

28.2. Una bala de plomo atraviesa una pared de madera de modo que $v_o = 250\text{ m/s}$ y $v_f = 60\text{ m/s}$. La temperatura de la bala antes del choque era $T_o = 185,75^\circ\text{C}$. ¿Qué porcentaje de la bala se fundirá?. $C_{e\text{pb}} = 120\text{ J/kg}\cdot\text{K}$, $T_{\text{fusión}} = 327^\circ\text{C}$, $L_{\text{fpb}} = 25\text{ kJ/kg}$.

28.3. En un carrito de masa $M = 9\text{ kg}$ que se mueve por inercia con una velocidad igual $av_o = 20\text{ m/s}$ se coloca desde arriba un ladrillo de masa $m = 1\text{ kg}$. Determinar la cantidad de calor que se desprende durante la instalación.

28.4. Una nevera que consume 150 W durante 2 min transformó 50 g de agua que se encontraba en su interior, en hielo. Si su temperatura inicial fué $T_o = 20^\circ\text{C}$. ¿Qué cantidad de calor desprenderá la "mariposa" de la nevera a la habitación durante el intervalo de tiempo dado?. Considerar que la capacidad calorífica de la nevera es despreciable. $L_{\text{sagua}} = 33,5 \cdot 10^4\text{ J/kg}$.

28.5. En un calorímetro transparente que contiene 432 cm^3 de agua fué sumergido un foco de luz incandescente de potencia $P = 100\text{ W}$. El agua incrementa su temperatura en 6°C luego de 2 min . ¿Qué porcentaje de la energía consumida por el foco se emite por el calorímetro al exterior en forma de energía radiante?.

28.6. En una temporada de carnavales, Marlon deja caer el agua de un balde desde una altura $h = 83,74\text{ m}$. Si toda la energía potencial del agua se convierte en energía interna, calcular el incremento de temperatura que experimenta el agua. $C_{e\text{H}_2\text{O}} = 4\,187\text{ J/kg}\cdot\text{K}$, $g = 10\text{ m/s}^2$.

28.7. En un recipiente hay agua de masa total $M\text{ kg}$, cuya capacidad calorífica específica es $C_e\text{ J/kg}\cdot^\circ\text{C}$. ¿Cuántas piedras de masa $m\text{ kg}$ cada una hay que soltar desde una altura h para elevar la temperatura del agua en $\Delta T^\circ\text{C}$?. Suponer que la capacidad calorífica de las piedras es despreciable, y $M \gg m$.

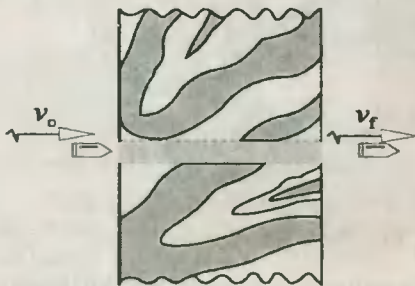


Fig. Prob. 28.2

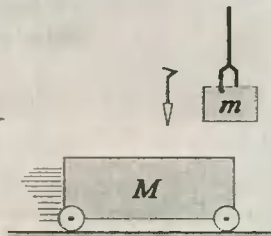


Fig. Prob. 28.3

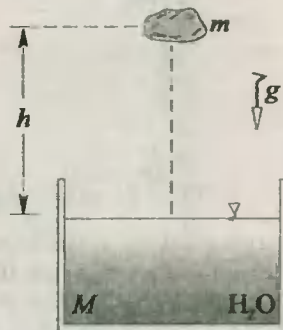


Fig. Prob. 28.7

28.8. Dos pedazos de hielo van uno al encuentro del otro con velocidades iguales, y al chocar se transforman en vapor. Determinar las mínimas velocidades posibles de los pedazos de hielo, si antes de chocar la temperatura de los mismos era $-29,3^{\circ}\text{C}$. $C_{e_h} = 2,1 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$, $C_{e_{\text{agua}}} = 4\,200 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$, $L_{f_{\text{hielo}}} = 335 \text{ kJ/kg}$, $L_{v_{\text{agua}}} = 2\,260 \text{ kJ/kg}$.

28.9. En la figura, el bloque A es hielo a 0°C y 25 kg de masa, y B es una pesa de 75 kg de masa. Si el sistema se abandona desde la posición mostrada. ¿Qué cantidad de hielo se fundiría al impactar éste contra el piso, si la cuerda se rompió cuando ambos bloques estaban al mismo nivel?. Suponer que sólo el hielo absorbe calor durante el choque. $g = 10 \text{ m/s}^2$, $L_{f_{\text{hielo}}} = 335 \text{ kJ/kg}$.



Fig. Prob. 28.8

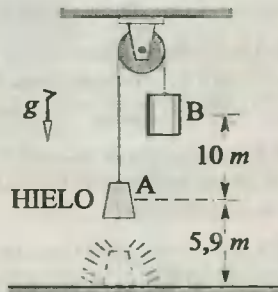


Fig. Prob. 28.9

28.10. Se lanza una bola de nieve de $13,4 \text{ kg}$ a 0°C con una velocidad de 400 m/s contra una pared vertical, según se muestra en la figura. Si en el impacto se funden $1,95 \text{ kg}$ de hielo, calcular el ángulo β de salida (después del impacto). Suponer que la pared no absorbe calor, y que el hielo fundido rebota con la misma velocidad de la bola. $L_{f_{\text{hielo}}} = 335 \text{ kJ/kg}$.

Trabajo

28.11. En un cilindro cuya sección tiene un área de $0,4 \text{ m}^2$ se encuentra un gas ideal que se expande realizando un trabajo de 130 J . Calcular el desplazamiento del émbolo cuando el gas pasó del estado 1 al estado 2.

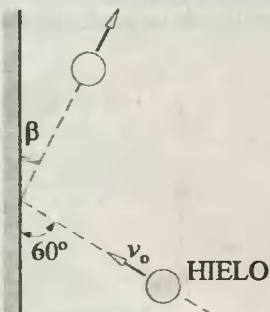


Fig. Prob. 28.10

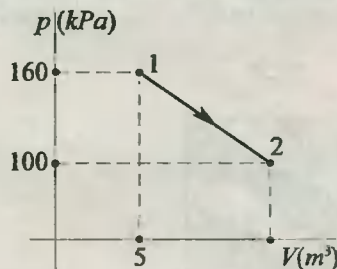


Fig. Prob. 28.11

28.12. En un cilindro se tiene un gas ideal encerrado por un pistón cuya área es $0,5 \text{ m}^2$ y de masa despreciable. En su interior se encuentra también un ventilador que proporciona un trabajo de 2 kJ durante una expansión isobárica. Si el trabajo neto del sistema es 5 kJ , calcular el desplazamiento del pistón en cm . ($p_{\text{atm}} = 1 \text{ Bar}$).

28.13. Un cilindro vertical se encuentra cerrado por un pistón sin fricción de peso $P_p = 4 \text{ kN}$, el cual tiene sobre sí una carga Q . El área de la sección recta del cilindro es $A = 0,2 \text{ m}^2$, y se sabe que el resistor entrega un trabajo $W_r = 5 \text{ kJ}$ cuando el pistón se ha trasladado desde la posición mostrada hasta los topes indicados. ¿Cuál será el peso de la carga Q , si el sistema experimentó un trabajo neto $W_n = -20 \text{ kJ}$?. Considerar que el pistón desciende lentamente, y $p_{\text{atm}} = 1 \text{ Bar}$.

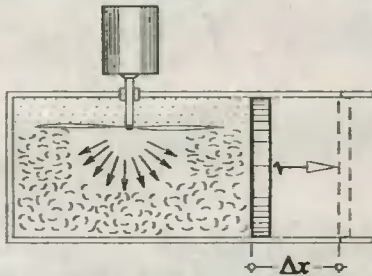


Fig. Prob. 28.12

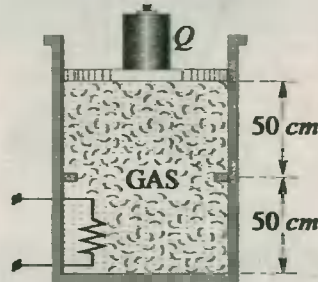


Fig. Prob. 28.13

28.14. Un gas experimenta una expansión isobárica desde la temperatura $T_1 = 27^\circ \text{C}$. Calcular la temperatura final del proceso en $^\circ \text{C}$, si la masa del gas equivale a $0,4 \text{ mol}$.

28.15. Determinar el trabajo que debe efectuar un gas ideal para lograr expandirse isotérmicamente a 27°C desde el estado 1 hasta el estado 2, si además se sabe que su masa equivale a $0,1 \text{ mol}$.

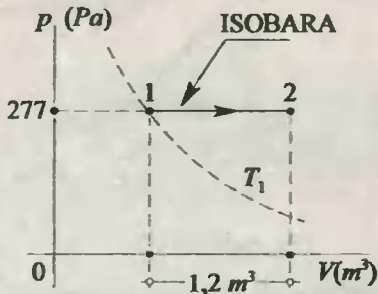


Fig. Prob. 28.14

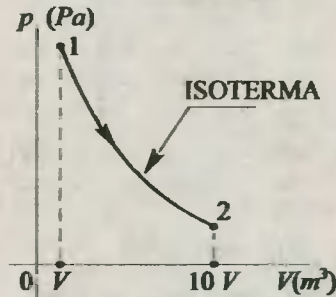


Fig. Prob. 28.15

28.16. Un gas ideal experimenta una expansión adiabática de acuerdo a la ley $pV^{1,5} = \text{constante}$. Calcular el trabajo realizado por el gas, sabiendo además que su volumen se cuadruplicó al pasar del estado 1 al estado 2.

28.17. ¿Qué masa de hidrógeno hay bajo el émbolo de un cilindro, si al calentarlo isobáricamente desde la temperatura $T_1 = 250 \text{ K}$ hasta la temperatura $T_2 = 650 \text{ K}$ el gas realiza un trabajo $W = 332,4 \text{ J}$?. Masa molar del hidrógeno: $M_{\text{H}_2} = 2 \text{ g/mol}$.

28.18. Un gas encerrado en un recipiente experimenta un proceso 1-2, pasando de la temperatura $T_1 = 1800 \text{ K}$ a $T_2 = 300 \text{ K}$. Si se sabe que la masa del gas equivale a $0,05 \text{ mol}$, ¿Cuál es el trabajo realizado sobre todo el sistema durante el proceso mostrado?.

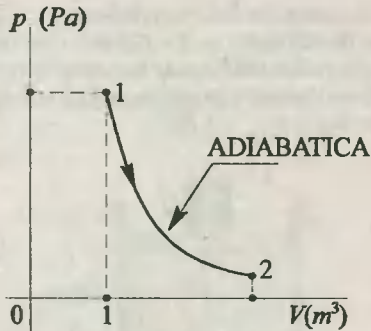


Fig. Prob. 28.16

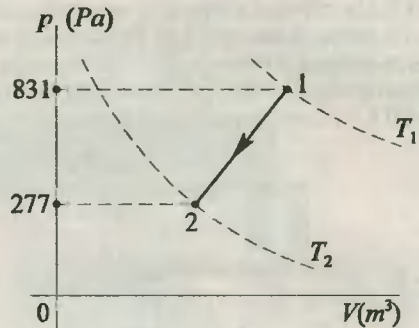


Fig. Prob. 28.18

28.19. El estado de 1 mol de gas perfecto varía primero según la isóbara 1-2, y después según la isométrica 2-3. Al mismo tiempo el gas realiza un trabajo total $W = 8,31 \text{ kJ}$. La relación entre las presiones en los estados 2 y 3 es $p_2/p_3 = 3$. Calcular la temperatura en el estado 1, si es la misma que la del estado 3.

28.20. Calcular el trabajo neto realizado en el ciclo mostrado en el gráfico p - vs - V .

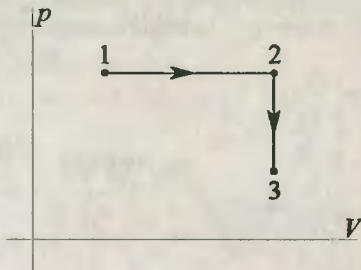


Fig. Prob. 28.19

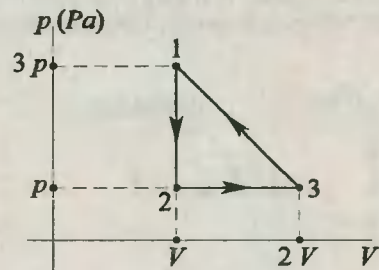


Fig. Prob. 28.20

28.21. Con un gas ideal se efectúa el ciclo constituido por los procesos mostrados en el plano p - vs - T . Calcular el trabajo neto del ciclo. $p_1 = 200 \text{ Pa}$, $V_1 = 0,5 \text{ m}^3$; $p_2 = 700 \text{ Pa}$, $V_3 = 3,5 \text{ m}^3$.

28.22. Sobre 1 mol de gas perfecto se realiza un ciclo cerrado consistente en dos isométricas y dos isóbaras. Las temperaturas en los estados 1 y 3 son $T_1 = 400 \text{ K}$ y $T_3 = 900 \text{ K}$. Calcular el trabajo que realiza el gas durante el ciclo, sabiendo que los estados 2 y 4 se encuentran en una misma isoterma.

28.23. La figura muestra los procesos realizados por un gas perfecto cuyo coeficiente adiabático es $\gamma = 1,5$. La temperatura en el estado A es 600 K , la presión 16 kPa , y el volumen 1 m^3 . En el estado B el volumen es 4 m^3 . Calcular el trabajo en el proceso BC.

Primera ley de la Termodinámica

28.24. Un gas ideal se expande cediendo 200 J de calor y transformando su energía interna desde $U_1 = 650 \text{ J}$ hasta $U_2 = 300 \text{ J}$. Calcular el trabajo desarrollado por el gas durante el proceso.

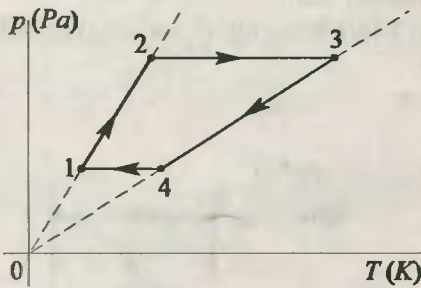


Fig. Prob. 18.21

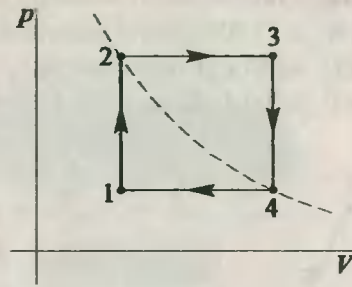


Fig. Prob. 18.22

28.25. Un gas ideal monoatómico experimenta una expansión isobárica desde el estado 1 hasta el estado 2. Calcular la cantidad de calor que se necesitó proporcionar al gas durante dicho proceso.

28.26. 1 mol de gas perfecto encerrado herméticamente en un recipiente se encuentra a la temperatura $T_1 = 27^\circ\text{C}$. ¿Qué cantidad de calor necesita recibir el gas para duplicar su presión inicial? Capacidad calorífica molar del gas: $C_v = 20 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$.

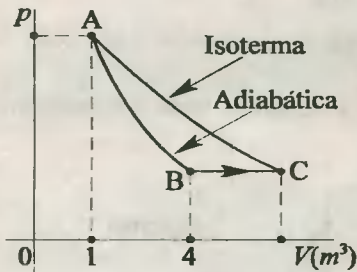


Fig. Prob. 28.23

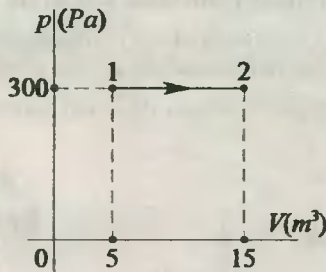


Fig. Prob. 28.25

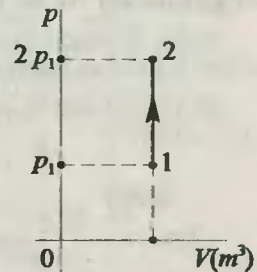


Fig. Prob. 28.26

28.27. En un recipiente hermético de capacidad $V = 0,25 \text{ m}^3$ hay aire a la presión $p = 1 \text{ Bar}$. ¿Qué presión se establecerá en dicho recipiente, si al aire se le comunica una cantidad de calor $Q = 70 \text{ kJ}$? Capacidad calorífica molar del aire a volumen constante es $C_v = 21 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$.

28.28. En un cilindro se encuentran 2 mol de aire bajo su émbolo. Calcular la temperatura inicial del gas, si al comunicar a éste la cantidad de calor $Q = 26,37 \text{ kJ}$ su volumen se hace 2,5 veces mayor isobáricamente. $C_{v,\text{aire}} = 21 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$.

28.29. Un gas experimenta una dilatación térmica pasando por los estados 1, 2 y 3. Si los estados 1 y 2 se encuentran en la misma isoterma, calcular la cantidad de calor recibido por el gas durante todo el proceso, si las energías internas de los estados 1 y 3 son $U_1 = pV$ y $U_3 = 2pV$.

28.30. Se tienen dos moles de un gas ideal a 27°C , y experimenta una expansión isotérmica hasta duplicar su volumen. Calcular el calor que fué necesario suministrar al gas durante dicho proceso ($\ln 2 \approx 0,69$).

28.31. Cuando un sistema es llevado del estado 1 al estado 3 siguiendo la trayectoria 1-2-3 se encuentra que $Q_a = 2 \text{ kJ}$. Siguiendo el recorrido 1-4-3, $Q_b = 1,2 \text{ kJ}$. Calcular:

- a) Cuánto vale el cambio de energía interna en el proceso 1-2-3?
 b) Si $W_{31} = -1400\text{ J}$ para el recorrido curvo de regreso 3-1, ¿Cuánto vale Q_c para este recorrido?
 c) Si $U_1 = 250\text{ J}$, ¿Cuánto vale U_3 ?
 d) Si $U_4 = 500\text{ J}$, ¿Cuánto vale Q_d para el proceso 1-4?

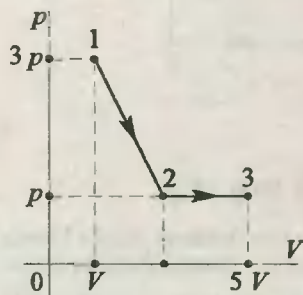


Fig. Prob. 28.29

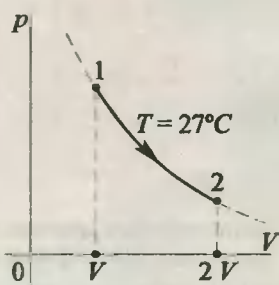


Fig. Prob. 28.30

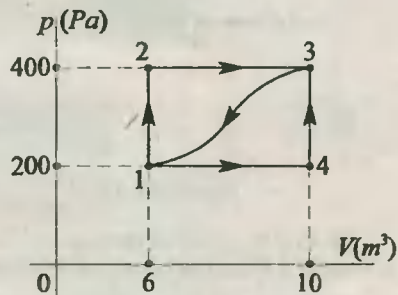


Fig. Prob. 28.31

Segunda ley de la Termodinámica - Ciclo de Carnot

28.32. Sabiendo que el ciclo mostrado es realizado por un gas ideal, y que en el proceso 1-2-3 recibe 1500 J de calor, ¿Cuál es su correspondiente eficiencia?

28.33. Calcular la eficiencia térmica del ciclo mostrado, si el gas es ideal y monoatómico ($\ln 2 \approx 0.69$).

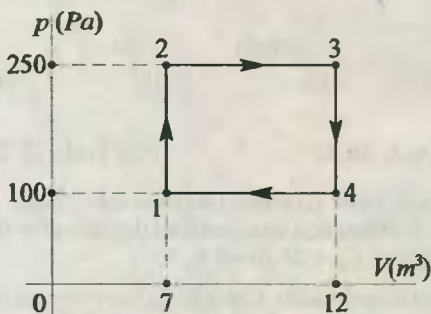


Fig. Prob. 28.32

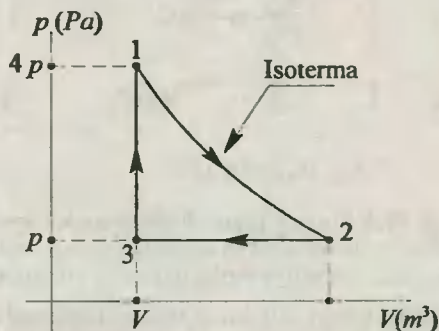


Fig. Prob. 28.33

28.34. Hallar la eficiencia del ciclo mostrado en la figura, Considerar que el gas es ideal y monoatómico, y además los procesos 2-3 y 4-1 son isotérmicos.

28.35. Sabiendo que el esquema mostrado corresponde a una máquina térmica de Carnot, se pide encontrar Q_A y W .

28.36. Una máquina térmica desarrolla el ciclo de Carnot, de modo que durante la expansión isotérmica absorbe 1800 kJ , y suministra un trabajo de 800 kJ en cada ciclo. Calcular la temperatura del foco frío, si la del foco caliente es 900 K .

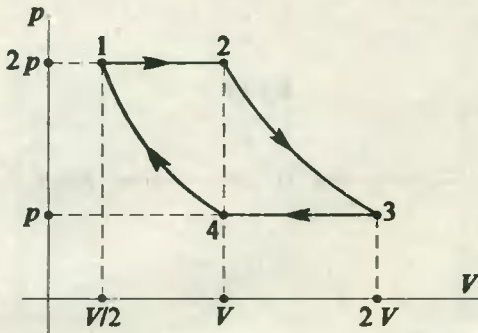


Fig. Prob. 28.34

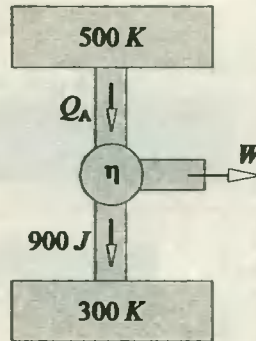


Fig. Prob. 28.35

28.37. Una máquina térmica de Carnot trabaja normalmente con un foco caliente de 127°C . ¿En cuantos grados *celsius* hay que disminuir la temperatura de su foco frío para que su eficiencia aumente en $\Delta\eta = 2\%$?

28.38. En el esquema mostrado, I y II son dos máquinas térmicas de Carnot, de modo que $\eta_I = 2\eta_{II}$. Para los datos que se dan, calcular T_x , W_I y W_{II} .

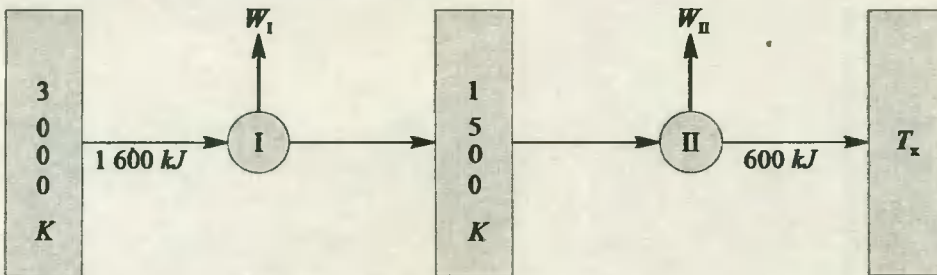


Fig. Prob. 28.38

28.39. Dos máquinas 1 y 2 funcionan siguiendo ciclos de Carnot, de modo que sus eficiencias estén en la relación de 2 a 3. Si la máquina 1 logra recibir 3 kJ de energía calorífica en cada ciclo, ¿Qué trabajo proporciona esta máquina al exterior?

28.40. El esquema muestra a una máquina refrigeradora que desarrolla el ciclo de Carnot. Si el motor del refrigerador proporciona un trabajo de 50 kJ en cada ciclo, calcular:

- La cantidad de calor que absorbe de los alimentos contenidos en él en cada ciclo.
- La cantidad de calor cedida al medio ambiente.

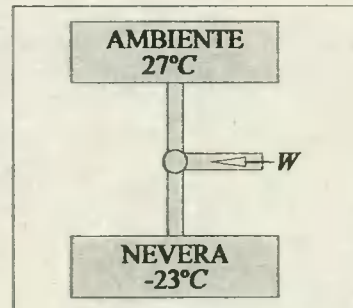


Fig. Prob. 28.40

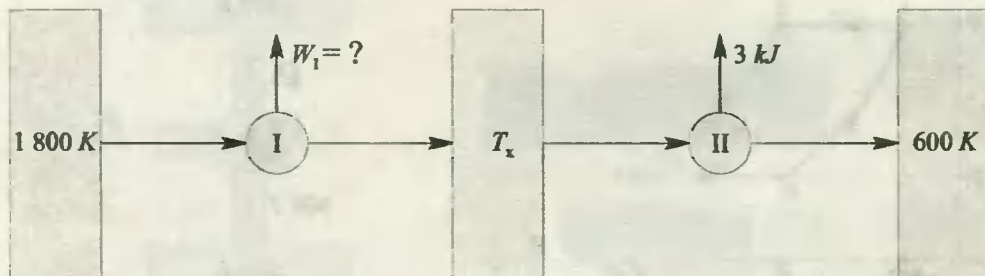


Fig. Prob. 28.39

28.41. La eficiencia de una máquina térmica de Carnot es 20%. Calcular el coeficiente de performance (COP) de esta máquina al operar como refrigerador.

29

Ley de Coulomb y Campo Eléctrico

29.1. Número atómico (Z)

Representa el número de electrones o protones de un átomo, y que son iguales si es eléctricamente neutro.

29.2. Masa atómica (A)

Representa el número de protones y neutrones de un átomo. En las sustancias mono-atómicas su valor concuerda con la masa molecular (M).

29.3. Carga eléctrica (q)

Es la propiedad de los cuerpos para atraerse o repelerse a causa de un exceso o defecto de electrones, llamándose **carga negativa** al primer caso, y **carga positiva** al segundo caso.

29.4. Unidad natural de carga eléctrica (e)

El electrón es una de las partículas elementales que posee la carga más pequeña que existe en la naturaleza. Su valor es $e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, y coincide en módulo con la del protón.

29.5. Carga de un cuerpo ionizado totalmente (Q)

$$Q = m \cdot N_A \cdot Z \cdot e / A \quad (29.1)$$

siendo m la masa del cuerpo, y N_A el número de Avogadro. En el SI la unidad de carga es el *coulomb* (C): $1 \text{ C} = 6,25 \cdot 10^{18} e$. También: $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$.

29.6. Cuantización de la carga eléctrica

Toda carga será siempre un número entero de veces de la que posee el electrón.

$$N = Q/e \quad (29.2)$$

siendo Q la carga del cuerpo, e la carga del electrón. N es siempre un número entero.

29.7. Principio de conservación de la carga eléctrica

"La carga eléctrica de un sistema se mantiene constante durante todos los procesos electrostáticos".

29.8. Ley cualitativa para la interacción de cuerpos cargados

"Dos cuerpos con cargas de diferentes signos se atraen, y con cargas del mismo signo se repelen".

Les de Coulomb y Campo Eléctrico



1. Introducción

2. Ley de Coulomb

3. Campo Eléctrico

4. Líneas de Campo Eléctrico

5. Potencial Eléctrico

6. Energía Potencial Eléctrica

7. Aplicaciones

8. Conclusión

($Z=47; A=108$), se han retirado completamente de sus órbitas. Si cada esferita tiene una masa $m=25\text{ g}$, ¿Con qué fuerza se repelen las esferitas cuando se colocan a una distancia de 3 m ?

29.3. Dos esferas conductoras muy pequeñas que poseen cargas de $+20\mu\text{C}$ y $-30\mu\text{C}$ se acercan hasta tocarse por cierto tiempo, y luego se separan hasta que su distancia es $0,1\text{ m}$. ¿Cuál es la fuerza de interacción entre ellas?

29.4. Dos cargas $q_1 = 16 \cdot 10^{-4}\text{ C}$ y $q_2 = 9 \cdot 10^{-4}\text{ C}$ se encuentran separadas una distancia $d = 7\text{ m}$. Se coloca una carga negativa $-q$ entre las dos y sobre la recta que las une. ¿A qué distancia de q_1 debe ser colocada la carga negativa para que permanezca en equilibrio?

29.5. En la figura se muestran dos cargas $q_1 = +50\mu\text{C}$ y $q_2 = -18\mu\text{C}$ separadas la distancia $d = 4\text{ m}$. Calcular la distancia x que define la posición de un punto P en el cual toda carga negativa se encontrará siempre en equilibrio.

29.6. Dos esferas del mismo peso e iguales cantidades de carga $q = 6 \cdot 10^{-5}\text{ C}$ se encuentran en equilibrio, según se muestra en la figura. Calcular el peso de las esferas y la tensión en la cuerda.

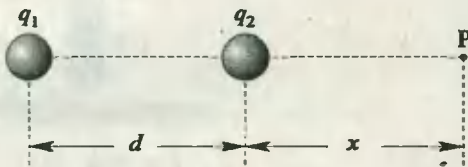


Fig. Prob. 29.5

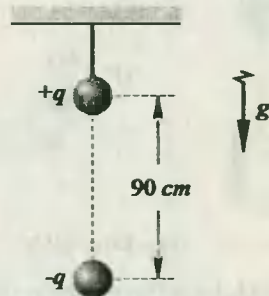


Fig. Prob. 29.6

29.7. Sabiendo que el sistema mostrado se encuentra en equilibrio, se pide calcular las tensiones en las cuerdas A y B. Se sabe que el peso de cada esfera es: $P_1 = 30\text{ N}$, y $P_2 = 40\text{ N}$, y las cargas son $q_1 = 20\mu\text{C}$ y $q_2 = 40\mu\text{C}$.

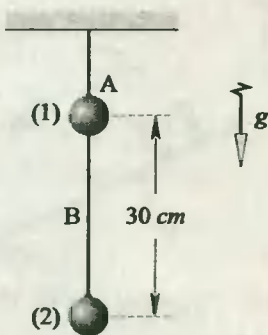


Fig. Prob. 29.7

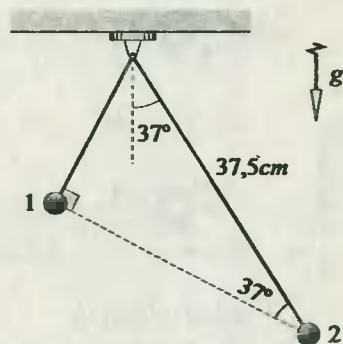


Fig. Prob. 29.8

29.8. Dos esferas con iguales cargas $q = 7 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ se encuentran suspendidas de dos cuerdas aislantes e inelásticas, de modo que al establecerse el equilibrio adoptan la posición mostrada en la figura. ¿Cuál es el peso de la esfera 1?

29.9. Un bloque pende de una polea de 40 N de peso y sin fricción, encontrándose en equilibrio gracias a la interacción entre las esferas 1 y 2. Si $q_1 = -30 \mu\text{C}$, y $q_2 = +20 \mu\text{C}$, calcular el peso del bloque P .

29.10. Dos esferas de pesos iguales $P = 120 \text{ N}$ se encuentran en equilibrio. Si ambos poseen cargas iguales pero de signos diferentes $q = 40 \mu\text{C}$, calcular la longitud natural del resorte cuya constante elástica es $k = 400 \text{ N/m}$, sabiendo que se encuentra estirado.

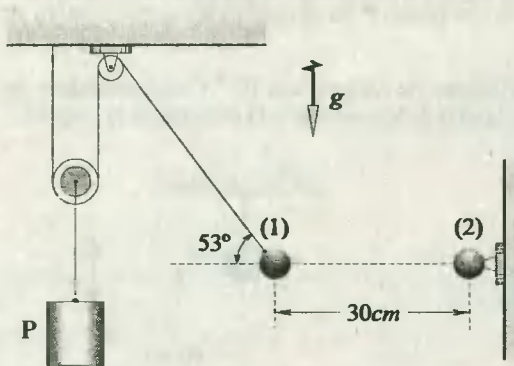


Fig. Prob. 29.9

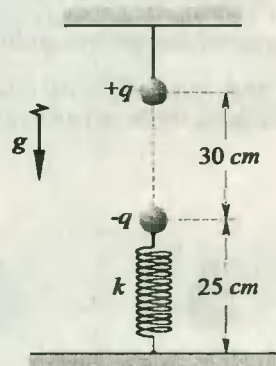


Fig. Prob. 29.10

29.11. En la figura, una varilla de material aislante y de peso despreciable presenta dos esferillas muy ligeras y cargadas eléctricamente. Si $q_1 = +27 \mu\text{C}$, y en el techo hay incrustada una tercera esfera con carga positiva. ¿Cuál es el valor y signo de la carga q_2 para que la varilla se mantenga en posición horizontal?

29.12. En el esquema se muestran dos bloques de pesos iguales a $P = 60 \text{ N}$, y cargados eléctricamente con $q_1 = 60 \mu\text{C}$ y $q_2 = 50 \mu\text{C}$. Calcular el mínimo valor que debe tener el coeficiente de fricción entre el bloque 1 y el plano inclinado, sin que llegue a resbalar.

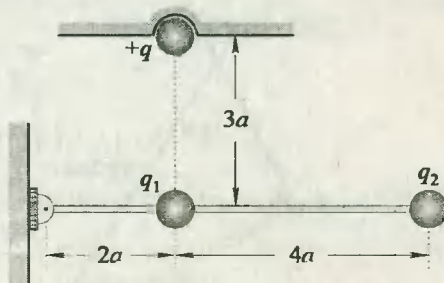


Fig. Prob. 29.11

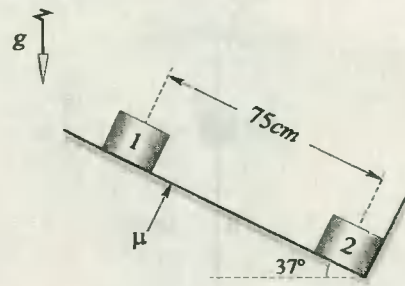


Fig. Prob. 29.12

29.13. Calcular la fuerza resultante que actúa sobre cada una de las esferas mostradas. $q_1 = +150 \mu\text{C}$, $q_2 = +40 \mu\text{C}$, $q_3 = -60 \mu\text{C}$.

29.14. Tres esferillas poseen cargas $q_1 = 40 \mu\text{C}$, $q_2 = 50 \mu\text{C}$, y $q_3 = 75 \mu\text{C}$. Si éstas están unidas por cuerdas aislantes e inelásticas, calcular la tensión que soporta cada una de ellas, si el sistema se encuentra en equilibrio.

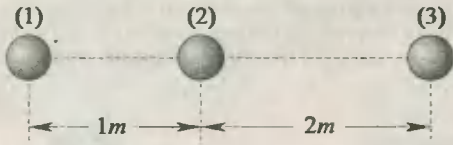


Fig. Prob. 29.13



Fig. Prob. 29.14

29.15. En una recta se encuentran dos cargas $q_1 = +9 \mu\text{C}$ y $q_2 = -4 \mu\text{C}$. ¿Qué carga positiva q_3 se debe colocar en el punto P de la recta que une a las cargas para que las dos primeras se encuentren en equilibrio?

29.16. Encontrar la fuerza eléctrica resultante que actúa sobre la esfera ubicada en B, si se sabe que $q_A = -125 \mu\text{C}$, $q_B = +40 \mu\text{C}$, $q_C = +75 \mu\text{C}$.

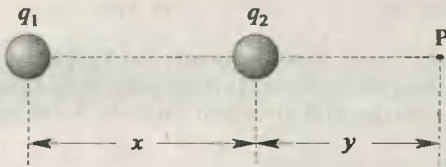


Fig. Prob. 29.15

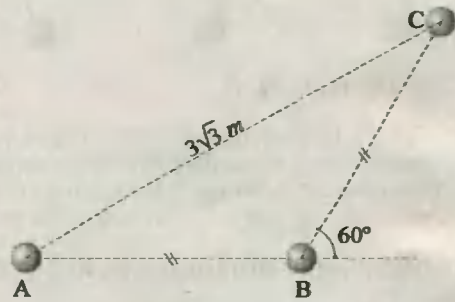


Fig. Prob. 29.16

29.17. En los vértices de un triángulo equilátero se han colocado cargas iguales $q = \sqrt{3} \mu\text{C}$. ¿De qué valor y signo debe ser la carga Q que ha de colocarse en el baricentro de dicho triángulo para que el sistema quede en equilibrio?

29.18. ¿De qué valor y signo debe ser la carga Q que debe colocarse en el centro de un cuadrado para que las cargas $q = 100 \mu\text{C}$, colocadas en cada uno de sus vértices permanezcan en equilibrio?

29.19. En los vértices de un hexágono regular se colocan cargas eléctricas iguales de magnitud $+q$. ¿Qué carga habrá que colocar en el centro de hexágono para que el sistema de cargas permanezca en equilibrio?

29.20. Sabiendo que el sistema mostrado en la figura se encuentra en equilibrio, calcular la medida del ángulo α , si $q_1 = q_2 = q_3 = 200 \mu\text{C}$. Se sabe también que el peso de las esferas son iguales a $P = 20\text{ N}$, y la longitud de las cuerdas es $l = 3\text{ m}$.

29.21. Cuatro esferillas de pesos iguales $P = 114,6\text{ N}$ y cargas iguales $q = 3 \cdot 10^{-4}\text{ C}$ se encuentran en los extremos de hilos inelásticos y aislantes de longitudes $L = 5\text{ m}$. los que a su vez se encuentran unidos en O. ¿Qué valor posee el ángulo θ que define la posición de equilibrio de cada esferilla? ($g = 10\text{ m/s}^2$; $\sqrt{2} \approx 1,41$).

29.22. Dos esferillas cargadas eléctricamente en el vacío se repelen con una fuerza $F_1 = 30\text{ N}$, y sumergidas en un líquido dieléctrico la repulsión se realiza con una fuerza $F_2 = 20\text{ N}$. ¿Cuál es la permitividad eléctrica relativa (ϵ_r) del líquido?

29.23. Dos esferas de volumen $V = 8 \cdot 10^{-6}\text{ m}^3$, en cuyos centros se encuentran cargas iguales q están unidas por una cuerda, de modo que una de ellas flota con medio volumen fuera de un líquido cuya densidad es $d = 1800\text{ kg/m}^3$ y permitividad eléctrica $\epsilon_r = 4$. Calcular la carga q necesaria y suficiente para que la tensión en la cuerda sea nula. $g = 10\text{ m/s}^2$.

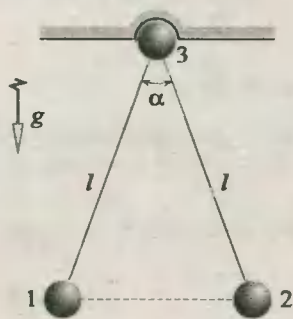


Fig. Prob. 29.20

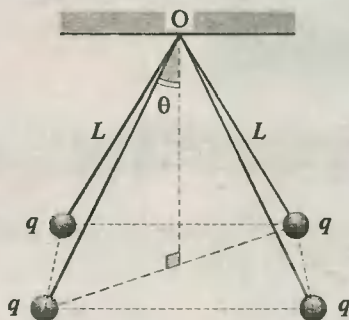


Fig. Prob. 29.21

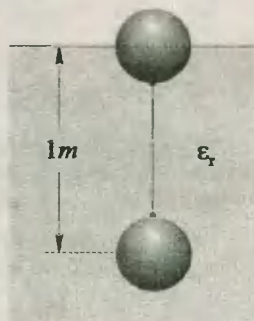


Fig. Prob. 29.23

29.24. Dos esferitas de masas, radios y cargas iguales, cuyas densidades son $d = 3\text{ g/cm}^3$, y que penden de hilos de igual longitud se sumergen en un dieléctrico líquido cuya densidad es $d_0 = 2\text{ g/cm}^3$. ¿Cuál debe ser la permitividad eléctrica ϵ_r del líquido para que el ángulo de separación de los hilos, tanto en el aire como en el dieléctrico, sea el mismo?

Aplicaciones dinámicas de la Ley de Coulomb

29.25. Calcular en qué relación se encuentran los módulos de las fuerzas de naturaleza eléctrica (F) y gravitatoria (P) entre dos electrones. Masa del electrón (en reposo) = $9,1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$.

29.26. Un electrón ($-e$) de masa m gira en torno del núcleo de un átomo de hidrógeno con un radio r . Determinar la velocidad angular (ω) del movimiento.

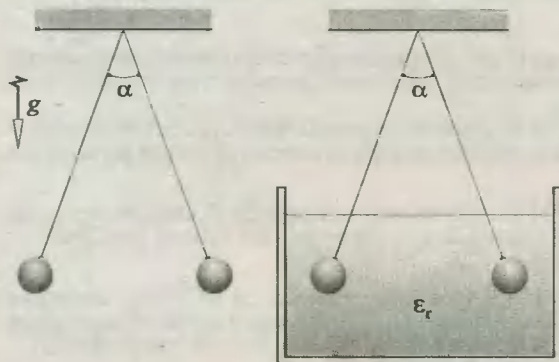


Fig. Prob. 29.24

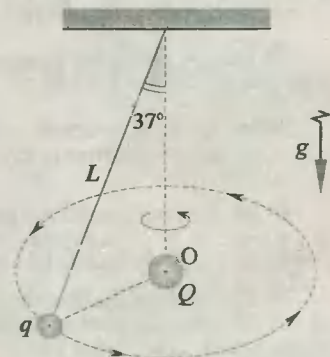


Fig. Prob. 29.27

29.27. Una esfera cuya masa es $m = 2 \text{ kg}$ posee una carga $q = 150 \mu\text{C}$, y se encuentra sostenida por una cuerda aislante de longitud $L = 5 \text{ m}$. Si al girar, el sistema se convierte en péndulo cónico ¿Cuál será la velocidad angular del movimiento, si en el centro O de la circunferencia permanece estática otra carga $Q = -900 \mu\text{C}$? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

29.28. Calcular la mínima velocidad (v) que debe tener la esferilla de masa m y carga q en la parte más alta de su trayectoria para que pueda dar vueltas en el plano vertical, si se sabe que en el extremo fijo de la cuerda que lo sostiene se encuentra otra esferilla de igual carga.

29.29. ¿Cuál es la mínima velocidad v_0 que se le debe imprimir a una esferilla de masa m y carga q para que pueda dar vueltas en el plano vertical, si ella está unida por una cuerda de longitud l a otra esferilla igualmente cargada, pero fija en el punto O ?

29.30. Dos esferas de igual masa m y carga q están unidas por una cuerda de longitud $L = 4 \text{ m}$, según se indica en la figura. Determinar el periodo de las pequeñas oscilaciones del sistema ($g \approx \pi^2 \text{ m/s}^2$).

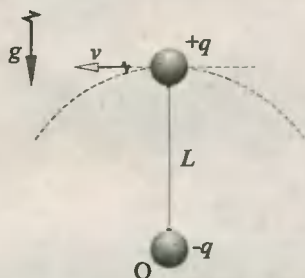


Fig. Prob. 29.28

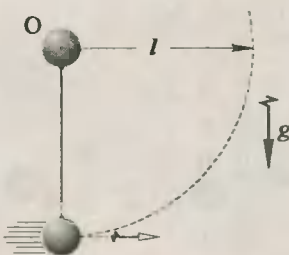


Fig. Prob. 29.29

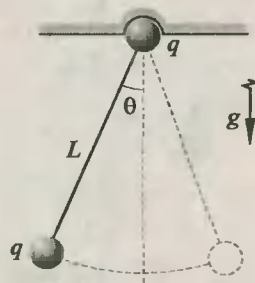


Fig. Prob. 29.30

29.31. Se tiene dos cargas iguales y fijas $Q = -100 \mu\text{C}$ separadas la distancia $2d = 2 \text{ m}$. Una tercera carga $q = +10 \mu\text{C}$ es colocada en el punto medio de la distancia que los separa, y realiza pequeñas oscilaciones x en dirección vertical. ¿Cuál es el periodo de dichas oscilaciones? Masa del oscilador (m) = 2 kg (Despreciar los efectos gravitatorios).

Campo eléctrico

29.32. Un campo eléctrico está creado por una carga puntual. ¿Cuál será la intensidad de este campo a 80 cm de la carga, si a 20 cm de la misma es igual a $4 \cdot 10^5 \text{ N/C}$?

29.33. La intensidad del campo creado por una carga puntual en un punto es $E_1 = 8 \cdot 10^3 \text{ N/C}$. Determinar la carga Q y la distancia x a la que se encuentra el punto señalado, si en otro punto 1 m más cerca a la carga el campo eléctrico es $E_2 = 1.8 \cdot 10^4 \text{ N/C}$.

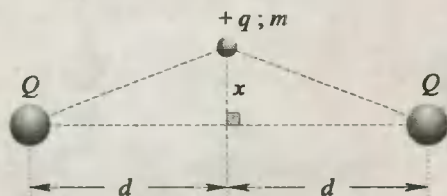


Fig. Prob. 29.31

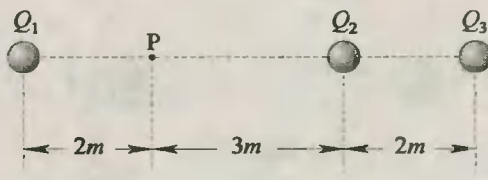


Fig. Prob. 29.35

29.34. Dos cargas $Q_1 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ y $Q_2 = 16 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ se encuentran a una distancia $d = 14 \text{ m}$. Determinar a qué distancia de Q_1 se encontrará un punto P colocado entre las cargas, en donde el campo eléctrico es nulo.

29.35. Encontrar el valor y signo de la carga Q_1 para que la intensidad de campo total en el punto P indicado sea nulo. Se sabe también que $Q_2 = -63 \mu\text{C}$, y $Q_3 = +200 \mu\text{C}$.

29.36. En la figura se muestran dos esferas cargadas y ubicadas en los vértices A y B de un triángulo ABC . Calcular el valor de q_B para que la intensidad del campo en C sea horizontal, si $AC = 3 \text{ m}$, $BC = 10 \text{ m}$, y $q_A = +3 \mu\text{C}$.

29.37. En el sistema de cargas mostrado, determinar el valor y signo de la carga ubicada en B para que la intensidad de campo resultante en C sea paralelo a la línea AB . La carga ubicada en A es $q_A = +64 \mu\text{C}$.

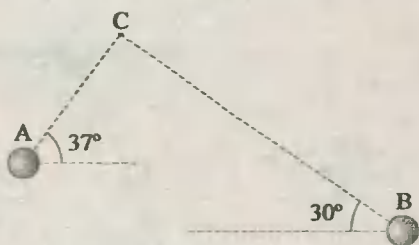


Fig. Prob. 29.36

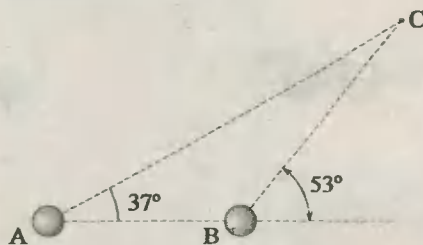


Fig. Prob. 29.37

29.38. Encontrar la intensidad del campo eléctrico en el centro del cuadrado, si sus lados miden a .

29.39. En los vértices de un rectángulo se han colocado cuatro cargas eléctricas, de modo que: $q_A = -5 \mu\text{C}$, $q_B = -8 \mu\text{C}$, $q_C = 2 \mu\text{C}$, y $q_D = -3 \mu\text{C}$. Si además $AB = 30\sqrt{3} \text{ cm}$, y $BC = 30 \text{ cm}$, calcular la intensidad del campo eléctrico en el punto de intersección de las diagonales.

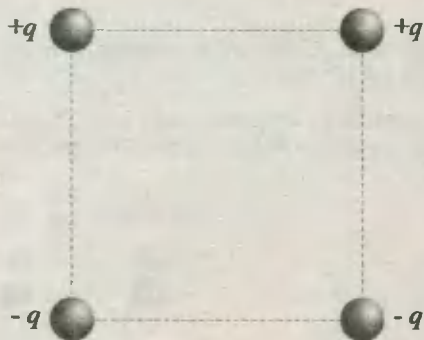


Fig. Prob. 29.38

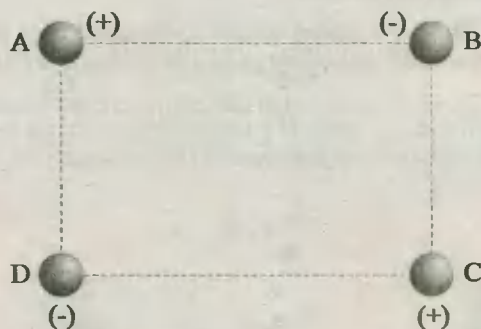


Fig. Prob. 29.39

29.40. En los vértices A , C y D de un cuadrado se han colocado tres cargas eléctricas. Calcular el valor de q_C para que la intensidad del campo eléctrico resultante en el vértice B sea colineal con AB .

29.41. Determinar el peso de la esferita metálica cuya carga es $q = -10 \mu\text{C}$, de tal modo que frente al campo eléctrico uniforme de intensidad $E = 4 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ mantenga la posición mostrada en la figura. $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$.

29.42. Para la figura mostrada, hallar la intensidad del campo eléctrico uniforme, para que la esfera de carga $q = 40 \mu\text{C}$ y peso $P = 24 \text{ N}$ se encuentre en equilibrio en la posición indicada.

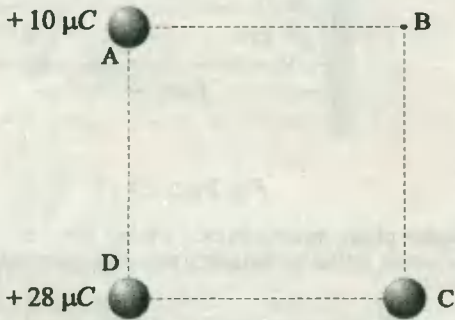


Fig. Prob. 29.40

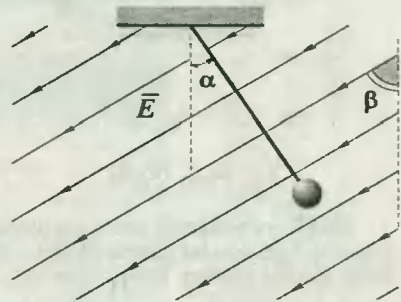


Fig. Prob. 29.41

29.43. El resorte mostrado presenta una elongación $x = 5 \text{ cm}$ debido al peso de una esferita y a la acción del campo eléctrico de intensidad es $E = 5 \cdot 10^5 \text{ N/C}$. Sabiendo además que la esferita suspendida tiene un peso $P = 200 \text{ N}$, y la constante de elasticidad del resorte es $k = 2000 \text{ N/m}$, calcular la carga de la esferita.

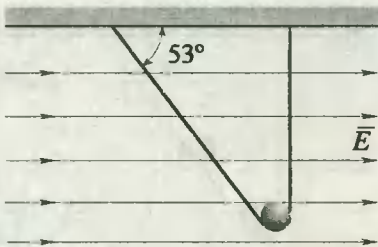


Fig. Prob. 29.42

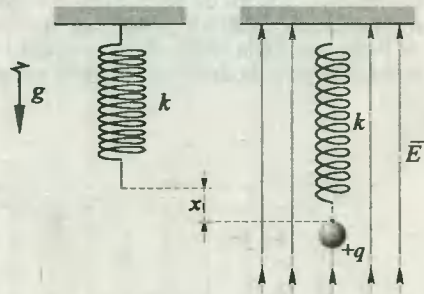


Fig. Prob. 29.43

29.44. Determinar la carga de la esferita B, si ambas esferitas se encuentran en equilibrio suspendidas por hilos aislantes y sometidas a la acción del campo eléctrico de intensidad $E = 6 \cdot 10^5 \text{ N/C}$.

29.45. En la figura se muestra una estructura compuesta de tres barras aislantes e imponderables, que en el vértice O se han conectado a una bisagra desde la cual pueden girar libremente. Si los pesos de cada una son $P_1 = 16 \text{ N}$ y $P_2 = 8 \text{ N}$, calcular cuál debe ser la intensidad del campo eléctrico uniforme E horizontal para que el sistema se encuentre en equilibrio. $q_1 = q_2 = 30 \mu\text{C}$.

29.46. Un cuerpo de masa $m = 2 \text{ kg}$ tiene una carga $q = 6 \cdot 10^{-5} \text{ C}$, y es lanzado dentro de un campo eléctrico horizontal y uniforme de intensidad $E = 2,5 \cdot 10^5 \text{ N/C}$. Calcular la aceleración que experimenta dicho cuerpo debido al campo eléctrico y gravitatorio. Considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$.

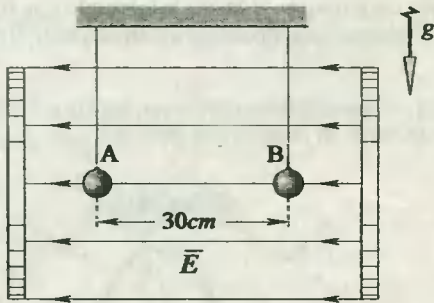


Fig. Prob. 29.44

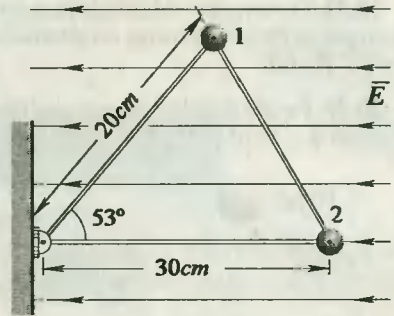


Fig. Prob. 29.45

29.47. La distancia entre las placas del condensador plano mostrado es $d = 6 \text{ cm}$. Si $q_1 = -1 \mu\text{C}$, y $q_2 = +2 \mu\text{C}$ son las cargas de dos esferillas de igual masa, hallar la distancia recorrida por cada uno hasta que se cruzan. Despreciar los efectos de gravedad.

29.48. Un electrón penetra en un condensador plano, paralelamente a sus láminas y a una distancia de 4 cm de la lámina cargada positivamente, y cuya longitud es 25 cm . Si la intensidad del campo en el condensador es $1,82 \cdot 10^6 \text{ N/C}$, y despreciando los efectos de la gravedad, calcular:

- a) Cuánto tiempo demora el electrón en caer a dicha lámina.
- b)Cuál es la velocidad mínima que debe tener el electrón al ingresar al condensador para que no llegue a caer sobre la lámina.

29.49. En la figura se muestra una esferilla de masa $m = 400 \text{ g}$ y carga $q = 20 \text{ mC}$, que es dejada caer libremente. Luego de descender $h = 20 \text{ m}$ ingresa a un campo eléctrico uniforme y horizontal de intensidad $E = 400 \text{ N/C}$. Sabiendo que la esferilla llega a tocar la placa negativa del condensador en su parte más baja luego de un tiempo $t = 3 \text{ s}$ de haber iniciado su caída, calcular la longitud L del condensador y la distancia d entre sus placas. $g = 10 \text{ m/s}^2$.

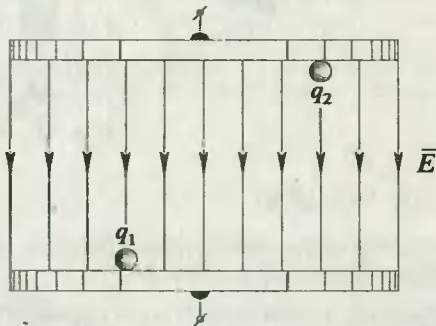


Fig. Prob. 29.47

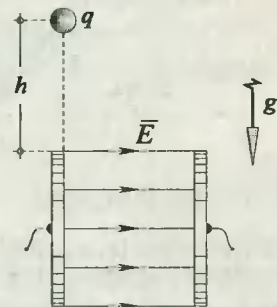


Fig. Prob. 29.49

29.50. En la figura se muestra un campo eléctrico uniforme de intensidad E . Una esferita de masa m y carga q gira en un plano vertical atada a una cuerda de longitud l . Determinar la velocidad horizontal que hay que comunicarle en el punto más alto A para que la tensión de la cuerda en B sea diez veces mayor que el peso de la esferita.

Preguntas para reflexionar

1. Se sabe de hechos experimentales que dos cargas del mismo signo se repelen. ¿Por qué sucede esto?

2. Se sabe que la carga eléctrica está cuantificada. Sobre esto, ¿Cuál de las siguientes proposiciones son equivalentes?

I) Existe una carga mínima no nula (la menor unidad de carga).

II) Toda carga eléctrica es múltiplo entero (positivo o negativo) de una carga eléctrica elemental.

III) La carga eléctrica no es una magnitud continua (que puede tomar los valores reales).

3. Decir que la carga eléctrica de un sistema se conserva equivale a decir:

I) Que es invariante.

II) Que la suma aritmética de las cargas positivas y negativas presentes en el sistema es constante.

III) Que la suma algebraica de las cargas es constante

IV) Que la suma de las cargas positivas (+) y la suma de las cargas negativas (-) son constantes por separado.

V) Que las interacciones en el interior del sistema no pueden hacer variar su carga total.

¿Cuáles son las proposiciones correctas?

4. La conservación de la carga es una propiedad tal que:

a) Si aparece una carga en un cierto punto del sistema, debe, simultáneamente aparecer una carga opuesta en otro punto del sistema.

b) Toda aparición o desaparición de cargas opuestas no puede tener lugar en un mismo punto del sistema.

¿Qué es lo verdadero y qué lo falso?

5. En ciertas revistas de divulgación científica se dice que un agujero negro es un cuerpo tan denso que todo lo que se acerca a menos de una cierta distancia de él es absorbido y desaparece para siempre. Si un electrón cae en un agujero negro, ¿Desaparece su carga eléctrica?

6. Una varilla de ambar cargada negativamente atrae un objeto liviano y suspendido. ¿Podemos concluir que el objeto está cargado positivamente?

30

Potencial Eléctrico

30.1. Concepto de potencial eléctrico

Propiedad escalar de cada punto del campo eléctrico, que indica la energía que adquiere la unidad de carga al ser colocada en dicho lugar.

30.2. Potencial absoluto (V)

$$V_P = W_{\infty \rightarrow P} / q \quad (30.1)$$

$$V_P = W_{P \rightarrow \infty} / q \quad (30.2)$$

siendo $W_{\infty \rightarrow P}$ el trabajo realizado por el agente externo para trasladar una carga puntual y positiva (q) desde el infinito hasta el punto **P**. Asimismo, $W_{P \rightarrow \infty}$ es el trabajo realizado por el campo eléctrico al trasladar la carga q desde **P** hasta el infinito. En el SI la unidad de potencial es el *voltio*: $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$.

30.3. Potencial absoluto creado por una carga puntual

$$V_P = k_e Q/d \quad (30.3)$$

siendo Q la carga que genera el campo, y d la distancia del punto (**P**) a la carga (Q). Al sustituir el valor de Q se debe incluir su signo.

30.4. Potencial absoluto de una esfera conductora y cargada

$$V_e = k_e Q/R \quad (30.4)$$

siendo Q la carga, y R el radio de la esfera. El interior de la esfera conductora es un volumen equipotencial.

30.5. Principio de superposición de potenciales

$$V_T = \sum_{i=1}^n V_i \quad (30.5)$$

30.6. Diferencia de potencial o tensión eléctrica

$$V_A - V_B = W_{B \rightarrow A} / q \quad (30.6)$$

$$V_A - V_B = W_{A \rightarrow B} / q \quad (30.7)$$

siendo $W_{B \rightarrow A}$ el trabajo que debe realizar un agente externo para trasladar la carga puntual y positiva desde **B** hasta **A**. También $W_{A \rightarrow B}$ es el trabajo realizado por el campo eléctrico para trasladar la carga (q) desde **A** hasta **B**. Se observa que cuando el traslado es a velocidad constante:

$$(W_{\text{ag. ext}})_{B \rightarrow A} = - (W_{\text{campo}})_{B \rightarrow A}$$

30.7. La fuerza eléctrica es conservativa

El trabajo que efectúa el campo eléctrico cuando una carga se traslada entre dos puntos A y B es siempre el mismo cualquiera que sea la trayectoria seguida. Además, el trabajo total del campo es nulo cuando la trayectoria descrita por la carga es una línea cerrada.

30.8. Energía potencial eléctrica de un sistema de cargas (U_{pe})

$$U_{pe} = W \quad (30.8)$$

$$U_{pe} = k_e q_1 q_2 / d_{12} \quad (30.9)$$

$$U_{pe} = k_e \sum_{i \neq j} q_i q_j / d_{ij} \quad (30.10)$$

siendo W el trabajo que debe realizar el agente externo para construir el sistema de cargas. La relación (30.9) nos da la energía potencial que almacenan dos cargas puntuales.

30.9. Relación entre la intensidad de campo (E) y el potencial (V)

a) Para una carga puntual: $V = Ed$ (30.11)

b) Para un campo uniforme: $V_A - V_B = Ed \dots (V_A > V_B)$ (30.12)

c) Para una esfera conductora: $V = ER$ (30.13)

En la relación (30.11) d es la distancia del punto a la carga, y en la relación (30.12) d representa la distancia entre los puntos A y B, medida paralelamente a las líneas de fuerza. En la relación (30.13) R es el radio de la esfera, y V el potencial de cualquier punto de la esfera.

30.10. Variación del potencial en un campo uniforme

$$\Delta V = -E \Delta x \quad (30.14)$$

$$V_2 - V_1 = -E(x_2 - x_1) \quad (30.15)$$

donde las distancias x_1 y x_2 se miden paralelamente a las líneas de fuerza. Todo plano perpendicular a las líneas de fuerza son superficies equipotenciales.

30.11. Blindaje electrostático

Todo cuerpo conductor cargado que toque el interior de una cavidad conductora se descargará por completo. Asimismo, todo cuerpo queda eléctricamente aislado si se le rodea con una malla o cascarón metálico; a esto se le llama también **jaula de Faraday**.

30.12. Inducción electrostática

Todo cuerpo cargado induce cargas de signo opuesto sobre cualquier otro cuerpo colocado cerca a él. Asimismo, si el cuerpo inducido es conductor, adquirirá un potencial inducido.

30.13. Potencial de Tierra

Todo cuerpo conectado a Tierra presenta un potencial de referencia igual a cero. Un cuerpo cargado y aislado de cualquier otra carga, al conectarse a Tierra queda descargado completamente.

30.14. Cargas imagenes

Denominamos así a aquellas cargas que tienen la propiedad de crear un campo idéntico al que produce una distribución de cargas dada, y cuya ubicación satisface generalmente las condiciones de simetría.

PROBLEMAS

Potencial eléctrico

30.1. El potencial eléctrico en un punto de un campo es 200 *voltios*. Calcular:

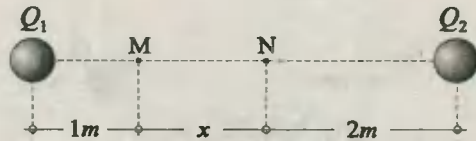
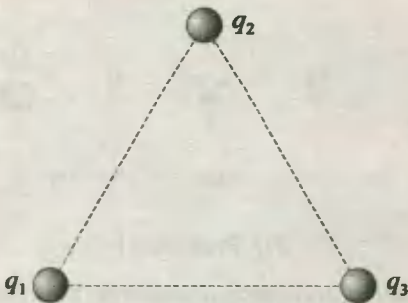
- El trabajo que deberá realizar un agente externo para colocar una carga de $5 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ en dicho lugar.
- El trabajo que realizó el campo eléctrico durante dicho proceso.

30.2. A 6 m de una carga $Q = 8 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ se ha colocado una segunda carga q , realizándose para el efecto 6 J de trabajo. ¿Cuál es el valor de q ?

30.3. El potencial creado por una carga puntual en un punto cercano a él es -6 kV . ¿Cuál es el valor y signo de la carga, si en otro punto 3 m más alejado el potencial es mayor en 2 kV ?

30.4. ¿Cuál debe ser el valor y signo de la carga q_3 para que el potencial absoluto en el centro del triángulo sea cero? Considerar que el triángulo es equilátero, y $q_1 = +5 \mu\text{C}$, $q_2 = -6 \mu\text{C}$.

30.5. En el esquema mostrado se tiene $Q_1 = +2 \mu\text{C}$ y $Q_2 = +5 \mu\text{C}$. Determinar la distancia x entre los puntos M y N, sabiendo que sus potenciales son iguales ($x \neq 0$).



30.6. Determinar el trabajo que será necesario realizar contra las fuerzas del campo, para colocar una carga $q = 200 \mu\text{C}$ en el vértice D del cuadrado de 3 m de lado, si se sabe que $q_A = +6 \mu\text{C}$, $q_B = -9\sqrt{2} \mu\text{C}$, $q_C = +12 \mu\text{C}$.

30.7. Se desea saber qué trabajo debe efectuarse contra las fuerzas de un campo para colocar una carga $q = 2 \mu\text{C}$ en el centro de un cubo de arista $a = 2\sqrt{3} \text{ m}$, sabiendo que en los vértices del cubo hay cargas iguales $Q = 50 \mu\text{C}$.

30.8. Sabiendo que el potencial en el punto X es 200 V , determinar el potencial en el punto Y, conociéndose además que al trasladar una carga de prueba $q = -4 \cdot 10^{-3}\text{ C}$ desde Y hasta X, el campo eléctrico realizó un trabajo de 2 J .

30.9. Sabiendo que la diferencia de potencial entre B y A es $V_B - V_A = 600\text{ V}$, calcular la distancia x ($Q = -5\mu\text{C}$).

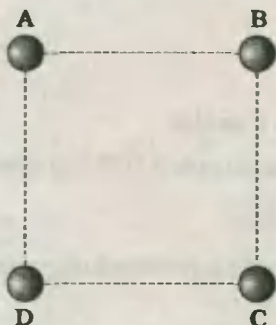


Fig. Prob. 30.6

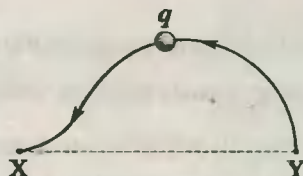


Fig. Prob. 30.8

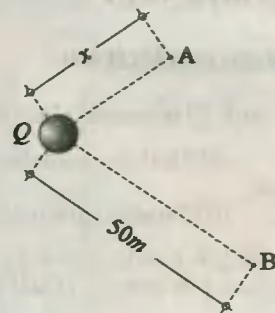


Fig. Prob. 30.9

30.10. Calcular el trabajo que debe realizar un agente externo para trasladar una carga de prueba $q = 5\mu\text{C}$ desde B hacia A, sabiendo que $Q = 80\mu\text{C}$ ($AB = 20\text{ cm}$).

30.11. En la figura mostrada, se sabe que $Q_1 = 60\mu\text{C}$, y $Q_2 = 30\mu\text{C}$. Calcular el trabajo que deberá realizar un agente externo para trasladar una carga de prueba $q = 50\mu\text{C}$ desde M hasta N.

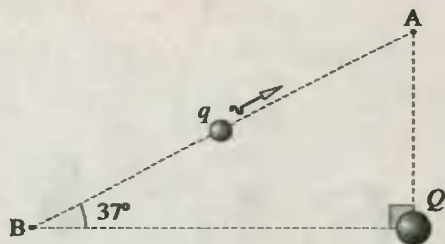


Fig. Prob. 30.10

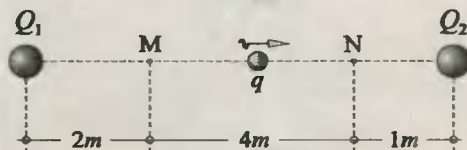


Fig. Prob. 30.11

30.12. Dos esferillas con cargas $Q_1 = +33\mu\text{C}$ y $Q_2 = +4\mu\text{C}$ se encuentran ubicadas en los extremos de un diámetro de 4 m de longitud. Calcular la distancia x que define la posición del punto B con relación al centro O de la semicircunferencia, sabiendo que cualquier carga que se traslade entre A y B no demanda ningún trabajo.

30.13. En el esquema se muestra un sistema de cargas en el cual $Q_1 = 3 \cdot 10^{-4}\text{ C}$, y $Q_2 = 120\mu\text{C}$. Calcular el trabajo que debe efectuar un agente externo para trasladar una carga $q = 50\mu\text{C}$ desde P hasta N según la trayectoria indicada.

Energía electrostática

30.14. Dos cargas $q_1 = 6 \cdot 10^{-5}\text{ C}$ y $q_2 = -4 \cdot 10^{-5}\text{ C}$ se encuentran a 6 m de distancia. ¿Cuánto trabajo deberá efectuar un agente externo para separarlos 2 m más?

30.15. Se desea colocar tres cargas $q_1 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ C}$, $q_2 = -2 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ y $q_3 = +6 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ en los vértices de un triángulo equilátero cuyos lados miden $0,9 \text{ m}$. ¿Cuánto trabajo deberá efectuar un agente externo durante todo el proceso?

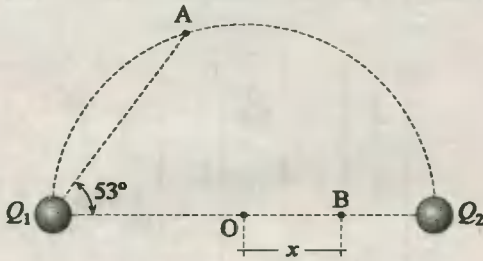


Fig. Prob. 30.12

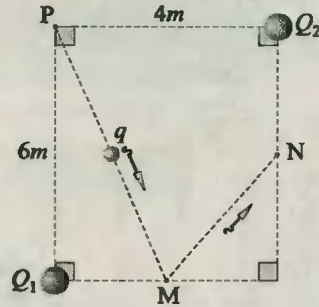


Fig. Prob. 30.13

30.16. ¿Cuánto trabajo deberá efectuar un agente externo para colocar cuatro cargas iguales $q = 50 \mu\text{C}$ en los vértices de un tetraedro regular de $0,5 \text{ m}$ de arista?

30.17. Encontrar la energía total que presenta una partícula de masa m y carga $-q$ que gira en una órbita de radio r alrededor de una carga fija $+q$ (Despreciar los efectos gravitatorios).

30.18. En el esquema se muestran dos cargas $Q = 6 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ y $q = -4 \cdot 10^{-5} \text{ C}$. Si la partícula de masa $m = 0,14 \text{ kg}$ y carga q se lanza desde el punto A con una velocidad $v_0 = 30 \text{ m/s}$, ¿Hasta qué distancia x como máximo logrará alejarse respecto a la partícula fija?

30.19. Una partícula de masa $m = 0,02 \text{ kg}$ y carga $q = -3 \cdot 10^{-4} \text{ C}$, inicialmente en reposo en A, es atraído por dos cargas $Q = 400 \mu\text{C}$. Calcular la velocidad de la partícula en el punto B, si $AB = 8 \text{ m}$. Despreciar los efectos gravitacionales.

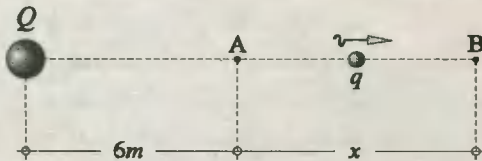


Fig. Prob. 30.18

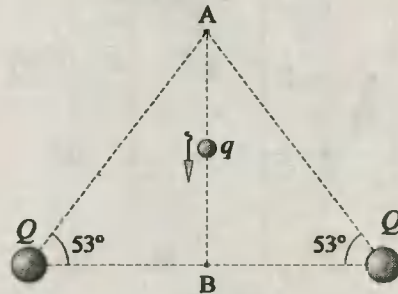


Fig. Prob. 30.19

30.20. Se define la energía potencial electrostática (U_{pe}) de una carga puntual (q) en un campo uniforme (E) a una distancia (d) medida paralelamente a las líneas de campo desde un plano de referencia hasta aquel que contiene a la carga, como el trabajo que debe realizar un agente externo para trasladarlo desde el plano de referencia hasta el plano que contiene a la carga. Determinar una relación matemática para calcular el valor de esta energía.

30.21. Una partícula de masa $m = 0,06 \text{ kg}$ y carga $q = 3 \mu\text{C}$ se encuentra inicialmente en reposo en A en un lugar donde la intensidad de campo es $E = 6 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ y $g = 10 \text{ m/s}^2$. Si el cuerpo es dejado

en libertad, ¿Con qué velocidad llegará al piso?. Considere que el nivel de referencia (cero) para la energía potencial se encuentra en el piso.

30.22. En un lugar donde $g = 10 \text{ m/s}^2$, una partícula de masa $m = 0,5 \text{ kg}$ es liberada en A, según como se muestra en la figura. Sabiendo además que posee una carga $q = 700 \mu\text{C}$, calcular con qué velocidad pasa por el punto B, siendo el material del cable que lo sostiene aislante, inelástico y de longitud $L = 6 \text{ m}$.

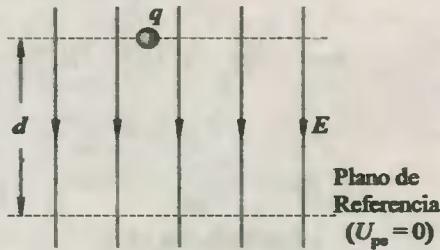


Fig. Prob. 30.20

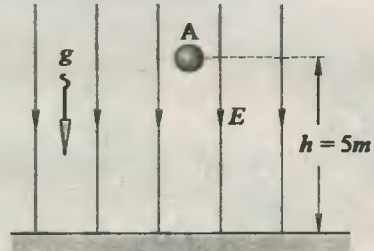


Fig. Prob. 30.21

Relación entre campo y potencial

30.23. Una carga puntual genera un campo eléctrico de intensidad $E = 40 \text{ N/C}$ en un punto P cercano a ella, y el potencial eléctrico en dicho lugar es $V = -360 \text{ V}$. Calcular el valor y signo de la carga, así como la distancia del punto a ésta.

30.24. En el esquema se muestran las líneas de fuerza de un campo eléctrico uniforme en el cual se han trazado tres planos (superficies) equipotenciales P, R y S. Sabiendo que $V_P = 90 \text{ V}$ y $V_S = 10 \text{ V}$, ¿Cuál es el potencial electrostático del plano R?.

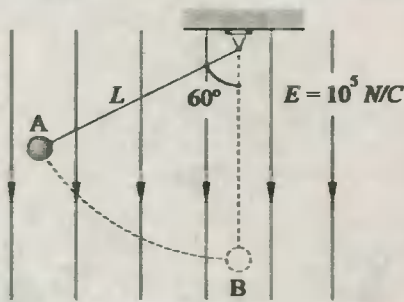


Fig. Prob. 30.22

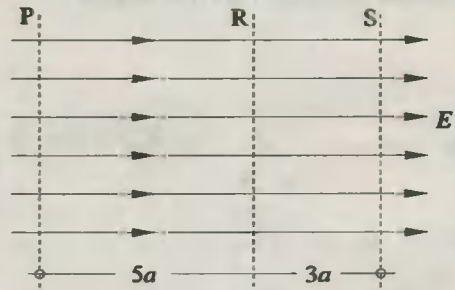


Fig. Prob. 30.24

30.25. Calcular el trabajo que debe efectuar un agente externo para trasladar una carga $q = 500 \mu\text{C}$ desde C hasta A según la trayectoria indicada, sabiendo además que la intensidad del campo eléctrico es $E = 2 \cdot 10^5 \text{ V/m}$.

30.26. Se tiene una región donde el campo eléctrico es uniforme e igual a $E = 8 \text{ i V/m}$. Hallar el potencial $V(x)$, si el plano $x_0 = 2 \text{ m}$ está al potencial $V_0 = 50 \text{ V}$.

30.27. El potencial eléctrico para un campo uniforme viene dado por la gráfica V -vs- x . Se desea conocer la intensidad del campo eléctrico.

30.28. Un péndulo metálico tiene una carga $q = -6 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ y una masa $m = 0,02 \text{ kg}$, y se encuentra entre dos placas cargadas y verticales, en las cuales el campo es uniforme. Sabiendo que la diferencia de potencial entre las placas es $V = 50 \text{ V}$ y están a la distancia $d = 20 \text{ cm}$. ¿Qué ángulo se desviará la cuerda que lo sostiene respecto a la vertical cuando llegue a su posición de equilibrio? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

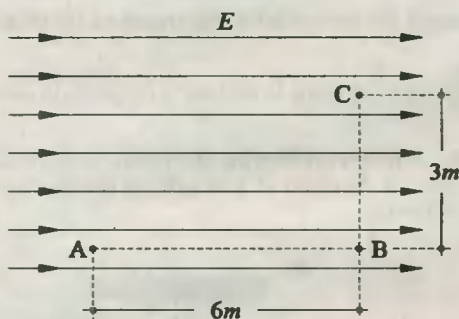


Fig. Prob. 30.25

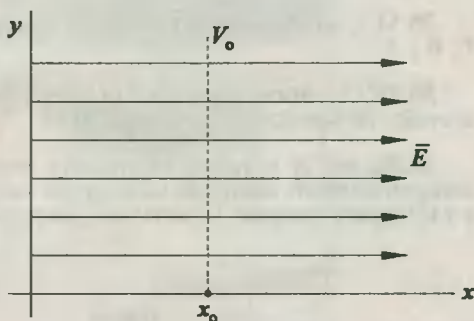


Fig. Prob. 30.26

30.29. Un electrón es liberado desde una placa cargada negativamente, y es empujado por el campo uniforme hasta llegar a la otra placa paralela a la anterior y cargada positivamente, las cuales presentan una tensión $V = 182 \text{ V}$. Se desea calcular la energía cinética que presenta el electrón al llegar a la placa positiva, y su correspondiente velocidad. ($e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$).

30.30. Una esfera conductora cargada presenta en su superficie un campo de intensidad $E = 8 \cdot 10^5 \text{ V/m}$ y un potencial interior $V = 2,4 \cdot 10^5 \text{ V}$. ¿Cuál es la carga de la esfera y su radio correspondiente?.

30.31. Para el problema anterior, construir un gráfico E - vs - d y V - vs - d , siendo d la distancia medida desde el centro de la esfera.

30.32. Dos gotas de agua de radios $r_1 = \sqrt[3]{12} \text{ cm}$ y $r_2 = \sqrt[3]{15} \text{ cm}$ se encuentran cargadas con cargas $Q_1 = +8 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ y $Q_2 = -2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. Calcular qué potencial tendrá la gota que se forma al unir las dos anteriores.

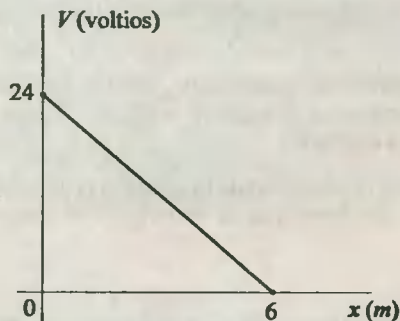


Fig. Prob. 30.27

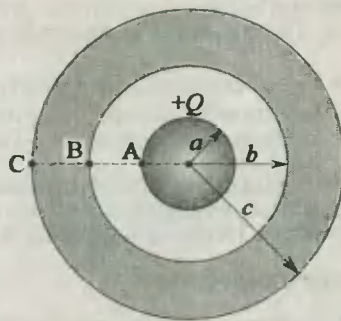


Fig. Prob. 30.33

Inducción electrostática

30.33. Se tiene una esfera conductora de radio $a = 0,3 \text{ m}$ cargada con $Q = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, la que se encuentra rodeada por un casquete esférico metálico descargado de radio interior $b = 0,6 \text{ m}$ y radio exterior $c = 0,9 \text{ m}$. Si ambos cuerpos son concéntricos, calcular la carga inducida en la superficie interior y exterior del casquete.

30.34. Con los datos del problema anterior, encontrar los potenciales eléctricos en los puntos C, B y A.

30.35. Construya una gráfica que describa el potencial (V) versus la distancia (x) medida desde el centro de la esfera del problema 30.33.

30.36. En el esquema se muestra una pequeña esfera conductora de radio r colocada concéntricamente dentro de un casquete esférico conductor de radio R . Las esferas llevan cargas q y Q respectivamente. Determinar su diferencia de potencial.



Fig. Prob. 30.36

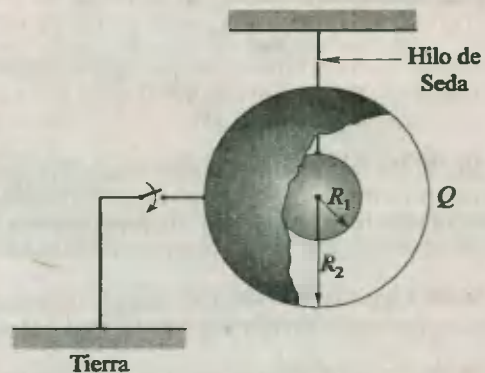


Fig. Prob. 30.39

30.37. En base al esquema del problema anterior, se sabe ahora que estando la esfera interior conectada a Tierra, el cascarón presenta un potencial $V_0 = 600 \text{ V}$. Se desea conocer las cargas de la esfera y del cascarón respectivamente, siendo $R = 3r = 60 \text{ cm}$.

30.38. Tres esferas concéntricas de radios r , $2r$ y $3r$ poseen respectivamente las cargas $+q$, $+2q$ y $-3q$. Determinar el potencial de cada esfera.

30.39. Una esfera metálica de radio $R_1 = 15 \text{ cm}$, cargada hasta el potencial $V_0 = 200 \text{ V}$, está rodeada por una envoltura esférica conductora descargada y concéntrica de radio $R_2 = 60 \text{ cm}$. ¿Cuál será el potencial de la esfera si conectamos a Tierra la envoltura exterior?.

30.40. Con los datos del problema anterior, ¿Cuál será el potencial de la esfera si la conectamos con la envoltura mediante un alambre conductor?. Suponer que la envoltura se encuentra desconectada de Tierra e inicialmente descargada.

Imágenes electrostáticas

30.41. Se tiene una esfera conductora descargada de radio $R = 30 \text{ cm}$ y una carga puntual $q = 5 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ colocada a la distancia $d = 3 \text{ m}$, medida desde su centro. ¿Cuál será el potencial eléctrico de la esfera?.

30.42. Con los datos del problema anterior, la esfera es conectada a Tierra. Calcular:

- La carga inducida en la esfera.
- La posición de la carga imagen de la esfera respecto a su centro.

30.43. Calcular la fuerza neta que ejerce la carga puntual sobre la esfera del problema 30.41.

30.44. Se tiene una partícula cargada con $q = 4 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ colocada a la distancia $h = 2 \text{ m}$ de una gran placa conductora y horizontal. ¿Cuál será la intensidad de la fuerza entre la partícula y la placa, estando ésta conectada a Tierra?

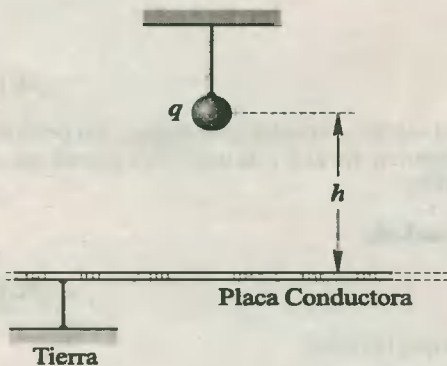


Fig. Prob. 30.44

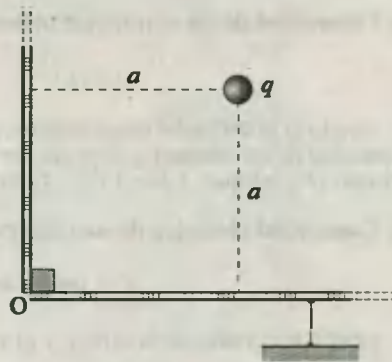


Fig. Prob. 30.45

30.46. Dos esferas conductoras de radios $R_1 = 60 \text{ cm}$ y $R_2 = 20 \text{ cm}$ tienen sus centros a la distancia $d = 3 \text{ m}$. Se sabe que sólo la primera de ellas se encuentra cargada con $Q = 43 \mu\text{C}$. ¿Cuáles serán las cargas finales de las esferas cuando se conectan por medio de un alambre conductor?

30.47. Con los datos del problema anterior, ¿Cuál será la distribución de cargas entre las esferas cuando ellas se pongan en contacto directamente?. Para este nuevo caso considerar que la carga inicial de la esfera 1 es $39 \mu\text{C}$.

31

Capacidad Eléctrica

31.1. Concepto de capacidad eléctrica

Propiedad de los conductores que define el comportamiento de su potencial eléctrico ante una ganancia o pérdida de carga eléctrica.

31.2. Capacidad de un conductor aislado

$$C = Q/V \quad (31.1)$$

siendo Q la carga del condensador, y V el potencial eléctrico absoluto del mismo. En general, la capacidad de un conductor depende de su forma geométrica. En el S.I. la unidad de capacidad es el *faradio* (F), tal que: $1 F = 1 C/V$. Además: $1 \mu F = 10^{-6} F$.

31.3. Capacidad eléctrica de una esfera conductora aislada

$$C = R/k_e = 4\pi\epsilon_0 R \quad (31.2)$$

siendo R el radio de la esfera, y el vacío el medio que la rodea.

31.4. Capacidad eléctrica de un condensador (capacidad mutua)

$$C = Q/V_{ab} \quad (31.3)$$

siendo Q el módulo de la carga de uno de los dos conductores, y V_{ab} la diferencia de potencial entre ellos. Un condensador normalmente cargado es aquel que presenta la misma cantidad de carga, pero de signos diferentes en cada conductor.

31.5. Capacidad eléctrica de un condensador de placas planas, paralelas y en vacío

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{1}{4\pi k_e} \frac{A}{d} \quad (31.4)$$

siendo A el área común de las placas, d la distancia entre ellas, y $k_e = 9 \cdot 10^9 m/F$ (constante de Coulomb en el vacío).

31.6. Capacidad de un condensador lleno de dieléctrico (aislante)

$$C_d = K C_0 \quad (31.5)$$

siendo C_0 la capacidad del condensador en el vacío, y K la constante del dieléctrico, conocido también como **permitividad relativa del medio** (ϵ_r), y cuyo valor es mayor o igual a 1. Para los cuerpos conductores $K = 0$.

31.7. Energía almacenada en un conductor aislado o en un condensador

$$U_{pe} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} Q^2 / C \tag{31.6}$$

siendo C la capacidad del conductor o condensador. La energía en un condensador aparece en forma de campo eléctrico.

31.8. Gráfico potencial eléctrico - vs - carga eléctrica

El área bajo la curva nos da el trabajo realizado por el agente externo para cargar el conductor o la energía almacenada en el conductor o condensador.

31.9. Asociación de condensadores

31.9.a) En serie: $q_T = q_1 = q_2 = \dots = q_n \tag{31.7}$

$$V_T = \sum_{i=1}^n V_i \tag{31.8}$$

$$C_{eq}^{-1} = \sum_{i=1}^n C_i^{-1} \tag{31.9}$$

(*) Dos en serie: $C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \tag{31.10}$

31.9.b) En paralelo: $q_T = \sum_{i=1}^n q_i \tag{31.11}$

$$V_T = V_1 = V_2 = \dots = V_n \tag{31.12}$$

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i \tag{31.13}$$

31.10. Cortocircuito de condensadores

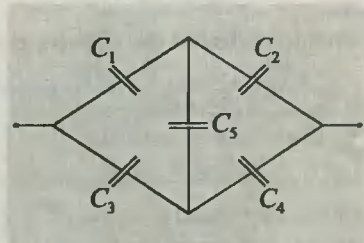
Son aquellos que presentan la unión de sus placas por otro conductor (por ejemplo, un alambre), lo cual impide que las cargas se almacenen en el condensador, provocando una diferencia de potencial igual a cero. En estas circunstancias, el condensador queda fuera de servicio.

31.11. Puente de Wheatstone

Es aquel sistema eléctrico en el cual participan cinco (5) condensadores, formando un cuadrilátero con una diagonal, verificándose que:

$$C_1 \cdot C_4 = C_2 \cdot C_3 \tag{31.14}$$

quedando el condensador C_5 fuera de servicio.



31.12. Teorema de la trayectoria

Cuando una carga de prueba (positiva) recorre una rama de un circuito capacitivo, se dice que

su potencial (V) experimenta un aumento al pasar de un polo negativo a otro positivo, y experimenta una disminución cuando pasa de un polo positivo a otro negativo.

31.13. Leyes de Kirchoff

$$31.13.a) \text{ Ley de los nudos: } \Sigma q = 0 \quad (31.15)$$

$$31.13.b) \text{ Ley de las mallas: } \Sigma V = 0 \quad (31.16)$$

donde q representa la carga de todas las placas conectadas a un mismo nudo, y V la diferencia de potencial entre los bornes de una batería o un condensador.

PROBLEMAS

Capacidad eléctrica

31.1. Un conductor aislado presenta un potencial de $30 V$. Si le agregamos una carga $\Delta q = 8 \mu C$, su potencial experimenta un aumento $\Delta V = 6 \text{ voltios}$. ¿Cuál era la carga inicial del conductor?.

31.2. El proceso de carga de un condensador se realiza según se indica en el gráfico, siendo q la carga, y V el potencial absoluto adquirido. En base a este gráfico se pide encontrar la capacidad del conductor y la energía almacenada cuando $V = 12 \text{ voltios}$.

31.3. La capacidad de una esfera conductora que posee una carga de $20 C$ y que se encuentra en el vacío es $1 F$. Calcular su radio y la energía que almacena.

31.4. Calcular la capacidad eléctrica de un sistema formado por dos esferas conductoras concéntricas de radios $R_1 = 3 m$ y $R_2 = 6 m$.

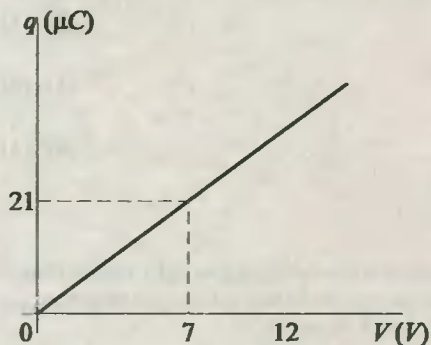


Fig. Prob. 31.2

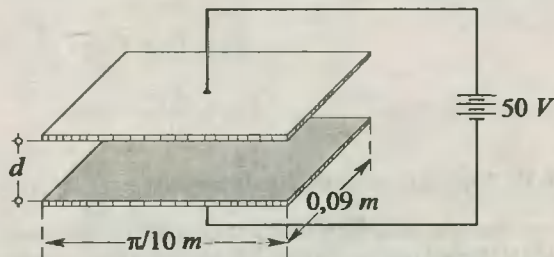


Fig. Prob. 31.5

Condensadores de placas planas y paralelas

31.5. Se tiene un condensador de placas planas, paralelas y rectangulares, colocadas horizontalmente a la distancia $d = 5 mm$. Al cerrar el interruptor, las placas se cargan generando un campo uniforme entre ellas. Se pide calcular:

- La intensidad del campo eléctrico E .
- La capacidad eléctrica del condensador.
- La carga en cada placa.
- La densidad superficial de carga en cada placa ($\sigma = Q/A$).

- e) La fuerza de atracción entre las placas.
- f) La energía almacenada.

31.6. Determinar cuál sería la nueva capacidad de un condensador de placas planas, rectangulares y paralelas, de capacidad $C_0 = 5 \mu F$, si se duplicaran sus dimensiones y la distancia entre sus placas se redujera a la mitad.

31.7. Un condensador plano de capacidad $C_0 = 5 \cdot 10^{-4} F$ tiene en sus placas cargas $Q = \pm 4 \mu C$. Calcular el trabajo que costaría duplicar la distancia entre ellas.

31.8. Una placa de un condensador plano de aire está sujeta fijamente. La otra pende de un resorte mal conductor de la electricidad, de constante elástica $k = 10^3 \pi N/m$. El área de las placas es $A = 0,06 m^2$. ¿Cuánto se alargará el resorte si al condensador se le comunica la carga $Q = 5 \cdot 10^{-5} C$? Despreciar el peso de las placas.

31.9. En una de las placas de un condensador plano de capacidad $C = 3 \mu F$ hay una carga $Q_1 = +2 \mu C$, y en la otra una carga $Q_2 = +8 \mu C$. Calcular la diferencia de potencial entre las placas del condensador.

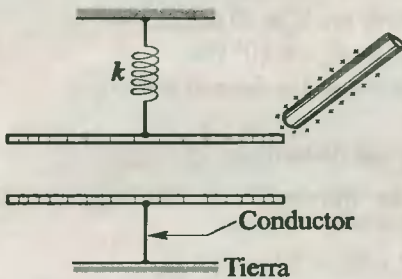


Fig. Prob. 31.8

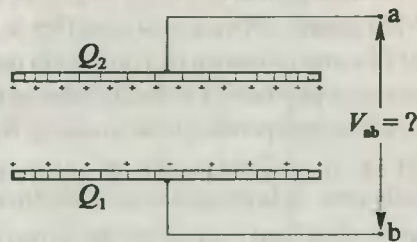


Fig. Prob. 31.9

31.10. En el espacio entre las armaduras de un condensador plano descargado se introduce una placa metálica que tiene la carga Q , de manera que entre dicha placa y las armaduras quedan los espacios d_1 y d_2 . Las áreas de la placa y de las armaduras del condensador son idénticas e iguales a A . Determinar la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador.

31.11. En un condensador plano una armadura tiene la carga $Q_1 = +6 \mu C$, y la otra la carga $Q_2 = +20 \mu C$. Dentro del condensador, y paralela a las armaduras, se coloca una placa metálica sin carga. ¿Qué carga se inducirá en las superficies superior e inferior de la placa?

Condensadores con dieléctricos

31.12. Se tiene un condensador de placas planas y paralelas de capacidad $C_0 = 5 \mu F$, siendo el voltaje de la fuente que lo alimenta $V = 20 voltios$. Si ahora introducimos un dieléctrico de constante $K = 3$, que llena completamente el espacio entre las placas, calcular:

- a) La nueva capacidad (C_d) del condensador.
- b) La carga inicial (Q_0) y final (Q_d) en las placas.
- c) La energía inicial (U_0) y final (U_d) del condensador.
- d) El campo eléctrico neto final, si el campo en el vacío fué $E_0 = 2 \cdot 10^5 V/m$.
- e) El campo eléctrico (E_d) debido a las cargas finales (Q_d) de las placas.

- f) El campo eléctrico (E_1) creado por las cargas inducidas sobre el dieléctrico.
 g) Las cargas inducidas (Q_1) sobre las superficies del dieléctrico.

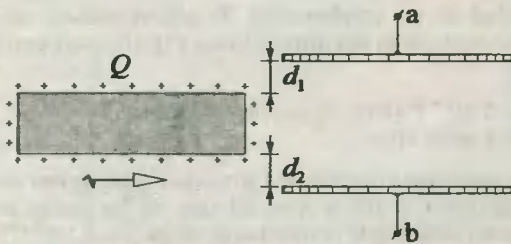


Fig. Prob. 31.10

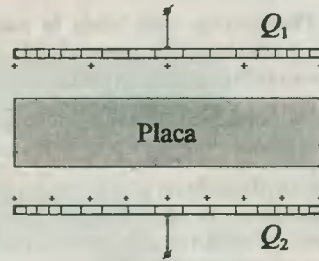


Fig. Prob. 31.11

31.13. Entre las placas del condensador mostrado en la figura se introduce un dieléctrico de constante $K = 2$, estando el condensador cargado con $Q_0 = 4 \mu\text{C}$, y desconectado de la batería. Si el dieléctrico llena completamente el espacio entre las placas, se pide calcular:

- El voltaje final (V_f) entre las placas, si inicialmente era $V_0 = 20$ voltios.
- El campo eléctrico neto final (E_f), si en el vacío era $E_0 = 6 \cdot 10^4 \text{ V/m}$.
- El campo eléctrico (E_1) producido por las cargas inducidas sobre el dieléctrico.
- La carga eléctrica inducida sobre el dieléctrico.
- La energía potencial electrostática en el vacío y con dieléctrico.

31.14. A un condensador de placas planas se ha introducido un dieléctrico que lo llena parcialmente. Si la constante del dieléctrico es $K = 3$, se pide calcular:

- La capacidad equivalente del sistema: $a = b = 2 \text{ m}$; $d_1 = 2d_2 = 11,8 \text{ cm}$.
- La carga en las armaduras y sobre el dieléctrico.
- El campo eléctrico en el espacio vacío y dentro del dieléctrico.

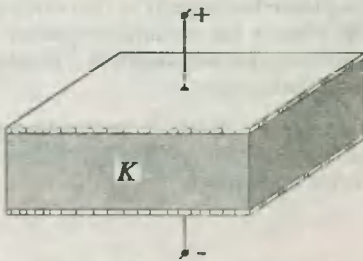


Fig. Prob. 13.13

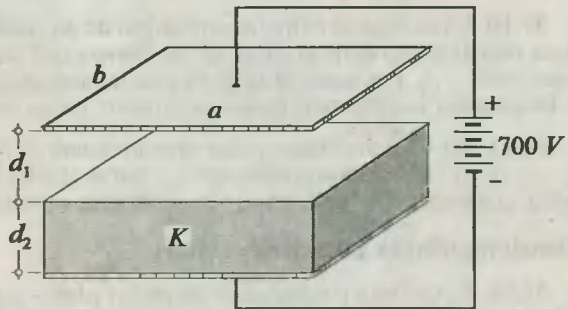


Fig. Prob. 13.14

31.15. Al condensador mostrado se le ha colocado un dieléctrico de constante $K = 2$, que lo llena parcialmente. Si la fuerza electromotriz de la batería es $\mathcal{E} = 50 \text{ V}$, calcular:

- La capacidad equivalente del sistema. $d = 5 \text{ mm}$; $b = 0,2 \text{ m}$; $l_1 = 3l_2 = 0,15 \text{ m}$.
- El campo eléctrico en el vacío y en el dieléctrico.
- Las cargas en las armaduras y en el dieléctrico.

31.16. Un condensador plano de aire cuyas placas están colocadas horizontalmente se llena hasta la mitad de un dieléctrico líquido de permitividad $\epsilon_r = 4$. ¿Qué parte del condensador hay que llenar con este mismo dieléctrico cuando las placas están colocadas verticalmente, para que en ambos casos la capacidad sea la misma?

31.17. En el espacio entre las armaduras del condensador plano de aire mostrado en la figura, en el cual se mantiene constante la diferencia de potencial, se introduce una lámina dieléctrica de permitividad $\epsilon_r = 3$. ¿Cómo varía la fuerza de interacción electrostática entre las armaduras del condensador?

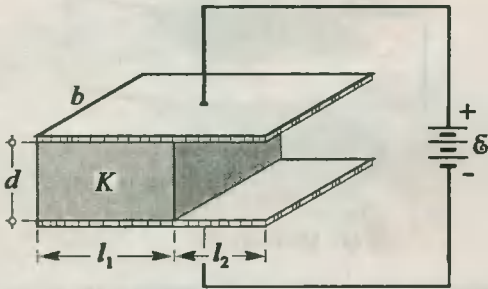


Fig. Prob. 31.15

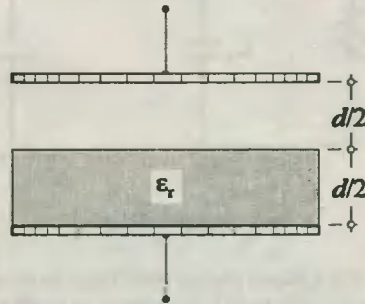


Fig. Prob. 31.17

31.18. En un condensador de placas paralelas se ponen dos dieléctricos, llenándolo como se ve en la figura. Si el condensador en el vacío tenía una capacidad $C_0 = 3 \mu F$, ¿Cuál será su capacidad con los dieléctricos dados, si $K_1 = 3$, y $K_2 = 5$?

31.19. En un condensador de placas paralelas se ponen dos dieléctricos, llenándolo según se ve en la figura. Si la capacidad del condensador en vacío es $C_0 = 80 \mu F$, ¿Cuál es la capacidad del condensador con los dieléctricos, si $K_1 = 3$, y $K_2 = 5$?

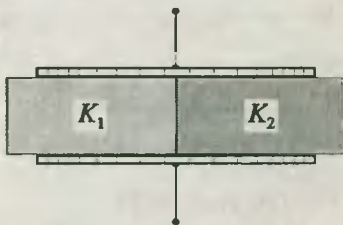


Fig. Prob. 31.18

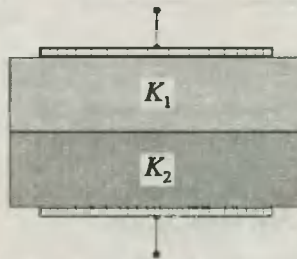


Fig. Prob. 31.19

Asociación de condensadores

31.20. Un condensador de capacidad $C_1 = 6 \mu F$ se carga de una batería de fuerza electromotriz $\mathcal{E} = 5 V$. A continuación se desconecta de la batería y se conecta a otro condensador descargado de capacidad $C_2 = 4 \mu F$. Calcular la carga final que tendrán cada uno de los condensadores, y además comparar las energías inicial y final del sistema.

31.21. A partir de la instalación final del problema anterior se hace un nuevo circuito, de modo que ahora se unen la placa cargada positivamente de uno de los condensadores con la placa cargada negativamente del otro. Calcular las cargas finales de los condensadores.

31.22. Cuatro placas metálicas iguales se encuentran en el aire a iguales distancias d una de otra. El área de cada una de las placas es igual a A . Determinar la capacidad de este condensador complejo.

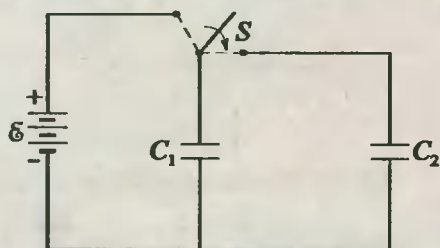


Fig. Prob. 31.20

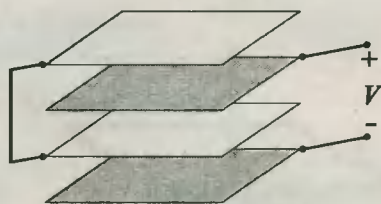


Fig. Prob. 31.22

31.23. Cuatro placas metálicas iguales se encuentran en el aire a distancias iguales d una de otra. El área de cada una de las placas es igual a A . Las placas extremas están unidas entre sí, y las centrales conectadas a una batería de fuerza electromotriz \mathcal{E} . Hallar la capacidad del conjunto vista desde x e y .

31.24. Cuatro placas iguales de áreas A y separadas la misma distancia d . Se conectan entre sí las placas extremas e intermedia, y las placas b y a se unen a los terminales de una batería de fuerza electromotriz \mathcal{E} . Determinar la capacidad equivalente del sistema respecto a x e y .

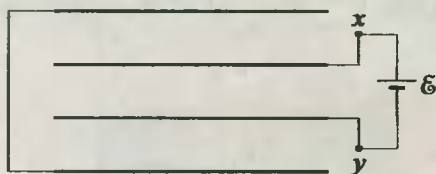


Fig. Prob. 31.23

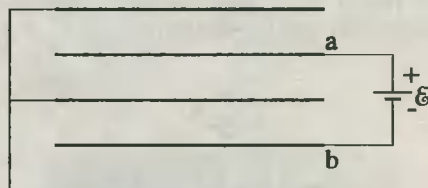


Fig. Prob. 31.24

31.25. Calcular la capacidad equivalente del circuito de condensadores mostrado, si todas las capacidades están expresadas en microfaradios.

31.26. Calcular la carga almacenada por el circuito de condensadores mostrado, si se sabe que $V_{xy} = 100 \text{ V}$, y además las capacidades están expresadas en *microfaradios*.

31.27. Para el acoplamiento de condensadores mostrado, determinar la carga que almacena el sistema, si se sabe que éste tiene una energía almacenada de $3 \cdot 10^{-2} \text{ J}$. Todas las capacidades están expresadas en *microfaradios*.

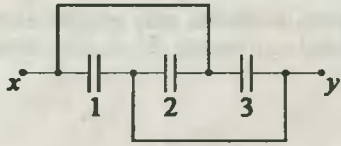


Fig. Prob. 31.25

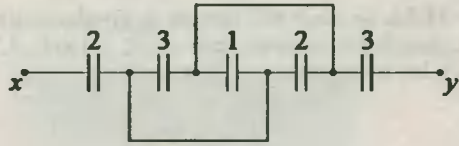


Fig. Prob. 31.26

31.28. Calcular la capacidad equivalente del sistema de condensadores mostrado entre x e y, si $C = 12 \mu F$.

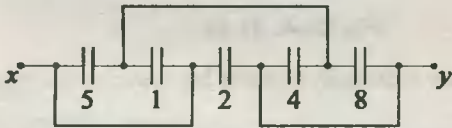


Fig. Prob. 31.27

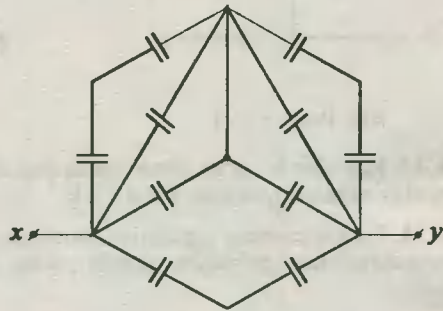


Fig. Prob. 31.28

31.29. En las aristas del tetraedro mostrado en la figura se han instalado condensadores cuyas capacidades están expresadas en *microfaradios*. Calcular la capacidad equivalente entre x e y.

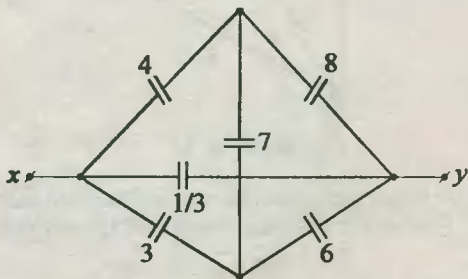


Fig. Prob. 31.29

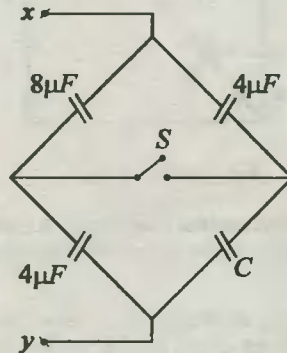


Fig. Prob. 31.30

31.30. En el circuito mostrado se sabe que la capacidad total del sistema no varía cuando se cierra el interruptor S. Calcular la capacidad del condensador C.

31.31. Para el circuito mostrado, calcular la capacidad del condensador C para que la capacidad equivalente vista desde a y b sea igual a la de dicho condensador.

31.32. Se tiene una batería de condensadores con un número de células muy grande, en el cual la capacidad de cada uno es $C = (\sqrt{2} + 1)\mu F$. ¿Cuál es la capacidad equivalente del circuito capacitivo entre los bornes de ingreso x e y ?

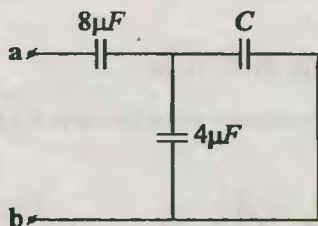


Fig. Prob. 31.31



Fig. Prob. 31.32

31.33. Calcular la carga almacenada por el circuito mostrado, si todas las capacidades están expresadas en microfaradios, y $\mathcal{E} = 12 V$.

31.34. Para el circuito capacitivo mostrado en la figura, en el cual $\mathcal{E} = 10 V$, calcular la carga eléctrica almacenada por dicho circuito, si las capacidades están expresadas en *microfaradios*.

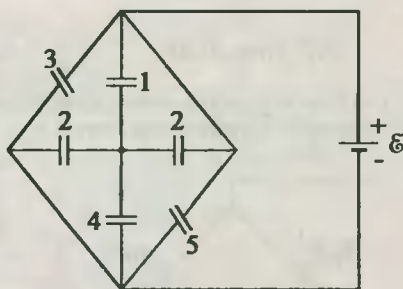


Fig. Prob. 31.33

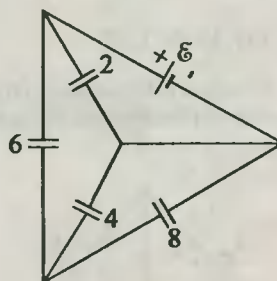


Fig. Prob. 31.34

31.35. En el circuito mostrado, se sabe que la carga almacenada por el circuito es $24\mu C$. Si además las capacidades están expresadas en microfaradios, ¿Cuál es el valor de la fuerza electromotriz de la batería (\mathcal{E})?

31.36. Para el circuito mostrado, calcular la carga almacenada por el conjunto de condensadores. Se sabe también que $\mathcal{E} = 12 V$, y las capacidades están dadas en μF .

31.37. En el circuito mostrado, $\mathcal{E} = 12 V$, y las capacidades de los condensadores están expresadas en μF . ¿Cuál es la carga que almacenan los condensadores en conjunto?

31.38. Calcular el valor de la fuerza electromotriz \mathcal{E} de la batería para que la carga almacenada por el circuito sea $96\mu C$. Todas las capacidades están expresadas en μF .

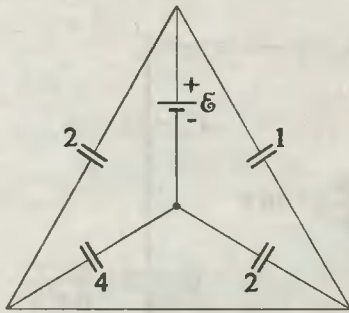


Fig. Prob. 31.35

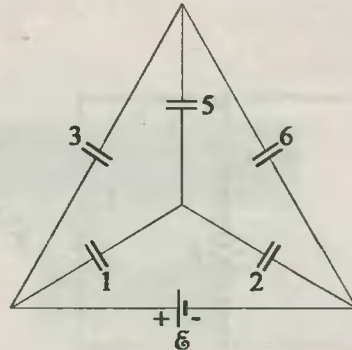


Fig. Prob. 31.36

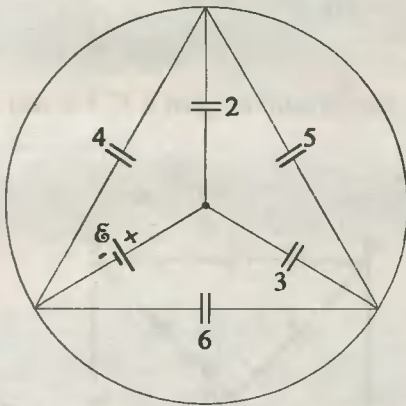


Fig. Prob. 31.37

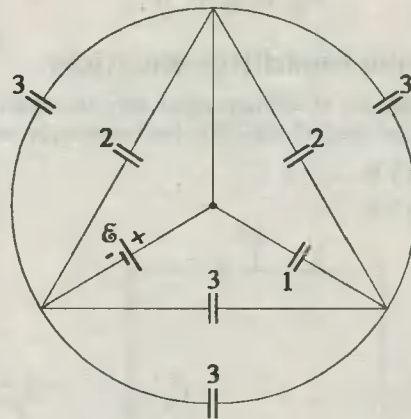


Fig. Prob. 31.38

31.39. En el circuito mostrado, los condensadores en vacío presentan las capacidades $C_1 = 8 \mu F$ y $C_2 = 5 \mu F$. Si ahora se introduce un dieléctrico de constante $K = 4$ en el condensador indicado, ¿en cuánto cambia la carga eléctrica de cada condensador? ($\varepsilon = 10 \text{ V}$).

31.40. Dos condensadores de capacidades $C_1 = 12 \mu F$ y $C_2 = 4 \mu F$ se conectan según se muestra en la figura. Se introduce una placa de dieléctrico entre las placas del condensador indicado, mientras la batería está conectada. Calcular:

- El cambio producido en la capacidad del sistema.
- La variación de la carga total del circuito.
- El incremento que experimenta la energía del circuito.

31.41. Dos condensadores de capacidades $C_1 = 3 \mu F$ y $C_2 = 2 \mu F$ se encuentran acoplados de modo que los bornes x e y presentan una diferencia de potencial $V_{xy} = 12 \text{ V}$. Se introduce una placa dieléctrica de constante $K = 3$ en el condensador C_2 . ¿Cuáles serán las cargas finalmente establecidas en los condensadores?. Considere que los condensadores están desconectados de la fuente.

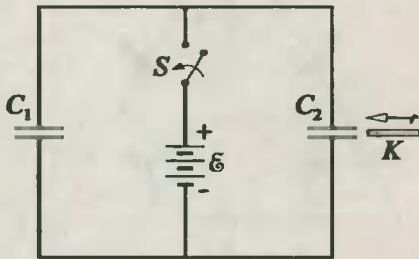


Fig. Prob. 31.39

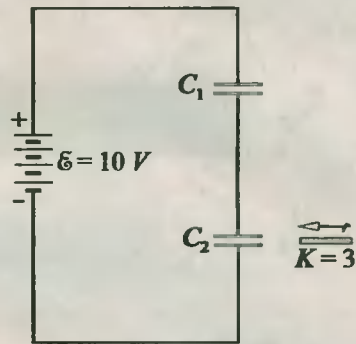


Fig. Prob. 31.40

Circuitos capacitivos simétricos

31.42. En el circuito mostrado, la capacidad de cada condensador es igual a C . Calcular la capacidad equivalente entre los bornes que se indican:

- a) a y b.
- b) a y c.

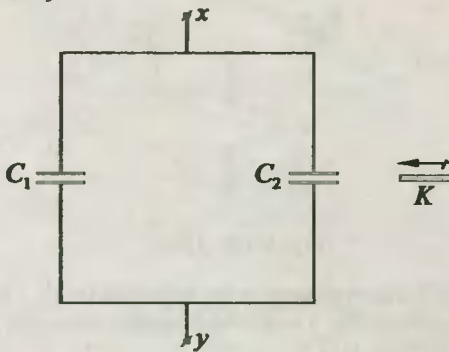


Fig. Prob. 31.41

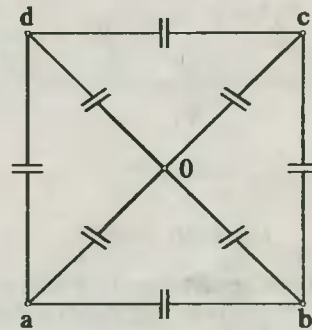


Fig. Prob. 31.42

31.43. Para el circuito de condensadores mostrado, la capacidad de cada condensador es igual a C . Determinar los mismos items pedidos en el problema anterior.

31.44. En las aristas de un cubo se han instalado condensadores de igual capacidad C . Determinar la capacidad equivalente entre los bornes que se indican:

- a) a y c.
- b) a y h.

31.45. Determinar la capacidad equivalente entre los bornes x e y en el circuito capacitivo mostrado.

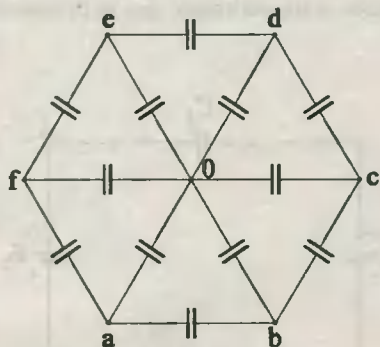


Fig. Prob. 31.43

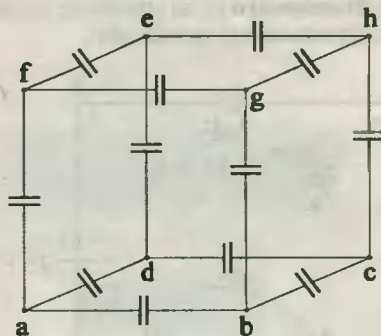


Fig. Prob. 31.44

Aplicaciones de las leyes de Kirchhoff

31.46. En la figura se muestra una sección de un circuito capacitivo en el cual $\mathcal{E}_1 = 18V$, $\mathcal{E}_2 = 10V$, $C = 5 \mu F$, y $q = 30 \mu C$. Calcular la diferencia de potencial entre los bornes A y B.

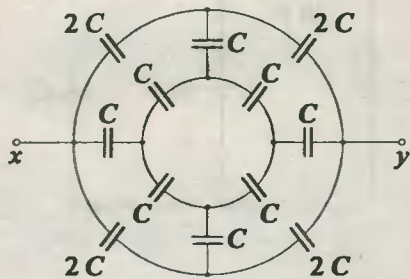


Fig. Prob. 31.45

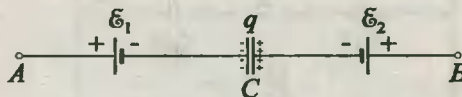


Fig. Prob. 31.46

31.47. Para el circuito mostrado en la figura, calcular la carga eléctrica en el condensador de capacidad igual a $3 \mu F$.

31.48. Para el circuito mostrado, se pide encontrar la diferencia de potencial entre A y B, si $\mathcal{E}_1 = 20V$, $\mathcal{E}_2 = 12V$, $C_1 = 4 \mu F$, y $C_2 = 12 \mu F$.

31.49. Calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B del circuito mostrado.

31.50. Calcular la carga que presenta cada condensador, si $C_1 = 3 \mu F$, y $C_2 = 5 \mu F$.

31.51. Para el circuito mostrado en la figura, calcular la carga eléctrica que presenta cada uno de los condensadores, si $C_1 = 4 \mu F$, $C_2 = C_3 = 2 \mu F$.

31.52. ¿Qué cantidad de carga pasará por el galvanómetro (G) en el circuito representado en la figura si se cierra el interruptor S?. $\mathcal{E} = 5V$, $C_1 = 4 \mu F$, $C_2 = 12 \mu F$.

Nota: El galvanómetro es un aparato de medida muy sensible, y supondremos que su presencia no altera el comportamiento del circuito.

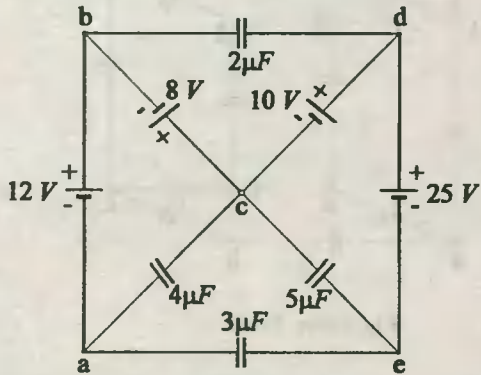


Fig. Prob. 31.47

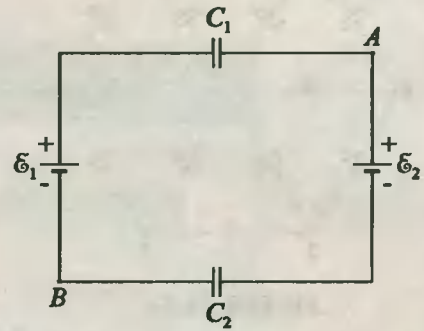


Fig. Prob. 31.48

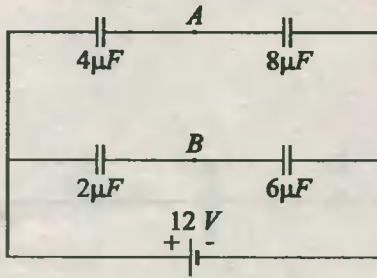


Fig. Prob. 31.49

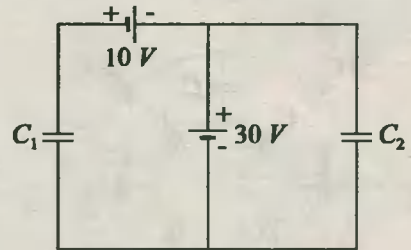


Fig. Prob. 31.50

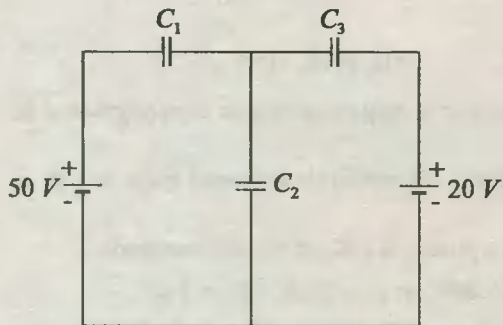


Fig. Prob. 31.51

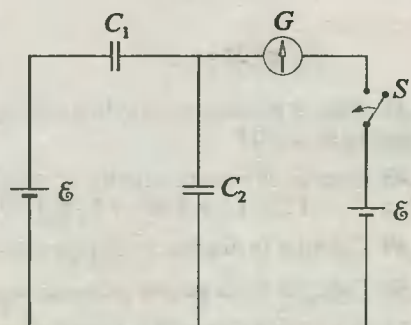


Fig. Prob. 31.52

Electrodinámica

Primera Parte

32.1. Corriente eléctrica

Es el fenómeno que consiste en el movimiento de partículas cargadas. En un conductor aislado la corriente es nula.

32.2. Sentido convencional de la corriente

Se supondrá que todos los portadores de carga son positivos, y dibujaremos las flechas de la corriente en el sentido en que se moverían tales cargas, el que a su vez concuerda con el sentido del campo eléctrico interior. Es un hecho experimental que el movimiento de una carga negativa es equivalente al de una carga positiva de igual magnitud en dirección opuesta.

32.3. Intensidad de corriente eléctrica (i)

$$i = q/t \quad (32.1)$$

siendo q la carga neta que pasa a través de la sección recta de un conductor en el tiempo t . En el S.I, q se expresa en *coulomb* (C), t en *segundos* (s), e , i en *amperes* (A).

32.4. Densidad de corriente (j)

$$j = i/A \quad (32.2)$$

siendo i la intensidad de corriente, y A el área de la sección recta del conductor. La dirección de j concuerda con el sentido convencional de la corriente.

32.5. Densidad electrónica (n)

$$n = NdN_A/A \quad (32.3)$$

donde n representa el número de electrones libres por unidad de volumen, N el número de electrones libres (de valencia o conducción) por cada átomo, d es la densidad del conductor, N_A el número de Avogadro y A la masa atómica del elemento.

32.6. Recorrido libre medio (λ)

$$\lambda = v\tau \quad (32.4)$$

siendo λ la distancia media que recorre un electrón entre dos choques consecutivos con una velocidad efectiva media v en el tiempo medio de choques τ . En este caso el conductor no experimenta ningún campo eléctrico.

32.7. Velocidad de arrastre o de desplazamiento (v_d)

$$v_d = j/ne \quad (32.5)$$

$$v_d = eE\lambda/mv \quad (32.6)$$

siendo v_d la velocidad neta de los electrones (e) de un conductor en presencia de un campo eléctrico (E). Además, m es la masa del electrón, y v la velocidad efectiva media.

32.8. Tiempo medio de choques (τ)

$$\tau = m/ne^2\rho \quad (32.7)$$

siendo m la masa de un electrón, n la densidad electrónica, e la carga de un electrón y ρ la resistividad del material a definirse en 32.11.

32.9. Fuerza electromotriz - fem (\mathcal{E})

$$\mathcal{E} = W/q \quad (32.8)$$

donde \mathcal{E} representa la cantidad de energía eléctrica (W) que una fuente debe entregar a la unidad de carga (q) que la atraviesa desde el polo negativo hasta el polo positivo. Asimismo, si la fuente es ideal, el valor de \mathcal{E} concuerda con la diferencia de potencial existente entre los bornes de la fuente.

32.10. Asociación de fuentes

$$32.10.a) \text{ En serie: } \mathcal{E}_T = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i \quad (32.9)$$

$$32.10.b) \text{ En paralelo: } \mathcal{E}_T = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \dots = \mathcal{E}_n \quad (32.10)$$

32.11. Resistividad eléctrica (ρ)

$$\rho = E/j \quad (32.11)$$

siendo E la intensidad del campo eléctrico, y j la densidad de corriente.

32.12. Ley de Poulliet

$$R = \rho l/A \quad (32.12)$$

siendo R la resistencia del conductor, l su longitud, A el área de su sección recta, y ρ su resistividad eléctrica. En el SI la unidad de resistencia es el *ohmio* (Ω).

32.13. Coeficiente de temperatura de la resistencia (α_t)

$$\alpha_t = \frac{1}{T+t} \quad (32.13)$$

siendo α_t el cambio que experimenta la resistencia por cada unidad de resistencia y cada unidad de temperatura. Asimismo, t es la temperatura en $^{\circ}\text{C}$ a la que se mide el coeficiente, y T es la magnitud de la temperatura "cero inferido" del material a la cual presenta resistencia nula (**superconductividad**). Al reemplazar valores, T debe ir sin signo.

32.14. Variación de la resistencia eléctrica con la temperatura

$$R_{t_2} = R_{t_1} [1 + \alpha_{t_1} (t_2 - t_1)] \quad (32.14)$$

siendo R_{t_1} y R_{t_2} las resistencias del conductor a las temperaturas t_1 y t_2 (en °C), y α_{t_1} el coeficiente de temperatura de la resistencia medida a la temperatura t_1 .

32.15. Ley de Ohm

$$i = V_{ab}/R \quad (32.15)$$

siendo i la intensidad de corriente que se transporta desde **a** hacia **b**, entre los cuales existe una diferencia de potencial V_{ab} y una resistencia eléctrica R . La corriente ingresa siempre por el borne positivo (o de mayor potencial) de la resistencia.

32.16. Gráfico V - vs - i

Si el gráfico corresponde a un conductor, entonces la pendiente nos dá el valor de la resistencia.

32.17. Teorema de la trayectoria

Cuando una corriente eléctrica (i) recorre una rama de un circuito resistivo, se dice que su potencial (V) experimenta un aumento al pasar de un polo negativo a un polo positivo, y experimenta una disminución cuando pasa de un polo positivo a otro negativo.

$$V_a + \sum \mathcal{E} + \sum iR = V_b \quad (32.16)$$

32.18. Efecto Joule**32.18.a) Energía eléctrica**

$$W = Vit = i^2 R t = (V^2/R)t \quad (32.17)$$

32.18.b) Potencia eléctrica

$$Pot = Vi = i^2 R = V^2/R \quad (32.18)$$

siendo V la tensión en una fuente o resistencia (R). Asimismo, i es la intensidad de corriente, y t el tiempo de consumo.

32.19. Eficiencia o rendimiento (η)

$$\eta\% = \frac{\text{SALIDA}}{\text{ENTRADA}} \cdot 100 \quad (32.19)$$

PROBLEMAS**Corriente eléctrica**

32.1. Por un conductor metálico circulan electrones, de modo que a través de su sección recta pasan $2,5 \cdot 10^{20}$ electrones en un intervalo de tiempo de 40 s. ¿Cuál es la intensidad de la corriente que circula por el conductor?. $1 e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$.

32.2. A través de la sección recta (S) de un conductor pasan $5 \cdot 10^{20}$ electrones en un lapso de 4 s. Si el área de la sección es $S = 50 \text{ mm}^2$, calcular:

- a) La intensidad de la corriente y su sentido convencional.
 b) La densidad de corriente j , y su correspondiente dirección.

32.3. En un tubo fluorescente se transportan 25 C de iones positivos del extremo A hacia el extremo B. Simultáneamente se desplazan 15 C de iones negativos de B hacia A, todo ello durante un tiempo de 8 s . ¿Cuál es la intensidad de la corriente y su correspondiente sentido?

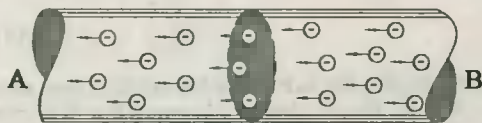


Fig. Prob. 32.2

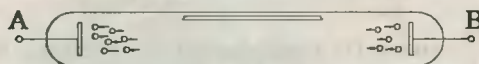


Fig. Prob. 32.3

32.4. Supongamos que un electrón es una carga concentrada de $-1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ que se desplaza en una órbita circular de radio $0,5\text{ \AA}$ en torno a un protón fijo bajo la fuerza de atracción de Coulomb. ¿Cuál es la corriente promedio que se debe al electrón en su órbita?

32.5. A través de un conductor AB pasa una corriente eléctrica de intensidad i variable, cuyo comportamiento se indica en el gráfico i - vs - t adjunto. Calcular:

- a) La carga q que pasó por la sección B entre los instantes $t = 4\text{ s}$ y $t = 8\text{ s}$.
 b) La carga q_0 que se almacenó en el conductor entre $t = 0\text{ s}$ y $t = 10\text{ s}$.

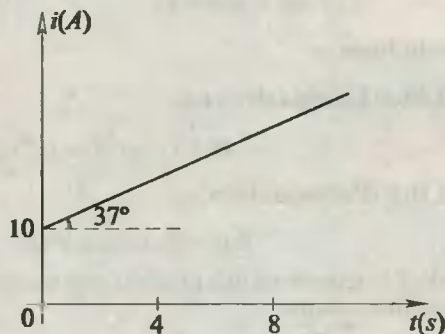


Fig. Prob. 32.5

32.6. La densidad del aluminio es $2,7\text{ g/cm}^3$, y su masa atómica es 27. Suponiendo que cada átomo tiene 3 electrones de conducción. Calcular:

- a) El número de electrones libres por cada cm^3 (densidad electrónica).
 b) Si una corriente de 10 mA fluye por un alambre de aluminio de 1 mm^2 de área transversal, calcular la velocidad de desplazamiento v_d .

32.7. Una corriente de intensidad $i = 6,28\text{ A}$ pasa a través de un conductor de cobre de 2 mm de diámetro. Si la densidad electrónica del cobre es $n = 2,3 \cdot 10^{29}\text{ e/m}^3$, calcular:

- a) La densidad de corriente j en el conductor.
 b) La velocidad de arrastre v_d de los electrones libres del conductor.

32.8. Considerando un conductor de cobre que posee $8,4 \cdot 10^{28}$ electrones libres por m^3 y resistividad $\rho_{Cu} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$, calcular:

- El tiempo medio τ transcurrido entre choques de electrones libres.
- La longitud λ de la trayectoria libre para los electrones libres, si la velocidad efectiva media de éstos es $1,6 \cdot 10^6$ m/s.

Fuerza electromotriz (*fem*)

32.9. Una pila doméstica de 1,5 V se conecta a una lámpara incandescente, la cual funciona con una corriente de 2 mA de intensidad. Calcular:

- Qué carga en coulombs pasó por ella durante los 5 primeros segundos que se mantuvo encendida.
- Cuánta energía irradió durante dicho tiempo.

32.10. Una batería logra mantener en forma permanente una corriente continua de intensidad $i = 2,5$ mA durante 4 h, al cabo de los cuales la batería agota toda su energía disponible, que es de 21,6 J. ¿Cuál era la fuerza electromotriz de la batería?

32.11. En la figura se muestran baterías de corriente continua. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los bornes P y Q?

32.12. Si cada batería posee una fuerza electromotriz $\mathcal{E} = 6$ V, ¿Cuál es la fem del sistema mostrado respecto a los bornes a - b?

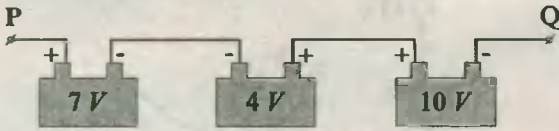


Fig. Prob. 32.11

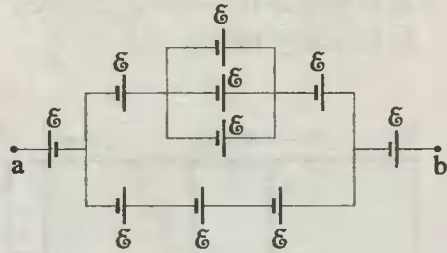


Fig. Prob. 32.12

Resistencia eléctrica

32.13. Entre los extremos de un alambre de 2 m de longitud se establece una diferencia de potencial igual a 17 V, observándose una densidad de corriente $j = 5 \cdot 10^8$ A/m². Calcular el coeficiente de resistividad del conductor.

32.14. Cierta alambre metálico de longitud L tiene una resistencia eléctrica de 80 Ω . Si se formara un alambre más grueso del mismo material con la misma cantidad de metal de longitud $L/2$, ¿Cuál será la resistencia eléctrica R_2 de este nuevo alambre?

32.15. Dos alambres de Nicrom de exactamente la misma composición tienen el mismo peso, pero uno de ellos es cinco veces más largo que el otro. Si la resistencia eléctrica del más corto es $R_1 = 5 \Omega$, ¿Cuál es la resistencia eléctrica del otro?

32.16. Se tienen 17,8 kg de un cable de cobre, y de 400 m de longitud. ¿Cuál será su resistencia, si su densidad es 8 900 kg/m³, y su resistividad es $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$?

32.17. Un cable **A** de 200 m de longitud tiene una masa de 10 kg y una resistencia eléctrica de $5\text{ k}\Omega$. Se desea saber qué longitud deberá tener un segundo conductor **B** de 90 kg de masa y de $10\text{ k}\Omega$ de resistencia eléctrica. También se sabe que $\rho_B = 2\rho_A$, y la densidad de **B** es el cuádruple de la densidad de **A**.

32.18. Una bobina lleva enrollado un conductor de cobre de $0,3\text{ mm}$ de diámetro, recubierto de seda. En cada capa se encuentran 125 conductores, uno al lado del otro, y el número de capas es 100 , teniendo la bobina conductora un diámetro exterior de 94 mm . ¿Cuál será la resistencia eléctrica de la bobina a 20°C ? $\rho_{\text{Cu}} = 1,7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$.

32.19. Un conductor de plata tiene una resistencia eléctrica de $200\ \Omega$ cuando su temperatura es 20°C . Si a dicha temperatura el coeficiente de temperatura de la resistencia es $0,0038\ ^\circ\text{C}^{-1}$, ¿Cuál es su resistencia eléctrica cuando su temperatura aumente hasta 120°C ?

32.20. Un conductor está hecho de un material cuyo cero absoluto inferido es -240°C . Si el valor de su resistencia es $300\ \Omega$ cuando su temperatura es 60°C , ¿Cuál será su resistencia cuando su temperatura aumente en 10°C ?

32.21. El coeficiente de temperatura de la resistencia de un conductor medido a 50°C es $1/3 \cdot 10^{-2}\ ^\circ\text{C}^{-1}$. Calcular dicho coeficiente medido a 0°C .

Ley de Ohm

32.22. Un conductor metálico que cumple con la ley de Ohm tiene una tensión (V) que varía con la intensidad de corriente (i), según se indica en el esquema adjunto. En base a este gráfico, calcular:

- El valor de la resistencia eléctrica.
- La tensión para $i = 10\text{ A}$.

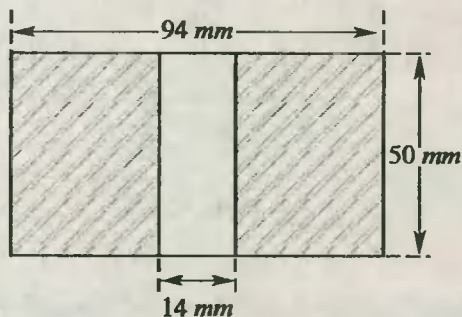


Fig. Prob. 32.18

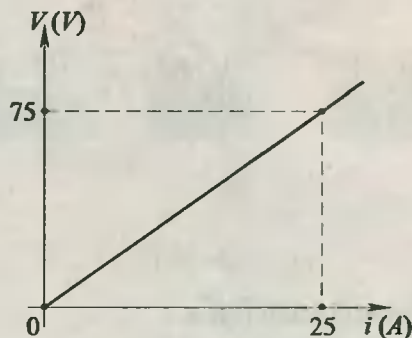


Fig. Prob. 32.22

32.23. El conductor mostrado presenta una diferencia de potencial entre **A** y **B** igual a 40 V . Calcular la diferencia de potencial entre **A** y **M**, y entre **M** y **N**.

32.24. Una batería de 12 V suministra energía a una lámpara cuya resistencia es $24\ \Omega$. Calcular el transporte de carga eléctrica por la batería durante 1 minuto .

32.25. Determinar el potencial del borne **a**, si el del borne **b** es 8 V , y además $i = 3\text{ A}$.

32.26. Por la rama mostrada en la figura circula una corriente de 2 A . Calcular $V_a - V_b$.

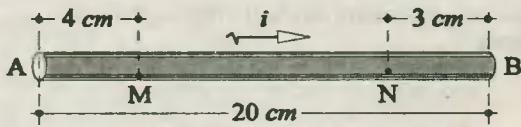


Fig. Prob. 32.23

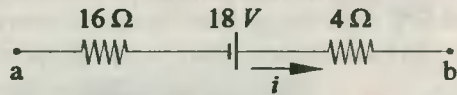


Fig. Prob. 32.25

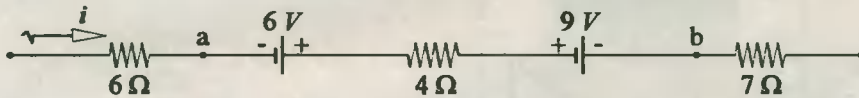


Fig. Prob. 32.26

32.27. Determinar el valor de la corriente i indicada en el circuito.

32.28. En el circuito mostrado, calcular la intensidad de corriente que pasa por $R = 6 \Omega$.

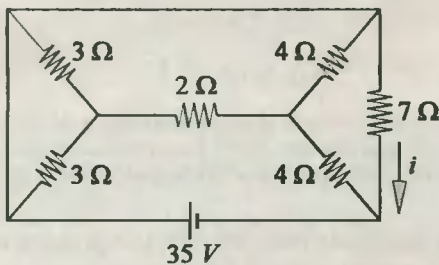


Fig. Prob. 32.27

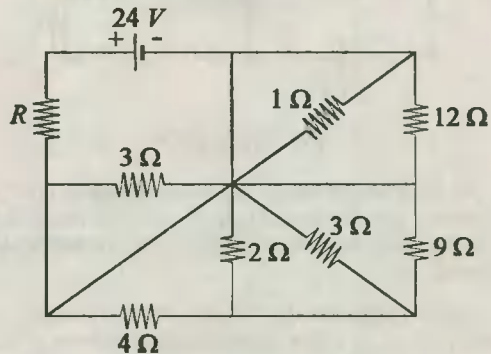


Fig. Prob. 32.28

32.29. Indicar el valor que tiene la corriente i indicada en el circuito.

Efecto Joule

32.30. Se tienen dos baterías de iguales características, que al conectarse en serie tienen una duración de 1 día. ¿Qué tiempo durarán si se les conecta en paralelo?. Suponer que en ambos casos se alimenta a la misma resistencia.

32.31. Una batería de 12 V dura 1 h cuando se le exige con una corriente de 2 A de intensidad. ¿Qué tiempo durará si se le utiliza con una resistencia de carga igual a 10 ohmios?.

32.32. Una resistencia de 5 Ω conectada a cierto voltaje disipa 120 cal/s. Hallar el calor que disipará una resistencia de 10 Ω en 1 s.

32.33. Un calentador de inmersión de 500 Ω que funciona con un voltaje de 220 V se coloca en

un depósito que contiene 2 l de agua a 20°C. Calcular:

a) Cuánto tiempo se requerirá para llevar el agua a la temperatura de ebullición, suponiendo que el 80% de la energía liberada es absorbida por el agua.

b) La resistencia eléctrica del calentador.

Nota: 1 kcal = 4 200 J.

32.34. Un bloque cúbico de hielo de 10 cm de arista se encuentra a la temperatura de -10°C. Un resistor de 150 Ω se encuentra instalado dentro del cubo. ¿Cuánto tiempo será necesario hacer funcionar al resistor para poner el agua (obtenida del hielo) a punto de hervir?. Considerar despreciable la capacidad calorífica del recipiente.

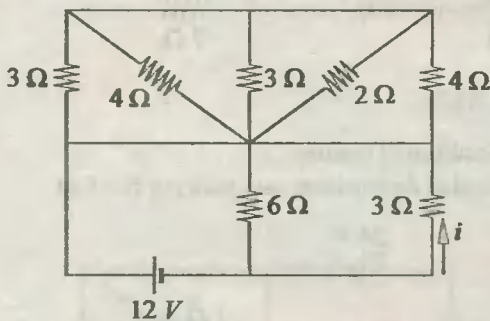


Fig. Prob. 32.29

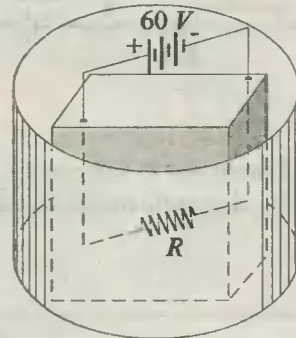


Fig. Prob. 32.34

32.35. Por dos líneas de transmisión de energía eléctrica se envía la misma potencia desde una estación a una distancia dada. Una de las líneas es de 1 kV, y la otra de 20 kV. Determinar la relación de las áreas de las dos secciones rectas de ambas líneas, sabiendo que las pérdidas caloríficas son las mismas.

32.36. Un motor de un ascensor alimentado con una tensión de 140 V absorbe 10 A al elevar una carga de 10³ kg a una velocidad de 6 m/min. Calcular el rendimiento del sistema.

32.37. Supongamos que sobre la pantalla de un tubo de televisión inciden 10¹⁶ electrones por segundo, y son acelerados a través de un voltaje suficientemente elevado para que alcancen una velocidad de magnitud de 10⁸ cm/s partiendo del reposo. ¿Cuántos watts se gastan en mantener este haz electrónico?. $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Electrodinámica

Segunda Parte

33.1. Acoplamiento de resistencias

33.1.a) En serie: $i_T = i_1 = i_2 = \dots = i_n$ (33.1)

$$V_T = \sum_{i=1}^n V_i$$
 (33.2)

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$
 (33.3)

33.1.b) En paralelo: $i_T = \sum_{i=1}^n i_n$ (33.4)

$$V_T = V_1 = V_2 = \dots = V_n$$
 (33.5)

$$R_{eq}^{-1} = \sum_{i=1}^n R_i^{-1}$$
 (33.6)

(*) Dos resistencias en paralelo: $R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ (33.7)

33.2. Leyes de Kirchhoff

33.2.a) Ley de los nudos: $\sum i_{llegan} = \sum i_{salen}$ (33.8)

33.2.b) Ley de las mallas: $\sum V = 0$ (33.9)

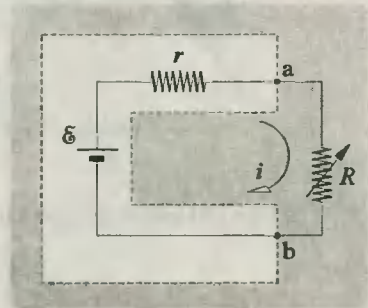
donde V representa la tensión en una resistencia o fuente de fuerza electromotriz.

33.3. Teorema de máxima potencia

Si R es una resistencia variable entre a - b , ésta entregará una potencia máxima cuando su valor sea igual a la resistencia comprendida entre dichos bornes, cortocircuitando todas las fuentes de tensión que hubieran en el circuito. En el esquema adjunto se verifica que:

$$Pot_{(R)} = \varepsilon^2 \frac{R}{(R+r)^2}$$
 (33.10)

la cual es máxima si y sólo si $R = r$.



33.4. Aparatos de medida

33.4.a) Amperímetro (A).- Sirve para medir el paso de una corriente, y se instala en serie con la rama. Si es ideal no tiene resistencia interna.

33.4.b) Voltímetro (V).- Sirve para medir la diferencia de potencial (tensión) entre dos puntos, y se instala en paralelo con el elemento o rama. Si es ideal su resistencia es infinita.

33.4.c) Ohmetro (Ω).- Sirve para medir la resistencia de un elemento, y se instala en serie. Se compone generalmente de una fuente de tensión, un galvanómetro y una resistencia conocida.

33.5. Cortocircuito de resistencias

Son aquellos que presentan la unión de sus bornes por otro conductor (alambre ideal), provocando una diferencia de potencial igual a cero entre las mismas, lo que a su vez impide que la corriente pase por la resistencia. En estas condiciones la resistencia queda fuera de servicio.

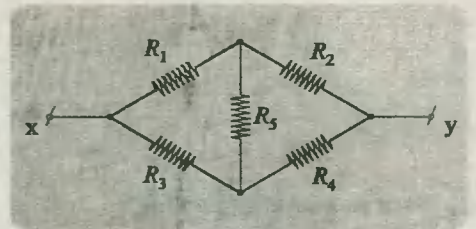
33.6. Circuitos simétricos

Son aquellos que presentan como característica principal el hecho de tener una recta o plano de simetría respecto a los bornes de ingreso y salida de energía eléctrica, el cual divide a la resistencia total del sistema en partes iguales. La recta o plano de simetría tiene además la característica de presentar el mismo potencial (región equipotencial), cuyo valor es igual a la semisuma de los potenciales de los bornes de ingreso y salida.

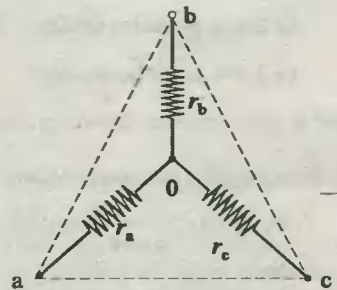
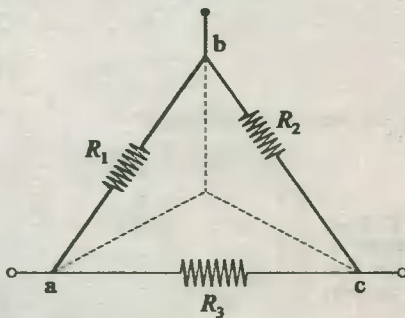
33.7. Puente de Wheatstone

Es aquel sistema eléctrico en el cual participan cinco (5) resistencias que forman un cuadrilátero y una diagonal, verificándose que:

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3 \quad (33.11)$$



33.8. Transformación Delta - Estrella (Δ -Y)



33.8.a) Al pasar de un Δ a una Y

$$r_a = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (33.12)$$

$$r_b = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (33.13)$$

$$r_c = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (33.14)$$

33.8.b) Al pasar de una Y a un Δ

$$R_1 = \frac{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c}{r_c} \quad (33.15)$$

$$R_2 = \frac{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c}{r_a} \quad (33.16)$$

$$R_3 = \frac{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c}{r_b} \quad (33.17)$$

PROBLEMAS

Acoplamiento de resistencias

33.1. Calcular la resistencia equivalente entre x e y .

33.2. Calcular la resistencia equivalente entre a y b .

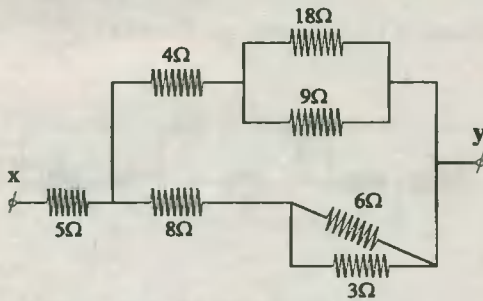


Fig. Prob. 33.1

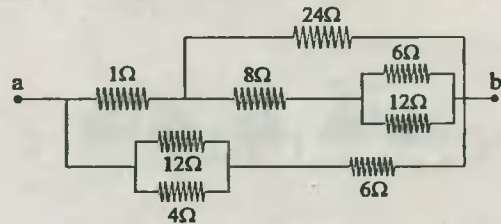


Fig. Prob. 33.2

33.3. Calcular en qué relación se encuentran las resistencias R_{ab} y R_{cd} , si éstas son las resistencias equivalentes del circuito mostrado desde ab y cd respectivamente. Todas las resistencias están expresadas en *ohmios*.

33.4. Calcular la resistencia equivalente entre x e y .

33.5. Calcular el valor de la resistencia R_x , si se sabe que al abrir o cerrar el interruptor S , la resistencia total entre a y b no se altera. Los valores de las resistencias se expresan en *ohmios*.

33.6. Calcular la resistencia equivalente del sistema de resistencias mostrado, si $r = 12 \Omega$.

33.7. Calcular la resistencia equivalente entre los bornes x e y . Todas las resistencias están expresadas en *ohmios*.

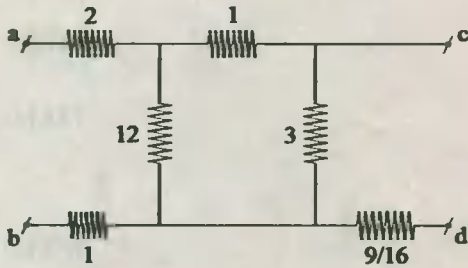


Fig. Prob. 33.3

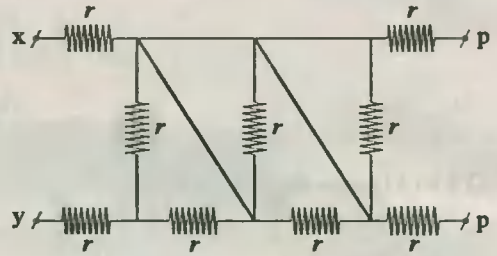


Fig. Prob. 33.4

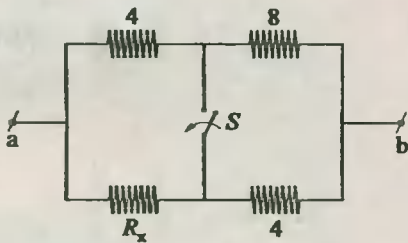


Fig. Prob. 33.5



Fig. Prob. 33.6

33.8. Calcular la resistencia equivalente entre los bornes a y b, sabiendo que $R = 4 \Omega$.

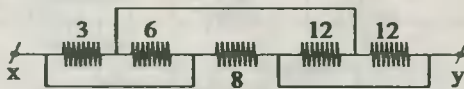


Fig. Prob. 33.7

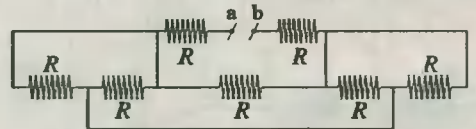


Fig. Prob. 33.8

33.9. Calcular la resistencia equivalente entre los bornes a y b. Las resistencias están expresadas en *ohmios*.

33.10. Dos conductores con coeficientes de temperatura de resistencia $\alpha_1 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ y $\alpha_2 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ poseen resistencias iguales a $R_{01} = 40 \Omega$ y $R_{02} = 60 \Omega$ a 0°C . Calcular el coeficiente de temperatura de resistencia del circuito constituido con estos conductores si se unen en paralelo.

Circuitos resistivos simétricos

33.11. Calcular la resistencia equivalente del sistema mostrado entre los bornes que se indican. Todas las resistencias tienen la misma resistencia $R = 15 \Omega$.

- a) a y b.
- b) a y c.

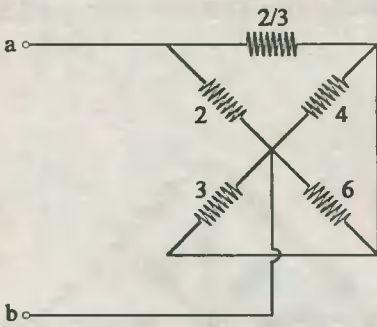


Fig. Prob. 33.9

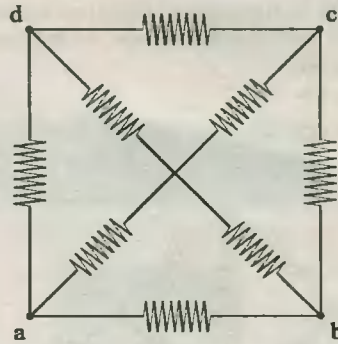


Fig. Prob. 33.11

33.12. Calcular la resistencia equivalente entre los bornes a y b para el sistema mostrado. Todas las resistencias son iguales a $r = 7 \Omega$.

33.13. Un hexágono junto con sus diagonales está hecho de alambres, siendo la resistencia de cada uno igual a $r = 20 \Omega$. Calcular la resistencia equivalente entre los bornes que se indican a continuación:

- a) a y d.
- b) a y c.
- c) a y b.

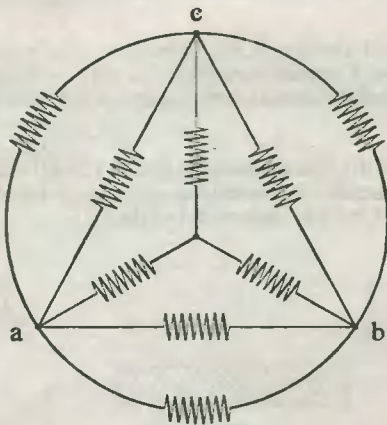


Fig. Prob. 33.12

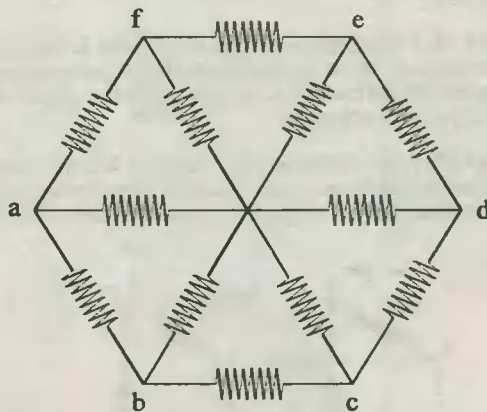


Fig. Prob. 33.13

33.14. Calcular la resistencia equivalente entre los bornes a y b, si se sabe que todas las resistencias son iguales a $r = 5 \Omega$.

33.15. Calcular la resistencia equivalente entre A y B, sabiendo que todas las resistencias son iguales a 7Ω .

33.16. Se ha formado un cubo con alambres de igual resistencia $R = 12\Omega$. Calcular la resistencia equivalente entre los bornes que se indican a continuación:

- a) a y b.
- b) a y c.
- c) a y h.

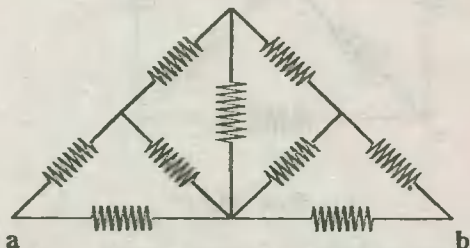


Fig. Prob. 33.14

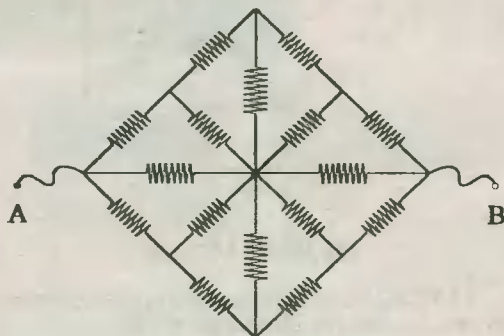


Fig. Prob. 33.15

Acoplamiento resistivo energizado

33.17. Una pila que está acoplada a una resistencia de 10Ω da una corriente de $3A$. Al acoplarla a una resistencia de 16Ω , la corriente es de $2A$. Calcular la fuerza electromotriz y la resistencia interna de la pila.

33.18. La diferencia de potencial entre los terminales de una batería es $8,5V$ cuando por ella circula una corriente de $3A$ desde el terminal negativo hasta el positivo. Cuando la corriente es $2A$ en sentido contrario, la diferencia de potencial se hace igual a $11V$. Calcular la resistencia interna de la batería y la fuerza electromotriz.

33.19. A un cajón con dos bornes se le conecta un amperímetro, una resistencia de 1Ω y una fuente de tensión constante de $5V$, el amperímetro muestra una corriente de $1A$. Cuando se sustituye la fuente por otra de $20V$, el amperímetro indica una corriente de $2A$. Qué hay dentro del cajón?

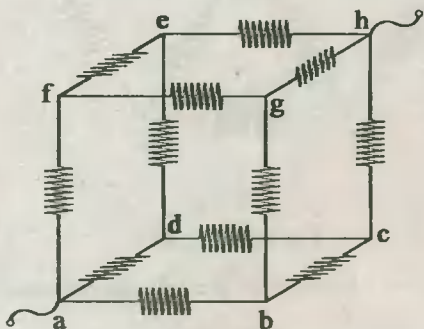


Fig. Prob. 33.16

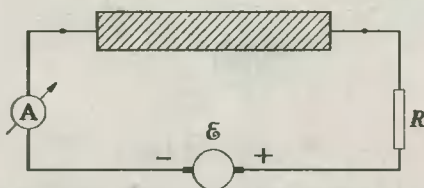


Fig. Prob. 33.19

33.20. Calcular la corriente que circula por la resistencia de $5\ \Omega$.

33.21. Una pila se conecta a una resistencia de $4\ \Omega$, luego se reemplaza ésta por otra de $9\ \Omega$. Si ambas resistencias disipan la misma potencia, ¿Cuál es la resistencia de la pila?

33.22. Dos lámparas que indican $60\ \Omega - 120\ V$ y $40\ \Omega - 120\ V$ respectivamente, están conectadas en serie a una línea de $120\ V$. ¿Qué potencia se disipa en las dos lámparas en estas condiciones?

33.23. Una lámpara que indica $3\ \Omega - 6\ V$ se debe conectar a una batería de $36\ V$, para lo cual se instala en serie con una resistencia (R) de protección. Calcular la potencia que consume la resistencia R .

33.24. Una docena de foquitos de navidad se conectan en serie a un tomacorriente de tensión $V = 240\ V$, y entonces cada uno disipa $10\ W$. Luego se conectan en paralelo al mismo tomacorriente y se ve que todos se queman. Se compra luego otra docena de foquitos iguales y se vuelve a conectarlos en paralelo, pero protegiendo cada uno con una resistencia. Si ahora brillan como los foquitos iniciales, calcular el valor de la resistencia de protección.

33.25. Una hervidora eléctrica tiene dos arrollamientos. Al conectar uno de ellos, el agua hierve al cabo de $15\ \text{minutos}$; al conectar el otro, el agua hierve al cabo de $30\ \text{minutos}$. ¿En cuánto tiempo hervirá el agua cuando ambos arrollamientos se conecten en paralelo?

33.26. Un motor tiene una resistencia $R = 9r$, siendo r la resistencia total de la línea de alimentación. Calcular la eficiencia de alimentación al motor.

33.27. Una fuente de corriente continua (CC) con $\mathcal{E} = 12\ V$ y $r = 0,1\ \Omega$ entrega energía a una resistencia variable. Calcular la intensidad de corriente que circula por la fuente cuando la resistencia externa tiene un valor tal que la potencia que ella disipa sea máxima.

33.28. Calcular el valor de R_L para que la potencia consumida entre los bornes ab de la red mostrada sea la máxima posible.

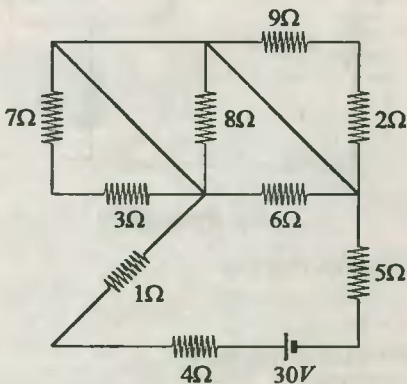


Fig. Prob. 33.20

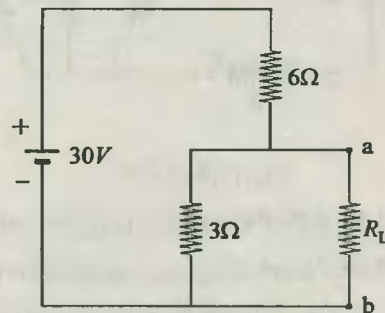


Fig. Prob. 33.28

33.29. Calcular la intensidad de corriente i en el circuito mostrado.

33.30. Calcular la lectura del voltímetro y del amperímetro en el circuito mostrado.

33.31. Calcular el valor de la resistencia R que debe regularse para que la resistencia de $5\ \Omega$ disipe solamente $320\ W$.

33.32. Para el circuito mostrado, calcular la potencia que disipa cada resistencia.

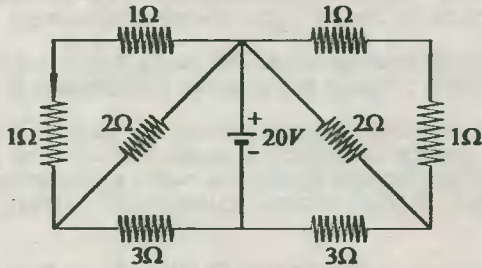


Fig. Prob. 33.29

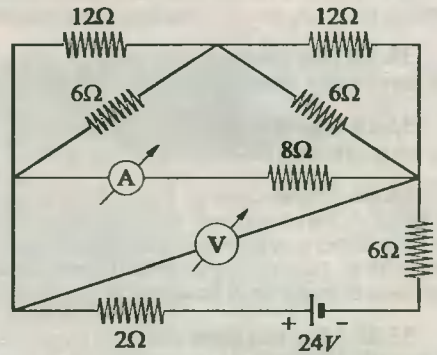


Fig. Prob. 33.30

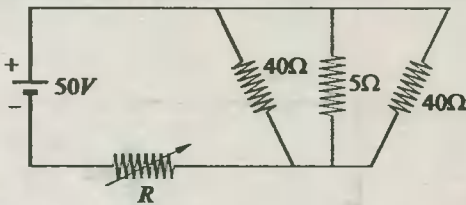


Fig. Prob. 33.31

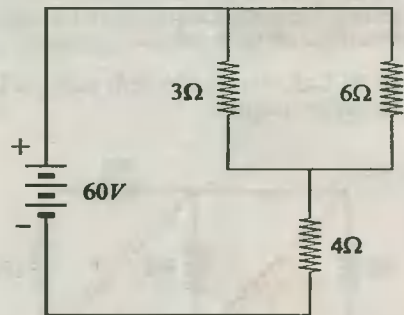


Fig. Prob. 33.32

33.33. Para el circuito de la figura, calcular la intensidad de corriente i_0 .

33.34. Para el circuito mostrado, determinar:

- Qué indicará un amperímetro si lo conectamos entre los bornes x e y.
- Qué diferencia de potencial existirá entre dichos bornes.

33.35. Calcular la intensidad de corriente i_0 que se indica en el circuito dado, si se sabe además que $i = 22,5A$.

33.36. Sabiendo que los conductores que unen a las resistencias son ideales, calcular la intensidad de corriente en los tramos DE, EF y HI. Las resistencias están en *ohmios*.

33.37. Calcular la intensidad de corriente que pasa por el puente ab en el circuito representado en la figura. Se desprecian las resistencias del puente, de los conductores de alimentación y la resistencia interna de la batería.

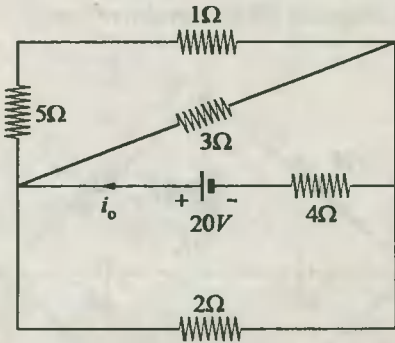


Fig. Prob. 33.33

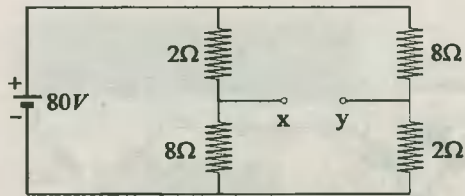


Fig. Prob. 33.34

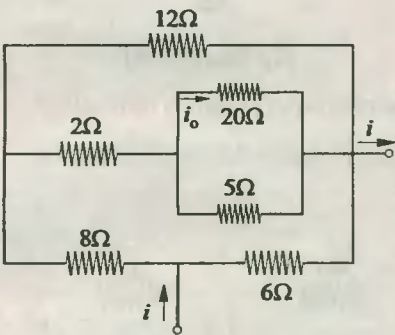


Fig. Prob. 33.35

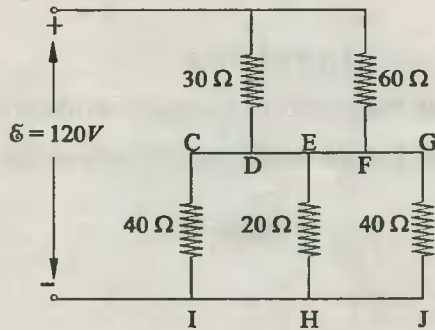


Fig. Prob. 33.36

Aplicaciones de las leyes de Kirchhoff

33.38. Calcular la intensidad de corriente i que se indica en el circuito mostrado.

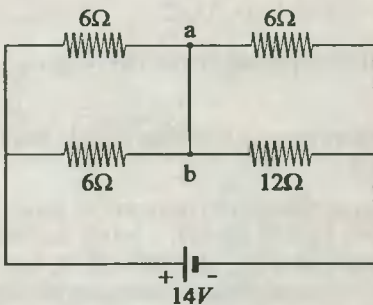


Fig. Prob. 33.37

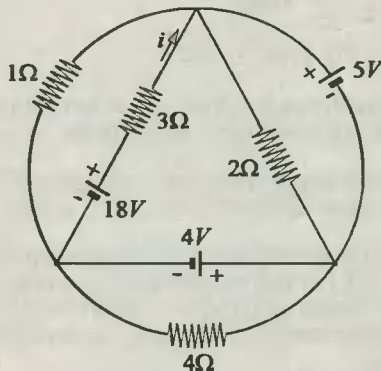


Fig. Prob. 33.38

33.39. Calcular la intensidad de corriente que pasa por el conductor AB del circuito mostrado.

33.40. Para el circuito mostrado, calcular $i_x + i_y$.

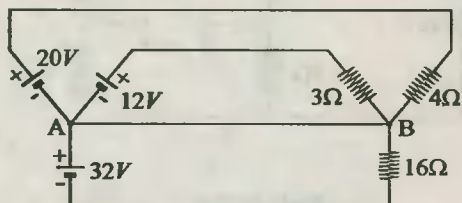


Fig. Prob. 33.39

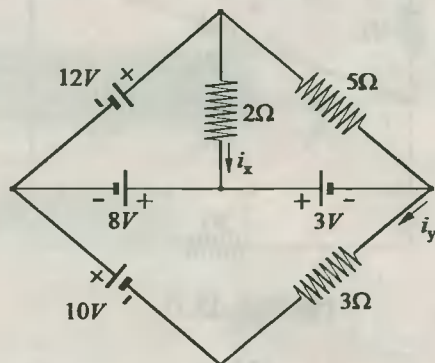


Fig. Prob. 33.40

33.41. Para el circuito mostrado, calcular la potencia que suministra la batería de 6 voltios.

33.42. Calcular la intensidad de corriente que pasa por cada resistencia del circuito mostrado.

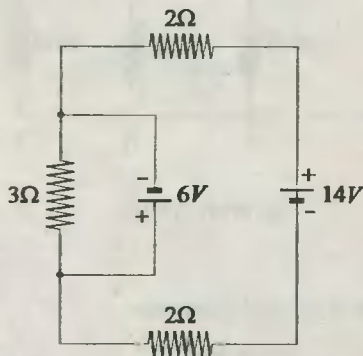


Fig. Prob. 33.41

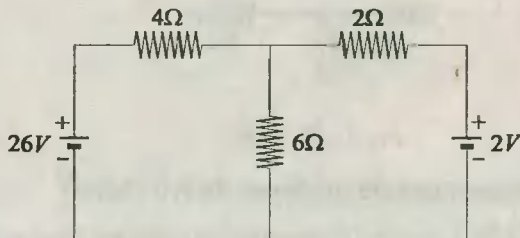


Fig. Prob. 33.42

33.43. En la figura, F representa una lámpara puramente resistiva que funciona a 12 V. Calcular el valor de R para que la lámpara no se quemé, si $i = 2$ A.

33.44. En el circuito mostrado en la figura, la lectura del amperímetro es la misma cuando ambos interruptores están abiertos o cerrados. Calcular la resistencia R .

33.45. Un circuito eléctrico está formado por las baterías cuyas fuerzas electromotrices son $\mathcal{E}_1 = 2$ V, $\mathcal{E}_2 = 12$ V, y por las resistencias cuyos valores son $R_1 = 5$ Ω , $R_2 = 15$ Ω , y $R_3 = 10$ Ω . A una de las partes del circuito se conecta el voltímetro V de gran resistencia interna. calcular la fem \mathcal{E}_x con la cual la lectura del voltímetro no varía si se cierra el interruptor S . Se desprecian las resistencias internas de las baterías.

33.46. Dos fuentes de corriente eléctrica en los sistemas del equipo eléctrico de los automóviles son un generador de corriente continua y un acumulador acoplado en paralelo con él. La fem del generador es $\mathcal{E}_2 = 14\text{ V}$, y su resistencia interna $r_2 = 0,05\ \Omega$. La fem del acumulador es $\mathcal{E}_1 = 12\text{ V}$. ¿Con qué corriente i consumida por la carga R_3 empieza a descargarse el acumulador?

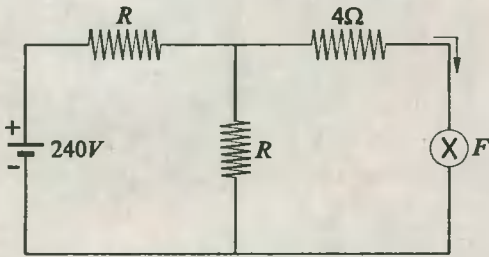


Fig. Prob. 33.43

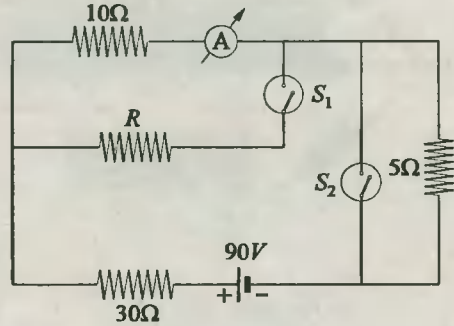


Fig. Prob. 33.44

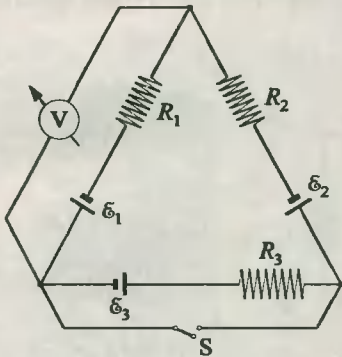


Fig. Prob. 33.45

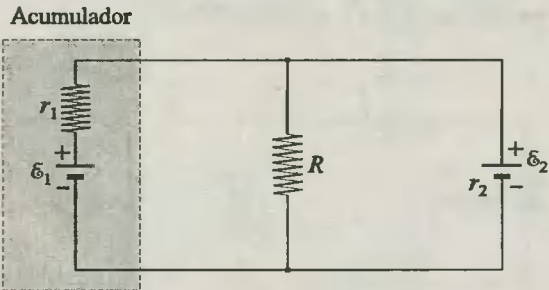


Fig. Prob. 33.46

33.47. En el tetraedro mostrado en la figura, calcular la diferencia de potencial entre los puntos **B** y **D**, si $\mathcal{E} = 10\text{ V}$; $r_1 = 3\ \Omega$; $r_2 = r_4 = r_5 = 2\ \Omega$; $r_3 = 1\ \Omega$; $r_6 = 4\ \Omega$.

33.48. Calcular la lectura del amperímetro en el circuito mostrado, si todas las resistencias se expresan en *ohmios*, y las fuentes de fuerza electromotriz están en *voltios*.

Aparatos de medición reales

33.49. En el circuito mostrado, el amperímetro tiene una resistencia interna de $0,05\ \Omega$, y marca 2 A . ¿Qué corriente circulará por la resistencia cuando la fuente se conecta directamente a ella?

33.50. En el circuito mostrado, el amperímetro de $1\ \Omega$ de resistencia interna registra 5 A . Qué intensidad recorrerá la resistencia R cuando la fuente se conecte directamente a R sin usarse el amperímetro?

33.51. El indicador de un amperímetro defleca completamente su escala para una corriente de $0,01\text{ A}$, y tiene una resistencia de $4,99\ \Omega$. Calcular la resistencia que se le debe acoplar para convertirlo en un amperímetro de 5 A .

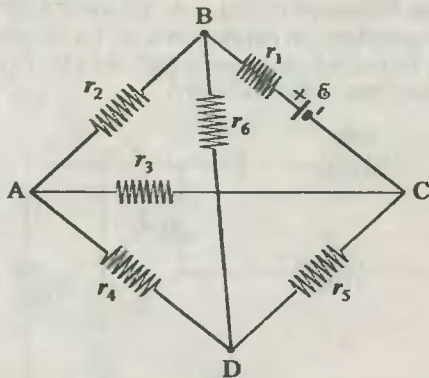


Fig. Prob. 33.47

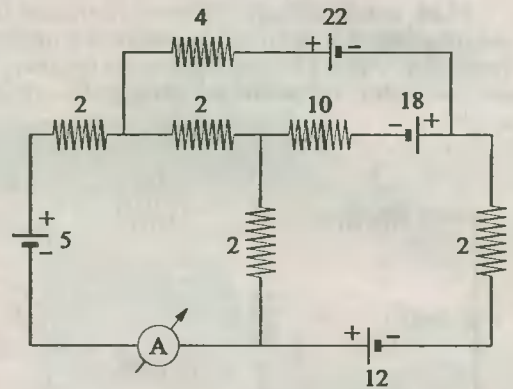


Fig. Prob. 33.48

33.52. Un circuito con dos terminales contiene una fuente de fuerza electromotriz ϵ y una resistencia r en serie. Si medimos la tensión entre sus dos terminales con un voltímetro de 300Ω de resistencia interna, éste indica $90V$; pero si lo hacemos con uno de 500Ω , éste indica $100V$. Calcular los valores de ϵ y r correspondientes.

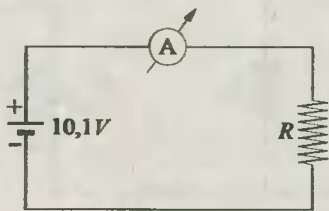


Fig. Prob. 33.49

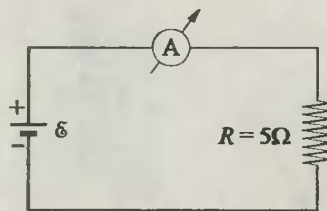


Fig. Prob. 33.50

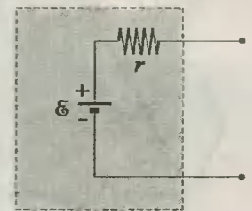


Fig. Prob. 33.52

33.53. En el circuito mostrado, el voltímetro tiene su sensibilidad de $20k\Omega/V$, y marca $10V$. ¿Qué voltaje soportará la resistencia R cuando se desconecta el voltímetro?.

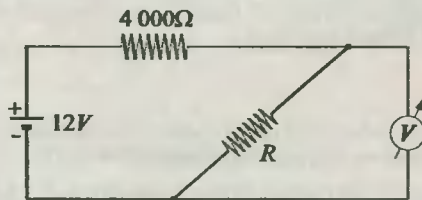


Fig. Prob. 33.53

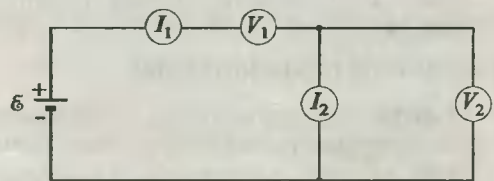


Fig. Prob. 33.54

33.54. En el circuito mostrado en la figura se tienen dos microamperímetros y dos voltímetros iguales, cuyas lecturas son $i_1 = 100\mu A$, $i_2 = 99\mu A$, y $V_1 = 10V$. Calcular la lectura del voltímetro V_2 .

33.55. Un circuito está montado con resistencias iguales y voltímetros también iguales. La lectura de los voltímetros 1 y 3 son $V_1 = 10\text{ V}$ y $V_3 = 8\text{ V}$ respectivamente. Calcular la lectura del voltímetro 2.

Acoplamientos especiales

33.56. Calcular el valor de la resistencia que caracteriza al dipolo ab mostrado, si $r = 6\sqrt{5}\ \Omega$.

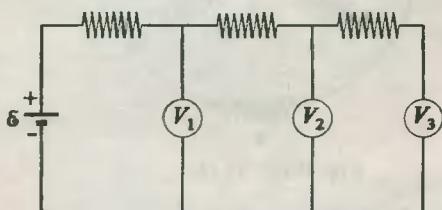


Fig. Prob. 33.55

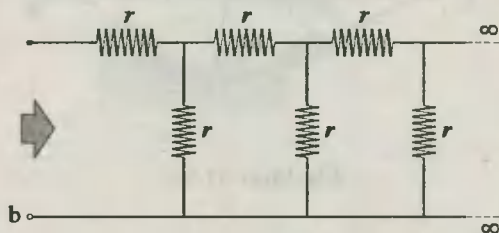


Fig. Prob. 33.56

33.57. Una computadora alimenta sus memorias con 50V-DC (corriente continua). Cada memoria tiene una resistencia de $1\ \Omega$ conectadas como se muestra en la figura. Si hay 10^{20} memorias. ¿Qué potencia consume la computadora?

33.58. Calcular la resistencia equivalente entre los puntos A y B del circuito mostrado.

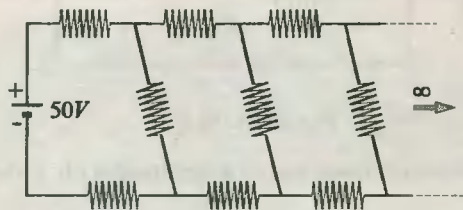


Fig. Prob. 33.57

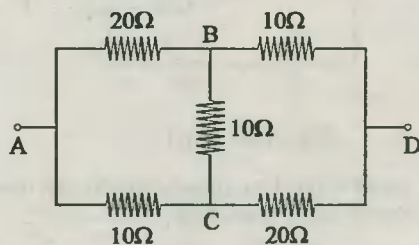


Fig. Prob. 33.58

33.59. Para el circuito mostrado, calcular la resistencia equivalente entre los terminales a y b, sabiendo que el tetraedro está formado por alambres de igual resistencia $R = 12\ \Omega$.

33.60. Para el circuito mostrado, $\varepsilon = 12\text{ V}$. Calcular la intensidad de corriente que se señala con i . Las resistencias están expresadas en *ohmios*.

33.61. Para el circuito mostrado, calcular i_0 .

33.62. Para el circuito mostrado, calcular la intensidad de corriente que circula a través de la batería.

33.63. Calcular la resistencia equivalente entre los bornes A y B.

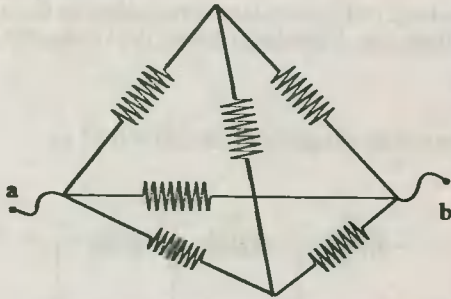


Fig. Prob. 33.59

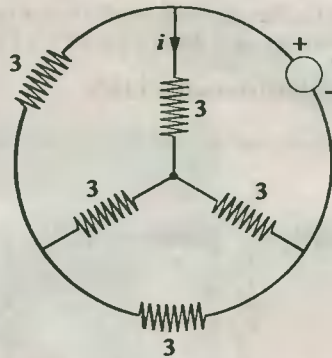


Fig. Prob. 33.60

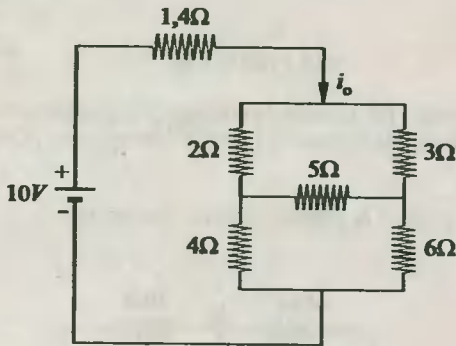


Fig. Prob. 33.61

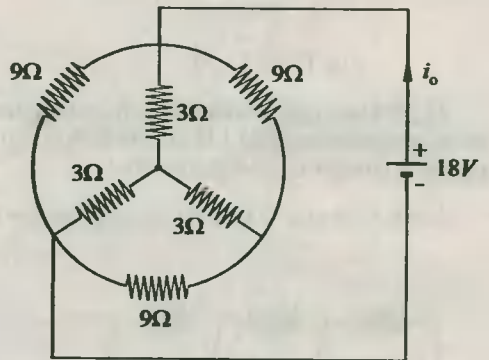


Fig. Prob. 33.62

33.64. Para el circuito mostrado, calcular la resistencia equivalente entre los terminales a y b. Todas las resistencias valen 1 Ω.

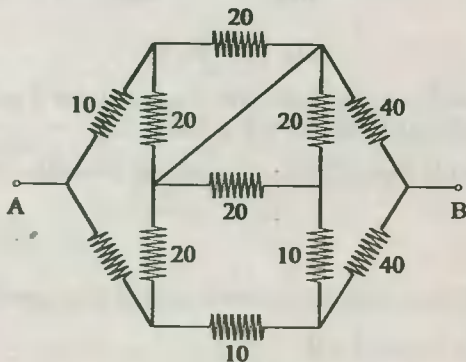


Fig. Prob. 33.63

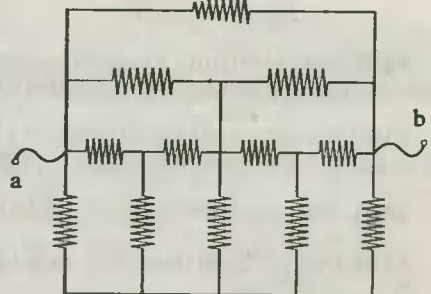


Fig. Prob. 33.64

34.1. Imán

Es todo cuerpo que tiene la propiedad de atraer limaduras de hierro, así como el de orientarse al ser suspendido en el aire desde su centro de gravedad.

34.2. Polos magnéticos

Vienen a ser zonas del imán donde se concentra más intensamente su imantación. En un imán recto aparecen dos polos magnéticos: Uno norte y otro sur.

$$d = L/2 \quad (34.1)$$

siendo d la distancia del polo al extremo próximo de la barra, y L es la longitud de la misma.

34.3. Carga magnética (q^*)

Es aquella cantidad escalar asociada a un polo magnético que mide directamente la magnetización de un cuerpo. Su signo es **positivo** si el polo es **norte**, y **negativo** si es **sur**. Se expresa en *ampere-metro* ($A.m$).

34.4. Ley de Coulomb entre polos magnéticos

"Dos polos del mismo nombre se repelen, y de nombres diferentes se atraen, con una fuerza cuya intensidad es directamente proporcional al producto de sus cargas magnéticas e inversamente proporcional con el cuadrado de su distancia".

$$F = k_m \frac{q_1^* \cdot q_2^*}{d^2} \quad (34.2)$$

$$k_m = 10^{-7} \mu_r \quad (34.3)$$

siendo k_m la constante magnética de Coulomb, y μ_r la permeabilidad magnética relativa del medio. Si el medio es el aire o vacío, entonces $\mu_r = 1$, y $k_m = 10^{-7} N/A^2$. Al reemplazar valores se prescinden de los signos de las cargas magnéticas.

34.5. Campo magnético o inducción magnética (B)

$$\vec{B} = \vec{F}/q^* \quad (34.4)$$

siendo \vec{F} y \vec{B} de la misma dirección si la carga magnética (q^*) de prueba es norte. En el SI el campo magnético se expresa en *tesla* (T), tal que $1 T = 1 N/A.m$.

34.6. Campo magnético creado por una carga magnética puntual

$$B = k_m Q^*/d^2 \quad (34.5)$$

siendo Q^* la carga magnética puntual, y d la distancia del polo hacia el punto donde se mide el campo. Al sustituir valores no se incluye el signo de la carga magnética. Si Q^* es norte, el vector B apunta alejándose de él, y si es sur, B apunta hacia él.

34.7. Líneas de fuerza del campo magnético

Son líneas imaginarias cerradas, y siempre salen de los polos norte y se dirigen hacia los polos sur. Cuando el campo magnético es uniforme, las líneas del campo son paralelas, equidistantes de la misma dirección, y un valor igual en todos los puntos del espacio ocupado por él.

34.8. Flujo magnético (Φ_m)

$$\Phi_m = BA \cos \theta = BA_{\perp} \quad (34.6)$$

siendo B el campo magnético, y A el área de una superficie cuya proyección normal forma con las líneas del campo un ángulo θ . La proyección normal (A_{\perp}) de la superficie sobre las líneas del campo está dado por $A \cos \theta$. En el SI Φ_m se da en *weber* (Wb), tal que $1 Wb = 1 T \cdot m^2$. Además, $1 Wb$ equivale a 10^8 líneas de fuerza.

34.9. Permeabilidad magnética relativa de un medio (μ_r)

$$\mu_r = \Phi_n / \Phi_o \quad (34.7)$$

$$\mu_a = \mu_o \cdot \mu_r \quad (34.8)$$

$$k_m = \mu_a / 4\pi \quad (34.9)$$

siendo Φ_o y Φ_n el flujo magnético en una región vacía y ocupada por un núcleo magnético respectivamente. Asimismo, μ_a y μ_o son la permeabilidad magnética absoluta y del vacío respectivamente. En el SI $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2$.

34.10. Campo magnetizante o intensidad magnética (H)

$$\bar{H} = \bar{B} / \mu_a \quad (34.10)$$

En el SI el campo magnetizante está dado en *ampere/metro* (A/m)

34.11. Declinación magnética (d)

Es el ángulo que forma la línea de fuerza del campo magnético terrestre con el meridiano geográfico en un punto cercano a la superficie terrestre. Su valor está comprendido entre 0° y 90° .

34.12. Inclinación magnética (i)

Es el ángulo formado por las líneas de fuerza con relación al plano horizontal. Su valor está comprendido entre -90° y 90° , los cuales se presentan en el sur y norte magnético terrestre respectivamente.

PROBLEMAS

34.1. Dos polos puntuales aislados, uno norte de $+900A \cdot m$ y otro sur de $-800A \cdot m$ de intensidades de carga magnética se encuentran separados una distancia de $20 cm$ y en el vacío. ¿Cuál es la fuerza de interacción entre dichos polos?

34.2. Dos polos aislados de la misma carga magnética pero de nombres diferentes se hallan separados en el aire una distancia de 20 cm , y se ejercen mutuamente una fuerza de 10 N . ¿Qué fuerza se ejercerá sobre un polo norte de 400 A.m de carga magnética colocado en el punto medio de la distancia que separa a los dos primeros polos?

34.3. Dos polos magnéticos de polaridades diferentes poseen cargas magnéticas de $4\,000\text{ A.m}$ y $-5\,000\text{ A.m}$, y se encuentran sumergidas en un líquido isotrópico de permeabilidad magnética relativa $\mu_r = 1,0039$. ¿Cuál es la fuerza magnética que se presenta entre los dos cuando se colocan a la distancia de 10 cm ?

34.4. Calcular la fuerza magnética que soporta un polo norte aislado de carga magnética $q_o^* = 9\,000\text{ A.m}$, y colocado frente a una barra de imán de longitud $L = 60\text{ cm}$ y carga magnética igual a $q^* = \pm 1\,600\text{ A.m}$.

34.5. Dos imanes rectos de 24 cm de longitud y cargas magnéticas igual a $3\,000\text{ A.m}$ cada uno se encuentran alineados y separados 6 cm , estando sus polos norte frente a frente. Calcular la fuerza entre los imanes y el caracter de su interacción.

34.6. Los imanes mostrados en la figura están en un mismo plano vertical, y tienen 48 cm de longitud con carga magnética igual a $1,5 \cdot 10^4\text{ A.m}$ cada uno. Estos se colocan de tal forma que el imán B permanece en equilibrio. Calcular la masa del imán B en gramos ($g = 10\text{ m/s}^2$).

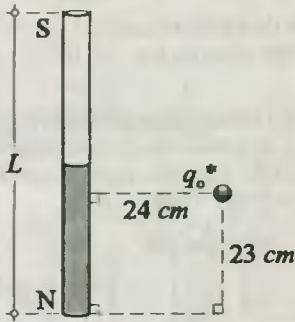


Fig. Prob. 34.4

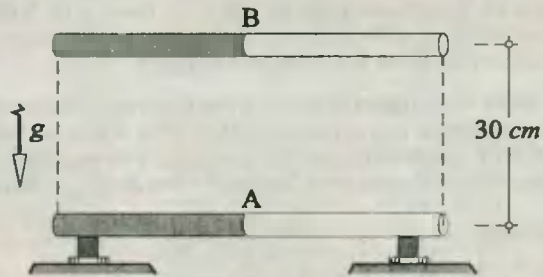


Fig. Prob. 34.6

34.7. Para la figura mostrada, calcular la intensidad del campo magnético B en el punto P que se encuentra a la distancia $d = 0,3\text{ m}$ del extremo norte de una poderosa barra imán cuya carga magnética es $Q^* = 8\,100\text{ A.m}$.

34.8. Para la figura mostrada, calcular la inducción magnética B y el vector campo magnetizante H en el punto P debido a la presencia de un polo norte de $8 \cdot 10^4\text{ A.m}$ de carga magnética.

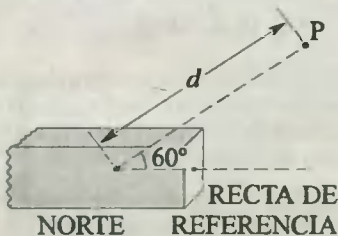


Fig. Prob. 34.7

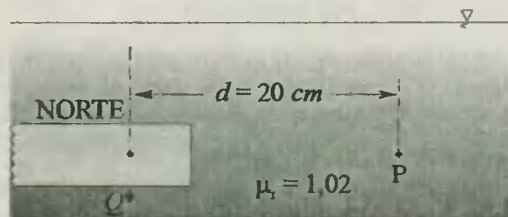


Fig. Prob. 34.8

34.9. Para la figura mostrada, determinar el vector inducción magnética B creada por una barra imán de carga magnética $\pm 3\,600\text{ A}\cdot\text{m}$ en el punto A.

34.10. Calcular la inducción magnética en el punto P, si las intensidades de carga magnética de los polos norte y sur son $q_1^* = 1,25 \cdot 10^5\text{ A}\cdot\text{m}$ y $q_2^* = -6,4 \cdot 10^4\text{ A}\cdot\text{m}$.

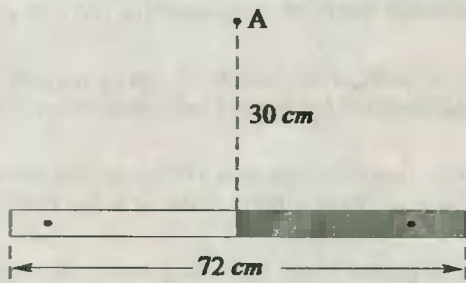


Fig. Prob. 34.9

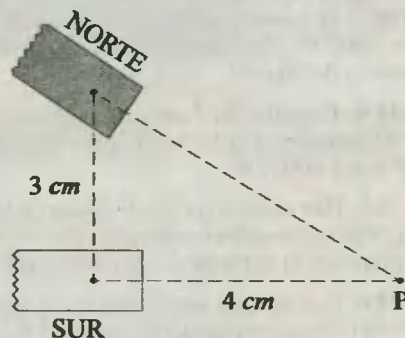


Fig. Prob. 34.10

34.11. Una barra imán de 100 N de peso, y de $8\,000\text{ A}\cdot\text{m}$ de carga magnética en cada polo se encuentra en equilibrio dentro de un campo magnético uniforme externo $B = 2,5 \cdot 10^{-3}\text{ T}$. ¿Cuál es la tensión en los hilos 1 y 2 que lo sostiene?

34.12. En la figura se muestra una barra magnética uniforme y homogénea de 400 N de peso, cuyos polos presentan una carga magnética $q^* = 400\text{ A}\cdot\text{m}$. Esta barra se encuentra en un campo uniforme $B = 0,03\text{ T}$, que le permite estar en reposo y en posición horizontal. ¿Qué longitud presenta el resorte en estas condiciones, si su longitud natural es $l_0 = 40\text{ cm}$? ($k = 4 \cdot 10^3\text{ N/m}$).

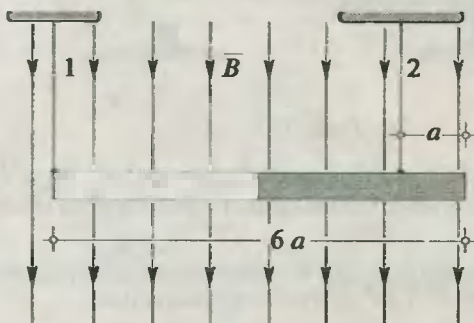


Fig. Prob. 34.11

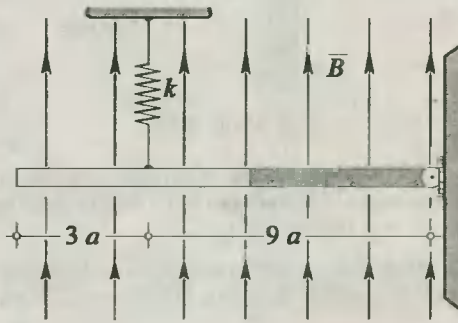


Fig. Prob. 34.12

34.13. Una barra imán uniforme y homogénea se encuentra en equilibrio, tal como se muestra en la figura. Si la cuerda lo sostiene desde su polo norte, ¿Cuáles son los valores de los ángulos α y β que definen la posición de equilibrio, si además se sabe que cada polo del imán tiene una carga magnética $q^* = 400\text{ A}\cdot\text{m}$, y el campo uniforme es $B = 0,05\text{ T}$. Peso de la barra = 30 N .

34.14. En un campo magnético uniforme una barra imán de longitud $L = 48\text{ cm}$ y carga magnética $q^* = 10^3\text{ A}\cdot\text{m}$ se encuentra inicialmente orientada en forma paralela a las líneas del campo. ¿Qué trabajo mínimo se necesitará realizar para hacerla girar respecto a su polo sur (O) un ángulo $\theta = 120^\circ$, siendo $B = 0,3\text{ T}$? Despreciar los efectos gravitatorios.

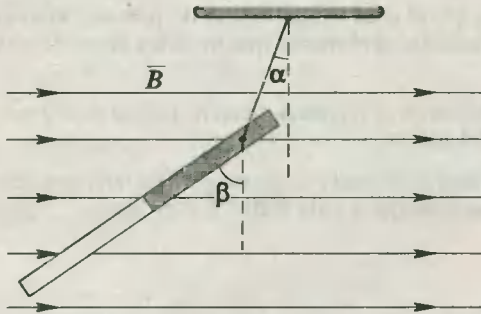


Fig. Prob. 34.13

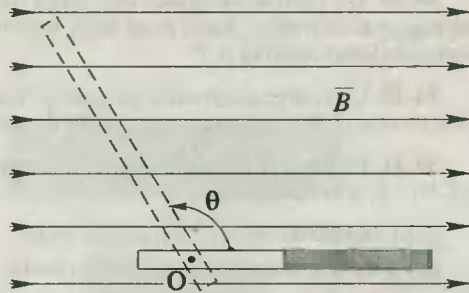


Fig. Prob. 34.14

34.15. En la figura se muestra un prisma recto triangular y un campo magnético en la dirección del eje Y. ¿Cuál es el flujo magnético que atraviesa la superficie *aefd*? ($B = 10$ teslas).

34.16. Un triángulo PQR se ha colocado de tal modo que sus lados se apoyan sobre los planos XY, YZ y XZ, siendo $PQ = 75$ cm, y $\theta = 37^\circ$. Sabiendo que el flujo a través de la superficie triangular es $\Phi_m = 2,4$ weber, calcular el valor del campo magnético B , si se sabe que es uniforme y paralelo al eje Y.

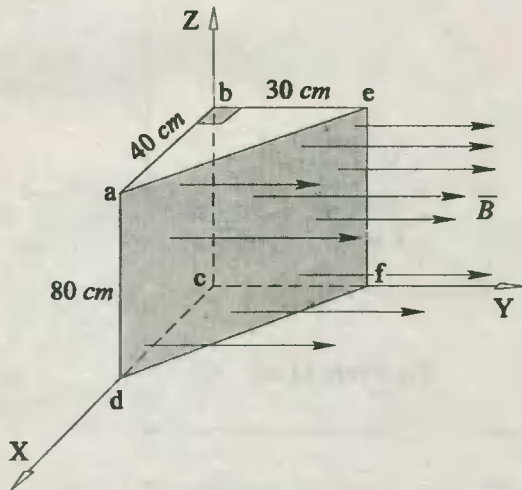


Fig. Prob. 34.15

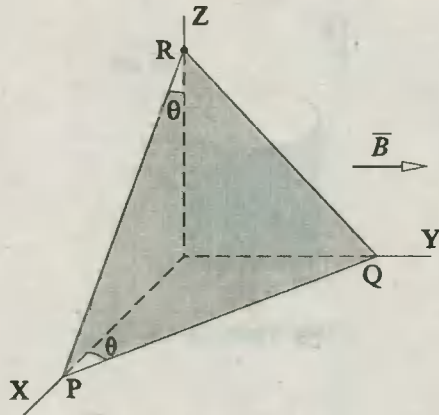


Fig. Prob. 34.16

34.17. Un pedazo de cartón cuya sección recta tiene $0,1$ cm^2 de área es dejado caer libremente, aproximándose a un poderoso imán recto de carga magnética $Q^* = 5 \cdot 10^6$ A.m. Calcular al cabo de qué tiempo de iniciada la caída el flujo magnético a través del pedazo de cartón será $2 \cdot 10^{-3}$ Wb. Considerar que el pedazo de cartón conserva su orientación horizontal en todo momento ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

34.18. En una región el campo magnético presenta un flujo de $1,5 \cdot 10^8$ líneas. Sin embargo, al colocar un núcleo ferromagnético en dicha región, el flujo magnético es de $9 \cdot 10^8$ líneas. ¿Cuál es la permeabilidad magnética absoluta del núcleo?

34.19. Un polo norte posee una carga magnética q^* , el cual irradia líneas de fuerza a todo el espacio que lo rodea. ¿Cuál es el flujo magnético irradiado, si el medio que lo rodea presenta una permeabilidad relativa μ_r ?

34.20. Una carga magnética puntual q^* está localizada en el vértice A de un hexaedro de arista a . Determinar el flujo magnético a través de las caras del sólido.

34.21. En cierto lugar de la Tierra la componente horizontal del campo magnético terrestre vale $1,2 \cdot 10^{-3} T$, y la componente vertical está orientada hacia abajo, y vale $9 \cdot 10^{-4} T$. Calcular:

- El ángulo de inclinación en ese lugar.
- La inducción magnética total en dicho lugar.

34.22. Por una superficie rectangular de $2 \times 2,5 m^2$ colocada verticalmente y normal al meridiano geográfico pasan $9,6 \cdot 10^4$ líneas de fuerza. Si la inclinación magnética del lugar es 0° , y la declinación magnética es 16° , calcular el campo magnético terrestre en dicho lugar.

34.23. En la figura se muestra un imán recto de $36 cm$ de longitud. Si el imán se pone en el plano vertical (Fig. a), el campo terrestre le produce un par de $300 N.m$; si el imán se pone en un plano horizontal (Fig. b), el par que experimenta es $100 N.m$. ¿Cuál es la inclinación del campo terrestre total en dicho lugar?

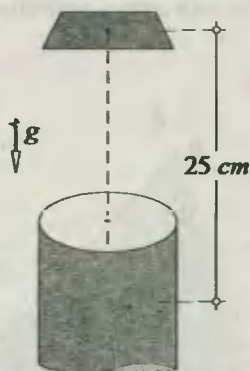


Fig. Prob. 34.17

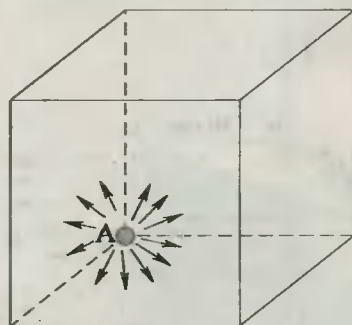
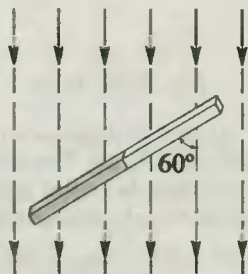
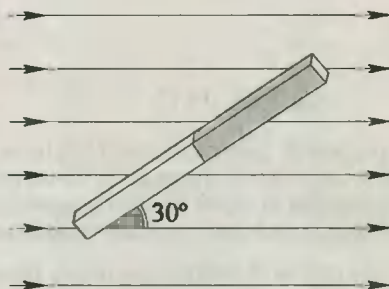


Fig. Prob. 34.20



(a)



(b)

Fig. Prob. 34.23

Electromagnetismo

(Primera Parte)

Las corrientes eléctricas son la fuente de los campos magnéticos. Toda corriente crea un campo magnético a su alrededor, cuyas líneas de fuerza lo envuelven, y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha.

35.2. Ley de Biot - Savart - Laplace

Todo segmento de corriente crea un campo magnético en todo punto a su alrededor, de manera que su valor es directamente proporcional a la intensidad de corriente e inversamente proporcional a la distancia. El vector campo magnético (B) es siempre perpendicular al plano formado por la corriente y el punto donde se mide el campo.

35.3. Campomagnético creado por un segmento de corriente (Fig. 35.1)

$$B = 10^{-7} \frac{i}{d} (\cos\alpha + \cos\beta) \quad (35.1)$$

donde el símbolo \odot significa que el vector B sale del plano de la figura. Asimismo, \otimes significa que ingresa.

35.4. Campo magnético creado por una semirrecta de corriente (Fig. 35.2)

$$B = 10^{-7} i/d \quad (35.2)$$

35.5. Campo magnético creado por una corriente rectilínea infinita (Fig. 35.3)

$$B = 2 \cdot 10^{-7} i/d \quad (35.3)$$

35.6. Campo magnético creado en el centro de un polígono regular

$$B = 2 \cdot 10^{-7} \frac{i}{a_p} n \cdot \text{sen}(\pi/n) \quad (35.4)$$

siendo a_p el apotema, y n el número de lados.

35.7. Campo magnético creado por una espira circular de corriente

$$35.7.a) \text{ En el centro: } B_0 = 2\pi \cdot 10^{-7} i/R \quad (35.5)$$

35.7.b) En un punto del eje:

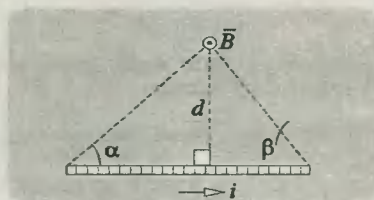


Fig. 53.1



Fig. 53.2

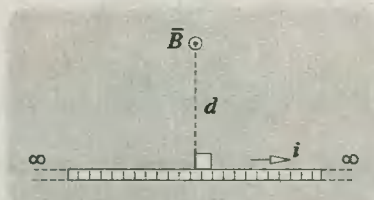


Fig. 53.3

$$B_p = 2\pi \cdot 10^{-7} \frac{iR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (35.6)$$

35.8. Campo creado por un arco de corriente

$$B = 10^{-7} i\theta/R \quad (35.7)$$

siendo θ el ángulo en *radianes* que subtende al arco de radio R .

35.9. Campo creado por un solenoide

35.9.a) En el centro:

$$B_c = \mu_0 Ni/L = \mu_0 ni \quad (35.8)$$

35.9.b) En el extremo: $B_e = \frac{1}{2} B_c$ (35.9)

siendo N el número total de espiras, L la longitud de la bobina, y n la densidad de espiras (número de espiras por unidad de longitud).

35.10 Campo creado por un toroide

$$B_m = \mu_0 Ni/R_m \quad (35.10)$$

siendo R_m el radio medio cuyo valor es aproximadamente igual a la semisuma de los radios interior y exterior del toroide.

35.11. Campo creado por una carga móvil

$$B = 10^{-7} qv \text{sen}\theta/r^2 \quad (35.11)$$

siendo q la carga eléctrica, v su velocidad, r la distancia de la carga al punto donde se mide el campo, y θ el ángulo formado por v y r .

35.12. Fuerza magnética sobre una carga móvil

$$F_m = qvB \text{sen}\theta \quad (35.12)$$

siendo F_m un vector perpendicular al plano formado por v y B , y su sentido vendrá dado por la regla de la mano derecha, girando de v hacia B (por el lado del menor ángulo) si la carga es positiva, y de sentido contrario si la carga es negativa.

35.13. Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_e \quad (35.13)$$

siendo \vec{F}_e la fuerza eléctrica debido a un campo eléctrico: qE .

35.14. Fuerza magnética sobre una corriente rectilínea

$$F = iLB \text{sen}\theta \quad (35.14)$$

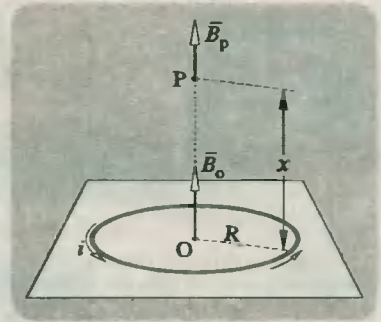


Fig. 35.4

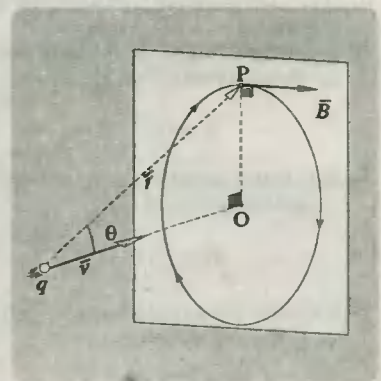


Fig. 35.5

siendo θ el ángulo que forman el vector B y la dirección de la corriente i . Asimismo, \vec{F} es perpendicular al plano formado por B e i .

35.15. Fuerza magnética entre dos segmentos paralelos de corriente

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \frac{i_1 i_2 L}{d} \quad (35.15)$$

verificándose una atracción si las corrientes son del mismo sentido, y de repulsión si son de sentidos opuestos. L es la longitud común de los cables, y d su distancia de separación.

PROBLEMAS

35.1. Calcular la inducción magnética creada por el segmento de recta $PQ = 25 \text{ cm}$ en el punto A , si éste es recorrido por una corriente $i = 60 \text{ A}$.

35.2. Calcular la intensidad del campo magnético en el punto P , si la corriente es $i = 8 \text{ A}$.

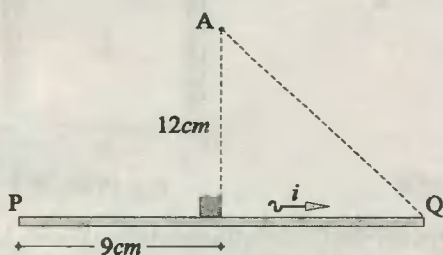


Fig. Prob 35.1

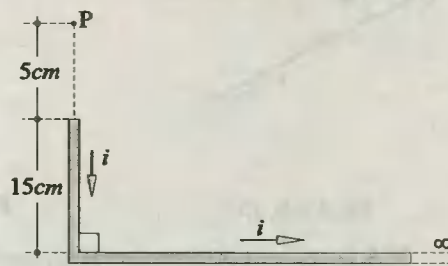


Fig. Prob. 35.2

35.3. Calcular la intensidad del vector inducción magnética B en el punto P indicado en la figura, si las corrientes que recorren las semirrectas son $i_1 = 20 \text{ A}$, e $i_2 = 40 \text{ A}$.

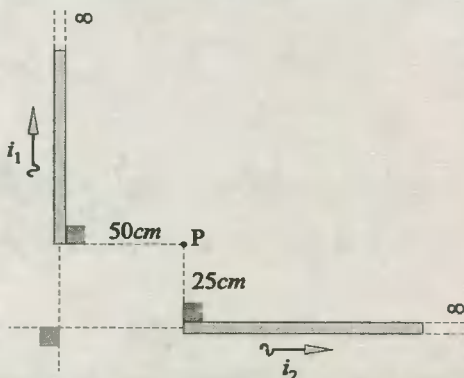


Fig. Prob. 35.3

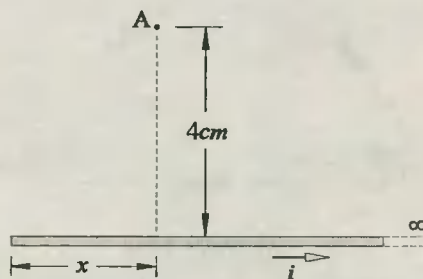


Fig. Prob. 35.4

35.4. En el sistema mostrado se sabe que la intensidad del vector campo magnético en A es $2 \cdot 10^{-4} T$. Calcular la longitud x , si el conductor se prolonga hacia el infinito por el lado derecho, y además $i = 50 A$.

35.5. Un conductor conduce una corriente $i = 45 A$ en forma continua, y ésta se dobla de tal modo que se forma un ángulo $\theta = 74^\circ$. ¿Cuál es la intensidad del campo en el punto P contenido en la bisectriz de dicho ángulo, siendo $OP = 15 cm$?

35.6. Calcular la intensidad del campo magnético debido a un conductor infinitamente largo en el punto A, si la corriente que lo produce es $i = 21 A$.

35.7. En la figura se muestran dos conductores por los cuales circula la misma corriente i . Calcular la inducción magnética en el punto P ($i = 4 A$; $a = 0,3 m$).

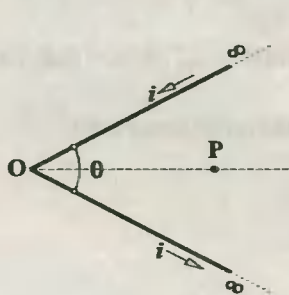


Fig. Prob. 35.5

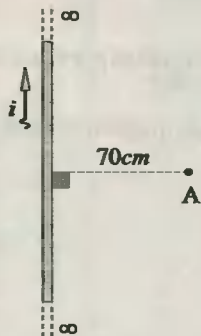


Fig. Prob. 35.6

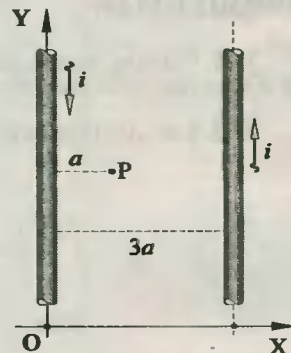


Fig. Prob. 35.7

35.8. En la figura se representan las secciones de dos conductores rectilíneos infinitamente largos por los cuales fluyen intensidades de corriente $i_1 = 27 A$, $i_2 = 48 A$. ¿Cuál será la intensidad del campo magnético B en el punto C?

35.9. En la figura se representan las secciones de tres conductores rectilíneos infinitamente largos y recorridos con corrientes de intensidades $i_1 = 6 A$, $i_2 = 12 A$, $i_3 = 13 A$. Calcular la inducción B en el punto P, si se sabe que $a = 1 cm$.

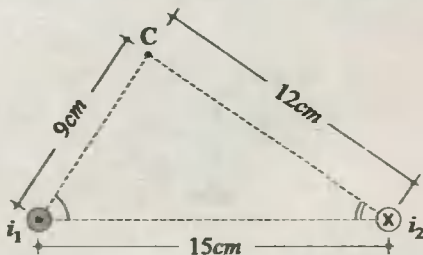


Fig. Prob. 35.8

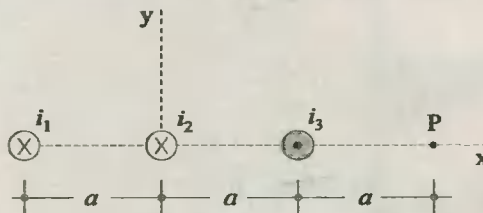


Fig. Prob. 35.9

35.10. Dos conductores rectilíneos e infinitamente largos son perpendiculares en el espacio. Calcular la inducción magnética en teslas el punto M ubicado en un plano que contiene a i_1 y es perpendicular a i_2 .

35.11. Calcular la intensidad del vector inducción magnética B en el baricentro del triángulo equilátero mostrado de 6 cm de lado. La corriente que lo recorre es $i = 20\text{ A}$.

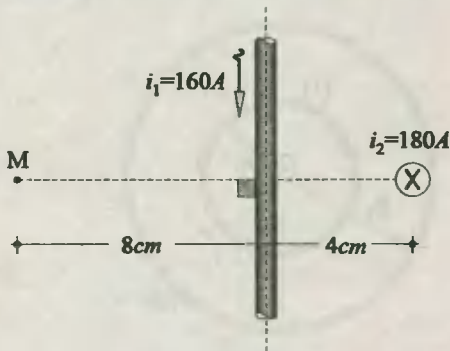


Fig. Prob. 35.10

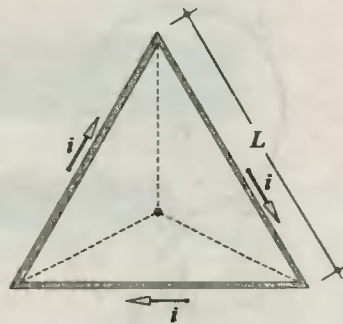


Fig. Prob. 35.11

35.12. Calcular la inducción magnética en el centro del cuadrado mostrado en la figura, sabiendo que sus lados miden 40 cm , y la corriente que lo recorre es $i = 10\sqrt{2}\text{ A}$.

35.13. En el centro del hexágono mostrado el campo magnético es $B = 3 \cdot 10^{-4}\text{ T}$. Si la corriente que lo recorre es $i = 50\sqrt{3}\text{ A}$, ¿Cuánto mide el lado del hexágono?

35.14. Calcular la inducción magnética B y el campo magnetizante H en el centro de la espira mostrada, si su radio mide $R = 22\text{ cm}$, y la corriente que lo recorre es $i = 14\text{ A}$.

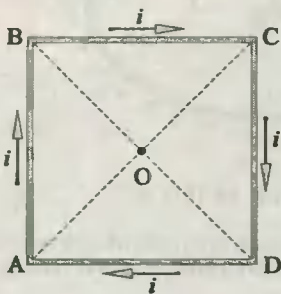


Fig. Prob. 35.12

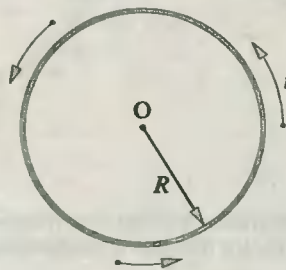


Fig. Prob. 35.13

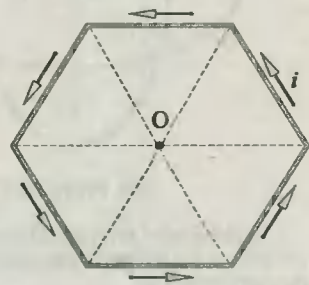


Fig. Prob. 35.14

35.15. Al fluir una corriente por un anillo conductor de alambre de cobre de $0,1\text{ cm}^2$ de sección y 10 cm de radio, ésta genera un campo $B = 0,25\text{ T}$ en el centro del anillo. ¿Cuál es la diferencia de potencial V que genera la batería en los extremos del anillo? ($\rho_a = 1,72 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$).

35.16. Calcular el valor y sentido de la corriente en la espira 2 para que el campo en el centro O sea nulo, sabiendo además que $i_1 = 16\text{ A}$, $R_1 = 8\text{ cm}$, $R_2 = 15\text{ cm}$.

35.17. Dos espiras circulares se hallan en dos planos perpendiculares entre sí, coincidiendo sus centros. El radio de cada espira es 10 cm , y las corrientes que fluyen por ellas son $i_1 = 6\text{ A}$, e $i_2 = 8\text{ A}$. Calcular la intensidad del campo en el centro de las espiras (en tesla).

35.18. Una espira dieléctrica posee una carga electrostática q uniformemente distribuida. Si la

espira empieza a girar con velocidad angular uniforme ω , determinar cuál será la intensidad del campo magnético en el punto P colocado en el eje de la espira y a la distancia x del centro de la espira.

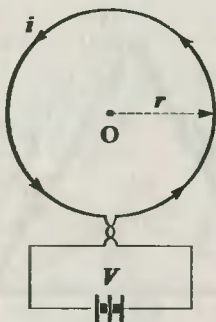


Fig. Prob. 35.15

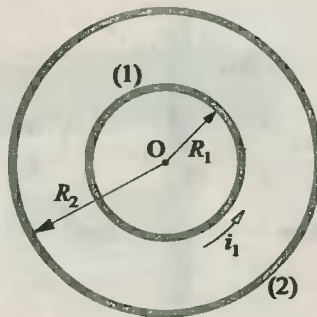


Fig. Prob. 35.16

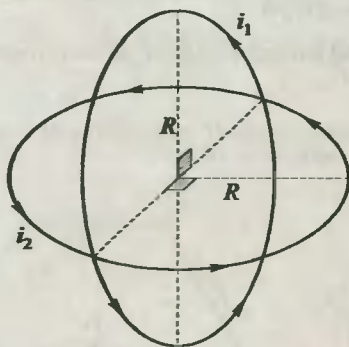


Fig. Prob. 35.17

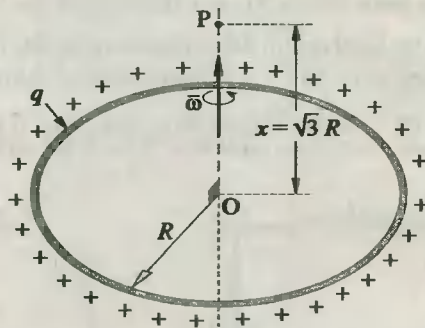


Fig. Prob. 35.18

35.19. Por el arco metálico MN mostrado circula una corriente $i = 60\text{ A}$, siendo su radio de curvatura $r = \pi/5\text{ m}$. Calcular la intensidad del vector inducción magnética B que se crea en el punto O (centro de curvatura).

35.20. Determinar el campo B (en tesla) en el punto O debido al sistema eléctrico mostrado, si $i = 70\text{ A}$, y $r = 8\text{ cm}$ ($\pi \approx 22/7$).

35.21. Calcular la intensidad del campo B creado por el conductor doblado en rizo en el punto O, si $r = 23\text{ cm}$, e $i = 20\text{ A}$.

35.22. Calcular la inducción magnética en el punto P, si se sabe que la corriente que circula a los conductores es la misma, y vale $i = 20\text{ A}$. El lado del cuadrado es $a = 22\text{ cm}$.

35.23. Un solenoide de 30 cm de longitud tiene un arrollamiento cilíndrico con área interior de 50 cm^2 y un total de 600 espiras. Si el flujo magnético interior a la mitad de su longitud es 10^{-4} weber, ¿Cuál debe ser la fuerza electromotriz \mathcal{E} que produce dicho flujo, si se sabe que todo el arrollamiento posee una resistencia de $10\pi\ \Omega$?

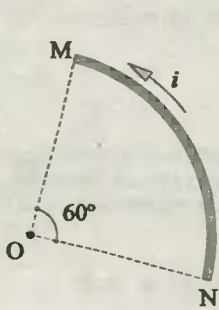


Fig. Prob. 35.19

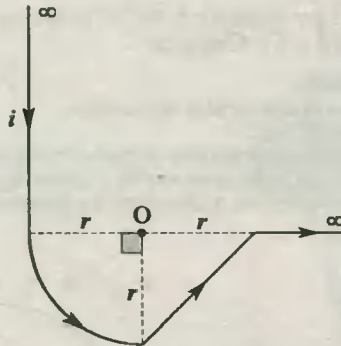


Fig. Prob. 35.20

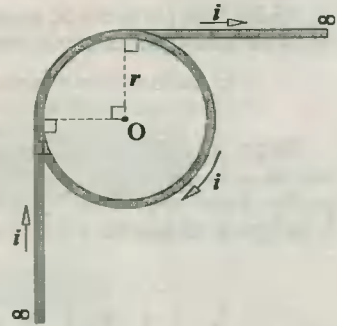


Fig. Prob. 35.21

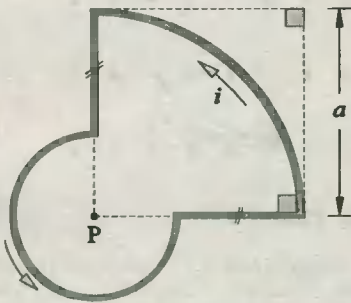


Fig. Prob. 35.22

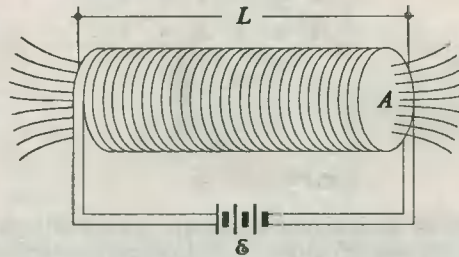


Fig. Prob. 35.23

35.24. Una partícula posee una carga $q = 5\text{ C}$, y avanza sobre la recta AA' con una velocidad $v = 2 \cdot 10^4\text{ m/s}$. Calcular la intensidad del campo magnético B que el movimiento de esta carga crea en los puntos O y P ubicados en el plano de la página. $x = 4\text{ m}$, $y = 3\text{ m}$.

35.25. La esferilla del péndulo cónico mostrado posee una carga $q = 6\text{ C}$, y gira uniformemente con una velocidad angular $\omega = 5\text{ rad/s}$. Calcular la intensidad del campo magnético que la esferilla crea en el centro de giro O. ($L = 0,5\text{ m}$, y $g = 10\text{ m/s}^2$).

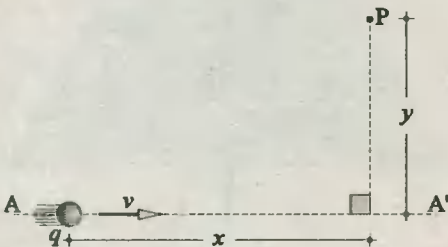


Fig. Prob. 35.24

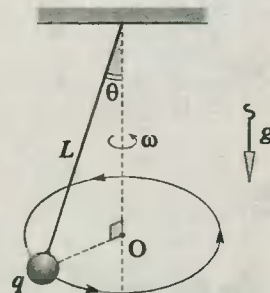


Fig. Prob. 35.25

35.26. Una partícula de masa $m = 3 \text{ g}$ y carga $q = 6 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ es lanzada con una velocidad $v = 100 \text{ m/s}$ a un campo uniforme de magnitud $B = 5 \text{ T}$. Calcular:

- a) El radio de la curva desarrollada.
- b) El tiempo empleado por la partícula en salir del campo.

35.27. ¿Cuál es la velocidad que se le debe imprimir a una esferilla de 8 kg de masa en la parte más baja de su trayectoria circular para que logre dar una vuelta completa en el plano vertical, sabiendo que lleva una carga de 8 C ? La cuerda mide 1 m , y el campo es horizontal y hacia adentro del plano de la figura, tal que $B = 1,5 \text{ T}$ ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

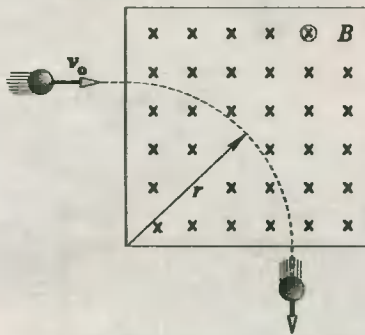


Fig. Prob. 35.26

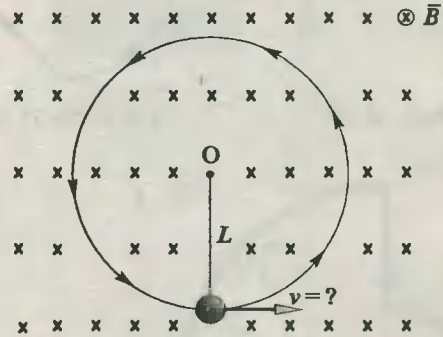


Fig. Prob. 35.27

35.28. En la figura se muestra una esferilla de 100 g de masa cargada con $+2 \text{ C}$, que es impulsada en A con una velocidad v_0 . Si la cuerda es inelástica y mide 1 m , ¿Cuál es el valor de la velocidad de la esferilla en la parte más alta de su trayectoria, si en la parte más baja la tensión de la cuerda es $4,2 \text{ N}$. $B =$ campo uniforme de $0,2 \text{ T}$ ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

35.29. Una partícula cuya carga es $q = 5 \text{ C}$ es impulsada desde P con una velocidad $v = 1600 \text{ m/s}$ en forma radial, alejándose de un conductor infinito por el cual circula una corriente $i = 200 \text{ A}$. ¿Qué fuerza magnética experimenta la partícula en dicha posición? ($d = 4 \text{ cm}$).

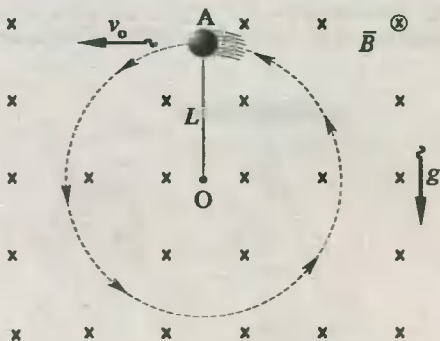


Fig. Prob. 35.28

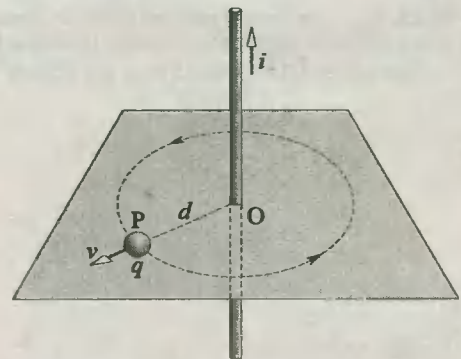


Fig. Prob. 35.29

35.30. Una partícula con carga $q = 2 \text{ nC}$ y masa $m = 4 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$ ingresa perpendicularmente a una

región donde existe un campo magnético uniforme $B = 0,2 T$ con una velocidad de $10^4 m/s$. Calcular la intensidad y dirección del campo eléctrico necesario para que la partícula atraviese la región del campo magnético sin desviarse.

35.31. Una partícula cargada es lanzada con una velocidad $v = 2 \cdot 10^4 m/s$, siendo su carga $q = 5 \cdot 10^{-4} C$. El espacio que cruza la partícula presenta dos campos uniformes y paralelos; uno es magnético de intensidad $B = 1,2 T$, y el otro es eléctrico de intensidad $E = 3,2 \cdot 10^4 N/C$. ¿Cuál es el valor de la fuerza resultante que experimenta la partícula?. Despreciar los efectos gravitatorios.

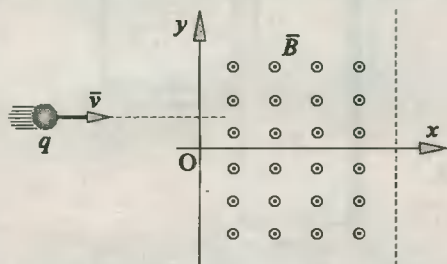


Fig. Prob. 35.30

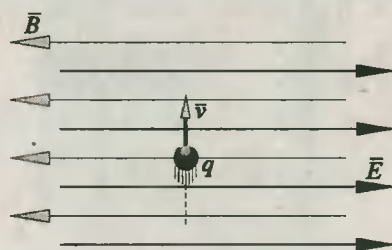


Fig. Prob. 35.31

35.32. Un conductor rectilíneo de $10 cm$ de longitud está colocado en un campo magnético de intensidad $B = 0,1 T$, y normal a las líneas de fuerza. ¿Qué intensidad de corriente lo recorre, si la fuerza que actúa sobre él es $3 N$?

35.33. En la figura se muestra un alambre ABC doblado en B, por el cual circula una corriente $i = 10 A$. Si $\theta = 60^\circ$, y el campo es $B = 10 T$. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre dicho alambre, si $AB = 5 cm$, y $BC = 3 cm$?

35.34. Dos conductores paralelos de igual longitud $L = 25 m$ se colocan uno frente al otro en un mismo plano, distanciados entre sí $d = 0,25 m$. Calcular la fuerza de interacción entre ellos, si las corrientes son continuas y permanentes, tales que $i_1 = 200 A$, e $i_2 = 150 A$.

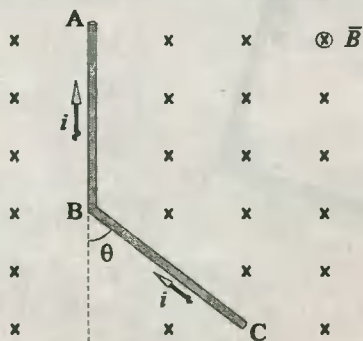


Fig. Prob. 35.33

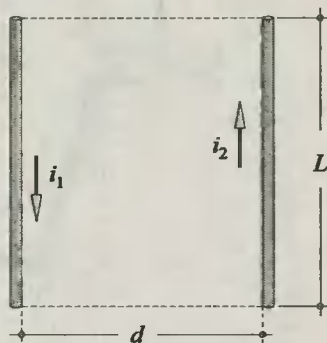


Fig. Prob. 35.34

35.35. Dos conductores rectilíneos y paralelos de igual longitud $L = 0,5 m$ se encuentran separados por una distancia $d = 10 cm$ en un mismo plano, el que a su vez es normal a las líneas del campo magnético de intensidad $B = 6 \cdot 10^{-4} T$. ¿Qué fuerza recibe cada conductor si las corrientes que circulan por ellos son $i_1 = 200 A$, e $i_2 = 300 A$?

35.36. Un conductor muy largo y una espira cuadrada de lado $a = 20\text{cm}$ se encuentran en un mismo plano, según se muestra en la figura. Si las corrientes que las recorren tienen intensidades $i_1 = 200\text{ A}$, e $i_2 = 300\text{ A}$, calcular la fuerza resultante sobre la espira.

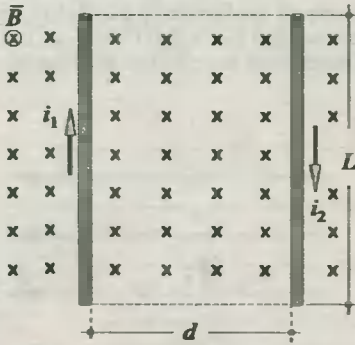


Fig. Prob. 35.35

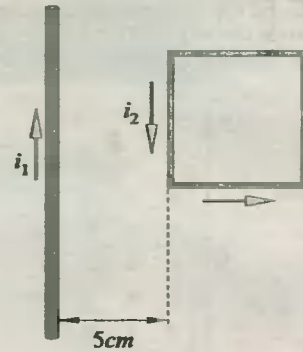


Fig. Prob. 35.36

35.37. Un alambre uniforme y homogéneo en forma de U está suspendido de dos ganchos en A y B. Si sus medidas son $AD = BC = 10\text{cm}$, y $CD = 30\text{cm}$, y además existe un campo magnético uniforme, vertical y hacia arriba $B = 2\text{ T}$, calcular el ángulo que se desvía el alambre respecto a la vertical cuando por él pase una corriente de intensidad $i = 5\text{ A}$. Peso de todo el alambre = 5 N .

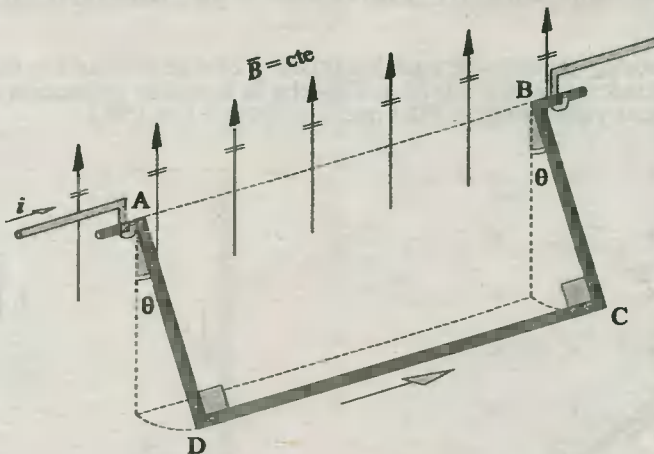


Fig. Prob. 35.37

36

Electromagnetismo (Segunda Parte)

36.1. Inducción electromagnética

Proceso por el cual se generan corrientes inducidas debido al movimiento relativo de un campo magnético exterior, sea acercándose, alejándose, aumentando o disminuyendo.

36.2. Ley de Faraday para una barra conductora

$$\mathcal{E} = vBl \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \quad (36.1)$$

siendo \mathcal{E} la *fem* inducida entre los extremos de una barra de longitud l , que se desplaza con una velocidad v dentro de un campo magnético uniforme B . Además, α es el ángulo formado por los vectores v y B . Asimismo, β es el ángulo formado por la barra con la velocidad, y γ es el ángulo formado por la barra con las líneas del campo.

36.3. Ley de Faraday para una espira conductora

$$\mathcal{E} = - N \Delta \Phi / \Delta t \quad (36.2)$$

siendo \mathcal{E} la *fem* inducida en la espira que produce la corriente inducida, N el número de espiras, Φ el flujo que atraviesa la espira, y t el tiempo. El signo menos (-) se explica por la Ley de Lenz.

36.4. Ley de Lenz

"El sentido de la corriente en una espira, producida por una fem inducida es tal que el campo creado por ella tiende a compensar la variación del flujo exterior que pasa por la espira".

36.5. Autoinducción

Este fenómeno se presenta en una bobina cuando por ella la corriente que lo circula experimenta variaciones en su intensidad, creando un flujo magnético variable, el que a su vez produce una *fem* inducida, a la que se denomina *fem de autoinducción*. Esta tiene un sentido que se opone a la variación que la provocó.

36.6. Inductancia (L)

$$L = N\Phi/i \quad (36.3)$$

$$L = \mu_r N^2 A/l \quad (36.4)$$

siendo L conocido también como **coeficiente de autoinducción**, y es una característica física propia de las bobinas. Representa la tensión inducida por cada unidad de variación de corriente. En el SI se mide en *henry* (H) = $1 \text{ V}/(1 \text{ A/s})$. En la relación (36.3) N es el número de espiras, Φ el flujo que atraviesa una espira, e i es la corriente que recorre las espiras. En la relación (36.4) A es el área

de la sección de la bobina, μ_a la permeabilidad absoluta del núcleo colocado en su interior, con $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, y l es la longitud de la bobina.

36.7. fem autoinducida (\mathcal{E}_i)

$$\mathcal{E}_i = -L \Delta i / \Delta t \quad (36.5)$$

siendo \mathcal{E}_i el valor medio de la fem autoinducida, L la inductancia de la bobina, $\Delta i / \Delta t$ la rapidez con la cual varía la intensidad de corriente, y $\Delta \Phi / \Delta t$ es la rapidez con que varía el flujo magnético a través de la bobina.

36.8. Energía magnética almacenada en una bobina (W)

$$W = \frac{1}{2} Li^2 \quad (36.6)$$

siendo i la intensidad de corriente que recorre la bobina, y L su inductancia. La energía se almacena bajo la forma de un campo magnético llenando la bobina.

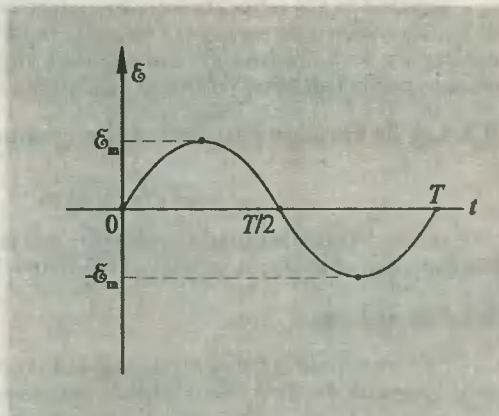
36.9. fem en una bobina giratoria

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (36.7)$$

$$\mathcal{E}_m = NBA\omega \quad (36.8)$$

$$(*) \omega = 2\pi f$$

siendo N el número de espiras, A el área que encierra cada una, ω la velocidad angular, f la frecuencia, y t el tiempo de giro. El plano de la bobina deberá ser perpendicular a las líneas de campo, y $\theta = \omega t$ es el ángulo que forman la normal al plano de la bobina y las líneas del campo.



36.10. Valores eficaces

$$E = \mathcal{E}_m / \sqrt{2} \quad (36.9)$$

$$I = I_m / \sqrt{2} \quad (36.10)$$

siendo \mathcal{E}_m e I_m los valores máximos alcanzados por la tensión y corriente alterna respectivamente. Además, E e I son los valores de aquella tensión y corriente continua que producen en una resistencia una potencia de disipación igual a la que producen la tensión y/o corriente variable.

36.11. Reactancia inductiva

$$X_L = V_L / I \quad (36.11)$$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (36.12)$$

siendo V_L e I la tensión y corriente eficaz que experimenta una bobina respectivamente, y X_L la resistencia que ofrece la bobina al paso de una corriente variable, siendo f su frecuencia.

36.12. Reactancia capacitiva (X_C)

$$X_C = V_C / I \quad (36.13)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (36.14)$$

siendo V_c e I la tensión y corriente eficaz que experimenta un capacitor. X_C es la resistencia que ofrece el condensador al paso de una corriente variable.

36.13. Impedancia (Z)

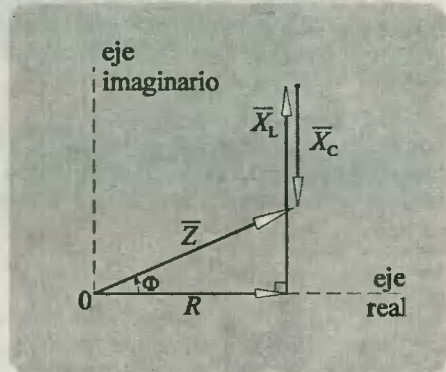
$$\bar{Z} = \bar{V} / \bar{I} \quad (36.15)$$

$$\bar{Z} = R + j(X_L - X_C) \quad (36.16)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (36.17)$$

$$\cos\phi = V_R / V = R / Z \quad (36.18)$$

siendo j el número imaginario ($\sqrt{-1}$), V_R la tensión en la resistencia, V la tensión en todo el circuito. Además, $\cos\phi$ es llamado *factor de potencia*.



36.14. Potencia en los circuitos de corriente alterna (CA)

$$P = VI \cos\phi \quad (36.19)$$

siendo P la potencia consumida en una resistencia pura, y V e I los valores eficaces de la tensión y la corriente.

36.15. Transformador

$$\frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_s} = \frac{N_p}{N_s} \quad (36.20)$$

$$\eta = \frac{Pot_{\text{secundario}}}{Pot_{\text{primario}}} \quad (36.21)$$

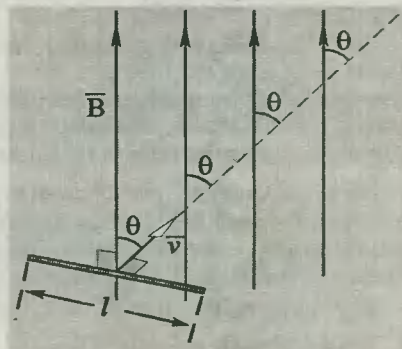
siendo \mathcal{E}_p y \mathcal{E}_s las tensiones inducidas en el primario y el secundario respectivamente; N es el número de espiras o devanados, y η es la eficiencia o rendimiento del transformador.

PROBLEMAS

Ley de Faraday para barras conductoras

36.1. En la figura se muestra un conductor rectilíneo de longitud $l = 80 \text{ cm}$ se mueve a una velocidad $v = 60 \text{ m/s}$ en un campo magnético uniforme de intensidad $B = 0,5 \text{ T}$. Calcular el ángulo θ entre los vectores campo magnético (B) y la velocidad (v), si entre los extremos del conductor se origina una fem de 12 V .

36.2. Un avión viaja de Este a Oeste a razón de 200 m/s en un lugar donde la declinación magnética es 0° . Si el campo terrestre en dicho lugar es $5 \cdot 10^{-4} \text{ T}$, calcular la diferencia de potencial entre los extremos de las alas, las cuales distan 20 m entre sí.



36.3. Un conductor con longitud $l = 20 \text{ cm}$ se mueve en un campo magnético uniforme cuya intensidad es $B = 0,025 \text{ T}$ a la velocidad $v = 2 \text{ m/s}$ de manera que el conductor y el vector velocidad yacen en un plano perpendicular a las líneas del campo. El vector velocidad forma con el conductor el ángulo $\beta = 30^\circ$. Calcular la diferencia de potencial inducida en los extremos del conductor.

36.4. En un campo magnético uniforme y vertical de intensidad $B = \sqrt{3} \text{ T}$ se mueve un conductor situado horizontalmente con longitud $l = 0,5 \text{ m}$ a la velocidad $v = 16 \text{ m/s}$, de manera que el vector velocidad forma con las líneas del campo el ángulo $\alpha = 30^\circ$, y con el conductor el ángulo $\beta = 60^\circ$. Calcular la *fem* inducida en el conductor.

36.5. Una barra conductora de 2 m de longitud cae desde el reposo en un campo magnético uniforme y horizontal que se encuentra a 45 m debajo de él. Sabiendo que la intensidad del campo magnético es $B = 0,8 \text{ T}$, ¿Cuál es la diferencia de potencial que se presenta entre los extremos de dicha barra inmediatamente después de ingresar al campo? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

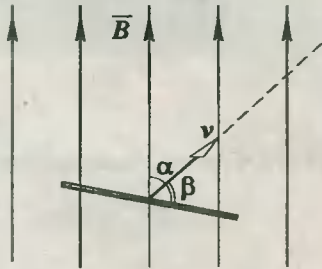


Fig. Prob. 36.4

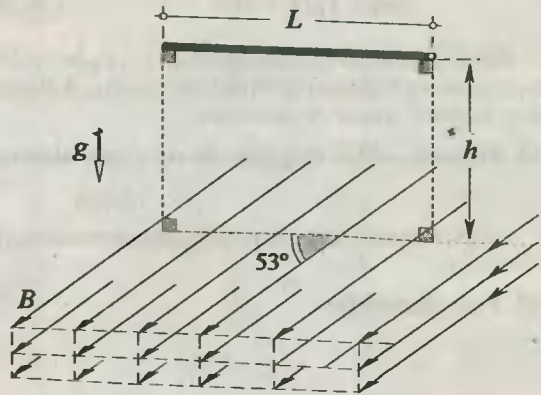


Fig. Prob. 36.5

36.6. En el interior de un ascensor que baja con una aceleración $a = 6 \text{ m/s}^2$ existe un campo uniforme y horizontal de intensidad $B = 1,2 \text{ T}$. En el instante mostrado, una varilla conductora de longitud $l = 1 \text{ m}$ y resistencia $r = 2 \Omega$, se desprende del techo interior y cae horizontalmente. ¿Cuál es la intensidad media de la corriente que se presenta en el instante en que la varilla toca los contactos, cerrando el circuito donde $R = 2r$? ($h = 2 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$).

36.7. Un conductor rectilíneo de longitud $l = 1,2 \text{ m}$ está conectado mediante cables flexibles a una fuente de energía eléctrica con *fem* $\mathcal{E}_1 = 24 \text{ V}$ y resistencia interna de $0,5 \Omega$. Este conductor se introduce en un campo magnético uniforme $B = 0,8 \text{ T}$. La resistencia de todo el circuito exterior es igual a $2,5 \Omega$. Calcular la intensidad de corriente en el conductor en el momento que el mismo se mueve perpendicularmente a las líneas del campo con una velocidad $v = 12,5 \text{ m/s}$.

36.8. Un conductor rectilíneo de longitud $l = 2 \text{ m}$ se encuentra en un campo magnético uniforme de intensidad $B = 0,8 \text{ T}$. Calcular la diferencia de potencial en los extremos del conductor cuando éste gira en un plano, perpendicularmente a las líneas del campo, a la velocidad angular $\omega = 75 \text{ rad/s}$. Considere que el eje de rotación pasa por:

- El extremo P.
- El centro O.
- El punto Q.

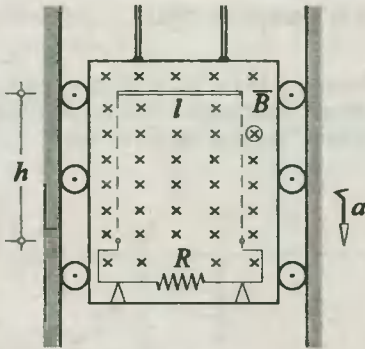


Fig. Prob. 36.6

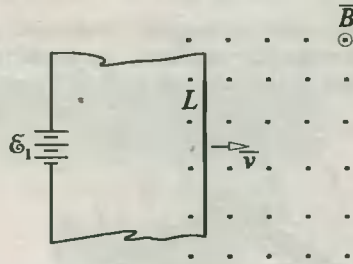


Fig. Prob. 36.7

36.9. En la figura, el campo magnético uniforme y vertical tiene una intensidad $B = 0,4 T$. La barra conductora de longitud $l = 0,5 m$ y masa $m = 100 g$ se desliza por dos guías conductoras horizontales que lo conectan a una resistencia $R = 1,5 \Omega$. La barra se mueve con una velocidad $v = 5 m/s$, que es perpendicular a sí misma, siendo su resistencia $r = 0,5 \Omega$. Calcular:

- La intensidad de corriente del circuito.
- Qué fuerza, en dirección del movimiento será necesario aplicar a la barra para que se mueva uniformemente con la velocidad indicada.
- La potencia térmica que se desprende del circuito.
- La potencia mecánica necesaria para que la barra se mantenga en movimiento, siendo el coeficiente de rozamiento $\mu = 0,1$ ($g = 10 m/s^2$).

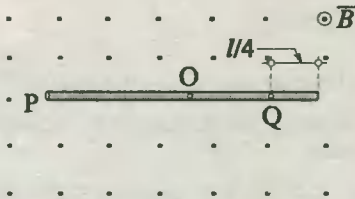


Fig. Prob. 36.8

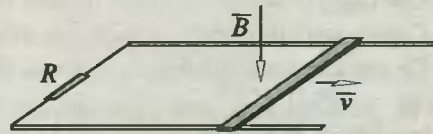


Fig. Prob. 36.9

36.10. Una barra conductora de resistividad ρ y densidad d resbala con velocidad constante v , apoyada sobre dos rieles conductores ideales. Si entre los rieles y la barra existe un coeficiente de fricción cinético μ , determinar la intensidad del campo B que satisface la condición de movimiento uniforme. B es uniforme y perpendicular al plano inclinado.

36.11. Un conductor cuyo vector velocidad tiene como módulo $v = 12 m/s$, y perpendicular a él, se mueve por dos varillas conductoras paralelas que distan $l = 0,2 m$, y están situadas perpendicularmente a un campo magnético uniforme de intensidad $B = 0,5 T$. Calcular:

- La carga q del condensador conectado al circuito, cuya capacidad es $C = 25 \mu F$.
- La energía W del campo eléctrico generado en el capacitor.

Ley de Faraday para espiras

36.12. Un anillo metálico con radio $r = 35 cm$ está ubicado en un campo magnético de $0,5 T$,

perpendicularmente a las líneas del campo. El anillo se retira del campo en $0,025\text{ s}$. ¿Qué *fem* media aparecerá en el anillo en este caso?. ($\pi \approx 22/7$).

36.13. Un cuadro rectangular de alambre que posee los lados $a = 18\text{ cm}$ y $b = 50\text{ cm}$ se encuentra en un campo magnético uniforme, perpendicularmente a las líneas del campo. Calcular la intensidad de este campo, si al eliminarlo en $0,015\text{ s}$, en el cuadro se induce una *fem* media de $4,5\text{ V}$.

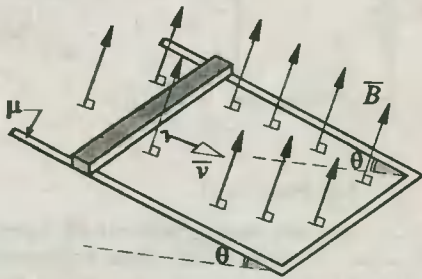


Fig. Prob. 36.10

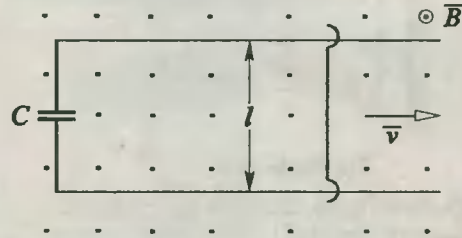


Fig. Prob. 36.11

36.14. Un cuadro de alambre que contiene 40 espiras abarca área de 240 cm^2 . A su alrededor se forma un campo magnético uniforme y perpendicularmente a su plano. Al girar el cuadro en $1/4$ de vuelta en $0,15\text{ s}$, en aquel se induce una *fem* media de $1,6\text{ V}$. Determinar la inducción magnética B del campo.

36.15. En el anillo conductor metálico mostrado de resistencia $R = 0,1\ \Omega$, el flujo magnético aumenta uniformemente en $0,20\text{ Wb}$. Determinar:

- Qué carga pasará por el anillo durante la variación del campo.
- Cómo estará dirigida la corriente de inducción.
- En qué dirección circulará la corriente de inducción al disminuir el flujo magnético.

36.16. El anillo de alambre mostrado, con diámetro $d = 40\text{ cm}$, se encuentra perpendicularmente a las líneas de un campo magnético uniforme $B = 2\text{ T}$. Calcular:

- Qué *fem* inducida media surgirá en el circuito, si en $\Delta t = \pi/10\text{ s}$ éste adquiere la forma de un ocho.
- Qué carga pasará por el circuito durante la variación de su forma, si la resistencia del conductor es $R = 0,1\ \Omega$. $d_1 = d/4$.

36.17. Un cuadro con 25 espiras se encuentra en un campo magnético. Calcular la *fem* de inducción que surgirá en el cuadro al cambiar el flujo magnético que lo atraviesa desde $0,098\text{ Wb}$ hasta $0,034\text{ Wb}$ en $0,16\text{ s}$.

36.18. Un cuadro de alambre conductor tiene una resistencia total de $2\ \Omega$, y se encuentra colocado normalmente a un campo magnético uniforme B . Si el flujo Φ que lo atraviesa varía linealmente con el tiempo según como se indica en la figura, calcular:

- La potencia que se disipa en el cuadro.
- La intensidad del campo en el instante $t = 8\text{ s}$.

36.19. El flujo a través de una espira conductora viene dado por el gráfico $\Phi - \text{vs} - t$ mostrado. ¿Cuál es la fuerza electromotriz inducida en la espira en el instante $t = 8\text{ s}$?



Fig. Prob. 36.15

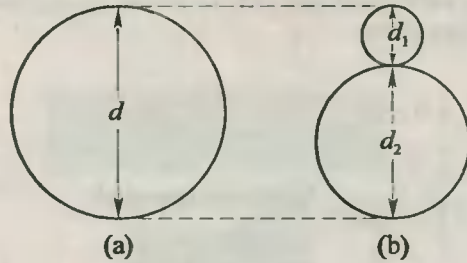


Fig. Prob. 36.16

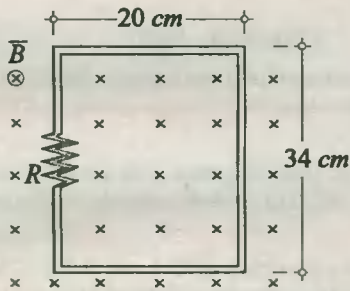
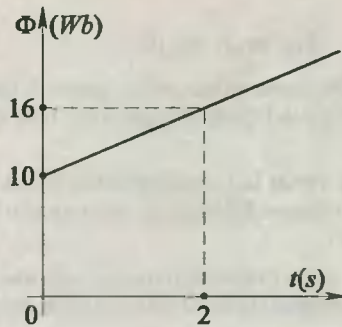


Fig. Prob. 36.18



Inductancia y fem autoinducida

36.20. Calcular la inductancia de un solenoide de 10 cm de longitud, 100 espiras y 5 cm² de sección recta.

36.21. La inductancia de una bobina compacta que tiene 100 vueltas es 10 mH. Calcular el flujo magnético total a través de la bobina cuando la corriente es 0,5 mA.

36.22. ¿Qué fem autoinducida surge en una bobina con inductancia de 60 mH, si la corriente que circula por ella, igual a 3,6 A, desaparece en 0,012 s?

36.23. ¿En el transcurso de qué tiempo la corriente en una bobina cuya inductancia es 240 mH aumenta desde cero hasta 2 A, si la fem autoinducida media que surge es 30 V?

36.24. Calcular la energía del campo magnético de una bobina que contiene 120 espiras, si cuando por ella circula una corriente de 7,5 A, el flujo magnético en la misma es $2,5 \cdot 10^{-3}$ Wb.

36.25. Calcular la intensidad del campo magnético B en el interior de una bobina de 200 espiras cuya sección interior tiene un área de $5 \cdot 10^{-3}$ m², si se sabe que la circula una corriente cuya intensidad es 50 A, la cual permite almacenar una energía magnética de 15 J.

36.26. En la figura mostrada, la bobina con resistencia igual a 8 Ω e inductancia $L = 25$ mH se mantiene una tensión constante $\mathcal{E}_1 = 48$ V. Calcular:

- a) Cuánta energía se desprenderá al abrir el circuito de la bobina.
 b) Qué *fem* autoinducida aparecerá en este caso en la bobina, si la energía se desprende en 12 milisegundos.

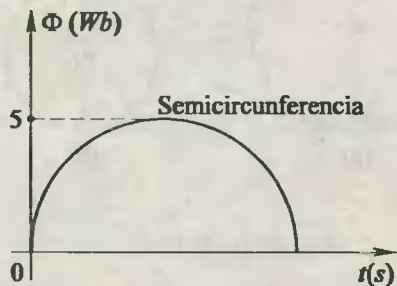


Fig. Prob. 36.19

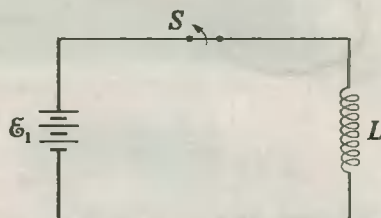


Fig. Prob. 36.26

36.27. Calcular la inductancia de un solenoide en el que, aumentando paulatinamente la corriente en 2 A, la energía del campo magnético crece en 0,01 J. La intensidad de corriente media en el circuito es 5 A.

36.28. Al variar la corriente desde 2,5 A hasta 14,5 A, el flujo magnético de un solenoide sin núcleo, que contiene 800 *espiras*, aumenta en $2,4 \cdot 10^{-3}$ Wb. ¿Cuál será el coeficiente de autoinducción de la bobina?

36.29. El flujo magnético que genera una espira que lleva corriente de 2 A es 0,8 Wb. Calcular la fuerza electromotriz autoinducida en la espira mostrada, si la corriente se duplica uniformemente en 0,2 s.

36.30. Una espira conductora es recorrida por una corriente variable i . Si en el instante $t = 0$ s el flujo que genera es 0,8 Wb, ¿Cuál es la *fem* autoinducida en la espira?

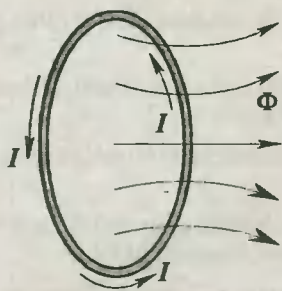


Fig. Prob. 36.29

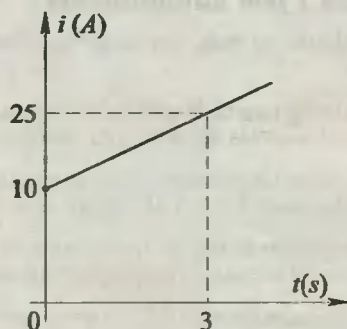


Fig. Prob. 36.30

Corriente alterna y transformadores

36.31. Un cuadro con 100 *espiras* gira uniformemente en un campo magnético uniforme con intensidad $B = 0,7$ T con respecto a un eje inmóvil y perpendicular a las líneas del campo, realizando

360 rpm. La longitud de cada lado del cuadro, paralelo al eje de rotación es 0.5 m , y la distancia hasta el eje de rotación es $\sqrt{2}/5\text{ m}$, calcular la dependencia entre la fem inducida y el tiempo. Asimismo, calcular los valores máximo y efectivo de la fem. ($\pi \approx 22/7$).

36.32. Una espira rectangular de 0.03 m^2 de sección gira alrededor del eje OO' a razón de 10 rpm en un campo de inducción magnética uniforme $B = 10\text{ T}$. Si en el instante $t = 0\text{ s}$ el plano de la espira es perpendicular al campo B , ¿Cuál es la fuerza electromotriz inducida a los 0.5 s de iniciado el movimiento?

36.33. Un voltímetro conectado en un circuito de corriente alterna registra 220 V . ¿Para qué tensión deberá ser calculado el aislamiento en dicho circuito?

36.34. En el esquema se muestra un generador cuya tensión viene dada por el gráfico $\mathcal{E} - \text{vs} - t$. Si este generador alimenta una carga puramente resistiva $R = 40\ \Omega$, determinar:

- La ecuación para el valor instantáneo de la corriente.
- El valor efectivo de la intensidad de corriente.
- La potencia activa que se desprende de la carga.

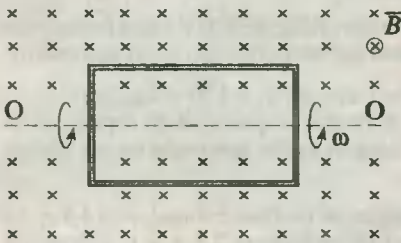


Fig. Prob. 36.32

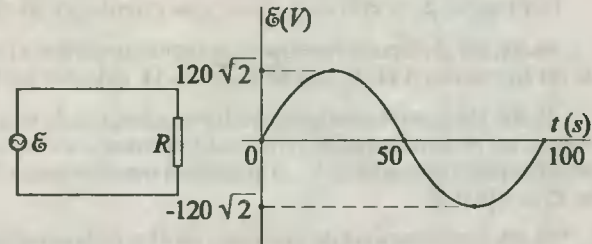


Fig. Prob. 36.34

36.35. Los valores efectivos de la tensión y corriente en una bobina son 157 V y 2 A respectivamente. Calcular la inductancia de la bobina, si la frecuencia de la corriente alterna es 50 Hz .

36.36. Si la corriente alterna que pasa por un condensador tiene un valor efectivo de 5 A , determinar el valor de la tensión eficaz que soporta, si su capacidad es $C = 50\ \mu\text{F}$, siendo la frecuencia de 60 Hz .

36.37. Para un circuito de corriente alterna sin ramificaciones, las resistencias son iguales a $P = 3\ \Omega$, $X_L = 6\ \Omega$, $X_C = 2\ \Omega$.

- Trazar el diagrama fasorial
- Calcular la impedancia Z del circuito.
- Calcular el factor de potencia.

36.38. El circuito RLC mostrado se alimenta con un voltaje alterno de la forma:

$$\mathcal{E} = 150\sqrt{2}\sin(2000t)$$

¿Cuál será el voltaje a través del inductor, si $R = 15\ \Omega$, $X_L = 26\ \Omega$, $X_C = 6\ \Omega$?

36.39. En un circuito RLC los voltajes eficaces a través de cada uno de los elementos son: $V_R = 60\text{ V}$, $V_L = 40\text{ V}$, y $V_C = 85\text{ V}$ respectivamente. Calcular:

- El voltaje eficaz de la fuente conectada entre los extremos del circuito.

b) Su factor de potencia.

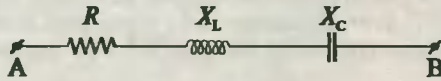


Fig. Prob. 36.37

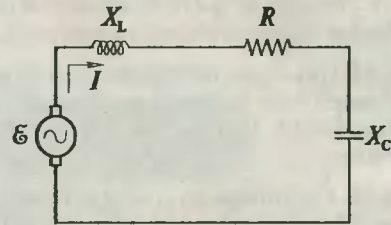


Fig. Prob. 36.38

36.40. En un circuito RLC en serie se sabe lo siguiente: $R = 80 \Omega$, $X_L = 40 \Omega$, y el voltaje eficaz a través de su resistencia es $V_R = 40 \text{ V}$. La corriente está adelantada 37° respecto al voltaje de la fuente. Calcular:

- La reactancia capacitiva.
- El valor de la corriente eficaz que circula por el circuito.

36.41. En el circuito mostrado, la fuente suministra una tensión eficaz de 220 V a una frecuencia de 60 Hz . Si $R = 3 \Omega$, $X_L = 4 \Omega$, y $X_C = 8 \Omega$, calcular las lecturas del amperímetro y del voltímetro.

36.42. Un transformador elevador se alimenta de una red con tensión $V_1 = 120 \text{ V}$. La cantidad de espiras en el arrollamiento o devanado primario es $N_1 = 90$. Calcular la cantidad de espiras en el arrollamiento secundario N_2 , si cuando el transformador funciona en vacío, la tensión en sus bornes es $V_2 = 3\,000 \text{ V}$.

36.43. La intensidad de corriente en el arrollamiento primario de un transformador es $4,8 \text{ A}$; la tensión en sus bornes es 127 V ; la intensidad de corriente en el secundario es $2,5 \text{ A}$, y la tensión en sus bornes es 220 V . Calcular el rendimiento del transformador.

36.44. El transformador mostrado, con núcleo de sección uniforme tiene en el primario $N_1 = 100$ espiras, y en el secundario $N_2 = 200$ espiras, y se alimenta con una tensión de 200 V . ¿Qué tensión habrá en el arrollamiento secundario?

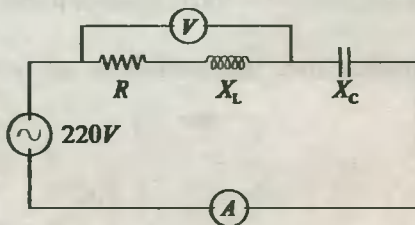


Fig. Prob. 36.41



Fig. Prob. 36.44

37

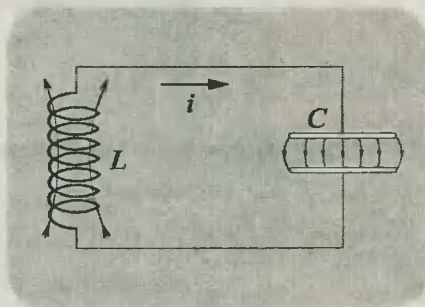
Ondas Electromagnéticas Ondas Luminosas

37.1. Circuito oscilante L-C

Es aquel constituido por una bobina y un condensador en el cual la energía se convierte sucesivamente en energía magnética y eléctrica, pasando alternadamente de uno al otro.

37.2. Línea de transmisión

Es todo aquel dispositivo que permite conducir una pulsación electromagnética. Las más comunes están constituidas por un cable coaxial. Aquí la pulsación eléctrica crea en el interior un campo eléctrico variable, el cual genera una corriente oscilante, y ésta un campo magnético variable simultáneamente. Esta pulsación se desarrolla como una onda viajera de velocidad finita (c).



37.3. Principio de Maxwell para la radiación electromagnética

“Todo campo eléctrico variable genera un campo magnético también variable, y viceversa”.

37.4. Fuentes de radiaciones electromagnéticas

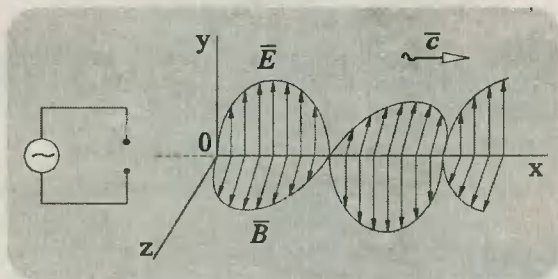
Son todas aquellas instalaciones eléctricas en las que por medio de un dipolo (dos bornes de diferente polaridad) estimulado en forma vibratoria se generan campos eléctricos variables entre ellos, lo que a su vez origina campos magnéticos oscilantes, los mismos que son enviados al espacio en toda dirección y sentido.

37.5. Ondas electromagnéticas

Las radiaciones electromagnéticas que proceden de una fuente armónica tienen sus componentes eléctrica y magnética vibrando en fase y en planos mutuamente perpendiculares.

$$E = E_m \text{sen}(kx - \omega t) \quad (37.1)$$

$$B = B_m \text{sen}(kx - \omega t) \quad (37.2)$$



siendo E_m y B_m los máximos valores del campo eléctrico y magnético respectivamente. El plano de oscilación (XZ) del campo eléctrico es el llamado *plano de vibración*, y el plano de oscilación (YZ) del campo magnético es el llamado *plano de polarización*.

37.6. Ley de Faraday (versión Maxwell)

$$\frac{\Delta B}{\Delta x} = -\frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (37.3)$$

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{\omega}{k} \quad (37.4)$$

37.7. Ley de Ampere (versión Maxwell)

$$\frac{\Delta B}{\Delta x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (37.5)$$

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{k}{\mu_0 \epsilon_0 \omega} \quad (37.6)$$

37.8. Velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas (c)

$$c = \omega/k \quad (37.7)$$

$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 3.10^8 \text{ m/s} \quad (37.8)$$

$$c = \lambda T = \lambda f \quad (37.9)$$

$$E = cB \quad (37.10)$$

(*) La expresión (37.8) se ha obtenido relacionando (37.4), (37.6) y (37.7). El valor de c es también la **velocidad de la luz**, lo que permite asegurar que la luz es la parte visible del espectro electromagnético. λ , T y f son respectivamente la longitud de onda, el periodo y la frecuencia. E y B son los valores instantáneos del campo eléctrico y magnético respectivamente.

37.9. Vector de Poynting o intensidad de radiación (S)

$$S = UIAt \quad (\text{watt/m}^2) \quad (37.11)$$

$$|\vec{S}| = (1/\mu_0)EB \quad (37.12)$$

$$S_m = \left(\frac{1}{2\mu_0} \right) E_m B_m \quad (37.13)$$

siendo \vec{S} el flujo de energía a través de la unidad de área normal a la propagación en cada unidad de tiempo. El vector S es perpendicular al plano formado por E y B , y avanza en la dirección de propagación. S_m es el valor medio de S .

37.10. Naturaleza electromagnética de la luz

“Luz es toda radiación electromagnética que puede estimular al ojo”.

La máxima sensibilidad relativa del ojo de un observador de referencia se presenta cuando la longitud de la radiación luminosa es $\lambda = 5550 \text{ \AA}$, que corresponde al color verde-amarillo. La luz en el vacío se propaga con la velocidad $c = 3.10^8 \text{ m/s}$.

37.11. Energía y cantidad de movimiento de la luz

Toda radiación luminosa transmite energía sobre los cuerpos iluminados, pero además cantidad de movimiento, debido a la excitación de los electrones principalmente, los cuales se ven sometidos a los campos eléctricos y magnéticos de la radiación.

$$P = U/c \quad (\text{absorción total}) \quad (37.13)$$

$$P = 2U/c \quad (\text{reflexión total}) \quad (37.14)$$

siendo U la energía que llega a la superficie irradiada durante el tiempo de exposición, y P la cantidad de movimiento.

37.12. Espectro luminoso

COLOR	λ (Å)	$f(10^{14} \text{ Hz})$
Rojo	6 220 - 7 800	4,82 - 3,84
Naranja	5 970 - 6 220	5,03 - 4,82
Amarillo	5 770 - 5 970	5,20 - 5,03
Verde	4 920 - 5 770	6,10 - 5,20
Azul	4 550 - 4 920	6,59 - 6,10
Violeta	3 900 - 4 550	7,69 - 6,59

Del cuadro se desprende la característica de que a mayor longitud de onda corresponde una menor frecuencia. Además, la separación entre dos colores consecutivos no es rígida. Por tanto, los intervalos de valores mostrados en el cuadro son aproximados. Asimismo, el cuadro de valores se ha obtenido para una radiación electromagnética que se propaga en el vacío.

$$(*) 1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}; 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}.$$

PROBLEMAS

Ondas electromagnéticas

37.1. Una onda armónica de color naranja se desplaza en un medio líquido transparente de manera que su componente magnética viene dada por la siguiente ecuación:

$$B = 4 \cdot 10^{-6} \text{ sen} 2\pi(2,5 \cdot 10^6 x - 5 \cdot 10^{14} t) \quad (\text{Unidades SI})$$

Determinar:

- La frecuencia.
- La longitud de onda.
- La velocidad de propagación.

37.2. Una onda de radio de frecuencia modulada (FM) tiene un campo eléctrico que viene dado en unidades SI, por la ecuación: $E = 120\sqrt{\pi} \text{ sen}\pi(0,1x - 3 \cdot 10^7 t)$. Determinar la intensidad de radiación media de la onda.

37.3. Una onda se propaga en un medio de tal manera que a través de una superficie de 4 m^2 de área, normal a la dirección de propagación de las ondas, pasa una energía de 520 J en 20 s . ¿Cuál es la intensidad de radiación de las ondas?

37.4. Un rayo laser emite un haz de luz uniforme y cilíndrico con una potencia de $50\pi \text{ W}$. Si la intensidad de radiación es 8 W/m^2 , calcular el diámetro de la radiación.

37.5. Una estación de televisión irradia ondas electromagnéticas en todas direcciones por igual. Si la intensidad de la radiación a 2 km de distancia es $5/\pi \text{ W/m}^2$, calcular la potencia que se emite desde la estación.

37.6. Una antena de radio emite una potencia de $1,2\text{ MW}$. Hallar la amplitud de E y B en la onda a 10 km de la antena. Supóngase que la potencia está distribuida uniformemente sobre una semiesfera centrada en la antena.

37.7. Una persona decidió alquilar una habitación en una azotea cercana a una estación de radio cuya potencia de radiación es $5 \cdot 10^{12}\text{ W}$. Al tomar posesión de su habitación decidió instalar un tubo fluorescente de 220 V y $1,1\text{ m}$ de longitud, sorprendiéndose que éste se encendió antes de conectarlo a sus terminales. ¿A qué distancia se encuentra su habitación de la estación?

Propagación de la luz

37.8. Definir el radio del globo terráqueo, si la luz en el vacío recorre una distancia igual a la longitud del Ecuador de la Tierra en $0,139\text{ s}$.

37.9. Se sabe que el hombre percibe como luz la radiación desde $4 \cdot 10^{14}$ hasta $7,5 \cdot 10^{14}\text{ Hz}$. Definir el intervalo de longitudes de onda de la radiación electromagnética en el vacío, que provoca en la gente la sensación de luz.

37.10. Al ojo de un hombre penetra una radiación electromagnética con una longitud de onda de 316 nm . ¿Percibirá el hombre esta radiación como luz?

37.11. ¿Cuáles son la frecuencia y el periodo de la luz para los cuales el ojo tiene su máxima sensibilidad?

37.12. Una nave espacial que se acerca a la Tierra con velocidad $0,2c$ emite una luz verde con longitud de onda de $5\,000\text{ \AA}$. Determinar:

- Cuál es la longitud de onda que se observa en la Tierra.
- De qué color es la luz que se observa en la Tierra.

37.13. El periodo de rotación del Sol en su Ecuador es $24,7\text{ días}$, y su radio es $7 \cdot 10^8\text{ m}$. ¿Qué cambios en su longitud de onda por efecto Doppler son de esperarse para las longitudes de onda características en la vecindad de $5\,500\text{ \AA}$ emitidas por el borde del disco solar?

37.14. La radiación del Sol llega a la Tierra con una intensidad de $1\,400\text{ W/m}^2$. Suponiendo que la Tierra se comporta como un disco plano perpendicular a los rayos, y que toda la energía incidente es absorbida, calcular la fuerza debida a la presión de radiación sobre la Tierra (Radio terrestre = $6\,400\text{ km}$).

37.15. Una pequeña nave espacial cuya masa incluyendo al tripulante es $1\,460\text{ kg}$ está abandonada en los espacios interestelares, en donde no hay campo gravitatorio. Si lleva un faro que irradia 10^4 watts al espacio, ¿Qué velocidad alcanzaría al cabo de un día en virtud de la fuerza de reacción producida como consecuencia de la cantidad de movimiento que se lleva el haz de luz?

REFLEXION DE LA LUZ

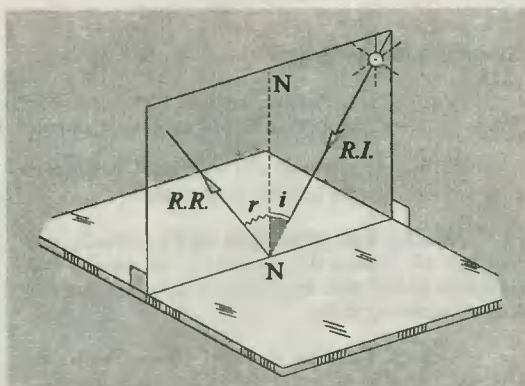
38.1. Leyes de la reflexión

38.1. a) 1° Ley.- Los rayos incidente y reflejado, así como la normal trazada en el punto de incidencia están contenidos en un plano perpendicular a la superficie de reflexión.

38.1. b) 2° Ley.- El ángulo de incidencia formado por el rayo incidente y la normal es igual al ángulo de reflexión que forman el rayo reflejado y la normal.

$$i = r$$

(38.1)



38.2. Espejos planos

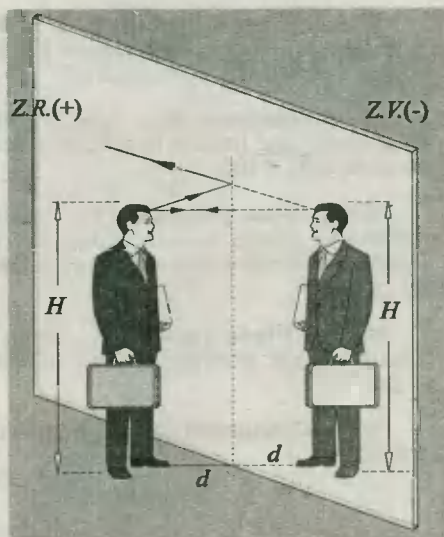
Son superficies planas pulimentadas y perfectamente reflectoras. Cuando el espejo es perfecto, no puede verse directamente.

38.2.a) Objeto.- Figura luminosa o iluminada colocada delante del espejo, y del cual salen los rayos luminosos.

38.2.b) Imagen.- Figura que se forma por la intersección de los rayos reflejados o de sus prolongaciones. Su tamaño es igual al del objeto, y ambos equidistan del espejo.

38.2.c) Zona real (Z.R.).- Región del espacio que se encuentra delante del espejo. Toda imagen ubicada en esta zona se llamará **imagen real**, y será invertida. Aquí las distancias son positivas.

38.2.d) Zona virtual (Z.V.).- Región del espacio hipotéticamente colocada detrás del espejo. Toda imagen ubicada en esta zona se llamará **imagen virtual**, y será derecha. Aquí las distancias son negativas.



38.3. Espejos angulares

Sistema formado por dos espejos planos que forman un ángulo diedro. En estos espejos se forman imágenes múltiples por reflexión sucesiva, y ubicadas en una circunferencia. Si θ es el ángulo entre los espejos y N las imágenes completas, se verifica lo siguiente:

$$N = \frac{360^\circ}{\theta} - 1 \quad (38.2)$$

38.4. Espejos paralelos

Son dos espejos planos colocados frente a frente, en los que se forman infinitas imágenes. Si d es la distancia entre los espejos, entonces la distancia entre dos imágenes de la misma serie y de orden n estarán separadas una distancia D dada por:

$$D = 2nd \quad (38.3)$$

38.5. Espejos esféricos

Son superficies reflectoras formadas sobre un casquete esférico. Se llamará **cóncavo** si el espejo está en el interior del casquete, y **convexo** si está en la parte externa del mismo.

38.5.a) Centro de curvatura (C).- Centro de la esfera que da origen al espejo.

38.5.b) Eje principal (EP).- Recta que pasa por el centro de curvatura, de modo que cualquier plano que lo contiene divide al espejo en dos partes iguales.

38.5.c) Vértice o polo (V).- Punto de intersección del espejo con el eje principal.

38.5.d) Radio de curvatura (R).- Radio de la esfera que da origen al espejo.

38.5.e) Sección principal (AVB).- Intersección del espejo con cualquier plano que pasa por el eje principal. Es un arco.

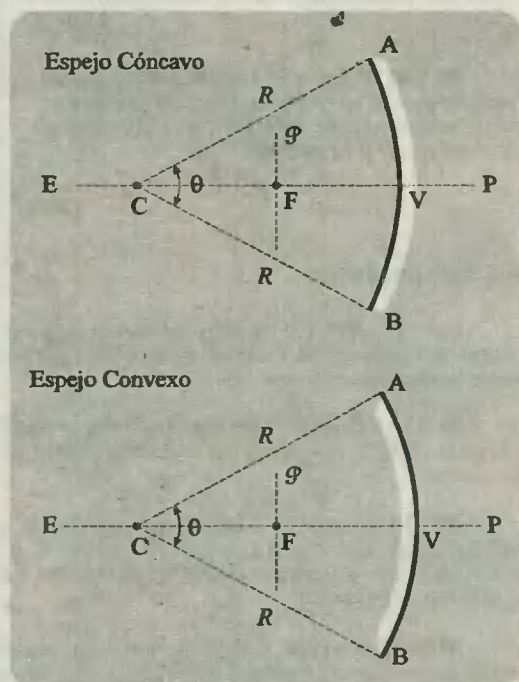
38.5.f) Abertura (θ).- Angulo formado por los radios que limitan la sección principal. Su medida es $\theta < 10^\circ$.

38.5.g) Foco principal (F).- Punto del eje principal donde se concentran los rayos reflejados que inciden en el espejo paralelamente al eje principal.

38.5.h) Plano focal (\mathcal{P}).- Plano perpendicular al eje principal, y que contiene al foco principal.

38.5.i) Distancia focal (f).- Distancia que existe entre el foco principal y el vértice. Su valor está dado por:

$$f = \pm R/2 \quad (38.4)$$



donde el signo será positivo (+) si el espejo es cóncavo, y negativo (-) si el espejo es convexo.

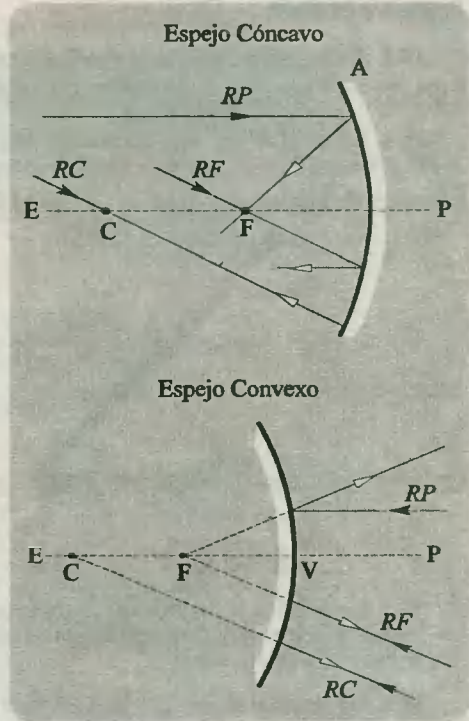
38.6. Rayos principales

Sirven para la construcción de imágenes.

38.6.a) Rayo paralelo (RP).- Rayo de luz que llega al espejo paralelamente al eje principal, y que al reflejarse lo hace pasando por el foco principal.

38.6.b) Rayo focal (RF).- Rayo de luz que llega al espejo pasando por el foco, y se refleja paralelamente al eje principal.

38.6.c) Rayo central (RC).- Rayo de luz que llega al espejo pasando por el centro de curvatura, y al reflejarse se confunde con el rayo incidente.



38.7. Ecuación de Descartes

- f = Distancia focal
- i = Distancia de la imagen al espejo
- o = Distancia del objeto al espejo

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o} \tag{38.5}$$

- (+) Imagen real e invertida
- (-) Imagen virtual y derecha

(o) = (+) siempre

38.8. Aumento (A)

$$A = - i/o \tag{38.6}$$

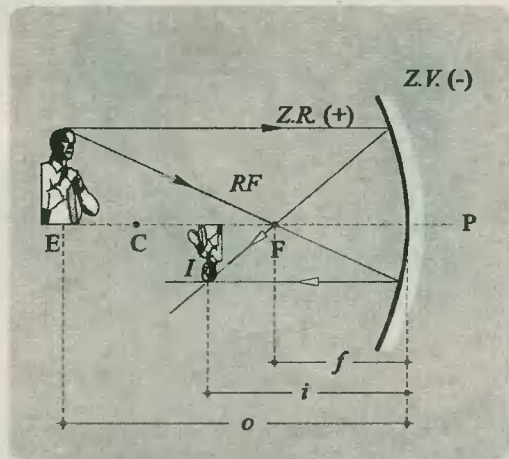
$$A = \sqrt{\frac{\text{Altura de la imagen}}{\text{Altura del objeto}}} \tag{38.7}$$

- (+) Imágen virtual
- (-) Imágen real

- > 1: Imágen mayor
- = 1: Imágen igual
- < 1: Imágen menor

38.9. Fórmula de Newton

$$f^2 = d_1 \cdot d_2 \tag{38.8}$$



siendo d_1 y d_2 la distancia del foco al objeto y del foco a la imágen respectivamente.

PROBLEMAS

Espejos planos

38.1. Calcular la distancia entre la esferita **E** y su correspondiente imagen, sabiendo que $h = 6\text{ cm}$, $a = 5\sqrt{3}\text{ cm}$, y $\theta = 60^\circ$. Calcular también la distancia de la imagen al piso.

38.2. Un niño cuyos ojos se encuentran a 50 cm del piso ve totalmente la imagen de una persona de $H = 1,73\text{ m}$ de estatura, que se encuentra en el extremo de un charco de agua. Si el charco refleja nítidamente la imagen de la persona, ¿Cuál es la longitud del charco, si además $a = 50\sqrt{3}\text{ cm}$?

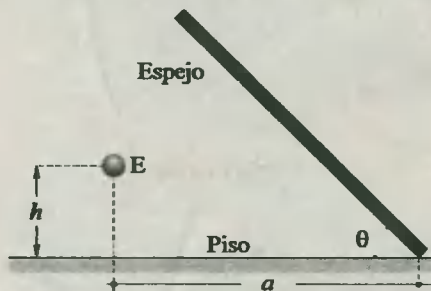


Fig. Prob. 38.1

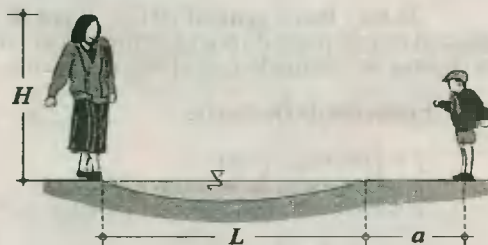


Fig. Prob. 38.2

38.3. Un hombre de $1,70\text{ m}$ de estatura tiene sus ojos a 10 cm por debajo del límite de su cabeza. Calcular el mínimo ángulo θ que debe formar un espejo cuya base se encuentra en **O** para que pueda ver sus pies en dicho espejo.

38.4. Un deportista de $1,73\text{ m}$ de estatura tiene sus pies a la distancia $a = 1\text{ m}$ de la base de un espejo plano e inclinado un ángulo $\theta = 60^\circ$ respecto a la horizontal. Determinar la longitud mínima de este espejo para que el deportista puede ver su imagen completa.

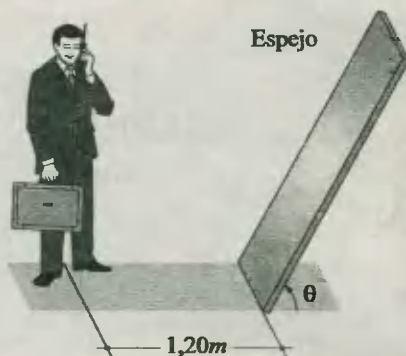


Fig. Prob. 38.3

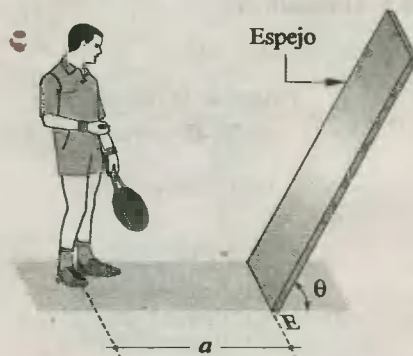


Fig. Prob. 38.4

38.5. Un hombre de $1,60\text{ m}$ de altura se encuentra a 2 m de una pared vertical, en donde se ha colocado un espejo de 80 cm de altura, y cuyo extremo inferior se encuentra a 1 m del piso. ¿Qué porcentaje de su estatura logra ver el hombre de su respectiva imagen, si sus ojos están a 8 cm del extremo superior de su cabeza?

38.6. Una modelo de 1,70 m de estatura está frente a un espejo plano de 70 cm de altura colocado verticalmente sobre una mesita de 40 cm de altura. El espejo y la modelo se encuentran en posición vertical a 90 cm de distancia. De los ojos hasta el borde inferior del espejo hay 1,5 m de distancia. ¿Cuál es la altura de la imagen observable?.

38.7. Un espejo cuadrado de lado $a = 40 \text{ cm}$ se encuentra en una pared vertical, según se indica en la figura. Al encenderse la lámpara incandescente F, el espejo proyecta sobre el piso una zona iluminada por reflexión. ¿Cuál es el lado del cuadrado iluminado?.

38.8. Una mosca vuela a razón de 50 cm/s en línea recta dirigiéndose hacia un espejo plano. A partir del instante mostrado, ¿Qué tiempo debe mantenerse la mosca en movimiento para que entre ella y su imagen la distancia sea 60 cm ?.

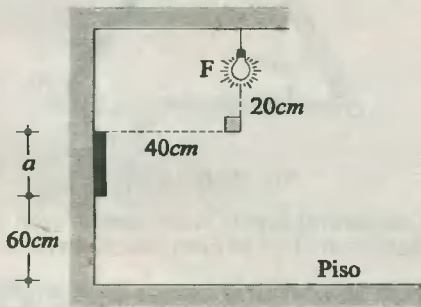


Fig. Prob. 38.7

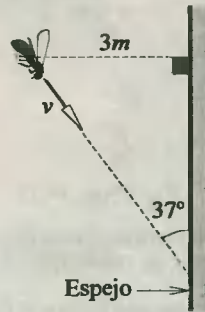


Fig. Prob. 38.8

38.9. Un espejo se encuentra instalado en un coche que se aleja de un observador con una velocidad $v_E = 20 \text{ cm/s}$. Determinar qué distancia se habrá desplazado la imagen del observador al cabo de un tiempo $t = 6 \text{ s}$, transcurridos a partir de la posición mostrada en la figura.

38.10. Un espejo gira con una velocidad angular constante $\omega = 4 \text{ rad/s}$. ¿Con qué velocidad mínima deberá correr un roedor por la superficie interna del casquete de $1,5 \text{ m}$ de radio para no ser alcanzado por una radiación letal que sale de la linterna F?.

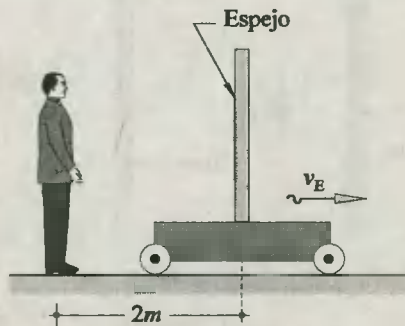


Fig. Prob. 38.9

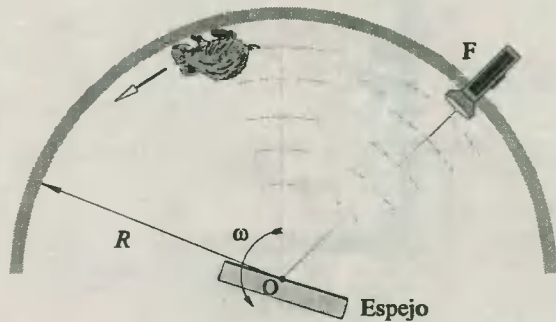


Fig. Prob. 38.10

38.11. En la figura se muestra el esquema de un galvanómetro. El rayo luminoso xy se encuentra en posición cero. El espejo refleja este rayo sobre una escala SC situada a 20 cm de distancia del punto

x. Cuando la intensidad de la corriente que circula por el galvanómetro alcanza 20 A, el espejo gira hasta ponerse en posición $E'E'$. ¿Qué ángulo ha girado el espejo, si en la escala $1 A \triangleq 7,5 mm$?

38.12. Dos espejos planos forman un ángulo diedro de abertura $\theta = 60^\circ$. Construir las imágenes que se formarán del lápiz bicolor ubicado entre ellos, si se sabe que $OA = OB$.

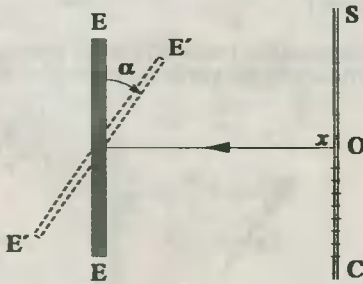


Fig. Prob. 38.11

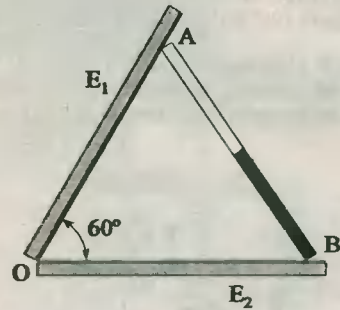


Fig. Prob. 38.12

38.13. Determinar entre qué valores deberá estar comprendido el ángulo diedro que forman dos espejos planos, de modo que el número de imágenes completas visibles en ellos sea cuatro ($N = 4$).

38.14. Dos espejos planos forman un ángulo diedro recto. Una pelota es lanzada desde un punto A del espejo E_1 con una velocidad $v = 6 \text{ cm/s}$ en una dirección indicada por $\theta = 53^\circ$. Se desea averiguar cuál es la distancia mínima entre la pelota y su tercera imagen formada en los espejos, e indicar además el tiempo que transcurrió desde que A partió hasta que se presentó la distancia mínima. Despreciar la gravedad.

38.15. Las quintas imágenes de cada serie que se forman en los espejos paralelos se encuentran a la distancia de 2,5 m. Determinar a qué distancia está el objeto luminoso del espejo E_1 , si dista 20 cm de E_2 .

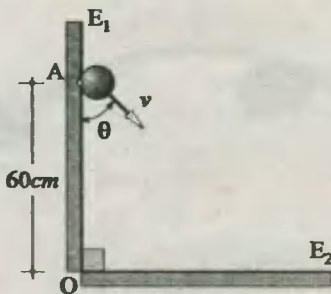


Fig. Prob. 38.14

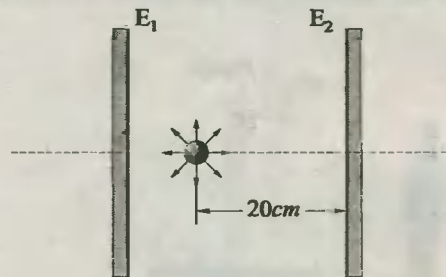


Fig. Prob. 38.15

Espejos esféricos

38.16. ¿Cuál es el aumento que origina un espejo cóncavo de distancia focal $f = 30 \text{ cm}$ cuando se coloca un objeto a 90 cm del espejo?.

38.17. Un objeto de 8 cm de altura se coloca perpendicularmente al eje óptico de un espejo cóncavo de distancia focal $f = 20\text{ cm}$. Si el objeto se encuentra a 10 cm del espejo, calcular:

- a) Las características de la imagen.
- b) La distancia entre el objeto y su imagen.

38.18. La imagen real de un objeto producida por un espejo cóncavo de 20 cm de distancia focal es cuatro veces el tamaño del objeto. ¿A qué distancia se encuentra el objeto del espejo?

38.19. Un objeto se coloca frente a un espejo cóncavo cuyo radio de curvatura es $R = 120\text{ cm}$, el cual proyecta una imagen real e invertida. Si la altura del objeto es $h_o = 30\text{ cm}$, y la de su imagen $h_i = 20\text{ cm}$, calcular a qué distancia se encuentra el objeto de su correspondiente imagen.

38.20. Un objeto luminoso se encuentra entre una pared vertical y un espejo cóncavo de $1,2\text{ m}$ de distancia focal. Sabiendo que la imagen se proyecta sobre la pared, ¿A qué distancia de la pared se encuentra el espejo, si el objeto se ubica a $1,8\text{ m}$ de aquella?

38.21. Un espejo esférico cóncavo da una imagen real cuyo tamaño es tres veces mayor que el objeto. Determinar la distancia focal del espejo, si la distancia entre el objeto y su imagen es 20 cm .

38.22. Valiéndose de un espejo esférico se ha obtenido una imagen $A_1B_1 = 9\text{ cm}$ del objeto $AB = 15\text{ cm}$. Determinar a qué distancia se encuentra el objeto del espejo, y su distancia focal, e indicar el tipo de espejo.

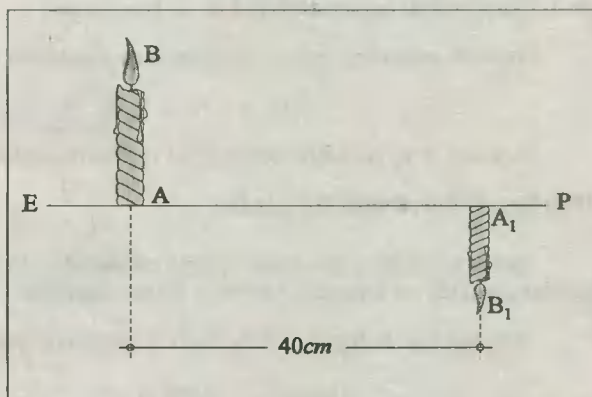


Fig. Prob. 38.22

38.23. Un objeto luminoso se encuentra a 60 cm de un espejo cóncavo. Si el objeto se acerca 10 cm al espejo, la distancia entre éste y la imagen se hace $5/3$ veces mayor. Calcular la distancia focal del espejo.

38.24. Un objeto está ubicado ante un espejo esférico cóncavo perpendicularmente a su eje óptico principal, de tal manera que la imagen resultó aumentada tres veces. Después que alejaron el objeto una distancia $d = 80\text{ cm}$ del espejo, la imagen resultó dos veces menor que el objeto. Calcular el radio de curvatura del espejo.

38.25. Un objeto luminoso colocado frente a un espejo produce una imagen real cuyo tamaño es tres veces mayor que el objeto. Al desplazarlo la distancia $d = 18\text{ cm}$ produce una imagen virtual del mismo tamaño que en el caso anterior. Calcular la distancia entre estas dos imágenes, e indicar además el tipo de espejo.

38.26. En un espejo esférico convexo se obtiene la imagen de un objeto reducida diez veces, que dista $1,8\text{ m}$ del espejo. Calcular el radio de curvatura del espejo.

38.27. Un objeto se pone frente a un espejo de modo que la imagen virtual es dos veces menor. Al alejarlo del espejo una distancia $d = 30\text{ cm}$ el tamaño de la imagen es cinco veces menor. ¿Cuál es la distancia focal del espejo?

39

Refracción de la luz

39.1. Índice de refracción absoluto (n)

$$n = c/v \quad ; \quad n \geq 1 \quad (39.1)$$

siendo v la velocidad de la luz en el medio transparente, y $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Cada sustancia transparente tiene su propio índice de refracción (densidad óptica), el cual se obtiene utilizando luz monocromática. El valor de n depende de la frecuencia o longitud de onda de la radiación; así, cuanto mayor sea la frecuencia (y menor la longitud de onda), mayor es el índice de refracción correspondiente.

39.2. Principio de invariabilidad de la frecuencia

Durante una refracción la frecuencia de radiación no se altera, de manera que:

$$n_1/n_2 = v_2/v_1 = \lambda_2/\lambda_1 \quad (39.2)$$

siendo v_1 y v_2 las velocidades de la radiación en los medios 1 y 2 respectivamente.

39.3. Leyes de refracción de la luz

1ra ley.- El rayo incidente, el rayo refractado y la normal trazada a la interfase en el punto de incidencia están en un plano normal a dicha superficie.

2da ley.- Se le llama *Ley de Snell*, y establece que:

$$n_1 \cdot \text{sen} \alpha_1 = n_2 \cdot \text{sen} \alpha_2 \quad (39.3)$$

siendo α_1 y α_2 los ángulos de incidencia y refracción en los medios 1 y 2 respectivamente.

39.4. Angulo límite (L)

$$\text{sen} L = n_2/n_1 \quad (39.4)$$

siendo L el ángulo de incidencia de la luz en el medio 1 (n_1), y que al pasar al medio 2 (n_2) lo hace de manera que el rayo refractado se "pega" a la interfase.

39.5. Reflexión total

Fenómeno que se presenta cuando los rayos luminosos inciden en una interfase con un ángulo mayor que el ángulo límite, eliminándose la refracción y produciéndose reflexión.

39.6. Refracción en láminas transparentes paralelas

Todo rayo que incide sobre la cara de una lámina emerge de ella de manera paralela a su dirección inicial.

39.7. Profundidad aparente (h_i)

$$h_i/h_o = n_2/n_1 \quad (39.5)$$

en el cual el objeto está en el medio de índice de refracción n_1 , y el observador en el medio de índice de refracción n_2 . Asimismo, la profundidad real del objeto es h_o , y la profundidad aparente es h_i , las cuales se miden desde la interfase de los medios.

39.8. Prisma óptico

$$n = n_o \frac{\text{sen}\left(\frac{A + d_m}{2}\right)}{\text{sen}(A/2)} \quad (39.6)$$

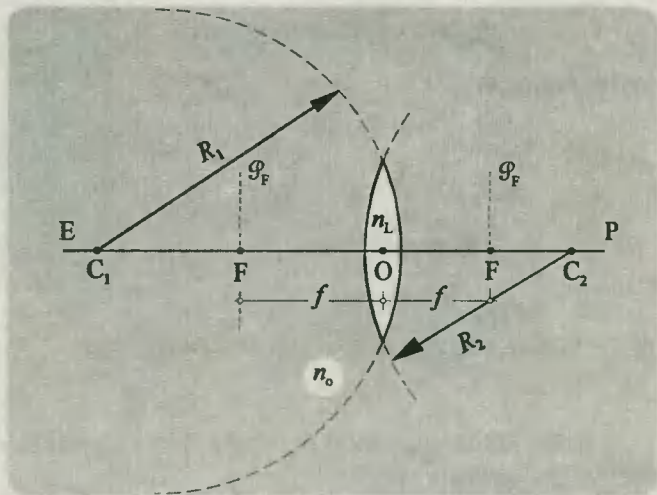
siendo n_o y n los índices de refracción del medio y del prisma respectivamente. A es el ángulo de refringencia, y d_m es el ángulo de desviación mínima de los rayos que lo atraviesan.

39.9. Lentes

Son sustancias transparentes que refractan la luz, y presentan por lo menos una cara esférica. Si sus bordes son delgados se llaman **convergentes**, y si son gruesos se denominan **divergentes**.

Elementos.-

- a) **Centros de curvatura:** C_1 y C_2 .
- b) **Radios de curvatura:** R_1 y R_2 .
Tendrán signo (+) si generan caras convexas, y (-) si generan caras cóncavas.
- c) **Eje principal:** recta EP.
- d) **Centro óptico:** Punto O. Todos los rayos que pasan por este punto no se refractan.
- e) **Foco principal:** F. Son siempre dos, y siempre uno hacia el lado del objeto; el otro será el foco imagen.
- f) **Plano focal (\mathcal{F}_f).** Plano perpendicular a EP, y que pasa por los focos principales.
- g) **Distancia focal:** f .


39.10. Ecuación del fabricante

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_L}{n_o} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (39.7)$$

siendo n_L y n_o los índices de refracción de la lente y del medio que lo rodea respectivamente. R_1 y R_2 son los radios de curvatura que incluyen sus signos. Si f es (+), se trata de una lente convergente, y si es (-) se trata de una lente divergente.

39.11. Rayos principales

- Rayo paralelo (RP)
- Rayo focal (RF)
- Rayo central (RC)

39.12. Ecuación de los focos conjugados

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o} \quad (39.8)$$

siendo o la distancia del objeto a la lente, e i la distancia de la imagen a la lente.

- o
 - (+) objeto real
 - (-) objeto virtual
- i
 - (+) imagen real e invertida
 - (-) imagen virtual y derecha

39.13. Aumento

$$|A| = h_i / h_o \quad (39.9)$$

$$A = -i/o \quad (39.10)$$

- A
 - (+) imagen virtual
 - (-) imagen real

39.14. Potencia de una lente o potencia óptica (C)

$$C = 1/f \quad (39.11)$$

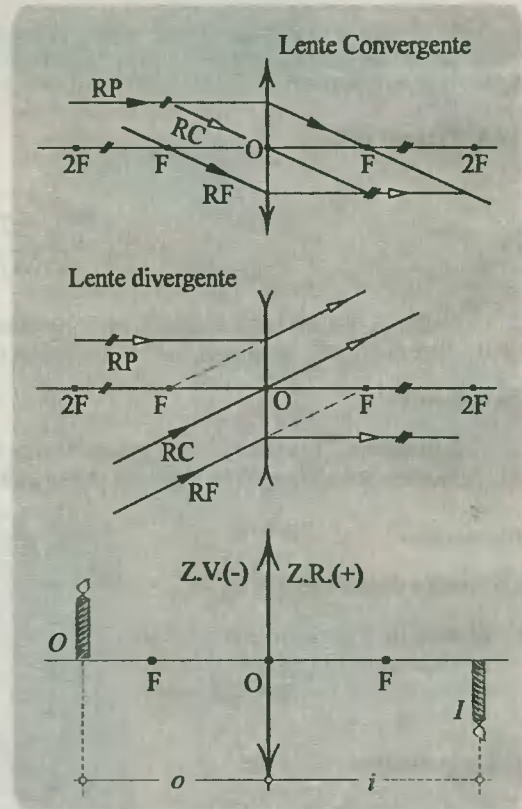
siendo f la distancia focal de la lente. Si f se expresa en *metros*, entonces la potencia óptica se expresa en *dioptrías*.

39.15. Distancia focal de un sistema de lentes

$$\text{a) Dos lentes separadas: } \frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \quad (39.12)$$

siendo d la distancia entre las lentes.

$$\text{b) Lentes delgadas en contacto: } \frac{1}{f_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i} \quad (39.13)$$



PROBLEMAS

Refracción

39.1. Una luz monocromática de frecuencia $f = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ pasa del vidrio al vacío. Calcular en cuánto aumentará la longitud de onda, si el índice de refracción absoluto del vidrio es 2.

39.2. ¿En cuánto variará la longitud de onda de la radiación violeta con frecuencia igual a $5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ al pasar del agua al vacío, si la velocidad de su propagación en el agua es 2500 km/s ?

39.3. Una radiación monocromática pasa de un medio a otro, presentándose un incremento en su longitud de onda $\Delta\lambda = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Si la frecuencia de la radiación es $f = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, calcular el cambio producido en el módulo de la velocidad de propagación.

39.4. Se sabe que los índices de refracción absoluta de las distintas sustancias transparentes que se hallan en las tablas de los manuales corresponden a la luz amarilla proveniente del sodio incandescente. Esta luz presenta una velocidad de $2,25 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ y $2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ en el agua y en el vidrio *crown ligero* respectivamente. Calcular:

a) El índice de refracción del agua y del vidrio.

b) La longitud de onda que presenta la luz amarilla en dichos medios, si en el vacío es $\lambda_0 = 5800 \text{ \AA}$.

39.5. Dos radiaciones de luz roja y violeta presentan en el cristal ligero velocidades de $1,852 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ y $1,818 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ respectivamente. Calcular:

a) El índice de refracción de ambas radiaciones en dicho cristal.

b) Sus correspondientes frecuencias.

39.6. Un rayo de luz blanca incide sobre una lámina de cristal ligero, tal como se muestra en la figura. Determinar los ángulos de refracción para las radiaciones de color rojo y violeta (Considerar los resultados del problema anterior).

39.7. Un rayo de luz pasa de un medio 1 en el cual su velocidad es $v_1 = 8 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ a otro medio 2 en el cual su velocidad es $v_2 = 6 \cdot 10^7 \text{ m/s}$. Si el ángulo de incidencia es $\alpha_1 = 53^\circ$, calcular la desviación θ que experimenta el rayo refractado.

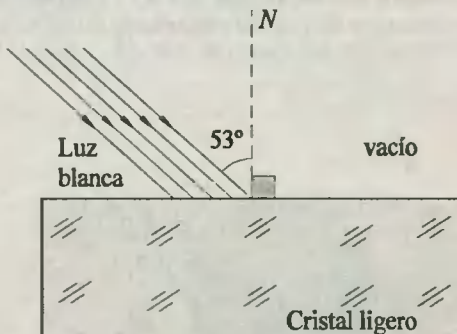


Fig. Prob. 39.6

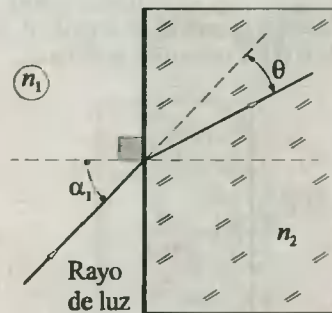


Fig. Prob. 39.7

39.8. Un haz de luz monocromática pasa de un medio donde $n_1 = 4$ a otro cuyo índice es $n_2 = 1,4$. Calcular la medida del ángulo α indicado.

39.9. Un buzo estableció debajo del agua que la dirección hacia el Sol forma un ángulo de 37° con la vertical. Al salir del agua notó que el Sol se encontraba más abajo respecto al horizonte. Definir en qué ángulo cambió la dirección hacia el Sol para el buzo.

39.10. Un palo quebrado en su mitad se halla sumergido en un estanque, de modo que para un observador que se encuentra en la orilla y que mira a lo largo de la parte del palo que emerge del agua le parece que éste es recto, y que forma el ángulo $\alpha = 37^\circ$ con el horizonte. ¿Qué ángulo forman las dos partes del palo?

39.11. En el fondo de un riachuelo yace una pequeña piedra. Un niño desea darle un golpe con un palo. Apuntando, el niño mantiene el palo en el aire bajo un ángulo de 53° con la vertical. ¿A qué distancia de la piedra se clavará el palo en el fondo del riachuelo, si su profundidad es 36 cm ?

39.12. Determinar el ángulo de refracción en la placa de vidrio *flint* cuando el haz de luz logre atravesar el bloque de hielo. $n_{\text{vidrio}} = 1,5$.

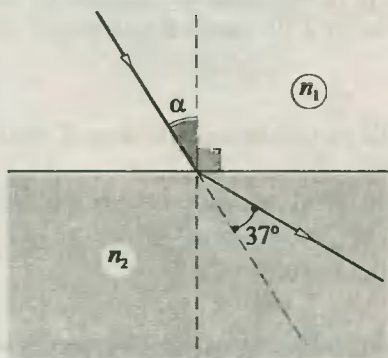


Fig. Prob. 39.8

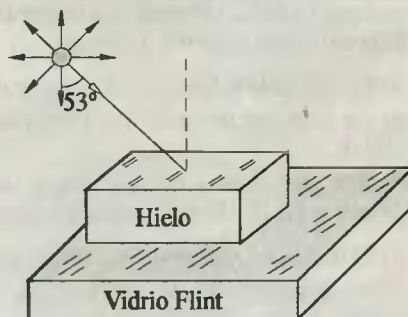


Fig. Prob. 39.12

39.13. ¿A qué distancia x se desplazará un rayo luminoso que pasa a través de una placa paralela cuyo índice de refracción $n = 4/3$ y espesor $d = 20\text{ cm}$?

39.14. Un haz de rayos paralelos incide sobre una esfera con un ángulo $\alpha = 45^\circ$. Después de refractarse dos veces en el límite vidrio - aire, los rayos emergen de la esfera siguiendo direcciones que forman con la inicial un ángulo θ . Si el índice de refracción del vidrio es $n = \sqrt{2}$, calcular la medida de θ (O = centro de la esfera).

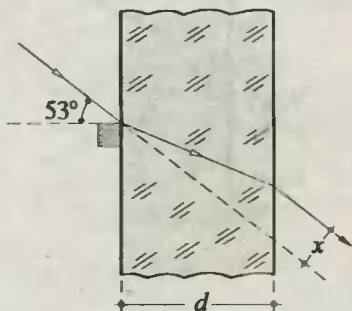


Fig. Prob. 39.13

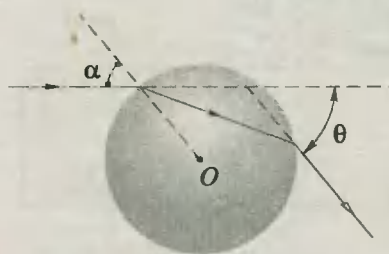


Fig. Prob. 39.14

39.15. Un rayo de luz incide normalmente sobre la cara ab de un prisma transparente cuyo índice de refracción es $n = 1,25$. Calcular el máximo valor del ángulo θ para que el rayo se refleje totalmente en la cara ac .

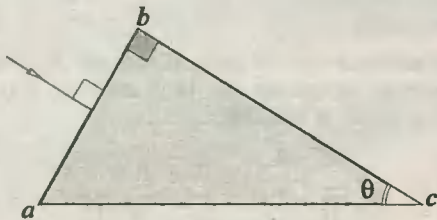


Fig. Prob. 39.15

39.16. En el fondo de un recipiente se ha instalado una lámpara incandescente que emite luz de tal modo que en la superficie libre del líquido transparente se forma un círculo oscuro visto desde el interior. Calcular el radio de este círculo. $n_L = 5/3$.

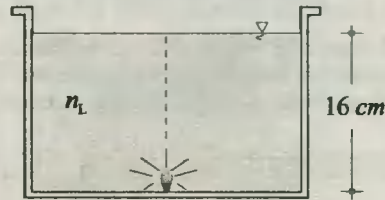


Fig. Prob. 39.16

39.17. Un cubo transparente cuyo índice de refracción es $n = \sqrt{7}/2$ es iluminado por un rayo de luz por la cara ab . ¿Cuál es la medida del ángulo θ con que deben incidir los rayos luminosos para que todos ellos se reflejen totalmente en la cara bc ?

39.18. La distancia entre una lámpara y la superficie del agua en el aire es $1,2\text{ m}$. A 60 cm de profundidad en el agua se encuentra un observador debajo de la lámpara. ¿A qué distancia de sí verá él dicha lámpara?

39.19. En el fondo de un recipiente lleno de agua hay un espejo plano. Un individuo se inclina sobre el recipiente y ve la imagen de su ojo en el espejo a la distancia de visión óptima $d = 25\text{ cm}$, siendo la distancia desde el ojo hasta la superficie del agua $h = 5\text{ cm}$. Determinar la profundidad del recipiente.

39.20. En el fondo de una cubeta de vidrio yace un objeto sobre cuya superficie se ha vertido una capa de agua de 20 cm de espesor. En el aire a una altura de 30 cm sobre la superficie del agua se encuentra colgada una lámpara. ¿A qué distancia desde la interfase aire - agua verá un observador la imagen en el espejo?

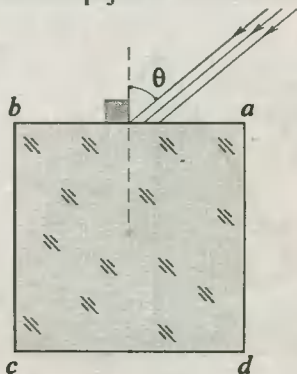


Fig. Prob. 39.17

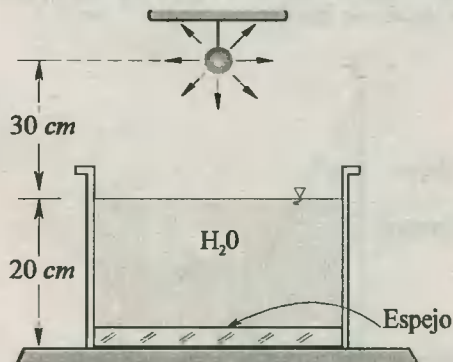


Fig. Prob. 39.20

39.21. Un espejo se encuentra a una altura $h_0 = 10\text{ cm}$ de un líquido transparente cuyo índice de

refracción es $n_2 = 5/3$. Debajo de este líquido hay agua, y se desea averiguar a qué distancia está el fondo del recipiente con su respectiva imagen en el espejo ($n_1 = 4/3$).

39.22. Un avión y submarino están en un instante dado en la misma vertical. La distancia aparente del submarino desde el avión es 309 m , estando el avión a 300 m del agua. Si hay un buzo sumergido a la misma profundidad del submarino, calcular:

- La profundidad h del submarino para el piloto del avión.
- La altura aparente H del avión para el buzo.

39.23. Calcular el índice de refracción del líquido mostrado en la figura, si para un observador que se encuentra mirando desde arriba hacia el recipiente, ve que una burbuja asciende con una velocidad aparente de 4 m/s , si además empleó 2 s en ir desde A hasta B.

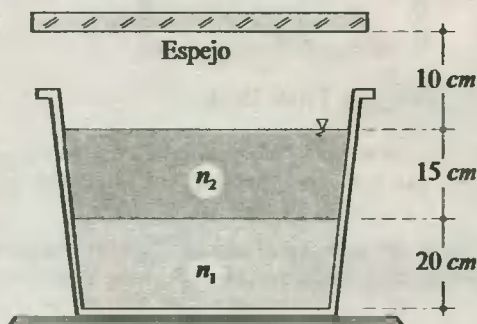


Fig. Prob. 39.21

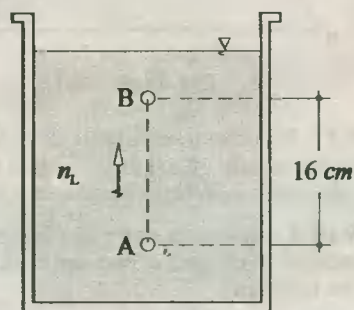


Fig. Prob. 39.23

Prisma óptico

39.24. Hallar la desviación mínima en un prisma óptico equilátero, si el índice de refracción del mismo es $\sqrt{2}$.

39.25. Calcular el índice de refracción de un prisma óptico rectangular, si la desviación es mínima para un ángulo de incidencia de 53° .

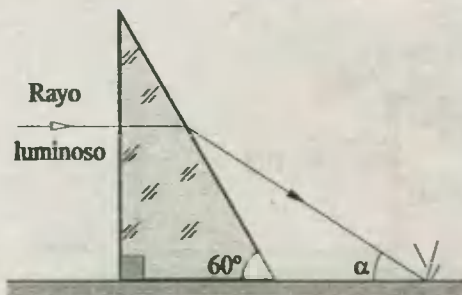


Fig. Prob. 39.26

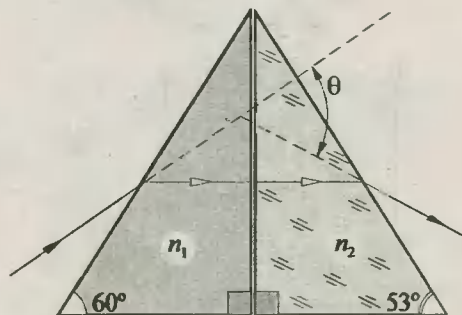


Fig. Prob. 39.27

39.26. Calcular la medida del ángulo α , si el índice de refracción del prisma es $\sqrt{2}$.

39.27. En la figura se muestran dos cuñas transparentes que se encuentran unidas por una de sus caras. Un rayo de luz incide por una de sus caras, de modo que el rayo refractado atraviesa los dos prismas perpendicularmente a las caras en contacto. $\text{Sin}_1 = 1,6$ y $n_2 = 5\sqrt{3}/6$, determinar la desviación angular que experimenta el rayo de luz.

Lentes

39.28. ¿Qué índice de refracción tendrá el tipo de vidrio del que está compuesto una lente biconvexa cuyos radios de curvatura son idénticos e iguales a su distancia focal?

39.29. Calcular la potencia óptica de una lente plana cóncava hecha de cuarzo, cuyo índice de refracción es 1,54 cuando ella se encuentra en el aire y en el interior de un líquido de índice de refracción $n_1 = 2$. Se sabe también que el radio de la cara cóncava mide 25 cm.

39.30. Si una lente se sumerge en el agua ($n_1 = 1,33$) su distancia focal será $f_1 = 1$ m. Si se sumerge en bisulfuro de carbono ($n_2 = 1,6$) su distancia focal crece hasta $f_2 = 10$ m. Calcular la distancia focal de la lente en el aire.

39.31. Dos lentes de vidrio plano convexas, juntas por sus caras planas, forman una lente de distancia focal $f_1 = 40$ cm. Hallar la distancia focal f_2 de la lente que se obtiene si las mismas lentes se juntan por las caras convexas, y el espacio entre ellas se llena de agua. Los índices de refracción del vidrio y del agua son $n_v = 1,66$ y $n_a = 1,33$ respectivamente (Ver figura).

39.32. Una vela se ha colocado frente a una lente, y proyecta una imagen real, invertida y dos veces más pequeña. Si la distancia focal de la lente es 10 cm, calcular a qué distancia del objeto se encuentra su imagen.

39.33. Un objeto de 10 cm de altura se ha colocado perpendicularmente al eje de una lente, la cual proyecta una imagen sobre una pantalla colocada al otro lado de la lente en donde su altura es 15 cm. ¿Cuál es la distancia focal de la lente, si el objeto se encuentra a 30 cm de ella?

39.34. Un objeto y su imagen directa y más grande se encuentran simétricamente situados respecto al foco de una lente. La distancia desde el objeto hasta el foco de la lente es $l = 4$ m. Hallar la distancia focal de la lente.

39.35. La imagen virtual de un objeto que se obtiene mediante una lente es 5 veces mayor que el propio objeto. Calcular la potencia óptica de la lente, si el objeto dista 20 cm respecto a la misma.

39.36. Por medio de una lente se obtiene la imagen real de un objeto con el aumento $A = 1,5$. Después, la lente se traslada una distancia $l = 12$ cm y se obtiene una imagen virtual del mismo tamaño. Calcular la distancia focal de la lente.

39.37. ¿A qué distancia x de una lente convergente hay que colocar un objeto para que la distancia entre él y su imagen real sea mínima? La distancia focal de la lente es $f = 20$ cm.

39.38. La distancia entre una vela y una pantalla es $d = 1$ m. Una lente biconvexa colocada entre la vela y la pantalla proyecta la imagen nítida de la vela en la pantalla manteniendo la lente en dos posiciones que distan $l = 0,2$ m entre sí. Calcular la distancia focal de la lente.

39.39. La lente mostrada en la figura está elaborada de vidrio ($n_L = 1,5$), limitado por dos caras cuyos radios de curvatura son $R_1 = 20$ cm y $R_2 = 30$ cm. Si colocamos un objeto frente a la lente, ésta proyecta una imagen tres veces menor. ¿A qué distancia se encuentran el objeto y su imagen?

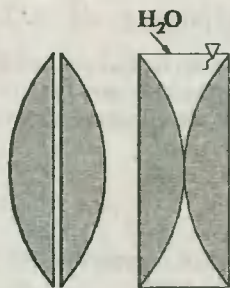


Fig. Prob. 39.31

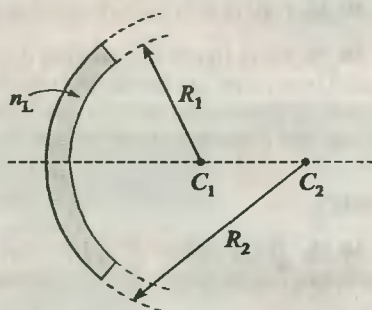


Fig. Prob. 39.39

39.40. Un objeto de 10 cm de altura se coloca frente a una lente, obteniéndose una imagen derecha de 2 cm altura. ¿A qué distancia de la lente se coloca el objeto?. Distancia focal de la lente = 60 cm .

39.41. Una persona miope no puede ver con nitidez a una distancia superior a 80 cm . Calcular la potencia que deben tener sus anteojos para que se pueda ver con claridad sus objetos lejanos.

39.42. Un haz de rayos de paralelos incide sobre una lente divergente cuya distancia focal es 35 cm . Si la distancia focal de la lente convergente es 10 cm , ¿a qué distancia de esta última lente se concentrarán dichos rayos?. Considerar que los ejes de las lentes coincidan en uno solo.

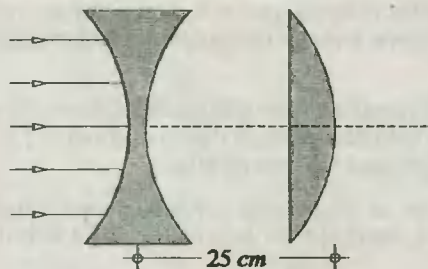


Fig. Prob. 39.42

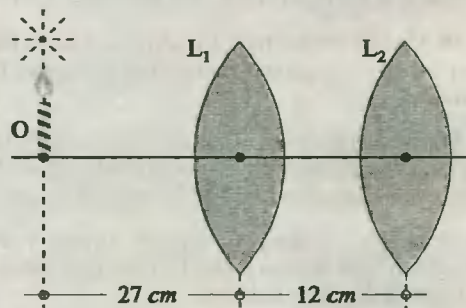


Fig. Prob. 39.43

39.43. En el sistema de lentes mostrado se sabe que la distancia focal de cada lente es $f_1 = 36\text{ cm}$ y $f_2 = 72\text{ cm}$. Determinar a qué distancia del objeto O se formará su imagen final. Las lentes tienen un eje común.

39.44. En contacto directo con el espejo esférico cóncavo se pone la cara convexa de una lente planoconvexa, la cual tapa totalmente al espejo. Si el radio del espejo es $R = 32\text{ cm}$ y el índice de refracción de la lente es 1.6 , calcular la distancia focal del nuevo espejo.

39.45. La cara convexa de una lente planoconvexa cuyo radio de curvatura es 60 cm es plateada, y debido a éste se obtiene un espejo cóncavo peculiar. Delante de este espejo y a una distancia de 25 cm de éste se coloca un objeto. Determinar:

- La distancia entre el objeto y su imagen.
- El correspondiente aumento, si el índice de refracción del material de la lente es 1.5 .

39.46. La cara cóncava de una lente plano cóncava cuyo radio de curvatura es igual a 80 cm es plateada, y así obtenemos un espejo convexo peculiar. Delante de este espejo y a una distancia de 75 cm del espejo colocamos un objeto. Determinar:

- La distancia entre el objeto y su imagen.
- El aumento de la imagen, si el índice de refracción del material de la lente es $1,6$.

39.47. La superficie plana de una lente plano cóncava de distancia focal $f = -20\text{ cm}$ está recubierta de una buena capa reflectora. A la distancia $d = 30\text{ cm}$ de la lente por el lado de la superficie cóncava se encuentra una fuente puntual de luz. Determinar la posición de las imágenes de la fuente.

40.1. Sensación luminosa

Es la respuesta biológica de parte del ojo, que se ve estimulada por algún agente externo. Para que se produzca la sensación luminosa o de visión, es necesario estimular la retina del ojo.

40.2. Magnitudes ópticas subjetivas

Son todas aquellas que se definen en base a la sensación luminosa que causan sobre el **ojo medio**. Definimos como **ojo medio** a la respuesta común de un gran número de observadores ante un mismo suceso luminoso.

40.3. Intensidad luminosa (I)

Es aquella magnitud escalar fundamental que compara esa parte del flujo total de energía radiante que logramos ver con la que emite el platino (**Pt**) a su temperatura de fusión ($2\,042\text{ K}$) por *cadacéntimetro cuadrado*, la que a su vez convencionalmente es igual a 60candelas . *Lacandela* (cd) es la unidad básica de la intensidad luminosa en el SI. Toda fuente o foco de luz se identifica por su intensidad luminosa.

40.4. Angulo sólido (Ω)

Es aquella región del espacio limitada por una superficie cónica o piramidal que subtiende una superficie de un casquete esférico cuyo centro es el vértice del ángulo.

$$\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{\text{Area del casquete}}{(\text{radio de la esfera})^2} \quad (40.1)$$

donde A , r y Ω se miden en m^2 , m y sr (*estereorradian*) respectivamente. El ángulo sólido que subtiende una esfera es $4\pi\text{ sr}$.

40.5. Flujo luminoso (Φ_L)

Representa la intensidad luminosa que se irradia a través de un ángulo sólido.

$$\Phi_L = I\Omega \quad (\text{lumen} = \text{cd}\cdot\text{sr}) \quad (40.2)$$

40.6. Rendimiento de un foco luminoso (η)

Es aquella magnitud física característica de un foco luminoso, y que nos indica el flujo luminoso emitido por él por cada unidad de potencia irradiada.

$$\eta = \frac{\Phi_L}{Pot} \left(\frac{\text{lumen}}{\text{watt}} \right) \quad (40.3)$$

$$Pot = \frac{U}{t} \left(\frac{\text{Energía total irradiada}}{\text{tiempo}} \right) \quad (40.4)$$

$U = \text{Energía radiante luminosa} + \text{Energía radiante calorífica}$

40.7. Equivalente mecánico de la luz (M_L)

Experimentalmente, el máximo valor del rendimiento de un foco que puede percibir el ojo medio se presenta cuando la longitud de onda de la radiación visible es de 5550Å , y que corresponde al color verde-amarillo. En tales condiciones se verifica que el foco entrega 683 lumens por cada watt de potencia que irradia.

$$\eta_{\text{máx}} = 683 \text{ lm/W} \quad (40.5)$$

$$M_L = 1/\eta_{\text{máx}} = 1,466 \cdot 10^{-3} \text{ W/lm} \quad (40.6)$$

(*) El equivalente mecánico de la luz y el rendimiento de un foco luminoso son las magnitudes físicas que permiten establecer una relación directa entre las magnitudes subjetivas con las magnitudes objetivas (energía o potencia).

40.8. Iluminación (Y)

Es aquella magnitud física que indica la cantidad del flujo luminoso que incide sobre la unidad de área de una superficie iluminada.

$$40.8.a) \text{ Iluminación media.} - Y = \Phi_L/A \quad (\text{lux} = \text{lumen/m}^2) \quad (40.7)$$

$$40.8.b) \text{ Iluminación puntual.} - Y = (I/d^2)\cos\theta \quad (\text{lux} = \text{cd/m}^2) \quad (40.8)$$

siendo θ el ángulo formado por el rayo incidente y la normal a la superficie iluminada. La relación (40.8) es comúnmente conocida por la Ley de D'Alembert.

PROBLEMAS

40.1. Un ángulo sólido central corta en la superficie de una esfera con radio igual a 50 cm un área igual a 1200 cm^2 . ¿Qué área cortará en la superficie de otra esfera el mismo ángulo, si el radio de esta segunda esfera es más grande en 40 cm ?

40.2. Una fuente puntual se encuentra en el centro de una esfera de 70 cm de radio y emite un flujo luminoso de 600 lm hacia la superficie de esta esfera con un área de 3 m^2 . Calcular:

a) Su intensidad luminosa.

b) El flujo luminoso total que emite esta fuente ($\pi \approx 22/7$).

40.3. ¿Qué flujo luminoso incide sobre la superficie de una mesa, si su iluminación media es 9500 lx , y el área es $1,6\text{ m}^2$?

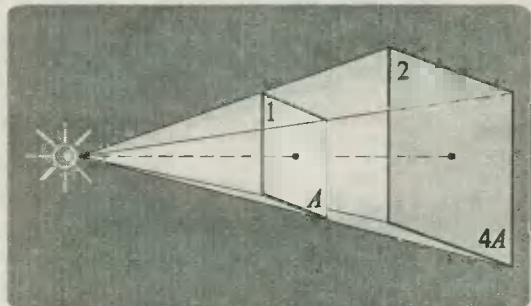


Fig. Prob 40.4

40.4. Se han colocado normalmente a la radiación luminosa dos láminas de áreas $A_1 = A$ y $A_2 = 4A$. Si la iluminación en la primera es igual a 20 lx , ¿Cuál será la iluminación en la segunda lámina?. Suponer que para el segundo caso, la primera lámina es retirada.

40.5. Una lámpara incandescente irradia un flujo luminoso de 110 lm . ¿Cuál es la intensidad luminosa de la lámpara? ($\pi \approx 22/7$).

40.6. Calcular la intensidad luminosa media de una bombilla cuya potencia es 120 W , si su rendimiento luminoso es igual a 11 lm/W .

40.7. La iluminación de la superficie de un patio amplio es 1600 lx cuando el ángulo de elevación del Sol es 53° . Calcular la iluminación cuando el ángulo de elevación del Sol sea 37° .

40.8. Una bombilla de 160 cd cuelga sobre el centro de una mesa circular a la altura de 80 cm . Calcular la iluminación máxima y mínima en la superficie de la mesa, si su radio es 60 cm .

40.9. Una pequeña superficie se iluminaba con una lámpara de 90 cd . Esta última fué sustituida por otra lámpara de 40 cd . ¿En cuántas veces será necesario disminuir la distancia de la lámpara hasta la superficie para que la iluminación en ella no varíe?.

40.10. Una pequeña pantalla se ilumina por 16 velas muy juntas entre sí, encontrándose a $1,2 \text{ m}$ de la pantalla. Si se apagan 7 velas, ¿En cuánto será necesario desplazar la pantalla para que su iluminación no cambie?.

40.11. Una lámpara de 30 cd está colocada a 25 cm de una pantalla. ¿A qué distancia de la pantalla y del mismo lado que la primera lámpara habría que colocar una lámpara de 240 cd para que la iluminación total de la pantalla sea el triple de la inicial?.

40.12. En los vértices de un cubo de arista $a = 2 \text{ m}$ se han colocado focos luminosos de intensidad $I = 120 \text{ cd}$. ¿Cuál será la iluminación que ellos producen en el centro del cubo?.

40.13. Si una copia fotostática puede hacerse en 8 s de exposición manteniendo la prensa a 20 cm de una lámpara, calcular el tiempo de exposición correcto si se mantiene la prensa a 30 cm del generador luminoso.

40.14. Una lámpara de 10 cd se encuentra a 125 cm de una pantalla fotométrica, produciendo en ella la misma iluminación que una lámpara desconocida a 175 cm de distancia. Si la lámpara desconocida consume $0,85 \text{ A}$ a 110 V , ¿Cuál es su rendimiento?.

40.15. Dos focos 1 y 2 producen en conjunto sobre A y B iluminaciones de 358 lx y 554 lx respectivamente. ¿Cuáles son las intensidades luminosas de dichos focos?.

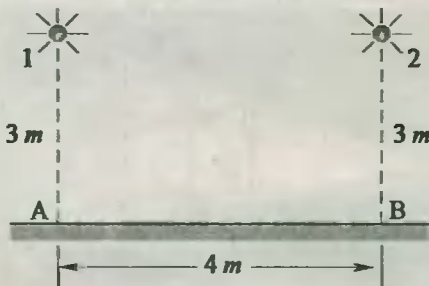


Fig. Prob. 40.15

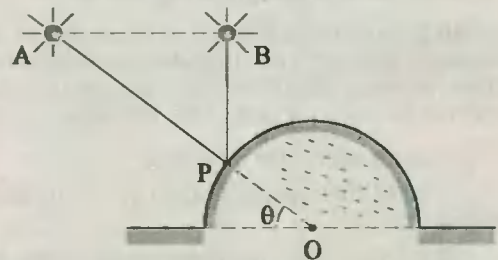


Fig. Prob. 40.16

40.16. Dos focos **A** y **B** de igual intensidad luminosa se encuentran en la misma horizontal. Un punto **P** ubicado verticalmente debajo del foco **B** presenta una iluminación total igual al triple del generado por el foco **A**. ¿Cuál es la medida del ángulo θ que define la posición del punto **P**?

40.17. Dos focos puntuales de igual intensidad luminosa se encuentran a una distancia horizontal $d = 3,5\text{ m}$. ¿A qué distancia del foco **1** se debe colocar una pantalla para que la iluminación producida por ambos focos en **P** sea la misma? ($\cos\theta = 4/9$).

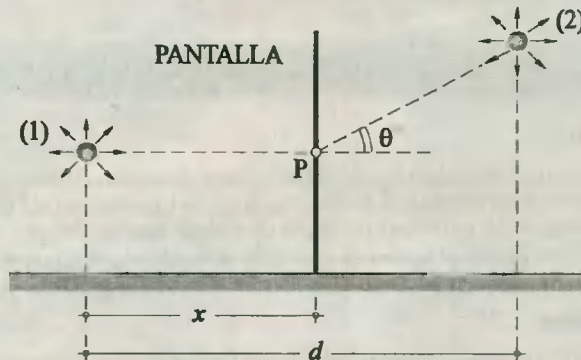


Fig. Prob. 40.17

40.18. Una fuente puntual de luz está colocada a cierta distancia L de una pantalla, y produce en el centro de ésta una iluminación $Y = 1\text{ lx}$. ¿Cómo variará la iluminación si por el otro lado de la fuente y a la misma distancia se coloca un espejo reflector ideal? Los planos de la pantalla y del espejo son paralelos.

40.19. Un foco luminoso ubicado a 2 m de altura produce una iluminación $Y_1 = 125\text{ lx}$ en un punto **A** de dicha superficie colocado directamente debajo del foco. Si ahora el foco sube una distancia x y se desplaza horizontalmente la misma distancia produce una iluminación $Y_2 = 4\text{ lx}$ en **A**. ¿Cuál es el valor de x ?

FENOMENOS ONDULATORIOS DE LA LUZ

41.1. Dispersión de la luz

Es el fenómeno físico por el cual un haz de luz se separa las distintas radiaciones que lo componen, las que se distinguen uno de otro por su color. En principio, la luz blanca está compuesta por todos los colores. El experimento de Newton que permitió descubrir este hecho se efectuó utilizando un prisma transparente, aprovechando el hecho de que cada radiación (color) tiene su propio índice de refracción, y por tanto un ángulo definido de desviación al salir del prisma.

41.2. Composición de la luz

Es aquel fenómeno por el cual se reúnen todas las radiaciones, produciendo luz blanca. El disco de Newton permite comprobar la composición.

41.3. El color de las cosas

Cuando los cuerpos son iluminados, de todas las radiaciones que se recibe una parte se absorbe y la restante se refleja llegando a nuestros ojos. El color del cuerpo lo define el color de la radiación que refleja. En principio, un cuerpo es de color blanco si refleja todos los colores a la vez, y será de color negro si no refleja ninguna radiación.

41.4. Interferencia

Es aquel fenómeno en el cual dos o más ondas de la misma frecuencia se superponen en un lugar del medio en que se trasladan. Si dos focos producen ondas de igual frecuencia que mantienen inalterable su diferencia de fase, se dirá que son coherentes.

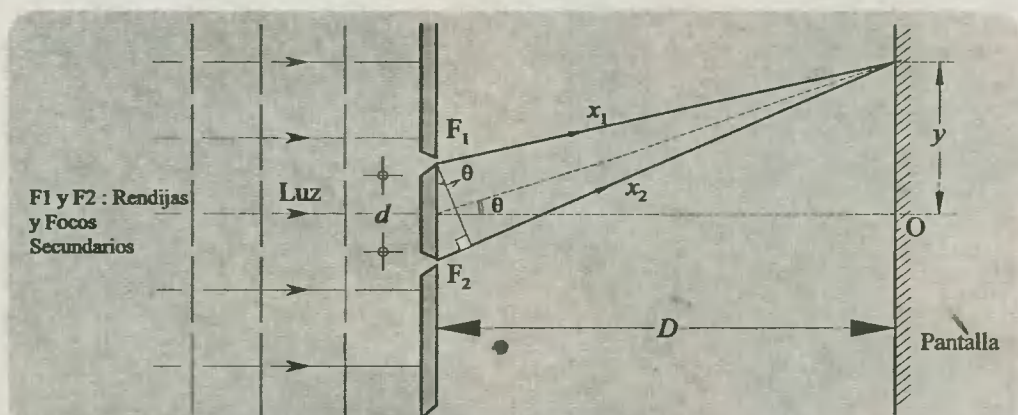


Fig. 41.1 Experimento de Young de la doble regilla

41.5. Interferencia constructiva

Este tipo de interferencia se produce si las ondas llegan a un mismo punto para reforzar sus vibraciones entre sí, y ello debido a que las ondas vibran en fase en dicho lugar. Esto sucede siempre que la diferencia de los caminos recorridos por las ondas hasta dicho lugar ($x_2 - x_1$) sea un número entero de longitudes de onda. Si este tipo de interferencia se produce en la superficie de una pantalla, aparecerá en dicho lugar una franja luminosa.

$$x_2 - x_1 = n\lambda \Leftrightarrow n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (41.1)$$

$$x_2 - x_1 = d \operatorname{sen} \theta \quad (41.2)$$

$$d \operatorname{sen} \theta = n\lambda \quad (41.3)$$

$$y = n\lambda D/d \quad (41.4)$$

siendo d la distancia entre rendijas, D la distancia entre la pantalla y el plano de las rendijas, λ la longitud de onda de la luz empleada, θ el ángulo que define la dirección en que debemos mirar para poder ver una franja de luz de interferencia, n el orden de la franja de interferencia, e y la distancia de una franja luminosa hasta el centro del patrón de interferencia.

41.6. Interferencia destructiva

Es aquel tipo de interferencia en la cual las ondas llegan a un mismo punto con una diferencia de fase igual a 90° , de manera que en dicho lugar las vibraciones se efectúan en direcciones opuestas, y por eso se atenúan (destruyen). Para que ello suceda se deberá cumplir que la diferencia de los caminos recorridos hasta un punto debe ser igual a un número impar de semilongitudes de onda. Si este tipo de interferencia se produce en la superficie de una pantalla, aparecerá una franja oscura.

$$x_2 - x_1 = (2n + 1)\lambda/2 \Leftrightarrow n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (41.5)$$

$$d \operatorname{sen} \theta = (2n + 1)\lambda/2 \quad (41.6)$$

$$y = (2n + 1)\lambda D/2d \quad (41.7)$$

$$\Delta y = \lambda D/d \quad (41.8)$$

siendo Δy la interfranja, es decir, la distancia entre dos franjas luminosas u oscuras consecutivas.

41.8. Interferencia en láminas o películas delgadas

Se produce en las pompas de jabón, en las capas de aceite en el agua, en los espacios de aire dejados por una cubierta de vidrio que no ajusta perfectamente sobre una mesa, ..., etc. En estos casos aparecen varios colores debido a una interferencia de la luz, la que se produce debido a una doble reflexión de la luz en las dos caras de la lámina o película. Para la interferencia se verificará que la diferencia de los caminos recorridos por las ondas reflejadas es:

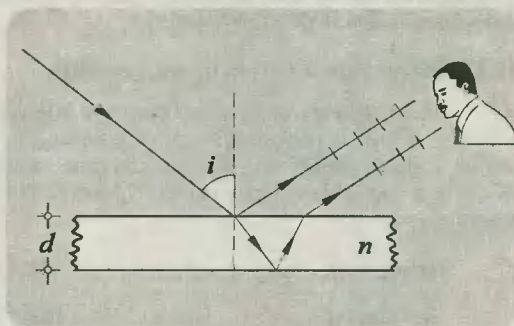


Fig. 41.2

$$2nd - \lambda/2 = \begin{cases} k\lambda \text{ (franja luminosa)} & (41.9) \\ (2k + 1)\lambda/2 \text{ (franja oscura)} & (41.10) \end{cases}$$

siendo n el índice de refracción de la película, d su espesor, y k el número de franjas luminosas u oscuras. Estas relaciones se verifican tanto para películas delgadas como para cuñas muy delgadas, y se ha supuesto una incidencia normal ($i = 0^\circ$).

41.9. Anillos de Newton

Es el fenómeno de interferencia que se produce por la capa de aire de espesor variable que queda debajo de la cara convexa de una lente sobre una superficie plana. Los anillos oscuros y brillantes son concéntricos, y cuando se producen por reflexión, sus radios vienen dados por:

$$r_k = \sqrt{\frac{k\lambda R}{n}} \quad (\text{anillo oscuro}) \quad (41.11)$$

$$r_k = \sqrt{\frac{(2k-1)\lambda R}{2n}} \quad (\text{anillo brillante}) \quad (41.12)$$

siendo n el índice de refracción de la sustancia en la holgura, R el radio de la cara convexa de la lente, y k es el orden del anillo. Para $k = 0$, $r = 0$: Es la mancha oscura. Cuando los anillos se forman por transmisión, es decir, la observación se realiza por la otra cara, los anillos se ordenan de manera inversa a la de reflexión. Así, (41.11) corresponde a los anillos brillantes, y (41.12) a los anillos oscuros.

41.10. Difracción

Recibe este nombre aquel fenómeno que experimentan las ondas luminosas cuando bordean los contornos de un cuerpo o los de un agujero, produciéndose una desviación en la dirección de propagación de la luz, de modo que se produce iluminación detrás de estos bordes.

41.11. Difracción a través de una rendija

Aquí aparece una franja luminosa intensa en el centro (O) de la pantalla (P), presentándose hacia arriba y hacia abajo de O unas franjas oscuras llamadas también mínimos (interferencia destructiva).

$$d \sin \theta = n\lambda \quad \Leftrightarrow \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41.13)$$

$$y = n\lambda D/d \quad (41.14)$$

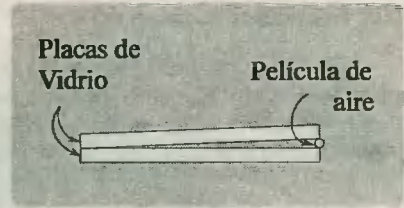


Fig. 41.3

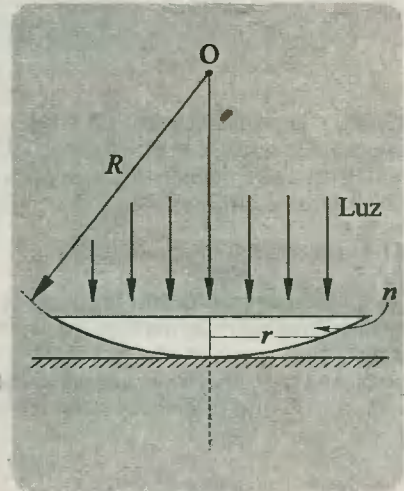


Fig. 41.4

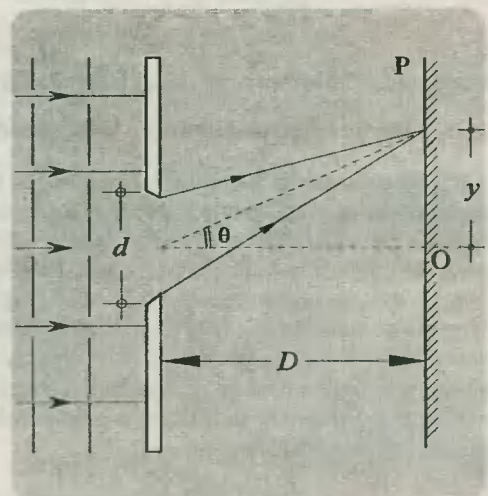


Fig. 41.5

41.12. Red de difracción

Llamamos así al grabado de un gran número de rayas paralelas equidistantes una distancia a . La luz monocromática que pasa por las rendijas es difractada en todas direcciones, y cada una es un foco secundario, convirtiéndose este fenómeno en una extensión del experimento de Young. Se produce interferencia constructiva si la diferencia de los caminos recorridos es igual a un número entero de veces la longitud de onda.

$$a \sin \theta = n\lambda \Leftrightarrow n = 0, 1, 2, \dots \quad (41.15)$$

(*) La constante de red (r) es el elemento que indica el número de ranuras por unidad de longitud que se encuentran grabadas en la superficie P. Su valor viene dado por la inversa de a : $r = 1/a$.

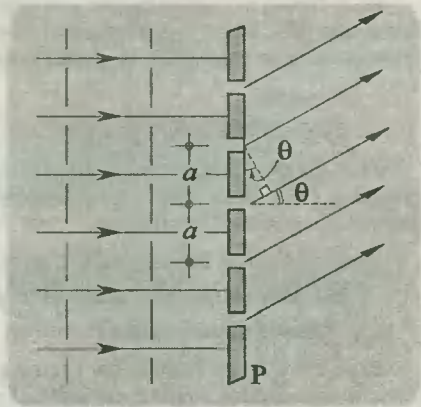


Fig. 41.6

41.13. Polarización

Es el fenómeno por medio del cual las vibraciones luminosas quedan confinadas en un solo plano de vibración. Por medio de este fenómeno se demuestra que la luz está compuesta de ondas transversales. Llamamos plano de polarización a aquel que contiene la componente magnética de la onda electromagnética, pues al quedar polarizada la luz, la componente de la onda que continúa vibrando es la del campo eléctrico.

41.13.a) Ley de Brewster.- Para la polarización por reflexión:

$$\operatorname{tgi} = n \quad (41.16)$$

siendo n el índice de refracción.

41.13.b) Ley de Malus.- La intensidad de la luz en una dirección determinada (X) es directamente proporcional a $\cos^2\theta$, siendo θ el ángulo que forma la vibración con el eje dado.

$$I_x = I_0 \cos^2 \theta \quad (41.17)$$

Nota: $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$; $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$; $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$

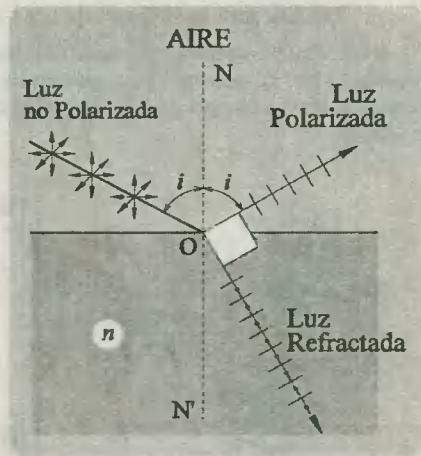


Fig. 41.7

PROBLEMAS

Interferencia

41.1. A cierto punto del espacio llegan haces de una radiación luminosa coherente con una diferencia óptica de la marcha de $9 \mu\text{m}$. Determinar qué tipo de interferencia tendrá lugar en este punto, siendo la longitud de onda de:

a) $\lambda_1 = 450 \text{ nm}$.

b) $\lambda_2 = 720 \text{ nm}$.

41.2. Sobre un punto de una pantalla llegan rayos coherentes con una diferencia geométrica de la marcha de $1,8 \mu\text{m}$, cuya longitud de onda en el vacío es igual a 600 nm . Determinar qué tipo de interferencia se producirá en dicho lugar si el medio es:

- Agua.
- Vidrio de índice de refracción igual a 1,5.

41.3. En el experimento de Young de la doble rendija se utiliza luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 7000 \text{ \AA}$, siendo la distancia entre rendijas $d = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, y la distancia de las rendijas a la pantalla $D = 24 \text{ cm}$. Determinar:

- El tipo de interferencia que se produce en B, si $x_2 - x_1 = 8750 \text{ nm}$.
- Cuál es la medida del ángulo θ que permite ubicar la primera franja luminosa de interferencia.
- A qué distancia de O se ubica la primera franja luminosa.

41.4. En el experimento de Young se utiliza una radiación de longitud de onda igual a 480 nm proveniente de dos fuentes coherentes que distan entre sí $120 \mu\text{m}$. La distancia entre las fuentes luminosas y la pantalla es $3,6 \text{ m}$. Calcular en mm :

- La distancia entre dos franjas brillantes consecutivas en la pantalla.
- Cuál será la anchura de las franjas oscuras, si la interferencia se produce en el agua.

41.5. En el esquema se muestran dos fuentes de luz coherentes F_1 y F_2 que distan $d = 200 \mu\text{m}$, siendo la luz monocromática que emiten de una longitud de onda $\lambda = 590 \text{ nm}$. Si en B se ubica la segunda franja oscura de interferencia contada desde O, ¿Cuál es la distancia D de las fuentes a la pantalla?

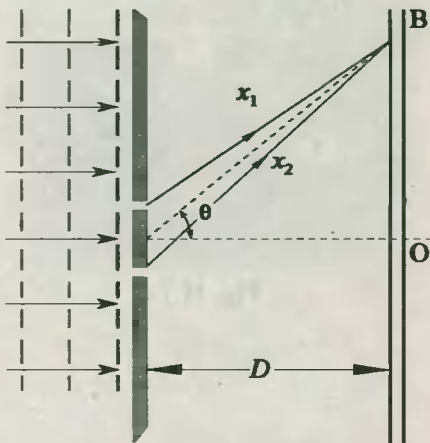


Fig. Prob. 41.3

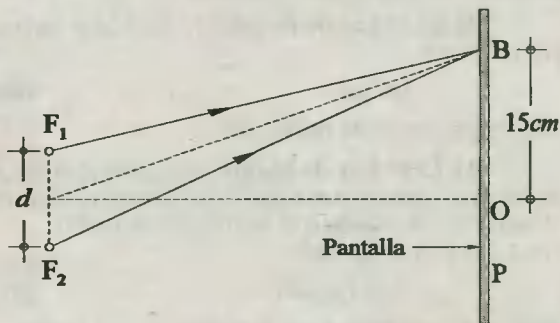


Fig. Prob. 41.5

41.6. Al observar la interferencia de la luz procedente de dos fuentes virtuales de luz monocromática con $\lambda = 520 \text{ nm}$, resultó que en la pantalla con 4 cm de longitud caben 12 franjas. Determinar la distancia entre las fuentes luminosas, si ellas distan $2,50 \text{ m}$ de la pantalla.

41.7. Dos fuentes coherentes de luz blanca que distan una de la otra $0,32 \text{ mm}$ tienen la forma de rendijas estrechas. La pantalla en la que se observa la interferencia de la luz proveniente de estas fuentes se encuentra a la distancia de $3,2 \text{ m}$ de ellas. Hallar la distancia entre las rayas roja ($\lambda_r = 760 \text{ nm}$) y violeta ($\lambda_v = 400 \text{ nm}$) del segundo espectro de interferencia en la pantalla.

41.8. Dos espejos de Fresnel E_1 y E_2 forman entre sí un ángulo $\beta = \pi - \alpha$, tal que $\alpha = 0,05 \text{ rad}$. A distancias $b = 0,2 \text{ cm}$ de los espejos se encuentra un foco luminoso F . Determinar la distancia entre las franjas de interferencia en la pantalla P , situada a una distancia $a = 199,8 \text{ cm}$. La luz tiene $\lambda = 600 \text{ nm}$ (La cortina C impide la incidencia directa de la luz de la fuente en la pantalla).

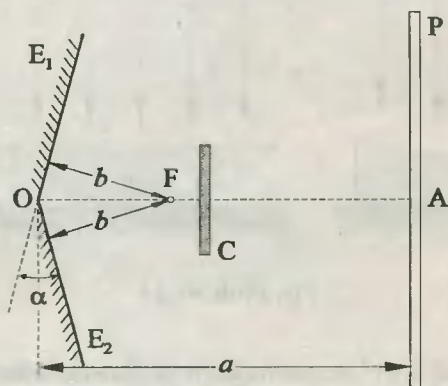


Fig. Prob. 41.8

41.9. El experimento de interferencia de Lloyd consistió en obtener en una pantalla la imagen de la fuente F_1 y su imagen virtual F_2 en el espejo AB . ¿Cuál será la distancia de O a la primera franja luminosa?. $\lambda = 500 \text{ nm}$, $a = 1 \text{ mm}$, $b = 1,5 \text{ m}$.

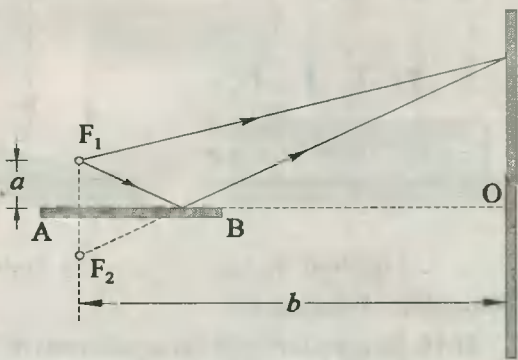


Fig. Prob. 41.9

41.10. ¿Cuántas franjas de interferencia se observan en la pantalla MN de un sistema óptico que utiliza el biprisma de Fresnel?. $a = 1 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $\alpha = 2.10^{-3} \text{ rad}$, $n = 1,5$, $L = 300 \text{ cm}$ (Despreciar el espesor del biprisma).

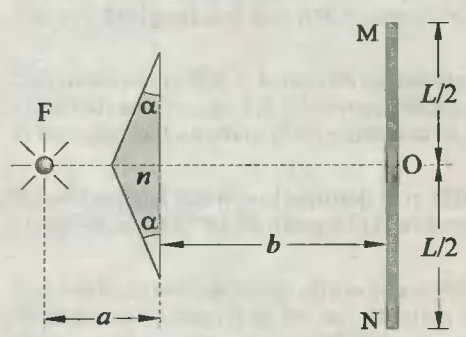


Fig. Prob. 41.10

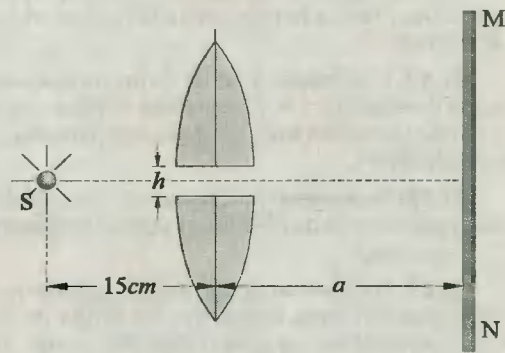


Fig. Prob. 41.11

41.11. Una lente convergente cuya distancia focal $sf = 10 \text{ cm}$ fué cortada por el medio, y las dos mitades fueron desplazadas una distancia $h = 0,5 \text{ mm}$ (lente de Billet). Calcular el número de franjas de interferencia en la pantalla situada detrás de la lente a una distancia $a = 60 \text{ cm}$, si delante de la lente existe una fuente puntual de luz monocromática ($\lambda = 500 \text{ nm}$) alejada de ella en 15 cm .

41.12. ¿Qué espesor mínimo d deberá tener una placa hecha de un material con índice de refracción $n = 1,54$ para que al iluminarla con rayos de $\lambda = 750 \text{ nm}$ perpendiculares a la superficie de la placa, ésta en la luz reflejada parezca roja, o bien negra?.

41.13. Al alumbrar por rayos monocromáticos perpendiculares a su superficie una cuña de cuarzo cuyo ángulo $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ rad, con $\lambda = 600 \text{ nm}$, se observan franjas de interferencia. Calcular el ancho de estas franjas ($n_{\text{cuarzo}} = 1,54$).

41.14. Calcular el radio de curvatura de una lente que yace en una placa plana, si el radio del cuarto anillo luminoso de Newton que se observa en la luz reflejada resultó ser igual a $4,5 \text{ mm}$. La iluminación se efectuó con una luz de $\lambda = 520 \text{ nm}$ que incide paralelamente al eje óptico principal.

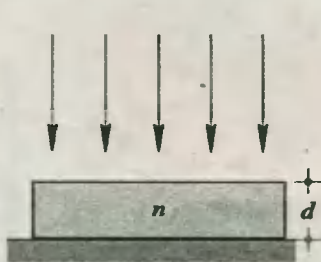


Fig. Prob. 41.12

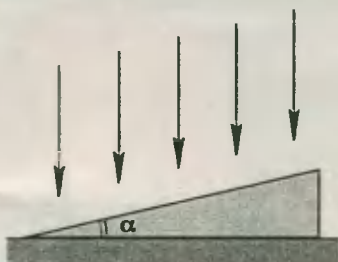


Fig. Prob. 41.13

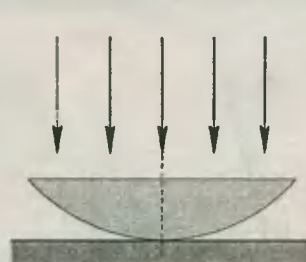


Fig. Prob. 41.14

Difracción - Polarización

41.15. Se tiene la difracción de una onda de longitud $6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, que incide normalmente sobre una rendija de $0,6 \text{ mm}$ de ancho. Determinar:

- El seno del ángulo en el cual si se mira se observa la cuarta franja oscura.
- Su posición con relación al centro de iluminación de una pantalla colocada a 2 m de la rendija.

41.16. Calcular la longitud de onda para la raya en el espectro de difracción de tercer orden que coincide con la imagen de la raya en el espectro de cuarto orden con una longitud de onda de 490 nm .

41.17. Una fuente puntual de luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 500 \text{ nm}$ se encuentra a una distancia $a = 6,75 \text{ m}$ de una cortina con abertura de diámetro $d = 4,5 \text{ mm}$. A una distancia $b = a$ de la cortina fué colocada una pantalla. ¿Cuál es el diámetro de la mancha luminosa en la pantalla MN?

41.18. Determinar la constante de una red de difracción, si al iluminarla con una luz que tiene la longitud de onda de 650 nm , el segundo espectro se observa bajo el ángulo de 16° . Dar la respuesta en líneas/mm.

41.19. Determinar la longitud de la onda que incide sobre una rejilla de difracción en la que hay 100 líneas en cada milímetro. La rejilla de difracción dista 48 cm de la pantalla. Al medir la disposición de las rayas en la pantalla, resultó que la distancia entre las terceras rayas a la izquierda y a la derecha respecto a la nula es igual a 28 cm .

41.20. Un muchacho mira a través de su pañuelo la luz del sodio ($\lambda = 5890 \text{ \AA}$) procedente de una lámpara situada a $2,50 \text{ m}$. Las dos imágenes difractadas de primer orden están situadas a uno y otro lado de la imagen central a $0,50 \text{ cm}$. ¿Cuál es la distancia media entre los hilos del pañuelo?.

41.21. En una rejilla de difracción que tiene 500 líneas por milímetro incide una onda plana monocromática ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$). Determinar el mayor orden del espectro n que podrá observarse por la incidencia normal de rayos en la rejilla.

41.22. El agua tiene un índice de refracción $n = 4/3$. ¿Bajo qué ángulo deberá incidir un haz

luminoso sobre la superficie del agua para que el haz reflejado esté polarizado en un plano?

41.23. Un haz de luz incide sobre la superficie de separación de dos medios transparentes de índices $n_1 = 1,5$ y $n_2 = 2$. Se dispone el ángulo de incidencia de manera que dé polarización máxima de la luz reflejada. Calcular los ángulos de polarización.

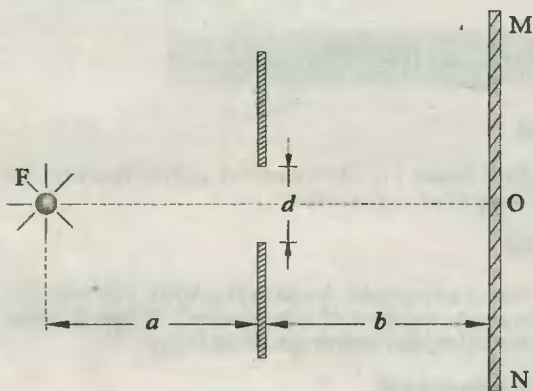


Fig. Prob. 41.17

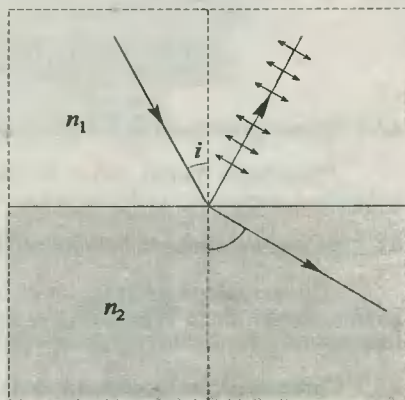


Fig. Prob. 41.23

RELATIVIDAD ESPECIAL O RESTRINGIDA

42.1. Primer postulado de la Relatividad Especial

“Las leyes físicas deben ser las mismas para todos los observadores que se mueven con velocidad constante, independientemente de su magnitud y dirección”.

42.2. Segundo postulado de la Relatividad Especial

“La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores, y su valor es independiente de la velocidad del generador luminoso relativa al observador”. Ninguna señal, interacción o forma de energía puede viajar con una velocidad mayor que la de la luz.

42.3. Consecuencias inmediatas de la Teoría de la Relatividad

Los postulados y aplicaciones de la Teoría de la Relatividad implican una modificación de los conceptos newtonianos de: espacio, tiempo, masa, energía e impulso.

42.4. Transformación de coordenadas: Espacio - Tiempo

Sean S y S' dos sistemas de referencia; el primero en reposo y el segundo con movimiento uniforme y velocidad v , tales que los ejes X y X' son colineales, y los otros paralelos entre sí. Si P es un punto visto y ubicado en ambos sistemas, P presentará las siguientes coordenadas (x, y, z, t) y (x', y', z', t') , las que estarán relacionadas entre sí por las siguientes ecuaciones:

Transformaciones clásicas - Galileo	Transformaciones relativistas - Lorentz
$x' = x - vt$	$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (42.1)
$y' = y$	$y' = y$ (42.2)
$z' = z$	$z' = z$ (42.3)
$t' = t$	$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (42.4)

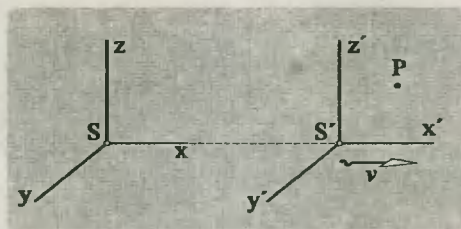


Fig. 42.1

42.5. Contracción de la longitud o contracción de Lorentz

Sea L_0 la longitud de un cuerpo en reposo con relación a un observador A , y L su longitud para el mismo observador cuando el cuerpo se mueve con velocidad relativa v (La velocidad tiene la misma dirección que la longitud). Entonces, para él el cuerpo ha reducido su tamaño tal que:

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (42.5)$$

(*) Las dimensiones del cuerpo que son perpendiculares a la dirección de su movimiento no experimentan cambio alguno. Para el observador B que viaja con la regla, ésta no presenta ningún cambio en su longitud.

42.6. Dilatación del tiempo (Fig. 42.3)

Sean Δt_0 y Δt los intervalos de tiempo transcurridos para el desarrollo de un mismo fenómeno, y medidos desde un sistema en reposo y desde otro en movimiento (con velocidad v) respectivamente. Entonces, para un observador ubicado en el primer sistema, Δt_0 le parece más prolongado que para el observador en movimiento.

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (42.6)$$

(*) La opinión de A es que el reloj de B se atrasa. Del mismo modo, B opina que él está en reposo, y A es el que se mueve; luego, para él es el reloj de A el que se atrasa.

42.7. Adición de velocidades

Sean v_1 y v_2 las velocidades de los cuerpos 1 y 2 medidas desde un sistema en reposo. Luego, la velocidad relativa de 1 respecto a 2 vendrá dada así:

42.7.a) Si se mueven en la misma dirección.-

$$v_{1/2} = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 \cdot v_2 / c^2} \quad (42.7)$$

42.7.b) Si se mueven en direcciones opuestas.-

$$v_{1/2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 \cdot v_2 / c^2} \quad (42.8)$$

42.7.c) Si se mueven en direcciones perpendiculares.-

$$v_{1/2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - (v_1 \cdot v_2 / c)^2} \quad (42.9)$$

42.8. La simultaneidad es relativa

Siempre que ocurran dos eventos dentro del tiempo necesario para que la luz viaje entre ellos, el orden de ocurrencia no queda definido; es decir, la sucesión de los eventos dependerá de la velocidad del observador. En tales casos, los eventos futuros pueden anteceder a los pasados con la simple selección de un observador en movimiento apropiado.

42.9. Masa relativista

Sea m_0 la masa de un cuerpo en reposo con relación a un observador, y sea m la masa del mismo

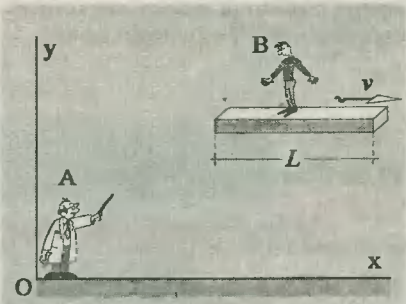


Fig. 42.2

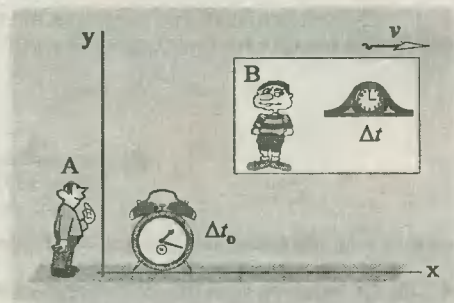


Fig. 42.3

cuerpo cuando se mueve con velocidad relativa v . Entonces, para dicho observador la masa habrá experimentado un aumento tal que:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (42.10)$$

42.10. Energía en reposo (E_0)

Sea m_0 la masa de un cuerpo en reposo con relación a un observador. Entonces, la energía inherente a los cuerpos por el solo hecho de su existencia es proporcional a su masa en reposo, tal que:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (42.11)$$

(*) La transformación directa de parte de esta energía en reposo es la que explica la enorme cantidad de energía liberada en las bombas nucleares (1 *megaton* = $4,2 \cdot 10^{15}$ J).

42.11. Energía total o fórmula de Einstein

Si m es la masa de un cuerpo en movimiento con relación a un observador, se verifica que ella posee una energía total que está dada por:

$$E_T = mc^2 \quad (42.12)$$

$$E_T = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} c^2 \quad (42.13)$$

siendo v la velocidad del cuerpo con respecto al observador en reposo.

42.12. La masa es energía; la energía es masa

Todo cambio de energía (ΔE) producido en un sistema está implícitamente acompañado por una variación en su masa (Δm), tal que:

$$\Delta m = \Delta E/c^2 \quad (42.14)$$

(*) Si un sistema libera energía, entonces pierde o desaparece parte de su masa. Si un sistema absorbe energía, entonces su masa aumenta.

42.13. Energía cinética (E_c)

Es la energía que tienen los cuerpos debido a su movimiento, y viene dada por:

$$E_c = E_T - E_0 \quad (42.15)$$

(*) Cuando la velocidad de la partícula es $v \ll c$, entonces esta relación es aproximadamente igual a la expresión clásica: $\frac{1}{2}m_0v^2$.

42.14. Cantidad de movimiento (P)

Si m es la masa de un cuerpo en movimiento, y v su velocidad respecto a un observador en reposo, entonces la cantidad de movimiento del cuerpo para dicho observador viene dada por:

$$P = mv \quad (42.16)$$

42.15. Relación entre la energía y la cantidad de movimiento

$$E = c\sqrt{(m_0c)^2 + P^2} \quad (42.17)$$

42.16. Fotón o quantum de luz

Einstein sugirió que la radiación de energía electromagnética se propaga por el espacio como si fuesen partículas o paquetes de energía, a las que llamó **fotones**, las mismas que se mueven con la velocidad de la luz. El fotón no tiene masa en reposo, es decir, no existe en estado de reposo, y al engendrarse adquiere inmediatamente la velocidad de la luz (c). La energía de un fotón se obtiene haciendo $m_0 = 0$ en la relación (42.17).

$$E = cP \quad (42.18)$$

$$E = hf \quad (42.19)$$

(*) La relación (42.19) es la relación de Max Planck propuesta para la radiación emitida por los cuerpos incandescentes, en la que se supone que los átomos emiten energía electromagnética en proporciones discontinuas con una frecuencia f . La constante de Planck es $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s.}$

42.17. Fórmula relativista de la frecuencia

$$f = \left(\frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) f_0 \quad (42.20)$$

siendo v la velocidad de la fuente de luz que se aleja del observador, f_0 la frecuencia propia de la emisión, y f la frecuencia de la radiación para un observador en reposo. Para velocidades grandes, el factor entre paréntesis es menor que 1, y por ello todas las radiaciones electromagnéticas visibles experimentan un corrimiento hacia el rojo (que es la radiación de menor frecuencia).

42.18. Fórmula relativista del movimiento uniformemente acelerado

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 - (at/c)^2}} \quad (42.21)$$

siendo a la aceleración constante, y t el tiempo transcurrido, y $v \leq c$.

RELATIVIDAD GENERAL**42.19. Teoría relativista de la gravitación**

La Teoría de la Relatividad General de Einstein es una teoría moderna que explica los fenómenos gravitatorios desde un punto de vista geométrico - cinético. Según esta teoría se establece que: "Una masa cualquiera distorsiona la región del espacio que la rodea, provocando en su vecindad una curvatura del espacio". Por esta razón, todos los cuerpos incluyendo la luz, que pueden moverse libremente, seguirán las mismas trayectorias curvas que rodean a la masa que produce la curvatura.

42.20. Principio de equivalencia

Este principio establece que el estar colocado en un campo gravitacional es equivalente a encontrarse en un sistema de referencia acelerado, y no hay forma de distinguir la diferencia.

42.21. Efectos gravitatorios sobre las ondas luminosas

Cuando las ondas de luz superan la atracción gravitacional que una masa cualquiera ejerce sobre la masa inercial de la luz, ella sufre una pérdida de energía. Esta pérdida de energía produce un aumento en su longitud de onda y una disminución en su frecuencia, de modo que el color experimenta un corrimiento hacia el rojo. Si un rayo de luz se aleja de una estrella pierde energía, y si se acerca a ella la recupera.

42.22. La gravedad retrasa el tiempo

La Teoría General de la Relatividad predice que la marcha de todos los relojes se retarda en presencia de un campo gravitatorio. Del ejemplo de la figura 42.4:

$$\text{Si } g_1 > g_2 \Rightarrow \Delta T_1 < \Delta T_2$$

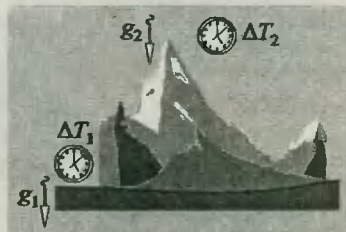


Fig. 42.4

PROBLEMAS

42.1. La posición de un punto material que está en reposo respecto al sistema S se determina por las coordenadas $x = 400\text{ m}$, $y = 25\text{ m}$, $z = 12\text{ m}$. En el instante $t = 0\text{ s}$ los orígenes de coordenadas de los sistemas S y S' coinciden. ¿A qué velocidad se mueve el sistema inercial S', si cuando $t = 50\text{ s}$ la posición del punto material respecto al sistema S' queda determinada por las coordenadas $x' = 150\text{ m}$, $y' = 25\text{ m}$, $z' = 12\text{ m}$?

42.2. El sistema de referencia inercial S' en movimiento y el sistema inercial S, adoptado como inmóvil, están orientados como se dijo en el problema anterior. Empleando las transformaciones de Lorentz, determinar las coordenadas de un suceso en el sistema S', si en el sistema S las coordenadas del suceso eran iguales a $x = 3 \cdot 10^8\text{ m}$, $y = z = 0$, $t = 5\text{ s}$, $v_x = 0,8c$ (v_x es la velocidad del sistema S' respecto al sistema S). Determinar también el instante en que se produce el suceso en S'.

42.3. ¿A qué velocidad debe moverse una barra dirigida a lo largo de su longitud, para que ésta experimente una reducción del 20% para un observador inmóvil?

42.4. En la figura se muestra una placa rectangular en reposo, cuya diagonal AC forma un ángulo $\theta_0 = 37^\circ$. ¿Con qué velocidad v debe desplazarse la placa a lo largo del eje X para que un observador en reposo observe la diagonal AC formando un ángulo $\theta = 53^\circ$ con el lado AD?

42.5. El año luz es una unidad de longitud astronómica, y se define como la distancia que recorre la luz en un año (casi 10^{13} km). Se sabe que la estrella más cercana a la Tierra es el Alfa del Centauro (Alpha Centauri), y se encuentra a 4,2 años luz de distancia. ¿Qué tiempo demora la luz de esta estrella en llegar a nosotros?. ¿Lo que vemos de la estrella en la actualidad es su pasado, presente o futuro?.

42.6. Una nave espacial sale de la Tierra con una velocidad $v = 0,8c$, y se mueve en dirección a la estrella MKRD que se encuentra a 20 años luz de la Tierra. ¿En qué tiempo medido desde la Tierra llegará la nave a dicha estrella?

Para los tripulantes, calcular:

- Cuál fué la distancia recorrida.
- Qué tiempo duró el viaje.

42.7. Considérese a dos gemelos A y B de 20 años de edad. El gemelo B hace un viaje redondo a la estrella Arturo con una velocidad $v = 12/13c$. De acuerdo con los que estamos en la Tierra, Arturo se encuentra a 39 años luz de distancia. Determinar:

- Cuáles serán las edades de A y B cuando termine el viaje de este último.
- En qué consiste la paradoja.

42.8. En el esquema se muestra un reloj de luz que marca los pulsos con intervalos de tiempo $T_0 = 6 \cdot 10^{-9}$ s cuando se encuentra en reposo. Si ahora el reloj se desplaza con una velocidad $v = 5/13 c$, calcular:

- Con qué intervalo de tiempo T se producirán los mismos pulsos para un observador ubicado en reposo.
- Determinar si el reloj en movimiento se adelanta o se atrasa con relación al observador en reposo.

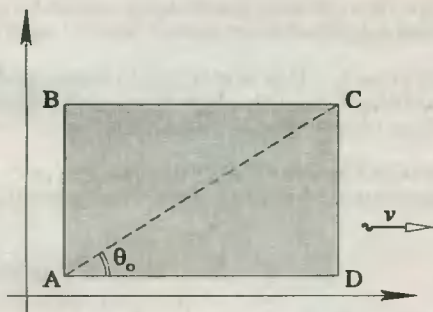


Fig. Prob. 42.4

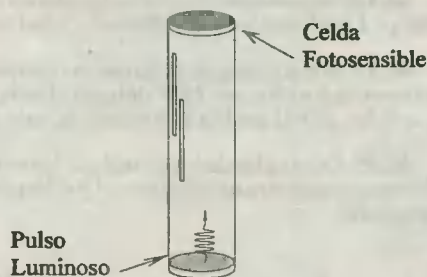


Fig. Prob. 42.8

42.9. Dos cohetes se movían uniforme y rectilíneamente con rumbos paralelos en una misma dirección con una misma velocidad $v = 0,6c$ respecto a la Tierra. En el primer cohete tuvieron lugar dos acontecimientos sucesivos al cabo del tiempo $\Delta T = 8h$. ¿Cuánto tiempo pasó entre estos acontecimientos para el reloj del observador que se encontraba en el segundo cohete y para el reloj del observador que permanece en la Tierra?

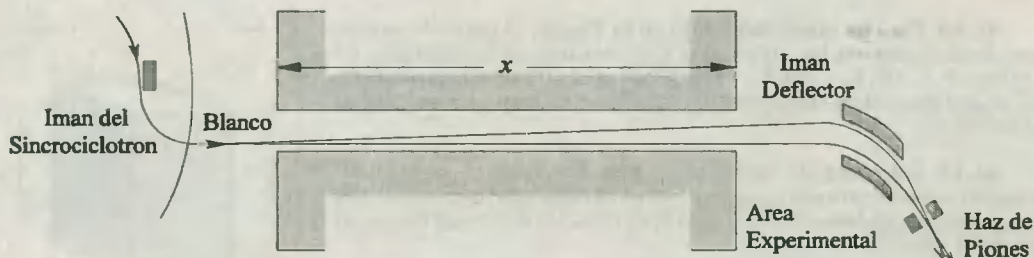


Fig. Prob 42.10

42.10. Uno de los experimentos que permite comprobar la dilatación del tiempo es el constituido por el haz de piones producidos por un haz de protones provenientes de un sincrociclotrón que inciden sobre un blanco interno. Los piones producidos por la colisión de protones sobre dicho blanco son desviados por un campo magnético, y viajan hacia el área experimental. Se sabe que la vida media

observada para los piones es $T = 1,8 \cdot 10^{-8}$ s, pero cuando un haz de ellos viaja con una velocidad $v = 0,6c$, determinar:

- ¿Cuánto tiempo tarda en desintegrarse la mitad de los piones.
- ¿Qué distancia x viajarán en este tiempo.

42.11. Dos mesones presentan velocidades $v_1 = 0,8c$ y $v_2 = 0,6c$. Determinar la velocidad de 1 respecto a 2, si se mueven:

- En la misma dirección: 1 delante de 2.
- Al encuentro.
- En direcciones perpendiculares.

42.12. Una partícula elemental, llamada neutrino, viaja con la velocidad de la luz ($v_1 = c$). Un observador se mueve hacia el neutrino con velocidad $v_2 = v$. De acuerdo con el observador en movimiento, ¿Cuál es la velocidad del neutrino?

42.13. Suponiendo que las velocidades con respecto a Tierra de los aviones mostrados en la figura son $v_1 = 1800 \text{ km/h}$ y $v_2 = 2700 \text{ km/h}$, ¿Cuál será la velocidad del primer avión medida desde el segundo?

42.14. Un sistema de referencia inercial S' se mueve con $v_x = 0,8c$ con respecto a otro fijo S . Si un observador ubicado en S' detecta el movimiento de un objeto paralelo al eje X' , con una velocidad $v'_x = 0,5c$, ¿Cuál será la velocidad de este cuerpo para un observador ubicado en S ?

42.15. Dos reglas de longitud $L_0 = 1 \text{ m}$ se mueven con velocidades $v = 0,6c$ en direcciones contrarias, tal como se muestra en la figura. ¿Qué longitud presentará la regla A para un observador que viaja con la regla B?

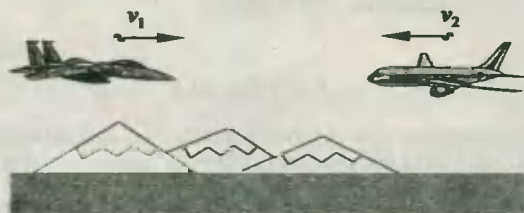


Fig. Prob. 42.13

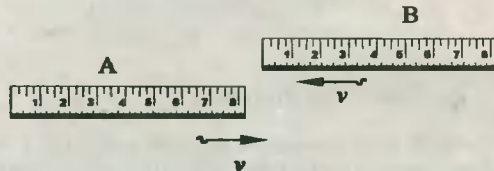


Fig. Prob. 42.15

42.16. Para un observador fijo en la Tierra, el paralelepípedo mostrado presenta las siguientes dimensiones al encontrarse en reposo: $a_0 = 3 \text{ m}$, $b_0 = 4 \text{ m}$, $h_0 = 5 \text{ m}$. ¿Cuál es el volumen que presenta el sólido para dicho observador cuando se mueva con velocidad $v = \sqrt{3}/2c$?

42.17. Un trozo de metal tiene una densidad $d_0 = 3 \text{ g/cm}^3$ cuando se encuentra en reposo. ¿Cuál es la velocidad que desarrolla para un observador en reposo, si respecto a él la densidad del trozo es $d = 4 \text{ g/cm}^3$?

42.18. La energía en reposo del mesón K es 495 MeV . Considerese un haz de mesones K de 330 MeV (cada mesón K tiene una energía cinética de 330 MeV). Calcular:

- La energía total de cada mesón.

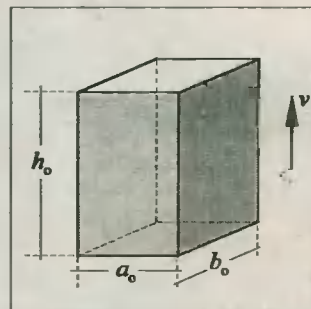


Fig. Prob 42.16

- b) Su masa en reposo, expresada en kg .
 c) Su velocidad.
 d) La vida media observada para los mesones del haz, si la vida media de los mesones K (cuando están en reposo) es $1.2 \cdot 10^{-8} s$.

Nota: $1 MeV = 1,6 \cdot 10^{-13} J$.

42.19. La energía cinética de un pión es $35 MeV$. Si su energía en reposo es $140 MeV$. ¿Por qué factor se ha aumentado su vida media?

42.20. A un protón con una energía en reposo de $48 MeV$ se le comunica una energía cinética de $720 MeV$. ¿En qué porcentaje aumenta su masa?

42.21. El betatrón es un acelerador de protones, y le comunica a éstos una energía cinética de $10^9 J$. Se sabe que la masa en reposo de los protones es $1,67 \cdot 10^{-27} kg$. ¿Por qué factor aumenta la masa en tales protones?

42.22. ¿Qué diferencia de potencial acelerante debe pasar por un electrón inicialmente en reposo, para que su energía total sea 11 veces mayor que su energía en reposo? ¿Cuántas veces aumentará su masa? Masa del electrón en reposo $= 9,1 \cdot 10^{-31} kg$.

42.23. Demostrar que la fórmula relativista de la energía cinética (relación 42.15) se reduce a $\frac{1}{2} m_0 v^2$ cuando v es muy pequeña frente a c .

42.24. Cierta partícula tiene una energía cinética igual a su energía en reposo. ¿Cuál es la velocidad de la partícula?

42.25. ¿Cuál es la energía total contenida en $10 g$ de carbón? ¿Cómo se compara esta energía con el calor de combustión producidas al quemar la misma masa de carbón? (Calor de combustión del carbón $= 7 kcal/kg$).

42.26. Una partícula en reposo presenta una masa $m_0 = 3 \cdot 10^{-3} kg$, y cuando se mueve, su masa es $m = 5 \cdot 10^{-3} kg$. ¿Cuál es su cantidad de movimiento?

42.27. Un bloque inicialmente en reposo desliza sin fricción $5 m$ hacia la derecha por la acción de la fuerza constante $F = 45 N$. ¿En cuánto se incrementa su masa debido al cambio en su energía?

42.28. Un resorte de constante $k = 4 \cdot 10^3 N/m$ se encuentra inicialmente sin deformar. ¿En cuánto se habrá incrementado su masa cuando se le haya colocado un bloque de masa $M = 3.6 kg$? ($g = 10 m/s^2$).

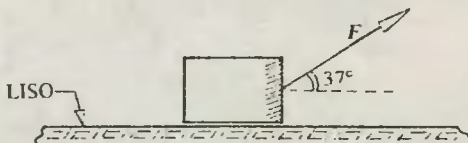


Fig. Prob. 42.27

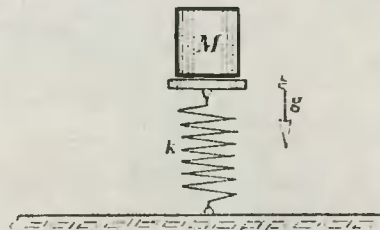


Fig. Prob. 42.28

42.29. Se tienen $200 g$ de agua a la temperatura ambiente $T_0 = 20^\circ C$. Cuando se le calienta hasta el punto de ebullición. ¿En cuánto habrá aumentado la masa de agua por efecto del aumento de energía?

42.30. Calcular la masa de un fotón de luz de color violeta, si su frecuencia es $f = 7.2 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

42.31. Suponga que fuese posible construir un motor de cohete que proporciona una aceleración constante $a = 100 \text{ m/s}^2$ a una nave espacial. Calcular el tiempo medido desde la Tierra que debe transcurrir para que su velocidad sea $v = \frac{3}{4} c$.

42.32. Una fuente de luz de color verde de frecuencia $f_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ se mueve alejándose de un observador en reposo, el cual aprecia un corrimiento hacia el rojo ($f = 3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$). ¿Cuál será en este caso la velocidad de la fuente?

42.33. En una línea recta y en la misma dirección se mueven un observador a la velocidad $v_1 = \frac{1}{2} c$, y delante de él una fuente de luz monocromática cuya velocidad es $v_2 = \frac{3}{4} c$. La frecuencia propia de la luz es igual a f_0 . Calcular la frecuencia de la luz que percibe el observador.

**R
E
S
O
L
U
C
I
O
N
E
S**

PROBLEMAS DE FISICA

.... y como resolverlos

y

RESPUESTAS

PROBLEMAS DE
FISICA

... a través de la física

DE LA UNIVERSIDAD DE VALLECAJAL

REVISTA

CAD 1 ANALISIS DIMENSIONAL

1.1. Debemos recordar que en este tipo de problemas no se nos pide determinar valores numéricos, sino mas bien dimensiones físicas para la incógnita (X). Por esta razón debemos sustituir cada magnitud derivada: E , F y v por sus correspondientes fórmulas dimensionales, y luego despejar nuestra incógnita. Utilizando el operador dimensional tenemos:

$$[E].[X] = [F].[v].[\cos\theta] \dots (*)$$

donde: $[E] = L^2MT^{-2}$; $[F] = LMT^{-2}$; $[v] = LT^{-1}$; $[\cos\theta] = 1$

Reemplazando convenientemente en (*) tenemos: $L^2MT^{-2}.[X] = LMT^{-2}(LT^{-1}).1$

Y despejamos $[X]$: $[X] = \frac{ML^2T^{-3}}{L^2MT^{-2}} = T^{-3}.T^2 \therefore [X] = T^{-1}$

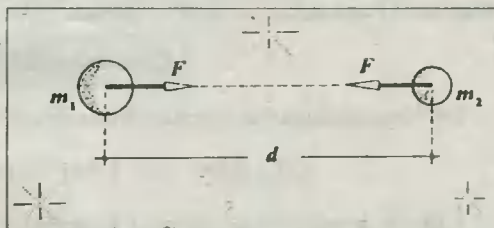
1.2. Creo oportuno hacerte saber y/o recordar que la expresión dada es la expresión matemática de la ley de Gravitación Universal, descubierta por nuestro conocido físico y matemático, Sir Isaac Newton. Asimismo, podemos reforzar esta ley graficandola del modo que te muestro en la figura.

Se nos pide determinar las dimensiones que posee G ; así entonces utilizamos el operador dimensional y reemplazamos las dimensiones conocidas.

$$[F] = [G] \frac{[m_1][m_2]}{[d^2]} \Rightarrow LMT^{-2} = [G] \frac{M.M}{L^2}$$

$$[G] = \frac{LMT^{-2}.L^2}{M^2} = L^3MT^{-2}M^{-2}$$

$$\therefore [G] = L^3M^{-1}T^{-2}$$



Observación.- En base a esta fórmula dimensional podemos establecer las unidades de G reemplazando su correspondiente unidad básica por cada magnitud fundamental.

$$(G) = (L)^3.(M)^{-1}.T^{-2} \Rightarrow (G) = m^3.kg^{-1}.s^{-2}; \text{ ó } (G) = m^3/kg.s^2$$

1.3. Reconociendo que las fórmulas dimensionales de la energía (E) y la temperatura (T) son: $[E] = L^2MT^{-2}$; $[T] = \theta$, tendremos que, en la ecuación dada se obtiene:

$$[E] = [k].[T] \Rightarrow L^2MT^{-2} = [k].\theta \therefore [k] = L^2MT^{-2}\theta^{-1}$$

1.4. La ecuación dada representa la relación matemática que permite establecer y reconocer el estado termodinámico de un gas ideal. Por dicha razón se le llama comúnmente "ecuación de estado".

Consiguiendo la correspondiente ecuación dimensional: $[p].[V] = [n].[R].[T] \dots (*)$

siendo: $[p] = L^{-1}MT^{-2}$ (presión); $[V] = L^3$ (volumen); $[n] = N$ (cantidad de sustancia); $[T] = \theta$ (Temperatura).

$$\text{Y en (*)}: L^{-1}MT^{-2}L^3 = N \cdot [R] \cdot \theta \Rightarrow [R] = \frac{L^2MT^{-2}}{\theta N} \therefore [R] = L^2MT^{-2}\theta^{-1}N^{-1}$$

1.5. Empleando las fórmulas dimensionales que aparecen en el cuadro 1.4, tendremos que:

$$[F] = \left[\frac{1}{4\pi} \right] \left[\frac{1}{\epsilon_0} \right] \frac{[q_1][q_2]}{[d]^2} \Rightarrow LMT^{-2} = 1 \cdot \frac{(\Gamma T)^2}{[\epsilon_0]L^2} \Rightarrow [\epsilon_0] = \frac{\Gamma^2 T^2}{L^3 MT^{-2}}$$

$$\therefore [\epsilon_0] = L^3 M^{-1} T^4 I^2$$

1.6. Despejando μ_0 de la relación dada, y sustituyendo las dimensiones de la velocidad (c) y de la permitividad eléctrica (ϵ_0) obtendremos:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \Rightarrow [\mu_0] = \frac{1}{(LT^{-1})^2 L^3 M^{-1} T^4 I^2} \therefore [\mu_0] = LMT^{-2} I^{-2}$$

1.7. Recurriendo al cuadro 1.4, y sustituyendo las fórmulas dimensionales de W e i en la ecuación dada, tendremos:

$$[W] = [1/2][L][i]^2 \Rightarrow L^2MT^{-2} = 1 \cdot [L] \cdot I^2 \therefore [L] = L^2MT^{-2}I^{-2}$$

1.8. Utilizando el resultado del problema anterior para el coeficiente de autoinducción (L), y del cuadro 1.4 para la fórmula dimensional de la frecuencia (f), se tendrá que:

$$[X_L] = [2\pi][L][f] = 1 \cdot T^{-1} \cdot L^2MT^{-2}I^{-2} \Rightarrow [X_L] = L^2MT^{-3}I^{-2} \dots (*)$$

Ahora, revisando las fórmulas dimensionales del cuadro (1.4) encontramos que la fórmula obtenida (*) concuerda con la de resistencia eléctrica. Luego:

X_L es una resistencia eléctrica

1.9. Reemplazando las fórmulas dimensionales de E y f en la relación dada, tendremos:

$$[E] = [h][f] \Rightarrow L^2MT^{-2} = [h]T^{-1} \therefore [h] = L^2MT^{-1}$$

1.10. De acuerdo con el cuadro (1.4) reconocemos que: $[Y] = L^{-2}J$, $[d] = L$, $[\Omega] = 1$. Luego, al despejar Φ de la relación dada tendremos:

$$\Phi = Yd^2\Omega \Rightarrow [\Phi] = [Y][d]^2[\Omega] = JL^{-2}L^2 \cdot 1 \therefore [\Phi] = J$$

1.11. Elaborando la ecuación dimensional sobre la base de la relación dada, notaremos que se tienen dos incógnitas. Veamos:

$$[A] = \frac{[W] \cdot [\text{sen}\theta]}{[m]([B]^2 + [S])} \Rightarrow [A] = \frac{(L^2MT^{-2}) \cdot (1)}{M([B]^2 + L^2)} \dots (\beta)$$

(\alpha)

Aplicando el principio de homogeneidad en la relación (α) tendremos lo siguiente:

$$[B]^2 = L^2 \therefore [B] = L$$

$$\text{Luego, en } (\beta): [A] = \frac{L^2MT^{-2}}{M(L^2)} \therefore [A] = T^{-2}$$

1.12. Obtenemos la ecuación dimensional del problema.

$$L^3 = \underbrace{1}_{(\gamma)} \cdot \underbrace{[a]}_{(\alpha)} + \frac{(\beta)}{L - [b]} \cdot \frac{1}{[c]} \dots (*)$$

Por el principio de homogeneidad dimensional, diremos que:

$$(\alpha) = (\gamma) \Rightarrow [a]/T^3 = L^3 \quad \therefore [a] = L^3 T^3 \dots (1)$$

$$\text{De } (\beta): [b] = L \dots (2)$$

$$\text{Reemplazando (1) y (2) en } (*): L^3 = \frac{L^3 T^3}{T^3} + \frac{L - L}{[c]} \Rightarrow L^3 = L^3 + \frac{L}{[c]}$$

$$\text{Es decir: } \frac{L}{[c]} = L^3 \quad \therefore [c] = L^{-2}$$

$$\text{Luego: } \frac{[b]}{[a] \cdot [c]} = \frac{L}{L^3 T^3 \cdot L^{-2}} \quad \therefore [E] = T^3$$

1.13. Utilizando las fórmulas dimensionales del cuadro (1.4) para $[P]$, $[R]$, $[Q]$ y $[d]$ tendremos que la ecuación dimensional será así:

$$[P] = \frac{[a][Q]}{[R]} + [b][d]^2 \Rightarrow LMT^{-2} = \frac{[a]L^{-1}MT^{-2}}{L} + [b](L^{-3}M)^2$$

Y efectuando operaciones encontramos lo siguiente:

$$\underbrace{LMT^{-2}}_{(\alpha)} = \underbrace{[a]L^{-2}MT^{-2}}_{(\beta)} + \underbrace{[b]L^{-6}M^2}_{(\gamma)}$$

Aplicando el principio de homogeneidad dimensional, plantearemos la igualdad de las siguientes expresiones:

$$\text{a) } (\beta) = (\alpha): [a] \cdot L^{-2}MT^{-2} = LMT^{-2} \quad \therefore [a] = L^3$$

$$\text{b) } (\gamma) = (\alpha): [b]L^{-6}M^2 = LMT^{-2} \quad \therefore [b] = L^7 M^{-1} T^2$$

1.14. Obteniendo la ecuación dimensional de la expresión original, de manera que:

$$LMT^{-2} = \{[a] + \frac{[b]}{\sqrt{LT^{-1}}}\} \cdot 1 \cdot L (LT^{-1})^2 \cdot L \Rightarrow L^{-3}M = \underbrace{[a]}_{(\theta)} + \underbrace{\frac{[b]}{(LT^{-1})^{1/2}}}_{(\omega)}$$

Aplicando el principio de homogeneidad dimensional tendremos que:

$$\text{a) } (\gamma) = (\theta) \quad \therefore [a] = L^{-3}M$$

$$\text{b) } (\omega) = (\theta) \Rightarrow \frac{[b]}{(LT^{-1})^{1/2}} = L^{-3}M \quad \therefore [b] = L^{-5/2}MT^{-1/2}$$

1.15. De acuerdo con los datos reconocemos lo siguiente:

$$[Q] = L^3/T = L^3T^{-1} \text{ (caudal); } [\gamma] = [L^2MT^{-2}] \text{ (peso específico)}$$

Luego, elaborando la ecuación dimensional correspondiente tendremos:

$$L^3T^{-1} = \frac{[C]L^2}{\sqrt{1 - \frac{(L^2/[B])^2}{\alpha}}} \cdot \sqrt{\frac{(1)LT^{-2}(L^{-1}MT^{-2} - [R])}{L^2MT^{-2}}} \dots (\theta)$$

A continuación determinaremos las dimensiones de B y R empleando el principio de homogeneidad dimensional.

A) En (α) : $(L^2/[B])^2 = 1 \Rightarrow [B] = L^2$

B) En (β) : $[R] = L^{-1}MT^{-2}$

Sustituyendo estos resultados en (θ) y reduciendo términos tendremos:

$$L^3T^{-1} = \frac{[C]L}{\sqrt{1}} \cdot \sqrt{\frac{LT^{-2}L^{-1}MT^{-2}}{LMT^{-2}}} \therefore [C] = 1$$

1.16. Ya que conocemos las dimensiones de R , v y a , aplicaremos directamente el principio de homogeneidad dimensional en el numerador de la expresión original para poder determinar las dimensiones de E . Veamos:

$$[R][v] = [a][E] \Rightarrow L^2MT^{-2} \cdot LT^{-1} = LT^{-2}[E] \therefore [E] = L^2MT^{-1}$$

Observación. - El resto de los términos no son todos conocidos, y su participación no es limitante para el cálculo de nuestra incógnita principal.

1.17. Aplicando directamente el principio de homogeneidad dimensional al segundo miembro de la relación dada, tendremos lo siguiente:

$$[q][E] = [q][v][B] \Rightarrow [B] = \frac{[E]}{[v]} \dots (*)$$

Ahora, utilizando el cuadro (1.4) encontramos las fórmulas dimensionales de E y v para luego reemplazarlas en $(*)$, de modo que:

$$[B] = \frac{LMT^{-3}T^{-1}}{LT^{-1}} \therefore [B] = MT^{-2}T^{-1}$$

Observación. - La relación original: $F = qE + qvB$, corresponde a la fórmula de Lorentz para la fuerza (F) que experimenta una carga (q) móvil con velocidad (v) cuando viaja en un el interior de un campo doble: Eléctrico (E) y magnético (B). Así, la fórmula dimensional obtenida corresponde al campo magnético, llamado también **inducción magnética**.

1.18. A partir de la ecuación dimensional, primero encontraremos las dimensiones de k , y luego las de A . Veamos:

$$[A] = [B][k] - [C][k]^3 \Rightarrow \underbrace{[A]}_{(\alpha)} = \underbrace{L^2 T^{-2}}_{(\beta)} [k] - \underbrace{T^{-2}}_{(\gamma)} [k]^3$$

Utilizando el principio de homogeneidad dimensional diremos que:

a) $(\gamma) = (\beta) \Rightarrow T^{-2}[k]^3 = L^2 T^{-2}[k] \Rightarrow [k] = L \dots (*)$

b) $(\alpha) = (\beta) \Rightarrow [A] = L^2 T^{-2} (L) \therefore [A] = L^3 T^{-2}$

1.19. De acuerdo al cuadro (1.4) tenemos: $[P] = L^{-1} M T^{-2}$, $[B] = L$; $[A] = L^2$; $[m] = [n] = 1$.

Luego, en la ecuación dada: $L^{-1} M T^{-2} = [C] \cdot \underbrace{(L - 1 \cdot [H])}_{(\alpha)} \cdot \{1 + \underbrace{(1 \cdot L^2/[D])^2}_{(\beta)}\} \cdot D^{3/2} \dots (1)$

Aplicando el principio de homogeneidad dimensional en (1) tenemos:

En (α) : $[H] = L \dots (2)$

En (β) : $(L^2/[D])^2 = 1 \Rightarrow [D] = L^2 \dots (3)$

Reemplazando (2) y (3) en (1): $L^{-1} M T^{-2} = [C] \cdot L \cdot \{1\} \cdot (L^2)^{3/2} \therefore [C] = L^{-5} M T^{-2}$

1.20. Consiguiendo la ecuación dimensional tendremos:

$$L^2 M = 1 \cdot M \cdot \left\{ \frac{(L \cdot 1)^x - (L \cdot 1)^y}{(L \cdot 1)^z - (L \cdot 1)^p} \right\} \Rightarrow L^2 = \frac{\underbrace{L^x - L^y}_{(\alpha)}}{\underbrace{L^z - L^p}_{(\beta)}} \dots (1)$$

Por el principio de homogeneidad dimensional diremos lo siguiente:

De (α) : $L^x = L^y \Rightarrow x = y$

De (β) : $L^z = L^p \Rightarrow z = p$ (2)

Luego, de (2) en (1): $L^2 = L^x / L^p = L^{x-p}$

Comparando exponentes: $x - p = 2$

Peró, de la relación (2) podemos escribir: $y - z = 2$, ó $z - y = -2$

Finalmente: $E = (x - p)^{(x - y)} = (2)^{(-2)} \therefore E = 1/4$

1.21. Nuestro problema consiste en averiguar las dimensiones y/o números incógnitas, es decir, los valores de los exponentes x y y , y además la fórmula dimensional de (δ) .

Trabajando en el Sistema Internacional y considerando que $\cos\theta = \cos\pi/3 = \cos 60^\circ = 1/2$, tendremos de la ecuación original que:

$$\{L M T^{-2} \cdot (L^2 M T^{-1})^x \cdot 1\}^2 + [\delta] \cdot L M T^{-2} = \{L M T^{-2} \cdot M L^2 T^{-1} \cdot (L T^{-1})^y\}^{1/(1/2)}$$

Efectuando operaciones y agrupando términos tenemos:

$$\underbrace{L^{2(1+2x)} M^{2(1+x)} T^{2(-2-x)}}_{(\alpha)} + \underbrace{[\delta] L M T^{-2}}_{(\beta)} = \underbrace{L^{2(3+y)} M^4 T^{2(-3-y)}}_{(\gamma)}$$

1.- Comparando exponentes de (α) con (γ) tenemos:

$$\text{De M: } 2(1+x) = 4 \dots (1)$$

$$\text{De L: } 2(1+2x) = 2(3+y) \dots (2)$$

$$\text{De T: } 2(-2-x) = 2(-3-y) \dots (3)$$

$$\text{Resolviendo con (1) y (2): } x = 1 \text{ e } y = 0$$

2.- Comparando (β) con (γ) : $[\delta] L M T^{-2} = L^6 M^4 T^{-6} \therefore \boxed{\delta = L^5 M^3 T^{-4}}$

1.22. Puesto que los números r, x, y, z, w no dependen del sistema de unidades en que quede expresada la relación dada, usaremos el S.I. Luego, determinando la ecuación dimensional tendremos:

$$\underbrace{[\alpha] \cdot 1 \cdot 1}_{(A)} - \underbrace{L^2 M^x T^{-3}}_{(B)} \cdot T = \underbrace{1 \cdot M^x \cdot (L T^{-1})^y}_{(C)} \pm \underbrace{(L^{-3} M)^z \cdot (L^{-2} M T^{-2})^w \cdot L^r}_{(D)}$$

$$\text{De (B) y (C): } L^2 M^x T^{-2} = L^2 M^x T^{-2} \Rightarrow x = 1 ; y = 2$$

$$\text{De (B) y (D): } L^{-3z-2w+r} M^{z+w} T^{-2w} = L^2 M^1 T^{-2}$$

$$\text{De donde: } z + w = 1 ; -3z - 2w + r = 2 ; -2w = -2$$

$$\text{Y resolviendo: } z = 0 ; w = 1 ; r = 4$$

$$\text{Finalmente: } R = x + y + z + w + r = 1 + 2 + 0 + 1 + 4 \therefore \boxed{R = 8}$$

1.23. Como es de notar, nos interesa calcular el valor de α y las dimensiones de A, B y C , para así calcular Q ; ello lo lograremos a partir de la ecuación dimensional siguiente:

$$L^2 M T^{-2} = \underbrace{M(L T^{-1})^\alpha}_{(1)} + \underbrace{[A] L T^{-2} L}_{(2)} - \underbrace{[B] L^2}_{(3)} + \underbrace{L^2 M T^{-3} [C]}_{(4)}$$

Comparando todas las relaciones indicadas con el primer miembro, tendremos:

$$\text{De (1): } L^\alpha M T^{-\alpha} = L^2 M T^{-2} \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\text{De (2): } [A] L^2 T^{-2} = L^2 M T^{-2} \Rightarrow [A] = M$$

$$\text{De (3): } [B] L^2 = L^2 M T^{-2} \Rightarrow [B] = M T^{-2}$$

$$\text{De (4): } L^2 M T^{-3} [C] = L^2 M T^{-2} \Rightarrow [C] = T$$

Finalmente, reemplazamos en Q (ver enunciado del problema) lo calculado anteriormente, para así obtener:

$$[Q] = \frac{M^2 \sqrt{M T^{-2}}}{\sqrt{T^2}} = \frac{M^2 M^{1/2} T^{-1}}{T} \therefore \boxed{[Q] = M^{5/2} T^{-2}}$$

1.24. Encontrando la fórmula dimensional de la ecuación dada tendremos:

$$L^2MT^{-2} = [k_1]LT^{-1} + \frac{[k_2](LT^{-1})^2}{1} + \frac{[k_3](LT^{-1})^3}{1} + \dots$$

$$\Rightarrow L^2MT^{-2} = [k_1]LT^{-1} + [k_2]L^2T^{-2} + [k_3]L^3T^{-3} + [k_4]L^4T^{-4} + \dots$$

Por el principio de homogeneidad dimensional tendremos:

$$[k_1] = LMT^{-1}, [k_2] = L^0MT^0, [k_3] = L^{-1}MT^{-1} = L^{-(3-2)}M^1T^{(3-2)}, [k_4] = L^{-2}MT^2 = L^{-(4-2)}M^1T^{(4-2)}$$

$$\dots [k_n] = L^{-(n-2)}MT^{n-2} (*) \text{ (Forma general de } k).$$

$$\text{Luego: } [k_9] = L^{-7}MT^7, [k_{17}] = L^{-15}MT^{15}, [k_{12}] = L^{-10}MT^{10}$$

$$\text{Finalmente: } [E] = \frac{[k_9][k_{17}]}{[k_{12}]} = \boxed{L^{-12}MT^{12}}$$

Observación. - Podemos rescatar del resultado y de (*) lo siguiente: $L^{-12}MT^{12} = L^{-(14-2)}MT^{12}$, es decir, si $n = 14$, entonces $[E] = k_{14}$, donde k_{14} no es otra cosa que la suma algebraica de los subíndices de k_9, k_{17} y k_{12} , según el siguiente arreglo: $k_9, k_{17}/k_{12}$: $9 + 17 - 12 = 14 \Rightarrow k_9, k_{17}/k_{12} = k_{14}$.

1.25. De acuerdo con el ítem 1.4, los exponentes de las magnitudes físicas sólo pueden ser números reales; así entonces deducimos que en la expresión original, el término *UNA* debe ser un número, lo que nos permite calificarlo como una cantidad adimensional. Luego, tendremos:

$$[UNA] = 1 \Rightarrow (L^2MT^{-2})[N](L^2) = 1 \quad \therefore \boxed{[N] = L^{-4}M^{-1}T^{-2}}$$

Observación. - Las dimensiones de N son tales que permite eliminar a las magnitudes que lo acompañan.

1.26. Utilizando el mismo argumento del problema anterior, diremos que el exponente de e debe ser necesariamente un número sin unidades físicas. Luego, elaborando la ecuación dimensional del exponente, tendremos:

$$\left[\frac{4m^4}{v}\right] = 1 \Rightarrow 1 \cdot \frac{M[A]}{LT^{-1}} = 1 \quad \therefore \boxed{[A] = LT^{-1}M^{-1}}$$

$$\text{Y regresando a: } [y] = (LM^{-1}T^{-1})(L^{-1}MT^{-2})(1) \quad \therefore \boxed{[y] = T^{-3}}$$

1.27. En primer lugar determinaremos las dimensiones de y a partir del análisis de la ecuación trigonométrica: $\text{sen}(\omega y - \phi)$, de donde reconocemos que lo que está dentro del paréntesis es necesariamente un ángulo, y por ende es una cantidad adimensional. De este modo tenemos:

$$[\omega y - \phi] = 1 \Rightarrow [\omega y] = [\phi] = 1 \Rightarrow [\omega y] = 1 \Rightarrow T^{-1}[y] = 1 \quad \therefore \boxed{[y] = T} \dots (*)$$

A continuación encontraremos las dimensiones de x elaborando la ecuación dimensional correspondiente de la relación original, y reemplazando lo obtenido en (*). Veamos.

$$[m][v]^2[\text{sen}(\omega t - \phi)] = \frac{[\pi][x]^{1/2}}{[y]^2} \Rightarrow M(LT^{-1})^2 \cdot 1 = \frac{1 \cdot [x]^{1/2}}{T^2} \quad \therefore \boxed{[x] = L^4M^2}$$

1.28. Primero determinaremos las dimensiones de x , analizando para ello la función logarítmica: $\log(mx/t)$, del cual reconocemos que lo que está dentro del paréntesis es sin lugar a dudas un número real, y por ende una cantidad adimensional. De este modo tendremos:

$$[mx/t] = 1 \Rightarrow M[x]/T = 1 \Rightarrow [x] = M^{-1}T \dots (1)$$

En segundo lugar encontraremos las dimensiones de y , resolviendo para ello la ecuación dimensional de la relación original.

$$[d][v] \cdot [\log(mx/t)] = [y] \cdot [\lg(\theta + ym/z)] \Rightarrow L^{-3}M.LT^{-1} = [y] \Rightarrow [y] = L^{-2}MT^{-1} \dots (2)$$

En tercer lugar determinaremos las dimensiones de z analizando el interior del paréntesis en la función trigonométrica **tangente**, el cual como se sabe es una cantidad adimensional. Veamos.

$$[\theta + ym/z] = 1 \Rightarrow [\theta] = [ym/z] = 1 \Rightarrow [z] = M[y] \dots (*)$$

$$\text{Y de (2) en (*) obtenemos: } [z] = L^{-2}M^2T^{-1} \dots (3)$$

Finalmente, encontraremos la fórmula dimensional de E utilizando los resultados de (1), (2) y (3).

$$[E] = \frac{[x][z]}{[y]^2} = \frac{M^{-1}T.L.L^{-2}M^2T^{-1}}{(L^{-2}MT^{-1})^2} \therefore [E] = L^2M^{-1}T^2$$

1.29. Elaborando la ecuación dimensional correspondiente, y utilizando el resultado del problema 1.9, así como el cuadro 1.4, tendremos:

$$[\lambda] = [h][P]^y \Rightarrow L = (L^2MT^{-1})^y(LMT^{-1})^y$$

Ahora, completaremos términos en el primer miembro de la igualdad de manera que ésta no se altere, pero que aparezcan en ambos miembros las mismas magnitudes, de modo que la solución final consista sólo en comparar los exponentes de cada magnitud. Veamos.

$$L^1.M^0.T^0 = L^{2x+y}.M^{x+y}.T^{-(x+y)} \dots (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{De L: } 1 = 2x + y \\ \text{De M: } 0 = x + y \end{array} \right\} x = 1, y = -1$$

$$\text{Finalmente, la fórmula tendría la siguiente forma: } \lambda = h^1P^{-1} \therefore \lambda = h/P$$

Observación. - Al analizar los exponentes de T , vemos que los resultados verifican la homogeneidad dimensional de la ecuación (*).

1.30. Sustituyendo cada magnitud derivada por sus correspondientes fórmulas dimensionales, tendremos que la ecuación dimensional tendrá la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [Pot] &= [k][R]^x[\omega]^y[D]^z \Rightarrow L^2MT^{-3} = L^x.(T^{-1})^y.(L^{-3}M)^z \\ &\Rightarrow L^2.M^1.T^{-3} = L^{x-3z}.M^z.T^{-y} \dots (*) \end{aligned}$$

Igualando términos semejantes tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{De L: } 2 = x - 3z \\ \text{De M: } 1 = z \\ \text{De T: } -3 = -y \end{array} \right\} \text{Resolviendo: } x = 5; y = 3; z = 1$$

$$\therefore Pot = kR^5\omega^3D$$

1.31. En primer lugar debemos reconocer que, de acuerdo con las unidades en que se expresa el caudal (Q), ésta tendrá la siguiente fórmula dimensional: $[Q] = L^3T^{-1}$. Ahora, procediendo del mismo modo que el efectuado en el problema anterior, tendremos la siguiente ecuación dimensional:

$$[p] = [k][Q]^x.[d]^y.[A]^z \Rightarrow L^{-1}MT^{-2} = (L^3T^{-1})^x.(L^{-3}M)^y.(L^2)^z$$

$$\Rightarrow L^{-1} \cdot M^1 \cdot T^{-2} = L^{3x-3y-2z} \cdot M^y \cdot T^{-x} \dots (*)$$

Resolviendo la ecuación (*) encontramos que: $x = 2; y = 1; z = -2$.

Finalmente, la fórmula empírica tendrá la siguiente forma: $p = k \frac{Q^2 d}{A^2}$

1.32. Por condición del problema: $f = f(l, g)$

└ función

Luego, la fórmula empírica sería $f = k \cdot l^x \cdot g^y \dots (*)$

donde: k = constante numérica de proporcionalidad; x e y = exponentes numéricos.

Cálculo de los exponentes.- Por el análisis dimensional tendremos:

$$[f] = 1 \cdot L^x \cdot (LT^{-2})^y \Rightarrow T^{-1} = L^{x-y} \cdot T^{-2y}$$

Completando miembro a miembro: $L^0 \cdot T^{-1} = L^{x-y} \cdot T^{-2y}$

De donde: $x + y = 0; y = -2y = -1$

Resolviendo: $x = -1/2, e y = 1/2$

Por lo tanto, en (*): $f = k \cdot l^{1/2} \cdot g^{1/2} = k(g/l)^{1/2}$, ó $f = k \sqrt{gl}$

Nota.- En el capítulo 22 se encontrará que dicha fórmula es: $f = 1/2\pi \sqrt{gl}$, es decir: $k = 1/2\pi$.

1.33. Según el problema: $T = f(R, M, G)$. Entonces: $T = k \cdot R^x \cdot M^y \cdot G^z$ (fórmula empírica), siendo:

$[R] = L; [M] = M; [T] = T; [G] = L^3 M^{-1} T^{-2}$ (Prob. 1.2); k = constante numérica.

Luego, por análisis dimensional: $[T] = 1 \cdot L^x \cdot M^y \cdot (L^3 M^{-1} T^{-2})^z \Rightarrow [T] = L^{x+3z} \cdot M^{y-z} \cdot T^{-2z}$

Completando el primer miembro: $L^0 M^0 T^1 = L^{x+3z} \cdot M^{y-z} \cdot T^{-2z}$

Comparando los exponentes: $y + 3z = 0; y - z = 0; -2z = 1$

Resolviendo: $x = 3/2; y = -1/2; z = -1/2$

Luego, en la fórmula empírica: $T = k R^{3/2} M^{-1/2} G^{-1/2}$

$$[T] = k R \sqrt{R/GM}$$

1.34. De acuerdo al problema: $P = f(d, v, t) \Rightarrow P = k d^x v^y t^z$ (fórmula empírica).

Cálculo de los exponentes.- De acuerdo con el análisis dimensional, y por el principio de homogeneidad dimensional tendremos:

$$L^2 M T^{-3} = 1 \cdot (ML^{-3})^x \cdot (LT^{-1})^y \cdot T^z \Rightarrow L^2 M^1 T^{-3} = L^{(-3x+y)} M^x T^{(-y+z)}$$

De donde: $x = 1; y = 5; z = 2 \therefore P = k d v^5 t^2 \dots (*)$

Cálculo de k .- Según los datos numéricos: $0,9 W = (k) \cdot (0,8 g/cm^3) (5 cml/s)^5 (2 s)^2$

Homogenizando unidades tenemos: $k = 900$.

Finalmente, en (*) obtendremos: $P = 900dv^2t^2$

1.35. Sean x, y, z los exponentes (llamados también dimensiones) de las magnitudes Λ, M y T respectivamente, de la magnitud derivada G en su fórmula dimensional expresada en el nuevo sistema. Luego, en base a lo estipulado en el ítem 1.4, tendremos:

$$[G] = A^x M^y T^z \dots (*)$$

Para determinar los valores de x, y y z sustuiremos cada magnitud participante por su correspondiente fórmula dimensional en el S.I, los mismos que se encuentran en el cuadro 1.4 y la respuesta obtenida en el problema 1.2. De este modo tendremos:

$$L^3 M^{-1} T^{-2} = (LT^{-2})^x (M)^y (T)^z$$

Y resolviendo la ecuación dimensional dada, encontramos que: $x = 3; y = -1; z = 4$. Finalmente, en (*) tendremos:

$$[G] = A^3 M^{-1} T^4$$

1.36. Como se recordará, en el Sistema Internacional la potencia tiene la siguiente ecuación dimensional: $[P] = L^2 M T^{-3} \dots (*)$

siendo el *watt*, como ya se sabe, la unidad de potencia: $(P) = L^2 M T^{-3} = m^2 kg/s^3 = 1 \text{ watt} \dots (1)$

Pero, en el nuevo sistema de unidades, la unidad de potencia será encontrada de (*).

$$U(P) = \frac{[U(L)]^2 U(M)}{[U(T)]^3} \Rightarrow U(P) = \frac{(3 m)^2 5 kg}{(3 s)^3}$$

Y de (1): $U(P) = 5/3 \text{ watt}$

1.37. Nuestro primer paso será calcular la equivalencia que existe entre las unidades CGS absolutas y las unidades dadas en el problema.

$$1 \text{ velucio: } 3 \cdot 10^5 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}; 1 \text{ gravio} = 9,8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ cm/s}^2$$

$$1 \text{ trevio} = Fd = mgd = 1 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m} \Rightarrow 1 \text{ trevio} = 9,8 \cdot 10^7 \text{ g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}^2$$

Ahora, nuestro afán será encontrar la fórmula dimensional de la masa en el nuevo sistema, para lo cual nos valdremos de las siguientes convenciones:

velucio = $v \dots$ (velocidad); *gravio* = $G \dots$ (aceleración); *trevio* = $W \dots$ (trabajo)

Luego, si m = masa, entonces: $m = f(v, G, W) \Rightarrow [m] = [v]^x [G]^y [W]^z \dots (1)$

$$\text{Luego: } M = (LT^{-1})^x (LT^{-2})^y (L^2 MT^{-2})^z \Rightarrow L^0 M^1 T^0 = L^{x+y+2z} M^z T^{-x-2y-2z}$$

Y comparando exponentes tendremos: $z = 1; x + y + 2z = 0; -x - 2y - 2z = 0$

De donde: $x = -2; y = 0; z = 1$

Luego, en (1): $[m] = v^{-2} G^0 W$, o también: Unidad (m) = (*velucio*)⁻² (*trevio*)¹

$$\text{Unidad } (m) = \frac{(9,8 \cdot 10^7 \text{ g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}^2)^1}{(3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s})^2} \therefore \text{Unidad } (m) = 1,09 \cdot 10^{-13} \text{ g}$$

1.38. Se desea obtener una expresión tal como: $W = k_2 v^2$, siendo k_2 una constante física cuyo valor depende de las unidades en que se expresen W y v .

En este caso, W está expresado en N/m^2 , y v en m/s , que no es otra cosa que unidades del S.I. Sin embargo, notamos que: $k_2 = W/v^2$, es decir:

$$\text{Unidad } (k_2) = \frac{\text{Unidad } (W)}{[\text{Unidad } (v)]^2} \Rightarrow \text{Unidad } (k_2) = \frac{N/m^2}{m/s} \dots (1)$$

Análogamente, la expresión original del problema nos dice que: $W = k_1 v_2$ cuando $(W) = kg/m^2$, y $(v) = km/h$, es decir:

$$\text{Unidad } (k_1) = \frac{\text{Unidad } (W)}{[\text{Unidad } (v)]^2}$$

$$\text{Pero } k_1 = 0,05; \text{ luego, en realidad: } k_1 = 0,05 \frac{kg/m^2}{(km/h)^2} \dots (2)$$

Es lógico pensar que si las unidades de (2) las llevamos al Sistema Internacional, estaríamos ante el nuevo valor de la constante k , es decir, en (1):

$$k_1 = 0,05 \frac{\frac{kg}{m^2} \cdot \frac{9,8 N}{1 kg}}{(5 m/18 s)^2} = 0,05 \cdot 127,008 \frac{N/m^2}{(m/s)^2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{k_2}$

Luego, $k_2 \approx 6,35 \therefore W(N/m^2) = 6,35v^2 (m/s)$

CAP 2 ANALISIS VECTORIAL

2.1. Según los datos, se tiene que: $A = 6$, $B = 10$ y $R = 14$. Luego, utilizando la relación (2.3) para la resultante de dos vectores, tendremos:

$$14 = \sqrt{6^2 + 10^2 + 2 \cdot 6 \cdot 10 \cos \theta} \Rightarrow 196 = 136 + 120 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 1/2$$

$$\therefore \theta = 60^\circ, \text{ ó } \theta = \pi/3 \text{ rad}$$

2.2. De acuerdo a los datos fasoriales, podemos elaborar el esquema adjunto, en donde $A = 18$, $B = 24$, verificándose asimismo que estos vectores son perpendiculares. Luego, aplicando el Teorema de Pitágoras calcularemos el módulo de la resultante.

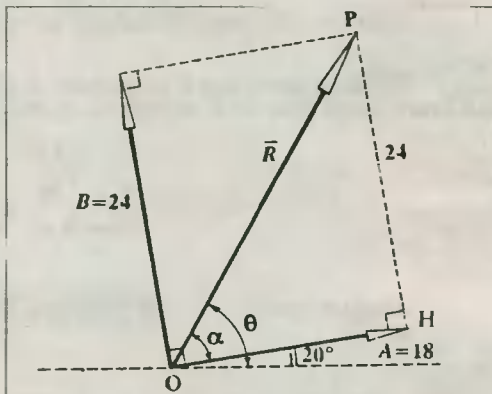
$$R = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = \sqrt{900} \therefore R = 30$$

Asimismo, del ΔOHP notamos que:

$$\operatorname{tg} \alpha = 24/18 = 4/3 \Rightarrow \alpha = 53^\circ$$

Finalmente, el ángulo direccional θ viene dado por:

$$\theta = 20^\circ + \alpha = 73^\circ$$



2.3. Utilizando las relaciones (2.4) y (2.5) para la resultante máxima y mínima respectivamente, para dos vectores desconocidos A y B , se tendrá:

$$R_{\max} = A + B = 16 \dots (1) \quad ; \quad R_{\min} = A - B = 4 \dots (2)$$

Resolviendo (1) y (2) se obtiene: $A = 10$; $B = 6$. Ahora, cuando los vectores formen el ángulo $\theta = 127^\circ$, su resultante vendrá dada por la relación (2.3).

$$R = \sqrt{10^2 + 6^2 + 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot (-3/5)} = \sqrt{136 + 120(-3/5)} \therefore R = 8$$

2.4. Para el primer caso tendremos una resultante mínima, por lo que utilizaremos la relación (2.5):

$$A - B = 3 \dots (1)$$

Para el segundo caso utilizaremos la relación (2.3) para la resultante.

$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos 60^\circ = 39^2$, donde luego de efectuar operaciones tendremos:

$$A^2 + B^2 + AB = 1521 \dots (2)$$

De (1) despejamos A , tal que: $A = B + 3$, y reemplazamos ésto en (2), en donde luego de efectuar operaciones se obtiene una ecuación de segundo grado en B :

$$(B + 3)^2 + B^2 + (B + 3)B = 1521 \Rightarrow B^2 + 3B - 504 = 0$$

Finalmente, al resolver la ecuación se encuentra que: $B = -24$ (imposible); y $B = 21$ (verdadero). Luego:

$B = 21$ y $A = 24$

2.5. Haciendo uso de la variable m , diremos que: $A = m$, $B = 3/5 m$, $\theta = 60^\circ$, y $R = 35$, datos que reemplazaremos en la relación (2.3), para así calcular el valor de m .

$$35 = \sqrt{m^2 + (3/5 m)^2 + 2(m)(3/5 m)\cos 60^\circ} = \sqrt{(1 + 9/25 + 3/5)m^2} \Rightarrow 35 = 7/5 m \Rightarrow m = 25$$

Luego: $A = 25$, y $B = 15$

2.6. Sean $R = 21$, $\vec{R} \perp \vec{B}$, y $A = 35$, con los cuales construimos el esquema adjunto, en donde se verifica que el ΔOHP es pitagórico, pues sus lados responden a los números $3k$, $4k$ y $5k$. $A = 35 = 5k$, y $R = 21 = 3k \Rightarrow k = 7 \Rightarrow B = 4k = 4(7) = 28$.

Así, reconocemos que $\alpha = 53^\circ$.

$$\Rightarrow \theta = 90^\circ + \alpha \therefore \theta = 143^\circ$$

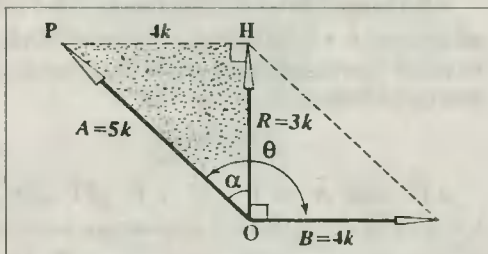


Fig. Solución Prob 2.6

2.7. Al hacer la descomposición vectorial, los vectores componentes F_1 y F_2 formarán un paralelogramo como el que se muestra en la figura, tal que:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos 127^\circ}$$

$$\Rightarrow 8^2 = 6^2 + F_2^2 + 2 \cdot 6 \cdot F_2 \cdot (-3/5)$$

$$\Rightarrow 5F_2^2 - 36F_2 - 140 = 0$$

$$\therefore F_2 = -14/5 \text{ (Imposible), y:}$$

$F_2 = 10$ (verdadero)

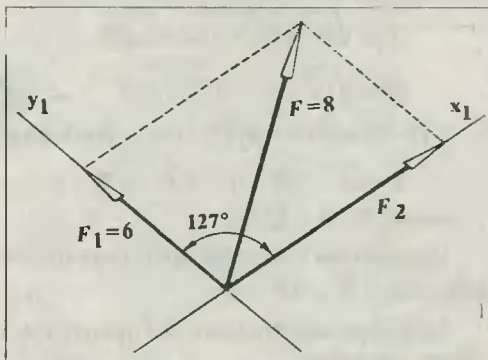


Fig. Solución Prob 2.7

2.8. Al observar detenidamente el gráfico adjunto, notamos que es posible construir varios paralelogramos que permitan sumar por separado a los vectores A y E , y B y D ; ésto lo rescatamos del hecho que las saetas de todos los vectores están en una misma línea e igualmente espaciadas. Así pues, la diagonal \vec{R} del paralelogramo mayor se intersecta en su punto medio con la diagonal menor de dicho paralelogramo. De este modo notamos que el vector \vec{C} es la mitad del vector \vec{R} . Seguidamente procedemos a sumar por separado.

Del paralelogramo mayor: $\vec{A} + \vec{E} = \vec{R} \dots (1)$

Del paralelogramo menor: $\vec{B} + \vec{D} = \vec{R} \dots (2)$

Además: $\vec{C} = \vec{R}/2 \dots (3)$

Luego, sumando miembro a miembro (1), (2) y (3):

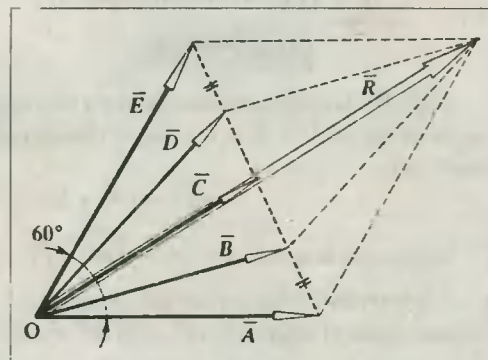


Fig. Solución Prob. 2.8

$$\frac{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} + \bar{E}}{\bar{R}_T = \Sigma \bar{V}} = \frac{\bar{R} + \bar{R} + \bar{R}}{2} \Rightarrow \bar{R}_T = 5/2 \bar{R} \dots (*)$$

Pero, del paralelogramo mayor, notamos que:

$$R = \sqrt{A^2 + E^2 + 2AE \cos 60^\circ} = \sqrt{10^2 + 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 10(1/2)} \Rightarrow R = 14 \dots (**)$$

Finalmente, de (**) en (*); $R_T = 5/2 \cdot 14 \Rightarrow R_T = 35$

2.9. Designando los vectores con \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} , notamos que la suma ($\bar{a} + \bar{b}$) debe estar en la misma línea de acción del vector \bar{c} , para así provocar una resultante mínima. Y así, de la figura deducimos que: $2\theta = 45^\circ$

$$\therefore \theta = 22,5^\circ$$

2.10. Sean $\bar{A} = 2\bar{P} + \bar{Q}$, y $\bar{B} = 3\bar{P} - \bar{Q}$, donde $A = 15$ y $B = 7$. Luego, si procedemos a sumar estos vectores vemos que se elimina Q , y queda: $\bar{A} + \bar{B} = 5\bar{P}$. Entonces, utilizando la relación (2,3) tendremos:

$$5P = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos 53^\circ}$$

$$5P = \sqrt{15^2 + 7^2 + 2 \cdot 15 \cdot 7 \cdot 3/5} \quad \therefore P = 4$$

2.11. De acuerdo con los datos se puede establecer lo siguiente:

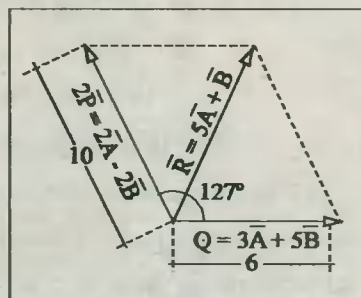
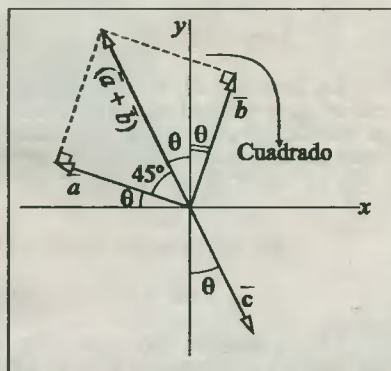
$\bar{P} = \bar{A} - 2\bar{B}$, $\bar{B} = 3\bar{A} + 5\bar{B}$, y $\bar{R} = 5\bar{A} - \bar{B}$
siendo: $P = 5$, y $Q = 6$.

Haciendo una inspección rápida entre ellos, se puede deducir que: $\bar{R} = 2\bar{P} + \bar{Q}$.

Luego, aplicando la relación (2,3) para el paralelogramo adjunto, tendremos:

$$R = \sqrt{10^2 + 6^2 + 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 127^\circ}$$

$$\therefore |5\bar{A} - \bar{B}| = 8$$



2.12. Por la continuidad que presenta los vectores A y B , diremos que ellos se están sumando, y su resultante es $\bar{A} + \bar{B} = \bar{C}$. Luego, cuando tratamos de encontrar la resultante total del sistema, tendremos:

$$\bar{R}_T = (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} = 2\bar{C} \dots (*)$$

Asimismo, notamos que: $C = \sqrt{48^2 + 14^2} = 50$

Y por ser un triángulo rectángulo pitagórico, diremos que $\alpha = 16^\circ$, por ser lado opuesto al lado $7k$. De este modo, el ángulo direccional θ del vector C es: $\theta = 90^\circ + \alpha = 106^\circ$. Entonces: $\bar{C} = 50/106^\circ$.

$$Y \text{ en } (*): \quad \bar{R}_T = 2(50/106^\circ) \quad \therefore \bar{R}_T = 100/106^\circ$$

2.13. Observarás que los módulos de los vectores a , b y c cumplen con el Teorema de Pitágoras ($3^2 + 4^2 = 5^2$), es decir $a^2 + b^2 = c^2$. Luego, los vectores a y b son perpendiculares entre sí, y c es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado con ellos (Figura (1)).



Figura (1)

Figura (2)

La figura (2) se ha construido en base a la figura (1), donde el módulo de x se calculará así:

$$x = \sqrt{(5/3 a)^2 + (3b)^2} = \sqrt{(5/3 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 4)^2}$$

$$\therefore \boxed{x = 13}$$

2.14. Haciendo uso de la relación (2.10) elaboramos el esquema adjunto, donde se verifica lo siguiente:

$$\bar{x} = \bar{A}/2 + \bar{B}/4 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = 1/4 (2\bar{A} + \bar{B})}$$

2.15. A partir del esquema adjunto podemos decir que:

$$\vec{OP} = 2\bar{x}, \text{ y } \vec{MP} = \bar{A}/2$$

Luego, del ΔOPM observamos la continuidad entre los vectores OM y MP , tal que:

$$2\bar{x} = \bar{B} + \bar{A}/2 = 1/2 (\bar{A} + 2\bar{B})$$

$$\therefore \boxed{\bar{x} = 1/4 (\bar{A} + 2\bar{B})}$$

2.16. Haciendo uso de los vectores auxiliares \bar{p} y \bar{q} logramos elaborar el esquema adjunto

$$\text{Del } \Delta ABM: 2\bar{q} + \bar{p} = \bar{A} \dots (1)$$

$$\text{Del } \Delta AON: 2\bar{p} + \bar{q} = \bar{B} \dots (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2) encontramos:

$$\bar{p} + \bar{q} = 1/3 (\bar{A} + \bar{B}) \dots (\alpha)$$

Finalmente, del paralelogramo $ABCD$, logramos ver que:

$$\bar{x} = \vec{AB} + \vec{AD} = 2\bar{p} + 2\bar{q} = 2(\bar{p} + \bar{q}) \dots (\beta)$$

$$\text{De } (\alpha) \text{ en } (\beta): \boxed{\bar{x} = 2/3 (\bar{A} + \bar{B})}$$

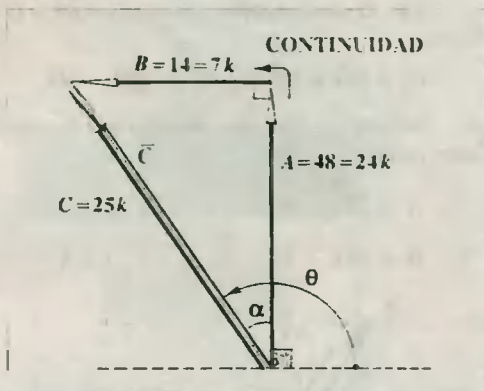


Fig. Solución Prob. 2.12

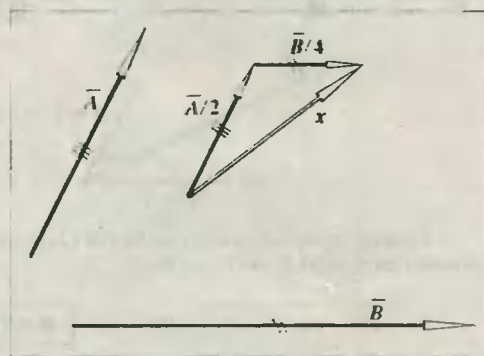


Fig. Solución Prob. 2.14

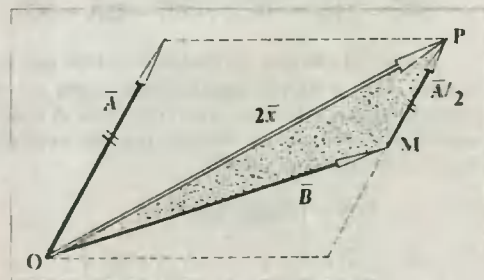


Fig. Solución Prob. 2.15

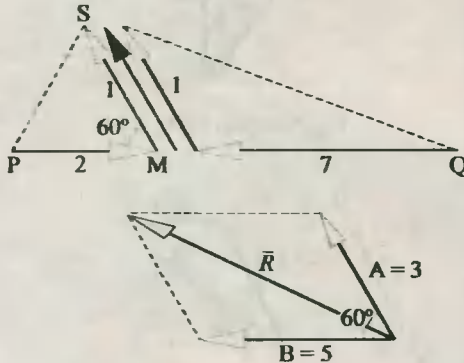
2.17. Descomponemos los vectores \overline{PS} y \overline{QS} tal que :

$$\overline{PS} = \overline{PM} + \overline{MS} \quad ; \quad \overline{QS} = \overline{QM} + \overline{MS}$$

Del esquema adjunto encontramos las resultantes parciales :

$$\overline{A} = \overline{MS} \Rightarrow A = 3 \quad \text{y}$$

$$\overline{B} = \overline{PM} + \overline{MQ} \Rightarrow B = 7 - 2 = 5$$



Finalmente aplicamos la resolución (2.3), obteniendo así el módulo de la resultante.

$$R = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ} \quad \therefore \quad \boxed{R = 7}$$

2.18. Descomponiendo los vectores :

$$\overline{MC} = \overline{MB} + \overline{BC} \quad ; \quad \overline{MD} = \overline{MA} + \overline{AD}$$

Luego al calcular la resultante vemos que los vectores \overline{MB} y \overline{MA} se anulan entre sí, por ser de iguales módulos y de direcciones opuestas. A continuación la resultante se obtiene por los vectores paralelos que quedan, siendo :

$$MN = 1/2 (8 + 12) = 10$$

$$\Rightarrow \quad R = 8 + 12 \quad \therefore \quad \boxed{R = 30}$$

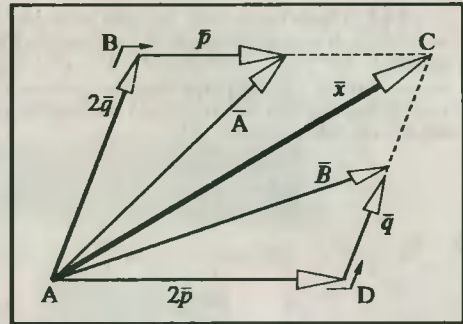


Fig. Solución Prob. 2.16

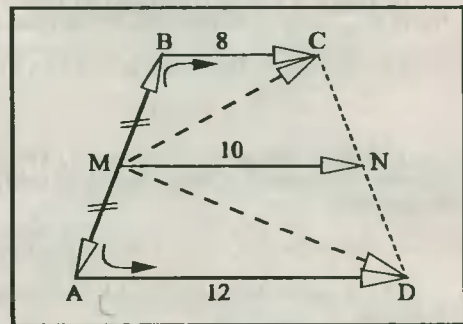


Fig. Solución Prob. 2.18

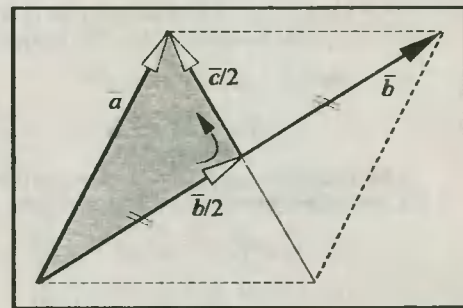


Fig. Solución Prob. 2.19

2.19. A partir del esquema adjunto podemos establecer lo siguiente :

$$b/2 + c/2 = a \Rightarrow \quad \overline{b} + \overline{c} = 2\overline{a} \quad \dots \dots \dots (1)$$

Luego la resultante estará dada por : $\overline{R} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} \dots \dots (2)$

Reemplazando (1) en (2) entramos : $\boxed{\overline{R} = 3\overline{a}}$

2.20. Utilizando los datos encontraremos los vectores \overline{AP} y \overline{AQ} en función de los vectores $\overline{AC} = b$ y $\overline{AB} = a$ respectivamente. Ahora, utilizando las proporciones establecidas tendremos que :

$$\vec{AP} = 3/8 \vec{AC} = 3/8 \vec{b}$$

Y: $\vec{AQ} = 2/5 \vec{AB}$

$$\Rightarrow \vec{AQ} = 2/5 \vec{a} \dots (1)$$

Ahora, del ΔAPQ observamos que :

$$\vec{AP} + \vec{x} = \vec{AQ} \Rightarrow \vec{x} = \vec{AQ} - \vec{AP} \dots (2)$$

Y reemplazando (1) en (2) obtenemos :

$$\vec{x} = 2/5 \vec{a} - 3/8 \vec{b}$$

2.21. Recordando que el baricentro divide a la mediana en dos segmentos proporcionales a 1 y 2, tendremos :

$$GM/AG = 1/2 \Rightarrow \vec{GM} = 1/2 \vec{AM}, \text{ ó } \vec{GM} = \vec{x}/2$$

Luego, ΔAMB : $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB}$

$$\Rightarrow (\vec{x} + \vec{x}/2) + \vec{b}/2 = \vec{a} \therefore \vec{x} = 1/3(2\vec{a} - \vec{b})$$

2.22. Determinemos primero los vectores opuestos para B y D ($-B$ y $-D$), para luego construir el polígono, colocando los vectores $-A$, $-B$, C y $-D$ Uno a continuación de otro. En la figura, R es el vector pedido.

2.23. Colocando el vector B a continuación de A , y C a continuación de B se formará el polígono mediante el vector R . Del mismo modo se ha completado en la figura las dimensiones del polígono formado, según se muestra.

$$R = \sqrt{7^2 + 24^2} \therefore R = 25$$

Y su dirección : $\text{tg } \theta = 74^\circ \therefore \theta = 74$

2.24. Del gráfico original se desprende que :

*) En el polígono AFED :

$$\vec{AD} = \vec{AF} + \vec{FE} + \vec{ED} \dots \dots \dots (1)$$

*) En el polígono ABCD :

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} \dots \dots \dots s(2)$$

A continuación, podemos encontrar la resultante total :

$$\vec{R} = (\vec{AF} + \vec{FE} + \vec{ED}) + (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}) + \vec{AD} \dots \dots (3)$$

Finalmente, de (1) y (2) en (3) : $\vec{R} = 3|\vec{AD}| = 3(2L) \therefore R = 6L$

2.25. En el esquema adjunto se ha trasladado el vector \vec{AF} hacia el lado CD , de manera que se pueden establecer las siguientes relaciones.

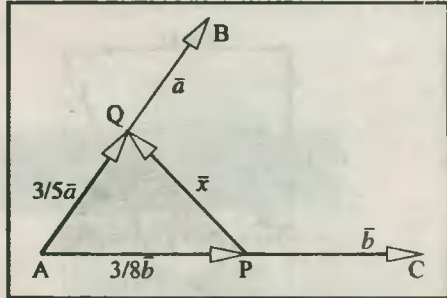


Fig. Solución Prob. 2.20

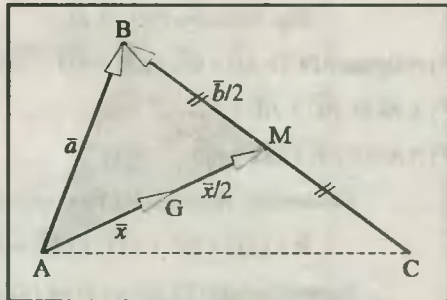


Fig. Solución Prob. 2.21

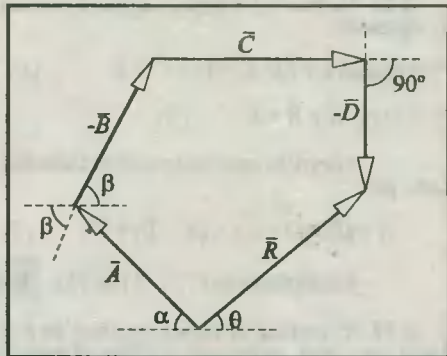


Fig. Solución Prob. 2.22

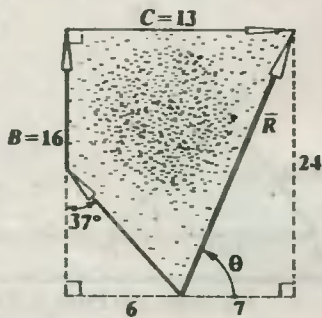


Fig. Solución Prob. 2.23

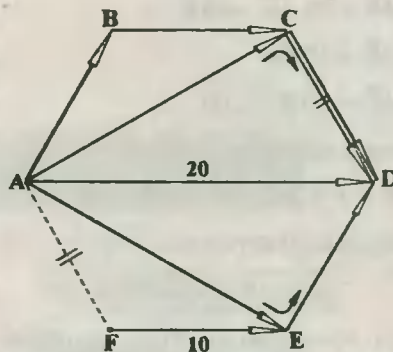


Fig. Solución Prob. 2.25

*) Polígono ABCD: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD} \dots (1)$

*) ΔACD : $\vec{AC} + \vec{AF} = \vec{AD} \dots (2)$

*) ΔAED : $\vec{AE} + \vec{ED} = \vec{AD} \dots (3)$

Finalmente, la resultante total se encontrará así:

$$\vec{R} = (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}) + (\vec{AC} + \vec{AF}) + (\vec{AE} + \vec{ED}) + \vec{AD} + \vec{FE} \dots (4)$$

Reemplazando (1), (2) y (3) en (4) tendremos:

$$\vec{R} = 4\vec{AD} + \vec{FE} \Rightarrow R = 4 \cdot 20 + 10 \therefore \boxed{R = 90 \text{ cm}}$$

2.26. En base al esquema adjunto reconocemos lo siguiente:

*) Polígono ZYTX: $\vec{E} + \vec{D} + \vec{C} = \vec{F} \dots (1)$

*) ΔZUX : $\vec{A} + \vec{B} = \vec{F} \dots (2)$

Luego, la resultante total del sistema viene dada por:

$$\vec{R} = (\vec{E} + \vec{D} + \vec{C}) + (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{F} \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3): $\boxed{R = 3F}$

2.27. Al graficar el vector negativo de \vec{B} y sustituirlo por aquel, encontramos según el esquema (1) que: $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = \vec{D}$. Luego, en la expresión original de \vec{R} tenemos:

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C} - 2\vec{D} = (\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}) + \vec{C} - 2\vec{D}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{D} + \vec{C} - 2\vec{D} \Rightarrow \vec{R} = \vec{C} - \vec{D}$$

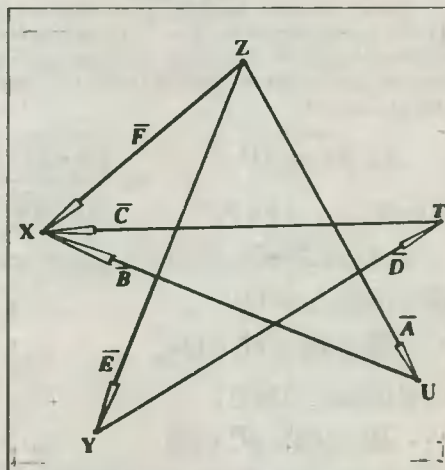


Fig. Solución Prob. 2.26

Este resultado queda graficado en el esquema (2), en donde podemos decir que:

$$|\vec{R}| = |\vec{C}| \cdot \cos 30^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 \therefore \boxed{|\vec{R}| = 9}$$

2.28. Se desea: $\vec{R} = \vec{c} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{f} + \vec{e} + \vec{d}$

Puesto que agregando y quitando el vector f en la expresión dada y utilizando el gráfico adjunto, del cual identificamos a $-f$, observamos que: $\vec{c} + \vec{b} + \vec{a} + (-f) + \vec{e} = \vec{d}$.

$$\vec{R} = [\vec{c} + \vec{b} + \vec{a} + (-f) + \vec{e}] + \vec{d} + \vec{f} + (+f) \Rightarrow \vec{R} = \vec{d} + \vec{d} + \vec{f} + \vec{f} \Rightarrow \vec{R} = 2\vec{d} + 2\vec{f}$$

Graficando este resultado, vemos que: $2\vec{d} \perp 2\vec{f}$, por lo cual obtenemos la figura (2).

Ahora: $R = \sqrt{(2d)^2 + (2f)^2}$

Y como $d = 4$, y $f = 3 \therefore R = 10$

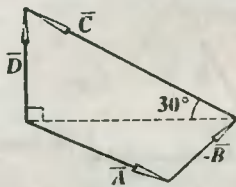


Fig. 2.27 (1)

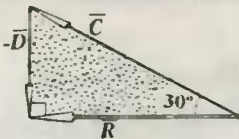


Fig. 2.27 (2)

Fig. Solución Prob. 2.27

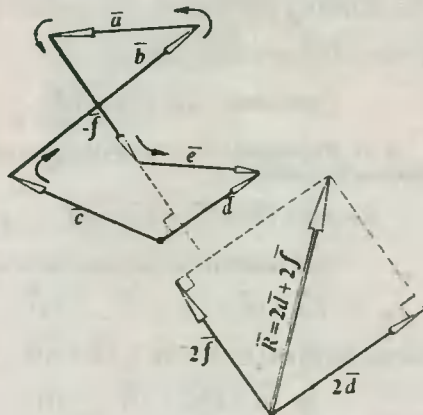


Fig. Solución Prob. 2.28

2.29. En primer lugar debemos hacer un gráfico donde se visualicen los vectores opuestos de \vec{q} y \vec{d} , pues en el gráfico original figuran sus correspondientes positivos.

Y utilizando el mismo artificio empleado en el problema anterior, graficaremos el vector $-\vec{m}$, de modo que en la relación original agregamos y quitamos a \vec{m} . Gracias a esto, en el gráfico adjunto puede apreciarse que:

$$\vec{p} + \vec{s} + (-\vec{d}) + (-\vec{m}) = -\vec{q} \dots (1)$$

Recordemos que:

$$\vec{R} = \vec{p} - \vec{q} + \vec{m} - \vec{d} + \vec{s}$$

$$\vec{R} = [\vec{p} + \vec{s} + (-\vec{d}) + (-\vec{m})] - \vec{q} + 2\vec{m} \dots (2)$$

De (1) en (2): $\vec{R} = -\vec{q} - \vec{q} + \vec{m} + \vec{m}$

$\therefore R = 2(m - q)$

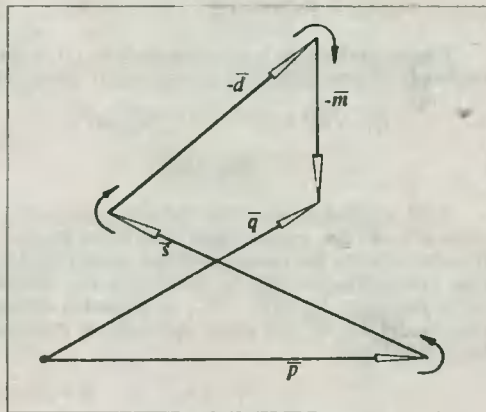


Fig. Solución Prob. 2.29

2.30. Dando nombre a los vértices del hexágono, tendremos lo siguiente:

$$\vec{R} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{DC} + \vec{ED} + \vec{EF} + \vec{AF} + \vec{BE} \dots (1)$$

Como se puede ver:

$$\vec{BC} = -\vec{EF}, \vec{AF} = -\vec{DC}, \vec{ED} = \vec{AB} \dots (2)$$

Al reemplazar (2) en (1) nos queda:

$$\vec{R} = 2\vec{AB} + \vec{BE}$$

Graficando este resultado, tenemos la figura (2), en la cual aplicaremos la relación (2.3).

$$R = \sqrt{(2AB)^2 + BE^2 + 2 \cdot 2AB \cdot BE \cdot \cos 120^\circ} \dots (*)$$

donde: $|\vec{AB}| = a$; y $|\vec{BE}| = 2a$

Finalmente, en (*): $R = 2a$

2.31. Reduciendo el sistema de vectores dados, diremos lo siguiente:

$$\vec{R} = \vec{AD} + \vec{DE} + \vec{EC} + \vec{AC} + \vec{AB} \dots (1)$$

Pero notamos del polígono vectorial ADEC:

$$\vec{AD} + \vec{DE} + \vec{EC} = \vec{AC} \dots (2)$$

Luego, de (2) en (1): $\vec{R} = \vec{AC} + \vec{AC} + \vec{AB}$

$$\Rightarrow \vec{R} = 2\vec{AC} + \vec{AB} \dots (I)$$

Además, del gráfico (1) tenemos:

$$\cos \theta = AC/AB = 10/20 = 1/2 \Rightarrow \theta = 60^\circ \dots (II)$$

Luego, graficando la relación dada en (I), y aprovechando el resultado (II), tendremos (Figura (2)):

$$R = \sqrt{20^2 + 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 20 \cos 60^\circ}$$

$$\therefore R = 20\sqrt{3}$$

2.32. Considerando como lado del hexágono regular $a = 6\sqrt{3} \text{ cm}$, y observando que todos los vectores ubicados en los lados paralelos se anulan dos a dos, comprobamos que la resultante del sistema viene dado por: $\vec{R} = \vec{AB} + \vec{BC}$, en el cual si descomponemos \vec{AB} y \vec{AC} del modo indicado, se establece finalmente que:

$$\vec{R} = 2\vec{AH} \Rightarrow R = 2|\vec{AH}| = 2(AO + OH) \dots (1)$$

Del esquema podemos apreciar que O es el centro del hexágono, y por ello se puede establecer que: $AO = DO, \text{tg} 30^\circ = a \cdot \sqrt{3}/3$

$$\text{Y } OH = BH = a \cdot \text{sen} 60^\circ = a\sqrt{3}/2 \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1): $|\vec{R}| = 2(a\sqrt{3}/3 + a\sqrt{3}/2)$

$$\Rightarrow |\vec{R}| = 5/3 \sqrt{3} a \Rightarrow |\vec{R}| = 5/3 \sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \therefore |\vec{R}| = 30 \text{ cm}$$

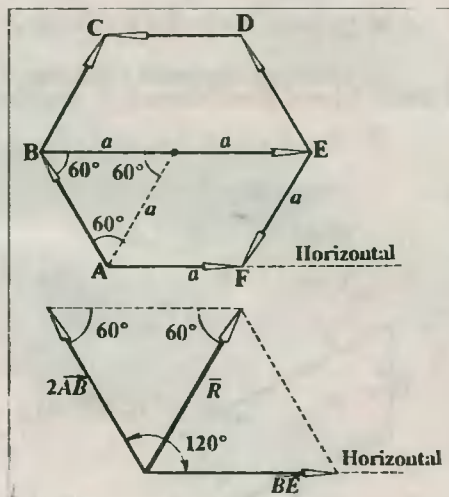


Fig. Solución Prob. 2.30

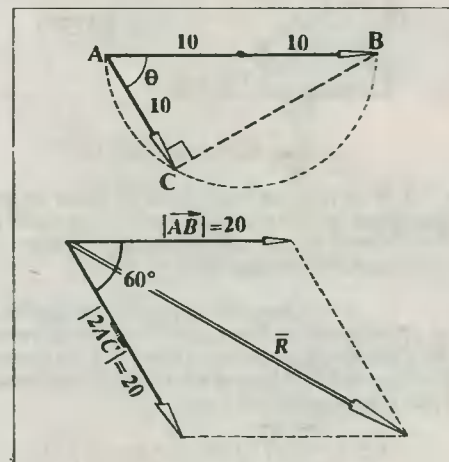


Fig. Solución Prob 2.31

2.33. Puesto que el fardo debe moverse sólo en la dirección X, deducimos entonces que la resultante de las fuerzas F_1, F_2 y F_3 (F_3 es aplicada por el muchacho) debe encontrarse sobre dicha dirección. Luego, por el método del polígono elaboramos la figura adjunta.

Vemos que: $AE = BD$

$$AE = BC + CD$$

$$80 = 40 + F_{3_{\min}} \quad \therefore \quad F_{3_{\min}} = 40 \text{ N}$$

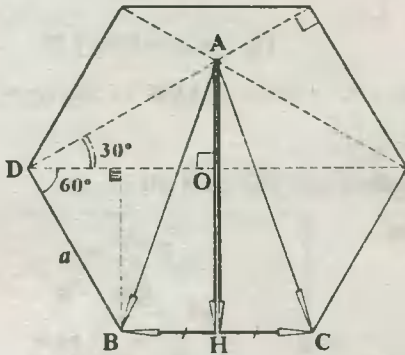


Fig. Solución Prob. 2.32

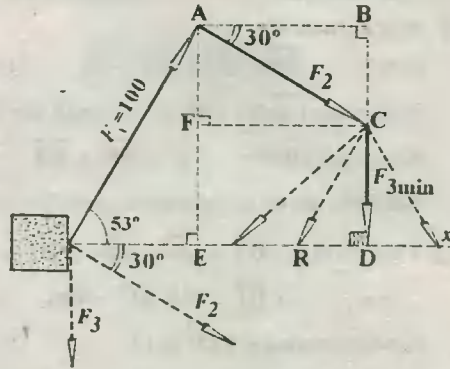


Fig. Solución Prob. 2.33

2.34. Graficando los vectores propuestos observamos que: $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ (\vec{D} apunta al vector \vec{A} , que es el minuendo). Luego, el módulo de dicho vector será:

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos 74^\circ}$$

$$D = \sqrt{50^2 + 14^2 - 2 \cdot 50 \cdot 14(7/25)}$$

$$\therefore \quad D = 48$$

Nota: El triángulo formado por \vec{A} , \vec{B} y \vec{D} es rectángulo.

2.35. Sean \vec{A} y \vec{B} los vectores dados; \vec{R} y \vec{D} sus vectores suma y diferencia. entonces, por condición del problema: $A = B = m, R = 74 u, D = 37 u$. Entonces, como se ve: $R = 2D$. Así, usando las relaciones (2.3) y (2.7) tenemos:

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} = 2\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

$$\sqrt{m^2 + m^2 + 2 \cdot m \cdot m \cdot \cos\theta} = 2\sqrt{m^2 + m^2 - 2 \cdot m \cdot m \cdot \cos\theta}$$

Elevando al cuadrado y despejando $\cos\theta$ obtenemos: $\cos\theta = 3/5 \quad \therefore \quad \theta = 53^\circ$

2.36. Para calcular el módulo prolongamos cada vector hasta lograr que concurren en O. Vemos que ellos son perpendiculares. El gráfico muestra lo dicho.

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \dots \text{(Pitágoras)}$$

$$D = \sqrt{16^2 + 12^2} \Rightarrow D = 20$$

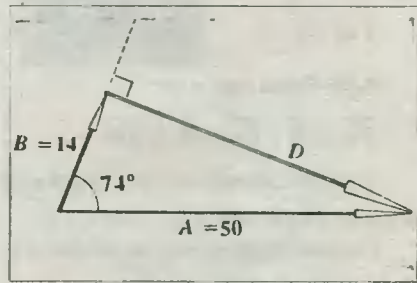


Fig. Solución Prob. 2.34

Del gráfico, \vec{D} apunta hacia el vector A, pues

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

minuyendo

También: $\theta = 74^\circ - 53^\circ = 21^\circ \therefore \boxed{\vec{D} = 20/21^\circ}$

2.37. Puesto que se nos pide expresar x en función de \vec{P} y \vec{Q} , debemos ver la forma de construir un triángulo cuyos lados sean x y combinaciones de \vec{P} y \vec{Q} respectivamente.

Sean: $\vec{AB} = \vec{P}$, y $\vec{AC} = \vec{Q} \dots (1)$

Si hacemos $|\vec{AB}| = |\vec{AC}| = 1$, y dado que $\angle BAC = 60^\circ$, entonces el ΔABC es equilátero.

Ahora, del ΔBHT : $\vec{x} = \vec{HB} + \vec{BT} \dots (2)$

Haciendo uso de las relaciones geométricas, deducimos que: $\vec{HB} = 3/8 \vec{AB} \dots (3)$

Y del ΔABC : $\vec{BT} = \vec{AC} - \vec{AB}$, y $\vec{BT} = 3/4 \vec{BC}$

$$\Rightarrow \vec{BT} = 3/4 (\vec{AC} - \vec{AB}) \dots (4)$$

Reemplazando (3) y (4) en (2):

$$\vec{x} = 3/8 \vec{AB} + 3/4 (\vec{AC} - \vec{AB}) = 1/8 (6 \vec{AC} - 3 \vec{AB})$$

Y de (1):

$$\boxed{\vec{x} = \frac{6\vec{Q} - 3\vec{P}}{8}}$$

2.38.- Observamos que:

$$\vec{PQ} = \vec{A}; \vec{PR} = \vec{B}, \text{ y } \vec{RO} = \vec{x} \dots (1)$$

Y además, en todo triángulo rectángulo como el ΔOHP , $PH = 2r$, y $OP = r\sqrt{5}$.

Como el ΔPQR es pitagórico de lados $3r$, $4r$ y $5r$, vemos que:

$$\vec{OM} = \vec{NQ} = 1/3 \vec{PQ} \dots (2)$$

$$\vec{RM} = 3/4 \vec{RQ} = 3/4 (\vec{RQ} - \vec{PR}) \dots (3)$$

Del ΔOMR : $\vec{RO} + \vec{OM} = \vec{RM}$

$$\Rightarrow \vec{RO} = \vec{RM} - \vec{OM} \dots (4)$$

Reemplazando (2) y (3) en (4):

$$\vec{RO} = 3/4 (\vec{PQ} - \vec{PR}) - 1/3 \vec{PQ} = 1/12 (5 \vec{PQ} - 9 \vec{PR})$$

Y de (1): $\boxed{\vec{x} = \frac{5\vec{A} - 9\vec{B}}{12}}$

2.39. Trazando la mediana PM , notamos que M es punto medio del lado RQ . Además, por la proporción dada.

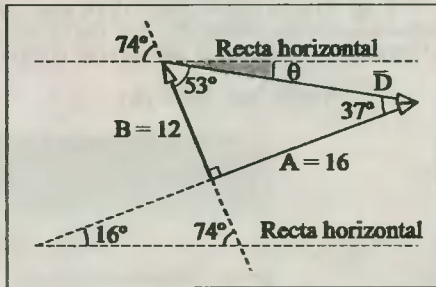


Fig. Solución Prob. 2.36

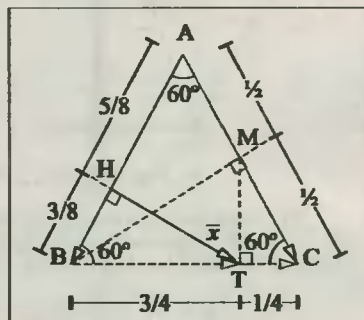


Fig. Solución Prob. 2.37

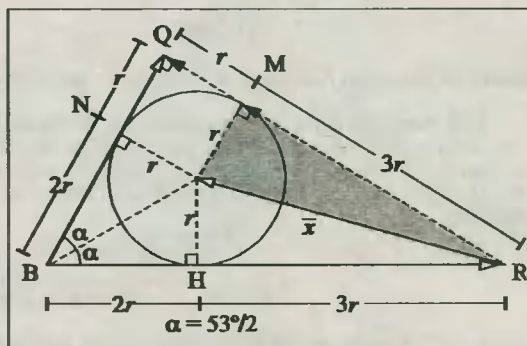


Fig. Solución Prob. 2.38

$$\frac{NQ}{RN} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{NQ}{RN+NQ} = \frac{1}{4+1} \Rightarrow \frac{NQ}{RQ} = \frac{1}{5}$$

Estas observaciones se han colocado en el esquema adjunto, en donde puede apreciarse que:

$$MN = (1/2 - 1/5) \cdot RQ = 3/10 RQ$$

$$\text{Del } \Delta \text{ GMN: } \vec{x} = \vec{GM} + \vec{MN}$$

$$\vec{x} = 1/3 \vec{PM} + 3/10 \vec{RQ} \dots (1)$$

$$\text{Pero. del } \Delta \text{ PQM: } \vec{PM} = 1/2 (\vec{a} - \vec{b})$$

$$\text{y } \vec{RQ} = \vec{a} - \vec{b} \dots (2)$$

Finalmente, reemplazamos (2) en (1):

$$\therefore \boxed{\vec{x} = 1/15(7\vec{a} - 2\vec{b})}$$

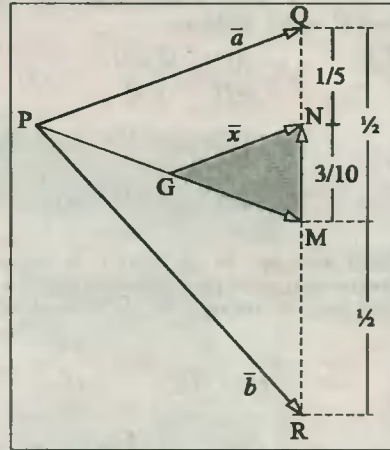


Fig. Solución Prob. 2.39

2.40. Según los datos: $A = 15$; $B = 7$, y $D = 20$. Luego, utilizando la relación (2,7), elevamos al cuadrado ambos miembros y despejamos $\cos \theta$.

$$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta \Rightarrow 20^2 = 15^2 + 7^2 - 2 \cdot 15 \cdot 7 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = -3/5 \quad \therefore \quad \boxed{\theta = 127^\circ}$$

2.41. Sean $\vec{P} = \vec{A} + 3\vec{B}$ y $\vec{Q} = \vec{A} + 2\vec{B}$, tal que:

$$|\vec{P}| = 40, \text{ y } |\vec{Q}| = 14. \text{ Luego, para obtener el vector B}$$

vemos que es necesario restar en la forma: $\vec{P} - \vec{Q} = (\vec{A} + 3\vec{B}) - (\vec{A} + 2\vec{B}) = \vec{B}$. Luego, utilizando la relación (2,7) tendremos:

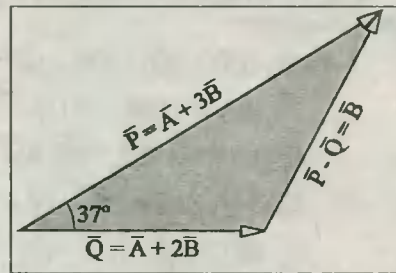


Fig. Solución Prob. 2.41

$$|\vec{B}| = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ \cos 37^\circ} = \sqrt{40^2 + 14^2 - 2 \cdot 40 \cdot 14 \cdot 4/5} \quad \therefore \quad \boxed{|\vec{B}| = 30 u}$$

2.42. Para encontrar un vector unitario en las direcciones dadas utilizaremos la relación (2.14).

$$*) \vec{u}_1 = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{\vec{AB} - \vec{AD}}{L\sqrt{2}} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{u}_1 = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{L\sqrt{2}}}$$

$$*) \vec{u}_2 = \frac{\vec{DB}}{|\vec{DB}|} = \frac{\vec{AB} - \vec{AD}}{L\sqrt{2}} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{u}_2 = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{L\sqrt{2}}}$$

2.43. Utilizando la relación (2.14) para x tendremos:

$$\vec{u} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \Rightarrow \vec{x} = |\vec{x}| \cdot \vec{u} \dots (1)$$

$$\text{Del esquema: } |\vec{x}| = L - L \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = L(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \dots (2)$$

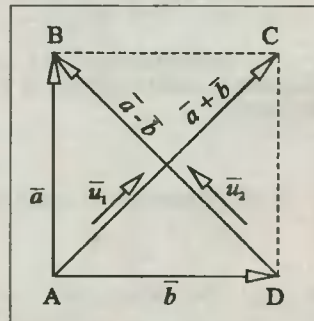


Fig. Solución Prob. 2.42

Y por el problema anterior, encontramos el vector unitario.

$$\vec{u} = \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} = \frac{\overline{M+N}}{L\sqrt{2}} \dots (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$\vec{x} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)(\overline{M+N})$$

Otro método.- Si empleamos la condición de codireccionalidad planteada en el ítem 2.6, tendremos para los vectores \vec{x} y $(\overline{M+N})$ lo siguiente:

$$\frac{\vec{x}}{L(1-\sqrt{2}/2)} = \frac{\overline{M+N}}{L\sqrt{2}}$$

$$\therefore \vec{x} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)(\overline{M+N})$$

2.44. De acuerdo con el esquema adjunto se tiene lo siguiente:

$$\vec{x} + \vec{y} = (\overline{OH} + \overline{HQ}) + (\overline{OH} + \overline{HR})$$

$$\Rightarrow \vec{x} + \vec{y} = 2\overline{OH} \dots (1)$$

$$\text{Y del } \Delta SMO: \overline{MO} = \overline{SO} - \overline{SM}$$

$$\Rightarrow \overline{MO} = \overline{B} - 1/2 \overline{SP} = \overline{B} - 1/2 (\overline{B} + \overline{A})$$

$$\Rightarrow \overline{MO} = 1/2 (\overline{B} - \overline{A}) \dots (2)$$

Utilizando ahora la condición de direccionalidad entre los vectores \overline{OH} y \overline{MO} tendremos:

$$\frac{\overline{OH}}{L(1-\sqrt{3}/2)} = \frac{\overline{MO}}{L\sqrt{3}/2}$$

$$\Rightarrow \overline{OH} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\overline{MO} \dots (3)$$

Reemplazando (2) y (3) y el resultado obtenido, lo sustituimos en (1), y finalmente obtenemos:

$$\vec{x} + \vec{y} = (2\sqrt{3}/3 - 1)(\overline{B} - \overline{A})$$

2.45. Efectuando las construcciones geométricas necesarias concluimos lo siguiente:

$$\vec{x} = \overline{a} + \overline{b} \dots (*)$$

*) Del ΔPOQ : $|\vec{x}| = L \cdot \cos\theta$

*) En el ΔPOS (isósceles) aplicamos la ley de los Senos.

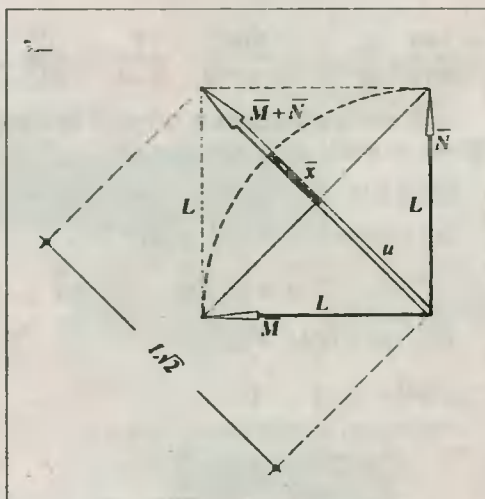


Fig. Solución Prob. 2.43

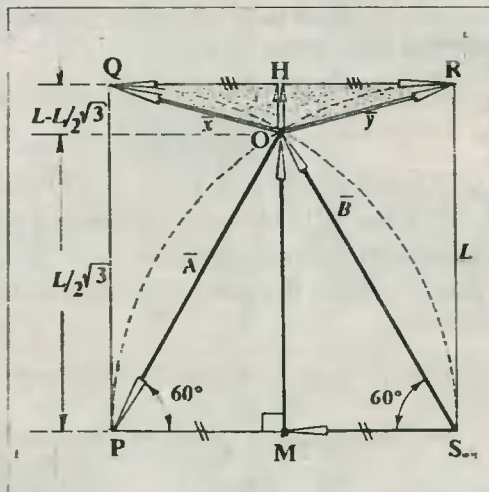


Fig. Solución Prob. 2.44

$$\frac{|\bar{x}|}{\text{sen}2\theta} = \frac{L}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow \frac{L \cdot \text{cos}\theta}{2\text{sen}\theta \cdot \text{cos}\theta} = \frac{L}{\text{cos}\theta}$$

$$\Rightarrow \text{tg}\theta = 1/2 \Rightarrow \text{sen}\theta = 1/\sqrt{5}, \text{ y } \text{cos}\theta = 2/\sqrt{5}$$

A continuación determinamos $|\bar{a}|$ y $|\bar{b}|$.

$$|\bar{a}| = |\bar{x}| \cdot \text{sen}\theta = L \cdot \text{cos}\theta \cdot \text{sen}\theta = 2/5 L$$

$$\Rightarrow \bar{a} = 2/5 \bar{A}$$

$$|\bar{b}| = |\bar{x}| \cdot \text{cos}\theta = L \cdot \text{cos}\theta \cdot \text{cos}\theta = 4/5 L$$

$$\Rightarrow \bar{b} = 4/5 \bar{B}$$

Finalmente, reemplazamos estos resultados en (*) y obtenemos:

$$\bar{x} = 2/5 (\bar{A} + 2\bar{B})$$

2.46. Descomponiendo rectangularmente los vectores oblicuos tendremos la disposición de la figura.

$$R_x = \Sigma V_x = -5 + 5 + 5 = 5$$

$$R_y = \Sigma V_y = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$R_T = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$\therefore R_T = 13$$

2.47. Descomponiendo rectangularmente los vectores \bar{AM} y \bar{AN} , tal como se indica en el esquema, obtendremos las resultantes parciales, empleando para ello las relaciones (2.20).

$$R_x = \Sigma V_x = 2 + 4 = 6$$

$$R_y = \Sigma V_y = 4 + 2 + 2 = 8$$

A continuación calculamos la resultante total empleando la relación (2.21).

$$R = \sqrt{6^2 + 8^2} \therefore R = 10$$

2.48. Procediendo a descomponer los vectores A y C encontramos lo siguiente:

$$R_x = 3 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$R_y = 3 - 3 - 2 = -2$$

Finalmente, la resultante total viene dada por:

$$R = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} \therefore R = 4$$

2.49. Reconociendo previamente que A y B son perpendiculares entre sí, elegimos los ejes girados X' e Y' que concuerden con ellos, de modo que el único

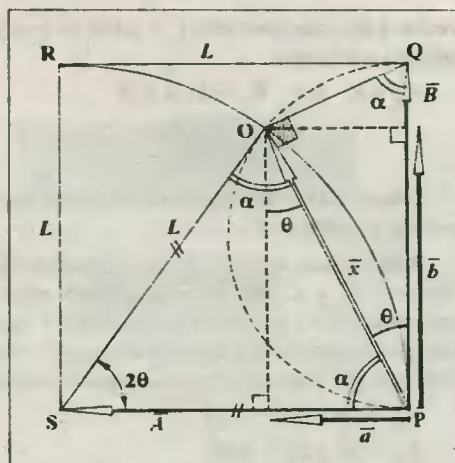


Fig. Solución Prob. 2.45

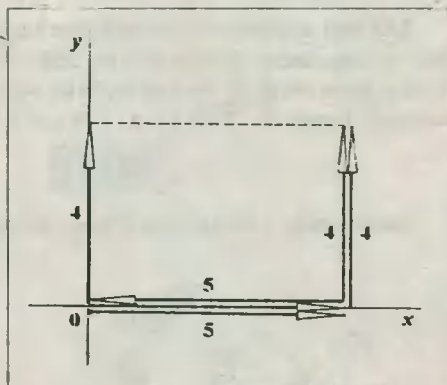


Fig. Solución Prob. 2.46

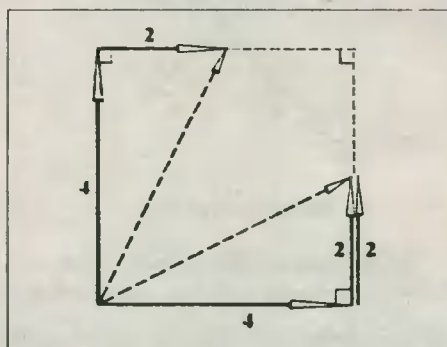


Fig. Solución Prob. 2.47

vector a descomponer sería C. A partir de éste y del esquema adjunto tendremos:

$$R_X = 8 - 3; \quad y \quad R_Y = 4 - 4 = 0$$

$$\therefore \boxed{|\bar{R}| = 5}$$

Observación: La resultante se ubica paralelamente al semieje positivo de X'.

2.50. En base al gráfico original logramos reconocer que los vectores A y C son perpendiculares entre sí; por ello procederemos a trazar dos ejes girados X' e Y', tal como hicimos en el problema anterior. De este modo sólo debemos descomponer el vector B. Luego, del esquema adjunto tenemos:

$$R_X = -55 + 25 = -30$$

$$R_Y = 15 + 25 = +40$$

$$\text{Luego, la resultante total viene dada por: } R = \sqrt{(-30)^2 + 40^2}$$

$$\therefore \boxed{R = 50}$$

2.51. Del esquema original podemos comprobar que el ángulo comprendido entre \bar{B} y \bar{C} mide 143° (la suma de los ángulos debe dar 360°). En seguida, vemos que es prudente trazar un eje girado Y' en la dirección de \bar{B} . De este modo los vectores pueden ser descompuestos rectangularmente con facilidad. Luego: $R_X = -3 + 2 = -1$; $R_Y = 6 - 4 - 2 = 0$

$$\therefore \boxed{|\bar{R}| = 1}$$

Observación: La resultante se ubica paralelamente al semieje negativo de X'.

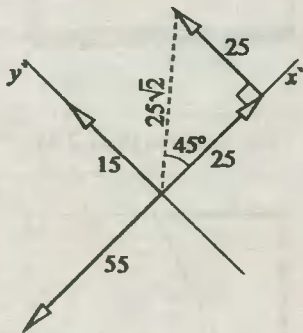


Fig. Solución Prob. 2.50

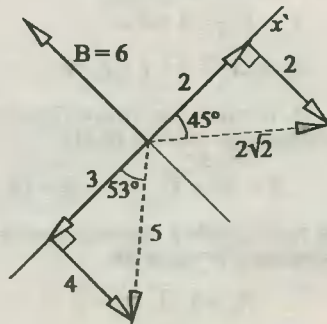


Fig. Solución Prob. 2.51

2.52. En base al gráfico original podemos establecer que los vectores \bar{B} y \bar{D} forman el mismo ángulo $\theta = 30^\circ$ con relación al eje horizontal, debido a que poseen igual módulo: $|\bar{B}| = |\bar{D}| = 200$. $\cos 30^\circ = 100\sqrt{3}$. Asimismo se reconoce que $|\bar{A}| = 100\sqrt{2}$, $|\bar{E}| = 100$, $|\bar{C}| = 200$. Luego de descomponer los vectores, tendremos:

$$R_x = 2(150) + 200 + 100 = 600 \text{ cm}$$

$$R_y = 100 + 50\sqrt{3} - 100 - 50\sqrt{3} = 0 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow |\vec{R}| = 600 \text{ cm} - 1 \text{ N/5 cm} \quad \therefore \quad \boxed{R = 12 \text{ N}}$$

2.53. De acuerdo con las observaciones señaladas en los problemas anteriores, podemos establecer que de acuerdo con la condición del problema, al colocarse la resultante sobre el eje horizontal provocará que:

$$R_y = \Sigma V_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 9 - 6 - C = 0 \quad \therefore \quad C = 3$$

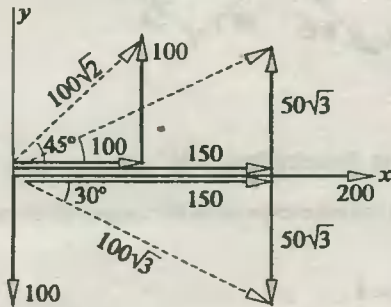


Fig. Solución Prob. 2.52

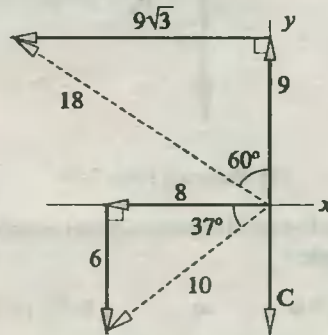


Fig. Solución Prob. 2.53

2.54. Utilizando el mismo fundamento empleado en el problema anterior, tendremos que:

$$\Sigma V_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3k - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 8$$

$$\Rightarrow R = \Sigma V_x = 4k - 18 = 4(8) - 18 \quad \therefore \quad \boxed{R = 14}$$

2.55. Sean B_x y B_y las componentes rectangulares de B . Luego, empleando la condición del problema y el mismo procedimiento del problema anterior tendremos:

$$\Sigma V_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 + B_y - 52 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 32$$

$$R = \Sigma V_x \Rightarrow 4 = B_x - 20 \quad \Rightarrow \quad B_x = 24$$

Seguidamente, calculamos el módulo de \vec{B} utilizando el teorema de Pitágoras (o los números anterior tendremos 3 - 4 - 5)

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad \therefore \quad \boxed{B = 20}$$

$$Y: \text{tg } B_y/B_x = 32/24 = 4/3 \quad \therefore \quad \boxed{\theta = 53}$$

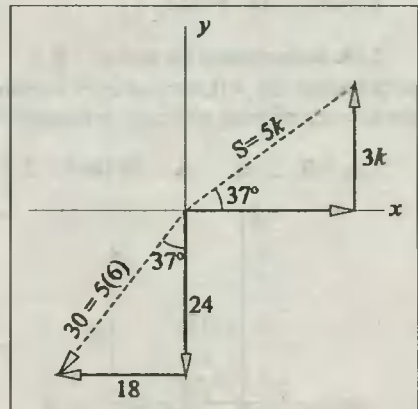


Fig. Solución Prob. 2.54

2.56. Dado que \vec{B} y \vec{C} son perpendiculares entre si, trazamos entonces dos ejes girados X' y Y' por cada uno respectivamente. Asimismo, por condición del problema, la resultante debe ubicarse en el eje Y' (dirección de \vec{B}). Luego, deberá cumplirse que:

$$\Sigma V_{x'} = 0 \Rightarrow 5k - 2 - 6 = 0 \Rightarrow k = 0$$

Luego: $A = 5k = 5(2) \therefore \boxed{A = 10}$

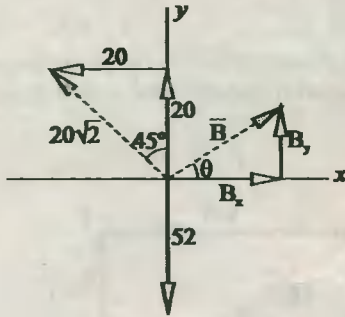


Fig. Solución Prob. 2.55

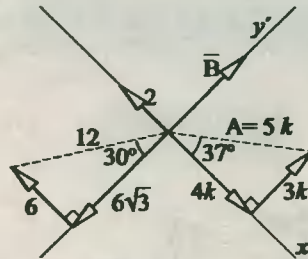


Fig. Solución Prob. 2.56

2.57. En base al esquema adjunto y empleando el mismo procedimiento del problema anterior diremos lo siguiente:

$$\Sigma V_x = 0 \Rightarrow 9 - 5 - x = 0 \Rightarrow x = 4$$

Luego, del triángulo sombreado: $y = \sqrt{5^2 - x^2} = 3$

Finalmente, encontramos la resultante del sistema a partir de:

$$R = \Sigma V_y = 12 - y = 12 - 3 \therefore \boxed{R = 9}$$

2.58. Reduciremos los vectores \vec{B} y \vec{C} por uno \vec{D} , tal que $|\vec{D}| = B - C$. Ahora, de la condición del problema: $\Sigma V_x = 0$, notamos que los vectores A y D deben tener el mismo módulo. Luego, trabajando con las componentes verticales se tendrá lo siguiente:

$$\Sigma V_y = R \Rightarrow A + 20/100A = 2 A \text{ sen } \alpha \Rightarrow \text{sen } \alpha = 3/5 \therefore \boxed{\alpha = 37^\circ}$$

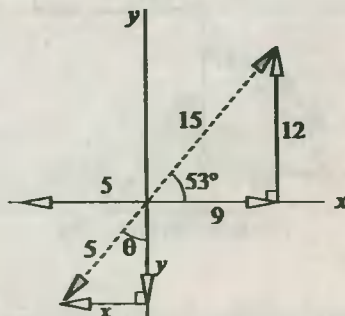


Fig. Solución Prob. 2.57

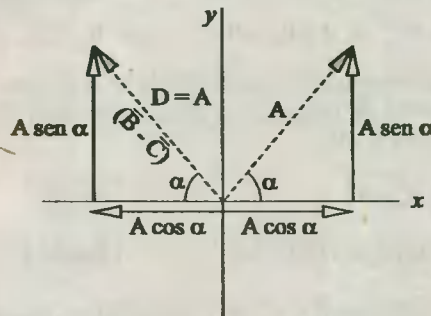


Fig. Solución Prob. 2.58

2.29. Del esquema (1) podemos encontrar lo siguiente:

$$R_y = \Sigma V_y = 50 \operatorname{sen} \alpha + 24 - 48 = 50 \operatorname{sen} \alpha - 24 \dots (1)$$

$$R_x = \Sigma V_x = 32 - 50 \operatorname{cos} \alpha \dots (2)$$

Y del esquema (2) vemos que:

$$\operatorname{tg} 53^\circ = R_y / R_x = 4/3 \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$\frac{50 \operatorname{sen} \alpha - 24}{32 - 50 \operatorname{cos} \alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3 \operatorname{sen} \alpha + 4 \operatorname{cos} \alpha = 4$$

$$\Rightarrow 3/5 \operatorname{sen} \alpha + 4/5 \operatorname{cos} \alpha = 4/5$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} (53^\circ + \alpha) = \operatorname{sen} 127^\circ \Rightarrow \alpha = 74^\circ$$

2.60. De acuerdo con la condición del problema, la resultante de los vectores es nula, lo que significa que:

$$\begin{aligned} *) \Sigma V_y = 0 &\Rightarrow 5\sqrt{3} - k\sqrt{3} = 0 \\ &\Rightarrow k = 5 \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *) \Sigma V_x = 0 &\Rightarrow D - 2 - k = 0 \\ &\Rightarrow D = 2 + k \dots (2) \end{aligned}$$

Reemplazando (1) en (2) encontramos que: $D = 7$

2.61. Sean A_x y A_y las componentes de \vec{A} . Luego, procediendo de un modo similar al problema anterior establecemos lo siguiente:

$$*) \Sigma V_x = 0 \Rightarrow A_x + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 0 \Rightarrow A_x = \sqrt{3}$$

$$*) \Sigma V_y = 0 \Rightarrow A_y + 3 - 4 = 0 \Rightarrow A_y = 1$$

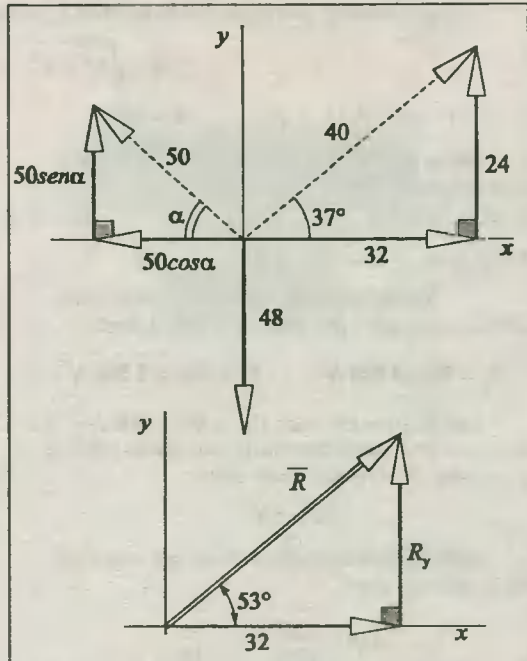


Fig. Solución Prob. 2.59

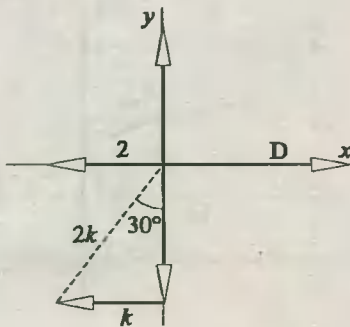


Fig. Solución Prob 2.60

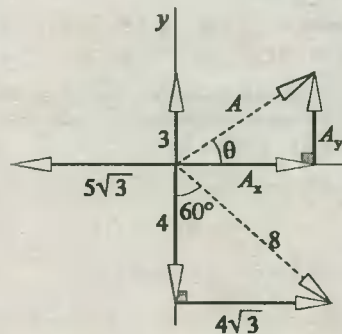


Fig. Solución Prob. 2.61

Seguidamente, calculamos el módulo de A utilizando el teorema de Pitágoras.

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \therefore |A| = 2$$

$$Y : \operatorname{tg} \theta = A_y / A_x = \sqrt{3} / 3 \therefore \theta = 30^\circ$$

262.a. A partir del esquema (1) y de la condición del problema se establece que :

$$*) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 3k - 24p = 0 \Rightarrow k = 8p \dots \dots (1)$$

$$*) \Sigma F_x = R \Rightarrow 4k + 7p = 3\,900 \dots \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) y resolviendo, encontramos que : $p = 100$, y $k = 800$. Luego :

$$T_1 = 5k = 4\,000 \text{ N} \quad \text{y} \quad T_2 = 25p = 2\,500 \text{ N}$$

2.62.b. Considerando fijo a $R = 3\,900 \text{ N}$ y la dirección de T_1 , tendremos las posibilidades gráficas mostradas en la figura (2), de donde :

$$\alpha = 53^\circ$$

2.63. Recordando la definición del vector unitario, diremos que :

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|AB|} \dots \dots (1)$$

Determinación de AB .- En base al triángulo rectángulo ACB notamos que :

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} \Rightarrow \vec{AB} = -12\vec{i} + 5\vec{j} \dots \dots (2)$$

Cálculo de |AB| .- Recordemos que :

$$AB = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} \therefore AB = 13 \dots \dots (3)$$

Finalmente, reemplazamos (2) y (3) en (1) :

$$\vec{u} = -12/13\vec{i} + 5/13\vec{j}$$

Observaciones .- $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} \quad (-9; 7) - (3; -2)$

$$\Rightarrow \vec{AB} = [(-9 - 3); (7 - (-2))] = (-12; 5)$$

2.64. Obteniendo los vectores componentes de cada uno de los lados en el gráfico original, diremos que : $x = 4i + 3j$; $y = 3i + 3j$

$$\text{Luego, así } \vec{A} = x + y \Rightarrow \vec{A} = (4+3)\vec{i} + (3+3)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = 7\vec{i} + 6\vec{j} \dots \dots (1)$$

$$\text{Además : } \vec{P} = 4\vec{i} - 3\vec{j}; \vec{Q} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\text{Luego, si } \vec{B} = \vec{P} + \vec{Q} \Rightarrow \vec{B} = (1-4)\vec{i} + (-3+2)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = -3\vec{i} - 1\vec{j} \dots \dots (2)$$

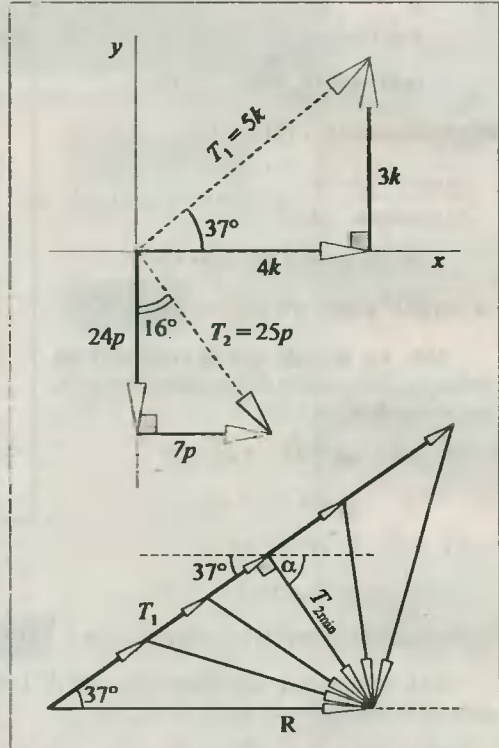


Fig. Solución Prob. 2.62

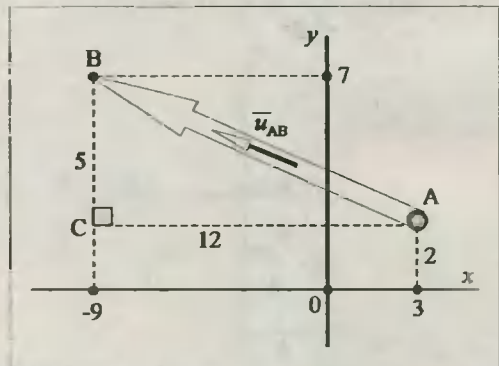


Fig. Solución Prob. 2.63

Con lo cual: $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} \dots (3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3): $\vec{D} = [1 - (-3)]\vec{i} + [6 - (-1)]\vec{j} \Rightarrow \vec{D} = 4\vec{i} + 7\vec{j}$

Finalmente: $D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} \quad \therefore \quad \boxed{D = \sqrt{65}}$

2.65. Del gráfico propuesto conseguimos la expresión vectorial cartesiana de cada vector.

$\vec{A} = 3\vec{i} - 3\vec{j}; \vec{B} = -2\vec{i} - 3\vec{j} \Rightarrow -\vec{B} = +2\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{C} = -2\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{D} = +3\vec{i} + 1\vec{j}$

Luego: $\vec{X} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ será (sumando algebraicamente término semejantes)

$\boxed{\vec{X} = 6\vec{i} + 3\vec{j}}$

2.66. Sea nuestra incógnita $|\vec{AM}'|$. Por construcción del paralelogramo, y considerando que M y N son puntos medios de BC y BD respectivamente, diremos que:

$M = (8; 6) \Rightarrow \vec{AM} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$

$N = (10; 3) \Rightarrow \vec{AN} = 10\vec{i} + 3\vec{j}$

Además, por la relación (20.1), diremos lo siguiente:

$\vec{AM}' = m \cdot \vec{AM} = m(8\vec{i} + 6\vec{j}) \dots (1)$

$\vec{AN}' = n \cdot \vec{AN} = n(10\vec{i} + 3\vec{j}) \dots (2)$

$\vec{AC} = 12\vec{i} + 6\vec{j} \dots (3)$

Debiendo cumplirse que: $\vec{AC} = \vec{AM}' + \vec{AN}' \dots (4)$

Luego, de (1), (2) y (3) en (4): $12\vec{i} + 6\vec{j} = m(8\vec{i} + 6\vec{j}) + n(10\vec{i} + 9\vec{j})$

Efectuando y agrupando términos: $12\vec{i} + 6\vec{j} = (8m + 10n)\vec{i} + (6m + 3n)\vec{j}$

Comparando términos semejantes establecemos que: $8m + 10n = 12; 6m + 3n = 6$

$\therefore \quad \boxed{m = n = 2/3}$

Luego, en (1):

$|\vec{AM}'| = m \sqrt{8^2 + 6^2} = 2/3 \cdot 10$

$\therefore \quad \boxed{|\vec{AM}'| = 20/3}$

2.67. Colocando en el gráfico original al vector \vec{OM}' observamos que al descomponer los vectores dados (\vec{OM} , \vec{ON} y \vec{OM}') tenemos la figura adjunta.

Nota.- Observamos que todos los triángulo rectángulos son pitagóricos; luego, los valores de sus lados se encuentran por proporcionalidad.

A continuación tenemos:

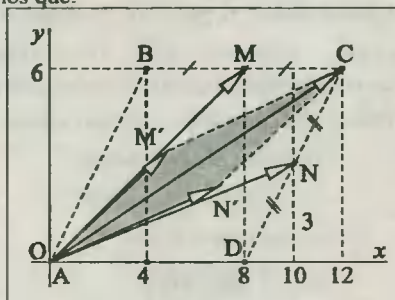


Fig. Solución Prob. 2.66

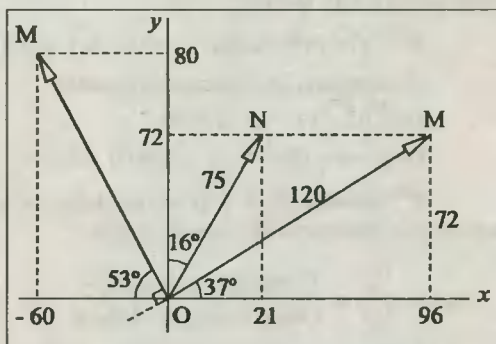


Fig. Solución Prob. 2.67

$$\overrightarrow{OM} = 96\bar{i} + 72\bar{j} ; \overrightarrow{ON} = 21\bar{i} + 72\bar{j} \qquad \overrightarrow{OM'} = 60\bar{i} + 80\bar{j} \dots (*)$$

Y por condición del problema:

$$\overrightarrow{ON} = m\overrightarrow{OM} + n\overrightarrow{OM'} \dots (**)$$

$$\text{Reemplazando (*) en (**): } 21\bar{i} + 72\bar{j} = m(96\bar{i} + 72\bar{j}) + n(-60\bar{i} + 80\bar{j})$$

$$\Rightarrow 21\bar{i} + 72\bar{j} = (96m - 60n)\bar{i} + (72m + 80n)\bar{j}$$

Comparando términos semejantes se tiene:

$$\text{De } i: 96m - 60n = 21$$

$$\text{De } j: 72m + 80n = 72$$

Resolviendo convenientemente: $m = 1/2$; $n = 9/20$. Luego:

$$\boxed{m + n = 19/20}$$

Otro Método.- Recordando que los vectores \overrightarrow{OM} y $m\overrightarrow{OM}$, así como $\overrightarrow{OM'}$ y $n\overrightarrow{OM'}$ son colineales entre sí, podemos decir que $m\overrightarrow{OM} \perp n\overrightarrow{OM'}$, entonces $\overrightarrow{ON} \perp \overrightarrow{OM'}$. Luego, si $\overrightarrow{ON} = m\overrightarrow{OM} + n\overrightarrow{OM'}$, entonces \overrightarrow{ON} se descompone rectangularmente en dos vectores ubicados sobre \overrightarrow{OM} y $\overrightarrow{OM'}$. Veamos el gráfico adjunto.

Del triángulo sombreado:

$$m\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} \cdot \cos 37^\circ$$

$$\Rightarrow m(120) = 75.4/5$$

$$\therefore \boxed{m = 1/2}$$

$$n\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{ON} \cdot \sin 37^\circ$$

$$\Rightarrow n(100) = 75.3/5$$

$$\therefore \boxed{n = 9/20}$$

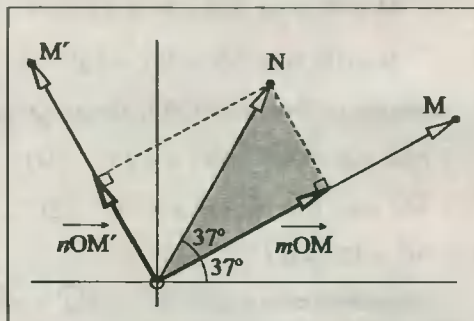


Fig. Solución Prob. 2.67

2.68. 1^{er} método.- Recordando que dos vectores paralelos deben satisfacer la multiplicidad entre sí (ítem 2.4), tenemos:

$$\overrightarrow{B} = n\overrightarrow{A} \quad (n = \text{escalar}) \Rightarrow 12\bar{i} - m\bar{j} = n(9\bar{i} + 12\bar{j}) \Rightarrow 12\bar{i} - m\bar{j} = 9n\bar{i} + 12n\bar{j}$$

Comparando los términos semejantes:

$$\text{De } i: 9n = 12 \quad \therefore n = 4/3$$

$$\text{De } j: -m = 12n \Rightarrow -m = 12(4/3) \quad \therefore \boxed{m = -16}$$

2^{do} método.- Si \overrightarrow{A} y \overrightarrow{B} son paralelos, entonces poseerán la misma dirección θ , la que como sabemos se determina del siguiente modo:

$$\text{tg } \theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{\text{Componente en el eje Y}}{\text{Componente en el eje X}} \Rightarrow \text{ta } \theta_B = \text{tg } \theta_A \Rightarrow \frac{-m}{+12} = \frac{+12}{+9} \quad \therefore \boxed{m = -16}$$

2.69. Descompondremos el vector espacial \overrightarrow{V} primero en dos; uno sobre el plano horizontal X - Y, y el otro paralelo al eje de las cotas (Z). (ver figura en la página siguiente).

$$\text{Vemos que: } V' = V \cos 53^\circ = 75 (3/5) \Rightarrow V' = 45 \dots (1)$$

$$\text{Además: } V_Z = V \sin 53^\circ = 75 (4/5) \Rightarrow V_Z = 60 \Rightarrow \overrightarrow{V}_Z = 60\bar{k} \dots (2)$$

Seguidamente, descompondremos rectangularmente al vector \vec{V}' en los ejes X e Y.

$$V_x = V' \cdot \cos 37^\circ = 45(4/5) \Rightarrow \vec{V}_x = 36 \vec{i} \dots (3)$$

También, de (2), (3) y (4) en la siguiente relación: $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$

$$\therefore \boxed{\vec{V} = 36 \vec{i} - 27 \vec{j} + 60 \vec{k}}$$

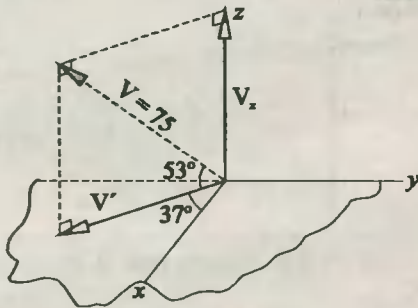


Fig. Solución Prob. 2.69

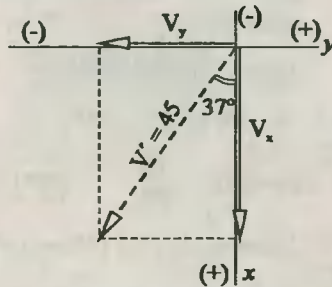


Fig. Solución Prob. 2.69

2.70. 1^{er} método.- A partir de las coordenadas de cada punto determinaremos la expresión vectorial de cada vector.

$$A = (8; 0; 0) \Rightarrow \vec{AB} = -8 \vec{i} + 10 \vec{j}$$

$$B = (0; 10; 0) \Rightarrow \vec{BC} = -10 \vec{j} + 6 \vec{k} \dots (1)$$

$$C = (0; 0; 6) \Rightarrow \vec{AC} = -8 \vec{i} + 6 \vec{k}$$

$$\text{Luego: } \vec{R} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC} \dots (2)$$

$$\text{De (1) en (2): } \vec{R} = -16 \vec{i} + 12 \vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt{(-16)^2 + (12)^2} = 20}$$

2^{do} método.- Se desea:

$$\vec{R} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{AC}$$

$$\text{Como se observa: } \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{R} = 2 \vec{AC} \dots (*)$$

Del mismo gráfico: $AC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (triángulo rectángulo AOC)

$$\text{En (*): } \boxed{R = 20}$$

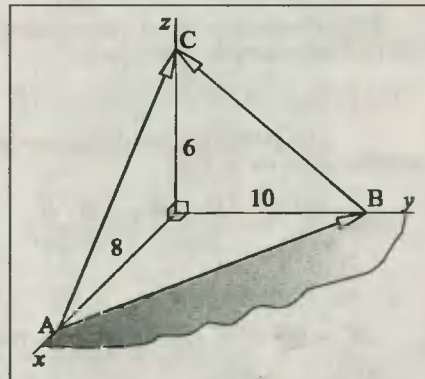


Fig. Solución Prob. 2.70

2.71. Debemos buscar una expresión para \vec{Q} , tal como: $\vec{Q} = Q_x \cdot \vec{i} + Q_y \cdot \vec{j} + Q_z \cdot \vec{k}$

Esta se podrá conseguir si encontramos un vector unitario u en la dirección de Q, el que

según la figura es también de igual dirección que el vector PR. Luego, conseguiremos \bar{u} en base a PR, para así aplicar la relación (2.14).

$$\bar{Q} = Q \cdot \bar{u} \dots (1)$$

Y del gráfico adjunto notamos que:

$$\overline{PR} = \overline{PS} + \overline{ST} + \overline{TR}$$

$$\overline{PR} = 20\bar{i} - 20\bar{j} + 10\bar{k} \dots (*)$$

$$PR = \sqrt{20^2 + (-20)^2 + 10^2}$$

$$\Rightarrow PR = 30 \dots (**)$$

$$\text{Luego: } \bar{u} = \frac{\overline{PR}}{|\overline{PR}|} \dots (***)$$

Entonces, de (*) y (**) en (***) tenemos:

$$\bar{u} = \frac{20\bar{i} - 20\bar{j} + 10\bar{k}}{30} \Rightarrow \bar{u} = 2/3\bar{i} - 2/3\bar{j} + 1/3\bar{k} \dots (2)$$

Finalmente, de (2) en (1): $\bar{Q} = 30(2/3\bar{i} - 2/3\bar{j} + 1/3\bar{k}) \therefore \bar{Q} = 20\bar{i} - 20\bar{j} + 10\bar{k} \text{ (newton)}$

2.72. Basándonos en el procedimiento del problema anterior tendremos:

$$\bar{T} = T \cdot \bar{u}_1 \dots (1); \bar{P} = P \cdot \bar{u}_2 \dots (2)$$

Del gráfico adjunto deducimos los vectores unitarios \bar{u}_1 y \bar{u}_2 .

$$\bar{u}_1 = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{\overline{AD} + \overline{DB}}{|\overline{AB}|} = \frac{3\bar{i} - 4\bar{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 = -4/5\bar{i} + 3/5\bar{j} \dots (3)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} = \frac{\overline{BD} + \overline{DA} + \overline{AC}}{|\overline{BC}|} = \frac{4\bar{i} - 3\bar{j} + 12\bar{k}}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_2 = 4/13\bar{i} - 3/13\bar{j} + 12/13\bar{k} \dots (4)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$\bar{T} = 50(-4/5\bar{i} + 3/5\bar{j})$$

$$\Rightarrow \bar{T} = -40\bar{i} + 30\bar{j} \text{ (newton)}$$

$$\text{Y de (4) en (2): } \bar{P} = 52(4/13\bar{i} - 3/13\bar{j} + 12/13\bar{k}) \Rightarrow \bar{P} = 16\bar{i} - 12\bar{j} + 48\bar{k} \text{ (newton)}$$

$$\text{Finalmente: } \bar{F} = \bar{T} + \bar{P} = -24\bar{i} + 18\bar{j} + 48\bar{k} \text{ (newton)}$$

2.73. Vemos que, por ser M punto medio de OP, sus coordenadas serán la mitad de las coordenadas correspondientes a P, ésto es: $M = (3; -3; 2)$, de donde:

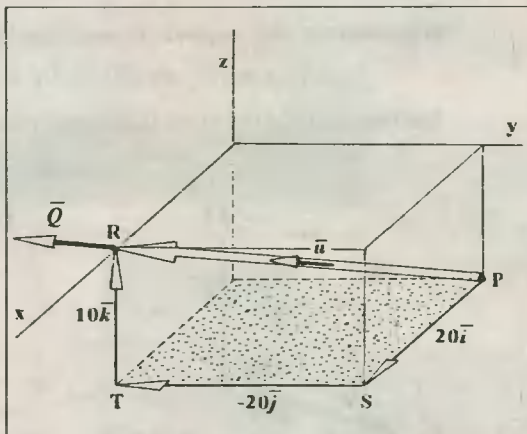


Fig. Solución Prob. 2.71

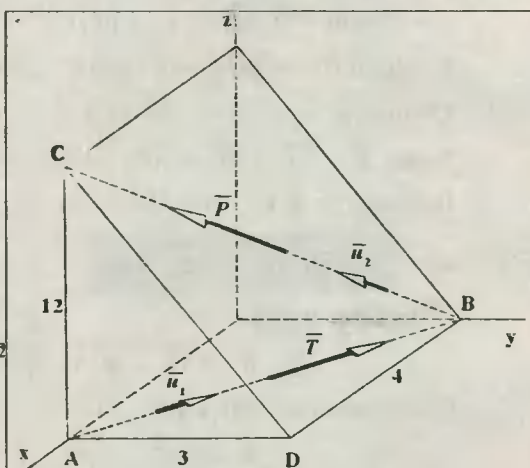


Fig. Solución Prob. 2.72

$$\vec{a} = \overline{QM} = (M_x - Q_x)\vec{i} + (M_y - Q_y)\vec{j} + (M_z - Q_z)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 1\vec{k}$$

Luego, su módulo será

$$a = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

Y sus cosenos directores serán :

$$\cos\alpha = a_x/a = 2/3$$

$$\cos\beta = a_y/a = -2/3$$

$$\cos\gamma = a_z/a = -1/3$$

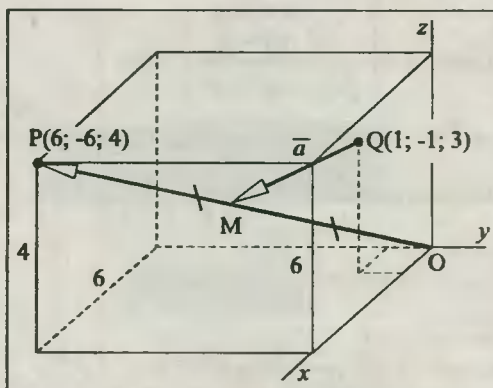


Fig. Solución Prob. 2.73

2.74. Dado que el vector \vec{C} se encuentra sobre el Plano X - Y, tenemos :

$$\vec{C} = C \cdot \cos 45^\circ \vec{i} + C \cdot \sin 45^\circ \vec{j} \Rightarrow C = 10\sqrt{2}/2\vec{i} + 10\sqrt{2}/2\vec{j} \Rightarrow \vec{C} = 10\vec{i} + 10\vec{j}$$

De igual modo, el vector D, por encontrarse en el plano Y-Z, tendremos :

$$\vec{D} = D \cos 37^\circ \vec{j} + D \sin 37^\circ \vec{k} \Rightarrow \vec{D} = 15 \cdot 4/5 \vec{j} + 15 \cdot 3/5 \vec{k} \Rightarrow \vec{D} = 12\vec{j} + 9\vec{k}$$

Recordemos que : $\vec{A} = 6\vec{i} + 10\vec{j} + 16\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$

Sumando todos los vectores tendremos :

$$\vec{R}_T = 18\vec{i} + 30\vec{j} + 25\vec{k}$$

2.75. En virtud a la relación (2.14) tenemos :

$$1) \vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\overline{RP}}{|\overline{RP}|} \Rightarrow \vec{a} = \left[\frac{\overline{RP}}{|\overline{RP}|} \right] \cdot a$$

$$\vec{a} = \left[\frac{-4\vec{i} + 3\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right] \cdot 60 \Rightarrow \dots (1)$$

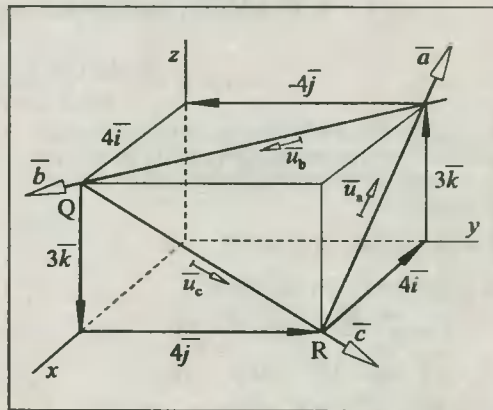
$$2) \vec{u}_b = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|} \Rightarrow \vec{b} = \left[\frac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|} \right] \cdot b$$

$$\vec{b} = \left[\frac{4\vec{i} - 4\vec{j}}{\sqrt{4^2 + 4^2}} \right] \cdot 60 \Rightarrow \vec{b} = 30\sqrt{2}\vec{i} - 30\sqrt{2}\vec{j},$$

$$6 : \vec{b} = 42\vec{i} - 42\vec{j} \dots (2) \text{ (Nota : } \sqrt{2} \approx 1,4)$$

$$3) \vec{u}_c = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{\overline{QR}}{|\overline{QR}|} \Rightarrow \vec{c} = \left[\frac{\overline{QR}}{|\overline{QR}|} \right] \cdot c \Rightarrow \vec{c} = \left[\frac{4\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right] \cdot 60 \Rightarrow \vec{c} = 48\vec{j} - 36\vec{k} \dots (3)$$

Finalmente, sumamos (1), (2) y (3), y obtenemos : $\vec{R}_T = 6\vec{i} + 6\vec{j}$



2.76. Obsérvese en la figura que se han calculado las coordenadas de los puntos A, B y C, lo cual nos permitirá calcular los correspondientes vectores. A continuación haremos uso de la relación haremos uso de la relación (2.14).

$$\vec{u}_T = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} \Rightarrow \vec{T} = \left[\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} \right] \cdot T$$

$$\text{Luego: } \vec{T} = \left[\frac{-3\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 6^2}} \right] \cdot 30 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = -10\vec{i} - 20\vec{j} + 2\vec{k} + (N) \dots (1)$$

$$\text{Del mismo modo: } \vec{u}_F = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \left[\frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} \right] \cdot F$$

$$\text{Luego: } \vec{F} = \left[\frac{3\vec{i} - 4\vec{j}}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right] \cdot 25 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 15\vec{i} - 20\vec{j} (N) \dots (2)$$

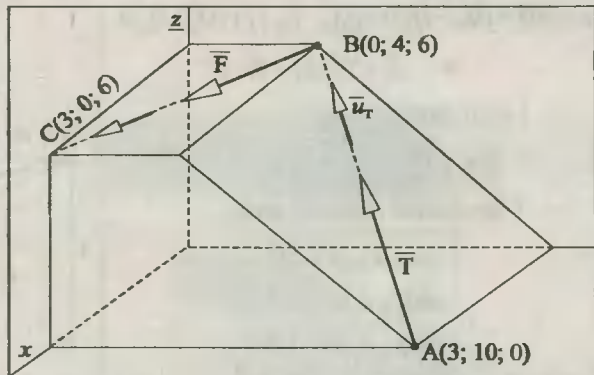


Fig. Solución Prob. 2.76

Finalmente, la resultante ($\vec{R} = \vec{F} + \vec{T}$) la hallamos sumando (1) y (2):

$$\vec{R} = 5\vec{i} - 40\vec{j} + 20\vec{k} \text{ (N)}$$

2.77. Utilizando las relaciones (2.28) y (2.29) para el producto escalar, tendremos:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{(8\vec{i} - 6\vec{j}) \cdot (24\vec{i} + 7\vec{j})}{\sqrt{8^2 + 6^2} \cdot \sqrt{24^2 + 7^2}} \\ \Rightarrow \cos \theta &= \frac{8 \cdot 24 + (-6) \cdot 7}{10 \cdot 25} = \frac{150}{250} = \frac{3}{5} \therefore \theta = 53^\circ \end{aligned}$$

2.78. Por construcción, en el triángulo SHU vemos que las coordenadas de los puntos más importantes quedan definidas del siguiente modo:

$$P = (0; 15; 20); M = (40; 15; -10)$$

$$T = (40; 0; 0); U = (40; 30; 0)$$

$$\text{Luego: } \vec{PM} = 40\vec{i} + 0\vec{j} - 30\vec{k} \dots (1)$$

$$\vec{PT} = 40\vec{i} - 15\vec{j} - 20\vec{k} = \dots (a)$$

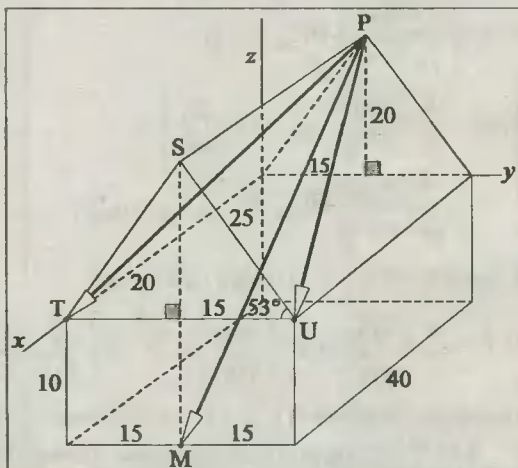
$$\vec{PU} = 40\vec{i} + 15\vec{j} - 20\vec{k} = \dots (b)$$

Luego, de (a) y b):

$$\vec{R} = \vec{PT} + \vec{PU} = 80\vec{i} + 0\vec{j} - 40\vec{k} \dots (2)$$

Puesto que se nos pide el coseno del ángulo comprendido entre PM y R, hallaremos uso de la relación utilizada en el problema anterior.

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{(40\vec{i} - 30\vec{k}) \cdot (80\vec{i} - 40\vec{k})}{\sqrt{40^2 + (-30)^2} \cdot \sqrt{80^2 + (-40)^2}} \therefore \cos \theta = 0,984$$



2.79. Calcularemos la distancia mínima de P a la recta OA trazando una perpendicular desde

aquel hasta dicha recta.

$$d_m = \sqrt{|\vec{OP}|^2 - |\vec{OH}|^2} \dots (1)$$

siendo: $\vec{OP} = (2; 2; 1) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$

$$|\vec{OP}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \Rightarrow |\vec{OP}| = 3 \dots (2)$$

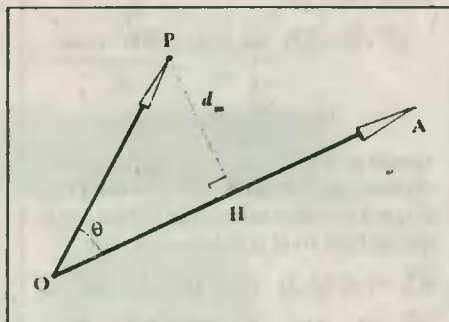
Asimismo: $\vec{OA} = (4; 3; 12) = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$

$$|\vec{OA}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} \Rightarrow |\vec{OA}| = 13$$

Luego, de la definición del producto escalar calcularemos $\cos\theta$.

$$|\vec{OA}| \cdot |\vec{OP}| \cdot \cos\theta = \vec{OA} \cdot \vec{OP}, \text{ donde } |\vec{OP}| \cos\theta = OH$$

finalmente, de (2) y (3) en (1): $d_m = \sqrt{3^2 - 2^2} \therefore d_m = \sqrt{5}$



2.80. La solución consiste en encontrar un vector unitario que salga normalmente del plano ABC, y en la dirección del vector P . Esto se conseguirá en base al vector que se obtenga de multiplicar vectorialmente $\vec{BC} \times \vec{BA}$ (observe el orden de los factores, los cuales generan un vector perpendicular al plano que los contiene, y que por la regla de la mano derecha tiene el mismo sentido que P).

Pero del gráfico original:

$$\vec{BC} = -2\vec{j} + 4\vec{k} = 0\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{BA} = 3\vec{i} - 2\vec{j} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k}$$

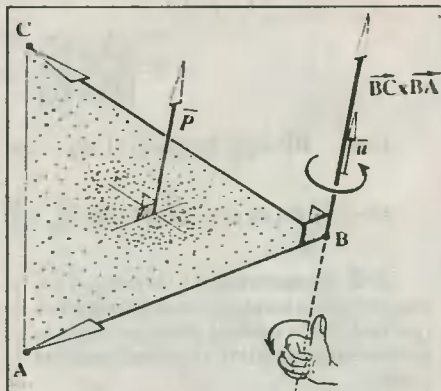
$$\vec{BC} \times \vec{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{BC} \times \vec{BA} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{BC} \times \vec{BA} = 8\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k} \dots (1)$$

$$|\vec{BC} \times \vec{BA}| = \sqrt{8^2 + 12^2 + 6^2} = 2\sqrt{61} \dots (2)$$

Igualmente, si: $\vec{u} = \frac{\vec{BC} \times \vec{BA}}{|\vec{BC} \times \vec{BA}|} \dots (3); \vec{P} = |\vec{P}| \cdot \vec{u} = |\vec{P}| \cdot \frac{\vec{BC} \times \vec{BA}}{|\vec{BC} \times \vec{BA}|} \dots (4)$

De (1), (2) y (3) en (4): $\vec{P} = 8 \cdot \sqrt{61} \cdot \left(\frac{8\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}}{2\sqrt{61}} \right) \therefore \vec{P} = 32\vec{i} + 48\vec{j} + 24\vec{k}$



2.81. Hagamos un gráfico aproximado de los puntos dados, e indiquemos en él lo que buscamos: d_m = distancia mínima, observemos que: $d_m = BH$

Pero del producto escalar entre \vec{BP} y \vec{u} encontramos BH.

$$\vec{BP} \cdot \vec{u} = |\vec{BP}| \cdot \underbrace{|\vec{u}|}_{1} \cos\theta = \underbrace{|\vec{BP}|}_{d_m} \cos\theta$$

$$\Rightarrow d_m = |\vec{BP} \cdot \vec{u}| \dots (1)$$

siendo u el vector unitario perpendicular al plano que forman los vectores BA y BC, el que a su vez se calcula del mismo modo que se hizo en el problema anterior.

$$\vec{BA} = (-4; 3; -2) - (1; 1; 0) = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

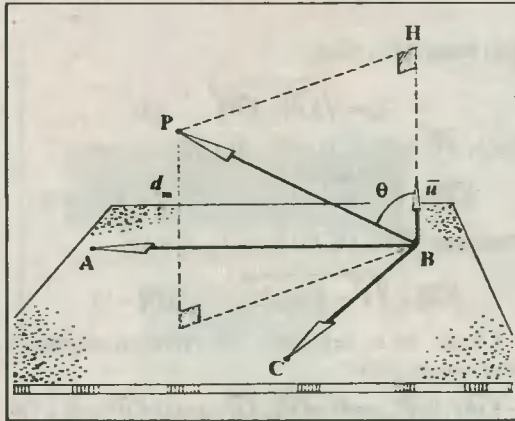
$$\vec{BC} = (2; -3; 1) - (1; 1; 0) = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} \quad \vec{BA} \times \vec{BC} = -6\vec{i} + 3\vec{j} + 18\vec{k} \Rightarrow |\vec{BA} \times \vec{BC}| = 3\sqrt{41}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{BA} \times \vec{BC}}{|\vec{BA} \times \vec{BC}|} \Rightarrow \vec{u} = \frac{-2\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{61}}$$

Luego: $\vec{BP} = (2; 3; -1) - (1; 1; 0) \Rightarrow \vec{BP} = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \dots (3)$

Finalmente, de (2) y (3) en (1): $d_m = \left| (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot \frac{(-2\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k})}{\sqrt{41}} \right| \therefore d_m \approx 0.937$



2.82. Representando a las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 conteniendo a los puntos dados tendremos que la distancia mínima entre las rectas encontramos según la figura que se muestra siendo:

$d_m =$ distancia mínima entre \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 .

$d_m = AH$, siendo $AH = |\vec{AD}| \cdot \cos\theta = \vec{AD} \cdot \vec{u}$

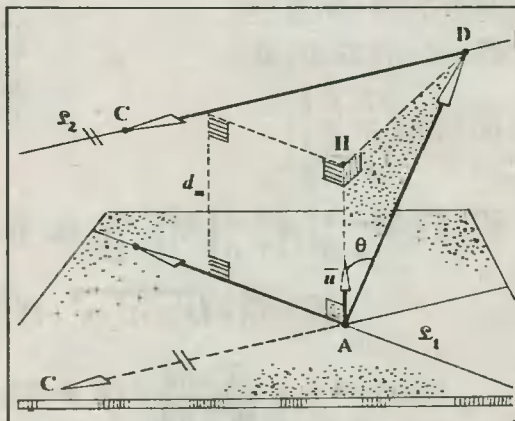
$$\Rightarrow d_m = |\vec{AD} \cdot \vec{u}| \dots (*)$$

Observamos que al proyectar el vector \vec{CD} sobre el plano que contiene al vector \vec{AB} , se comprueba que el vector unitario u , que se perpendicular al plano que contiene a \mathcal{L}_1 , será también perpendicular a los vectores \vec{AB} y \vec{CD} . Luego, tal como hicieramos en los dos problemas anteriores tenemos:

$$\vec{AB} = (4, 1; -2) - (-2; 0; 3) = 6\vec{i} + 1\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{DC} = (0; 1; -2) - (-1; 1; 1) = 1\vec{i} + 0\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{AD} = (-1; 1; 1); - (-2; 0; 3) = 1\vec{i} + 1\vec{j} - 2\vec{k}$$



$$\text{Luego: } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 6 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3\overline{i} + 13\overline{j} - 1\overline{k} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC}| = \sqrt{179}$$

$$\text{Seguidamente: } \overline{u} = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC}|} \Rightarrow \overline{u} = \frac{(-3\overline{i} + 13\overline{j} - 1\overline{k})}{\sqrt{179}}$$

$$\text{Finalmente, en (*): } d_m = \left| (1\overline{i} + 1\overline{j} - 2\overline{k}) \cdot \frac{(-3\overline{i} + 13\overline{j} - 1\overline{k})}{\sqrt{179}} \right| \therefore \boxed{d_m \approx 0,879}$$

CAP 3 MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE

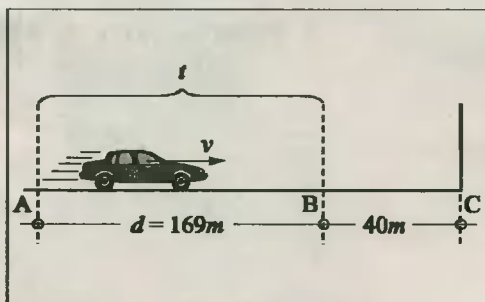
3.1. El problema nos pide averiguar el tiempo t que necesita el móvil en recorrer el tramo AB. Luego, necesitamos tener conocidos a la velocidad v en m/s y la distancia recorrida d .

Entonces: $d = 160 \text{ m}$ (Del gráfico)

$$v = 72 \text{ km/h} = 72 \cdot 5/18 \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$$

Luego, aplicamos la relación (3.7).

$$t = \frac{d}{v} = \frac{160 \text{ m}}{20 \text{ m/s}} \quad \therefore \quad t = 8 \text{ s}$$

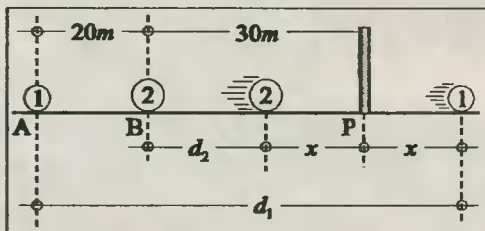


3.2. Tratemos de encontrar los desplazamientos de cada móvil a partir de:

$$d_1 = v_1 \cdot t \Rightarrow d_1 = 12t \dots (1)$$

$$d_2 = v_2 \cdot t \Rightarrow d_2 = 8t \dots (2)$$

donde t representa el tiempo que ha de transcurrir para que los dos móviles se ubiquen en lugares que equidisten del muro P. Para ello nos valdremos del esquema adjunto, en donde supondremos que el móvil 1, por ser el más rápido, sobrepasa al móvil 2, e incluso se coloca detrás del muro P.



$$\text{Del gráfico: } x = d_1 - 50\text{m} = 30\text{m} - d_2 \Rightarrow d_1 + d_2 = 80\text{m} \dots (3)$$

$$\text{Luego, de (1) y (2) en (3): } 20t = 80 \quad \therefore \quad t = 4\text{s}$$

(*) La condición del problema (la equidistancia) se presenta luego de 4 s de iniciados los movimientos.

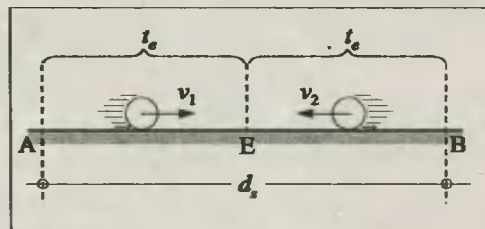
Nota aclaratoria.- Si reemplazamos el resultado obtenido en (1) y (2) tendremos: $d_1 = 48 \text{ m}$ y $d_2 = 32 \text{ m}$, lo que llevado a una gráfica nos presenta a los móviles equidistantes 2 m del muro, uno adelante y el otro atrás.

3.3. De la condición del problema, tenemos que la velocidad, digamos de 1 (v_1) es mayor que 2 (v_2) en 2 km/h . Luego, la diferencia será:

$$v_1 - v_2 = 2 \text{ km/h} \dots (1)$$

Y por tratarse de dos móviles al encuentro utilizaremos la relación (3.9).

$$t_c = \frac{d_s}{v_1 + v_2}$$



Reemplazando datos y despejando ($v_1 + v_2$) encontramos: $v_1 + v_2 = 24 \text{ km/h} \dots (2)$

Luego, de ecuaciones (1) y (2) tendremos:

Velocidad mayor: $v_1 = 13 \text{ km/h}$; Velocidad menor: $v_2 = 11 \text{ km/h}$

3.44.a. Cuando viajan en direcciones contrarias aplicamos la relación (3.9). Reemplazando datos y despejando tendremos:

$$v_1 + v_2 = 8 \text{ m/s} \dots (1)$$

3.4.b. Cuando viajan en la misma dirección supondremos que $v_1 > v_2$, y recurriremos a la relación (3.10). Reemplazando datos obtenemos:

$$v_1 - v_2 = 2 \text{ m/s} \dots (2)$$

Resolviendo (1) y (2) encontramos:

Velocidad mayor: 5 m/s
Velocidad menor: 3 m/s

3.5. Consideramos que el pájaro mantiene una "velocidad constante" en módulo durante todo su movimiento. Esto quiere decir que el espacio que recorre el pájaro estará dado por:

$$e = v_p \cdot t \dots (1)$$

siendo t precisamente el tiempo que el pájaro estuvo volando, el que a su vez coincide con el tiempo que emplearon los trenes en encontrarse. Luego:

$$t = \frac{e}{v_1 + v_2} = \frac{88 \text{ km}}{(11 + 33) \text{ km/h}}$$

$$\Rightarrow t = 2 \text{ h} \dots (2)$$

Finalmente, de (2) en (1): $e = 88 \text{ km/h} \cdot 2 \text{ h}$

$$\therefore e = 176 \text{ km}$$

3.6. En este problema, por los datos que nos dan, notamos que no conocemos la distancia que recorre el hombre ni el tiempo t que emplea para llegar a su destino a la hora fijada (7 p.m.). Sin embargo, sabemos que si ambos se conocieron y/o calcularan, sabemos que si ambos se conocieran y/o calcularan, la velocidad con que debe viajar (v) se obtendría así:

$$v = e/t \dots (1)$$

(*) Si viajara a razón de $v_1 = 40 \text{ km/h}$, llegaría a las 8 p.m., es decir, empleando será $(t + 1)$.

$$\Rightarrow e = v_1 \cdot t_1 \Rightarrow e = 40(t + 1) \dots (2)$$

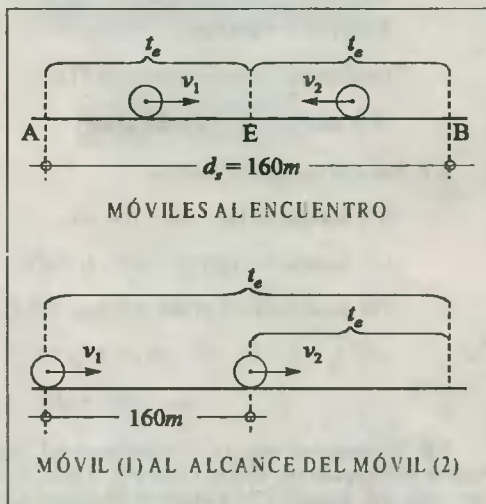


Fig. Solución Prob. 3.4

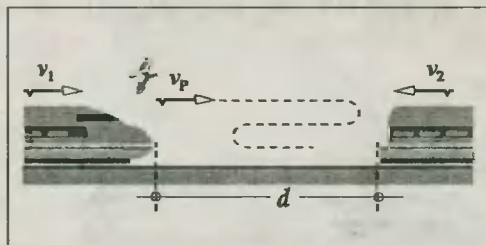


Fig. Solución Prob. 3.5

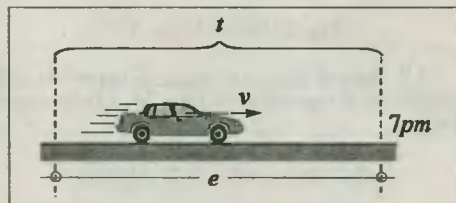


Fig. (1) Solución Prob. 3.6

(*) Pero si viajara a razón de $v_2 = 60 \text{ km/h}$ llegaría a las 6 p.m., es decir, empleando una hora menos; vale decir, que el tiempo empleado será $(t - 1)$.

$$\Rightarrow e = v_2 \cdot t_2 \Rightarrow e = 60(t - 1) \dots (3)$$

Igualando (2) y (3) encontramos: $t = 5 \text{ h}$

Y en (2): $e = 240 \text{ km}$

Finalmente, reemplazamos en (1):

$$v = 240/5 \therefore v = 48 \text{ km/h}$$

3.7. Sea x la máxima distancia.

$$t_1 = \text{tiempo de ida} \Rightarrow t_1 = x/v_1$$

$$t_2 = \text{tiempo de regreso} \Rightarrow t_2 = x/v_2$$

Por condición del problema: $t_{\text{TOT}} = 5 \text{ h}$

$$\Rightarrow t_1 + t_2 = 5 \Rightarrow x/v_1 + x/v_2 = 5$$

$$\Rightarrow x/54 + x/6 = 5 \therefore x = 27 \text{ km}$$

3.8. Supongamos que x es la distancia del "pibe" hasta el lugar de la explosión. Si el sonido se mueve más rápido por el agua que por el aire, resulta evidente que él escuchará primero el sonido que viajó por el agua, y 11 s después escuchará el sonido que viajó por el aire. Ahora, si t_{sa} y t_{sm} son los tiempos empleados por el sonido en el aire y en el agua (mar) respectivamente, se verifica que:

$$t_{sa} - t_{sm} = 11 \text{ s} \Rightarrow x/v_{sa} - x/v_{sm} = 11 \Rightarrow x/340 - x/1440 = 11 \therefore x = 4896 \text{ m}$$

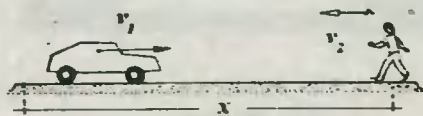


Fig. Solución Prob. 3.7

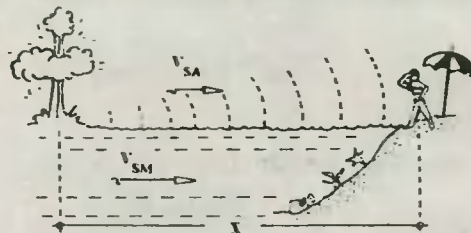


Fig. Solución Prob. 3.8

3.9. Sea t el tiempo después de la partida de M_2 , luego del cual los móviles se encuentran a 20 km alejándose el uno del otro. Para M_1 habrán transcurrido $(t + 2) \text{ h}$, puesto que salió 2 h antes que M_2 . Luego:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= v_1 \cdot t_1 \Rightarrow d_1 = 5(t + 2) \\ d_2 &= v_2 \cdot t_2 \Rightarrow d_2 = 8t \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

De la figura se observa que: $d_1 + (d_2 - 20) = 120 \Rightarrow d_1 + d_2 = 140 \dots (2)$

De (1) en (2): $5(t + 2) + 8t = 140 \therefore t = 10 \text{ h}$

3.10. Supongamos que t es la hora en que se produce la equidistancia entre los móviles. Entonces, para cada uno habrá transcurrido un tiempo $(t - t_0)$, siendo t_0 la hora de salida. Así tendremos:

Para A: $d_A = v_A(t - t_A) \dots (1)$

Para B: $d_B = v_B(t - t_B) \dots (2)$

Para C: $d_C = v_C(t - t_C) \dots (3)$

Luego, graficamos los desplazamientos según el esquema adjunto (suponemos que A va detrás de B, y éste detrás de C).

$$d_C - d_B = x = d_B - d_A$$

$$\Rightarrow d_A + d_C = 2d_B \dots (4)$$

Reemplazando (1), (2) y (3) en (4):

$$v_A(t - t_A) + v_C(t - t_C) = 2v_B(t - t_B)$$

Efectuando operaciones y despejando t tendremos:

$$t = \frac{v_A t_A - 2v_B t_B + v_C t_C}{v_A - 2v_B + v_C}$$

$\therefore t = 20 \text{ h}; \text{ ó } T = 8 \text{ p.m.}$

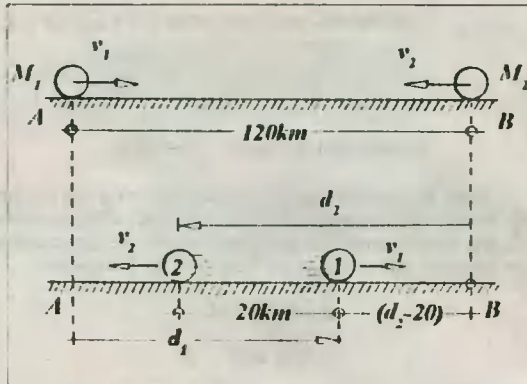


Fig. Solución Prob. 3.9

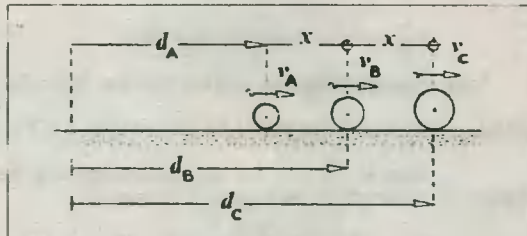


Fig. Solución Prob. 3.10

3.11. Presentamos a continuación cada uno de los sucesos en donde haremos lo posible por indicar una relación matemática para las velocidades del muchacho (v_1) y de la escalera (v_2).

1°) El muchacho sube sobre la escalera detenida



Fig. (1)

$$v_1 = L/t_1 \dots (1)$$

donde $t_1 = 90 \text{ s}$

2°) Moviéndose la escalera mecánica y él parado sobre ella.



Fig. (2)

$$v_2 = L/t_2$$

donde $t_2 = 60 \text{ s}$

3°) Moviéndose el muchacho y la escalera simultáneamente. - En este caso la velocidad v_3 del muchacho es $(v_1 + v_2)$.

$$t_3 = \frac{L}{v_3} \Rightarrow t_3 = \frac{L}{v_1 + v_2}$$

Finalmente, reemplazamos (1) y (2) en (3):

$$t_3 = \frac{L}{L/t_1 + L/t_2} \Rightarrow t_3 = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$$

Reemplazando datos: $t_3 = 36 \text{ s}$

3.12. Reconocemos que: $d_1 = v_1 t$, y $d_2 = v_2 t$ son los desplazamientos de los móviles hasta que la distancia entre ellos es 200 m . Por tratarse de dos desplazamientos perpendiculares, según se aprecia en el gráfico adjunto, aplicaremos el Teorema de Pitágoras.

$$d_1^2 + d_2^2 = d^2$$

$$v_1^2 t^2 + v_2^2 t^2 = d^2$$

$$t = \frac{d}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Reemplazando datos: $t = 20 \text{ s}$

3.13. Construyamos un gráfico con los datos del problema.

(*) d es la distancia del móvil 3 a los móviles 1 y 2 indistintamente.

Sean d_1 , d_2 y d_3 los desplazamientos de los tres móviles luego de transcurrido un tiempo t . Entonces:

$$d_1 = v_1 t; d_2 = v_2 t; d_3 = v_3 t \dots (1)$$

Ahora, aplicaremos la ley de cosenos para encontrar una expresión para d_3 .

$$\text{Del } \Delta \text{ OAC: } d^2 = d_1^2 + d_3^2 - 2d_1 d_3 \cos\theta \dots (\alpha)$$

$$\text{Del } \Delta \text{ OBC: } d^2 = d_2^2 + d_3^2 - 2d_2 d_3 \cos\theta \dots (\beta)$$

Igualando (α) con (β):

$$d_1^2 + d_3^2 - 2d_1 d_3 \cos\theta = d_2^2 + d_3^2 - 2d_2 d_3 \cos\theta$$

Agrupando los términos que contienen a d_3 en el primer miembro:

$$2(d_2 - d_1)d_3 \cos\theta = d_2^2 - d_1^2$$

Simplificando y despejando d_3 :

$$d_3 = \frac{d_1 + d_2}{2\cos\theta} \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

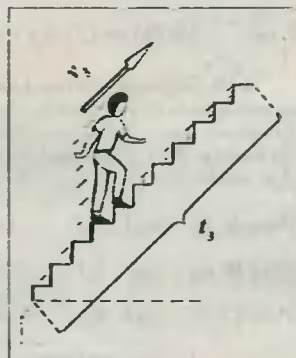


Fig. (3). Solución Prob. 3.11

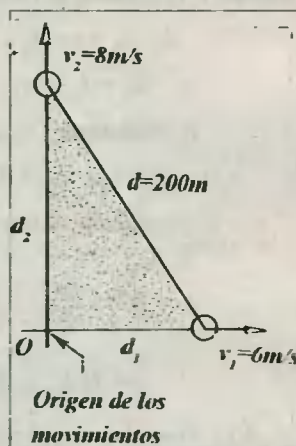


Fig. Solución Prob. 3.12

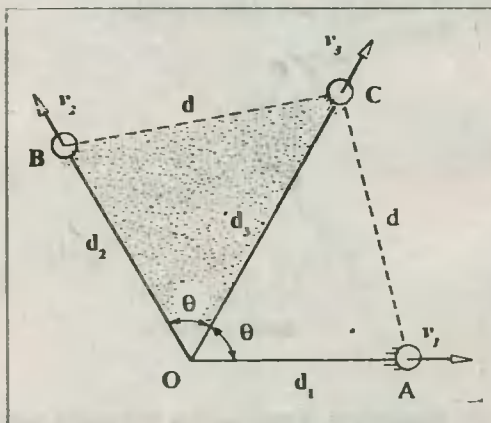


Fig. Solución Prob. 3.13

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{2\cos\theta} \dots (\forall t)$$

Sustituyendo datos: $v_1 = 40 \text{ m/s}$, $v_2 = 80 \text{ m/s}$, $\theta = \frac{1}{2}(106^\circ) = 53^\circ$, tendremos:

$$v_3 = 100 \text{ m/s}$$

3.14. Llamemos $v_v = 0,5 \text{ cm/s}$ a la velocidad con que la llama de la vela descende verticalmente. Del mismo modo, llamemos $v_s = ?$ a la velocidad con que crece verticalmente la sombra.

Por existir semejanza entre los triángulos sombreados, diremos lo siguiente:

$$e_s/e_v = 30/10 \Rightarrow e_s = 3e_v$$

Y de la relación (3.6) tendremos:

$$v_s = 3v_v$$

Reemplazando valores:

$$v_s = 1,5 \text{ cm/s}$$

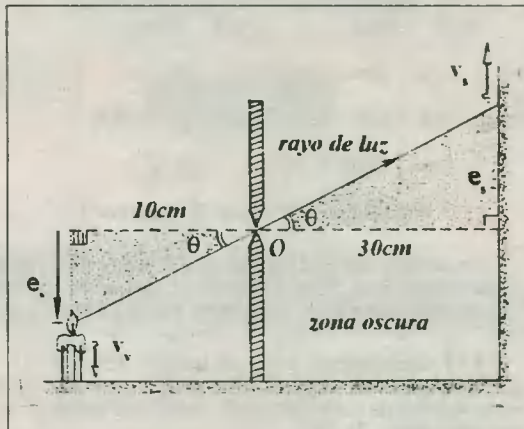


Fig. Solución Prob. 3.14

3.15. De la figura:

$$\Delta x = \Delta h_1 + (\Delta h_1 - \Delta h_2) = 2\Delta h_1 - \Delta h_2 \dots (1)$$

$$\Delta y = \Delta h_2 - (\Delta h_1 - \Delta h_2) = 2\Delta h_2 - \Delta h_1 \dots (2)$$

Aplicando la relación (3.5) tenemos:

$$\Delta h_1 = (h/t_1)\Delta t; \Delta h_2 = (h/t_2)\Delta t$$

$$\text{En (1): } \Delta x = 2(h/t_1)\Delta t - (h/t_2)\Delta t$$

$$\therefore \Delta x = h \cdot \Delta t(2/t_1 - 1/t_2)$$

$$\text{En (2): } \Delta y = 2(h/t_2)\Delta t - (h/t_1)\Delta t$$

$$\therefore \Delta y = h \cdot \Delta t(2/t_2 - 1/t_1)$$

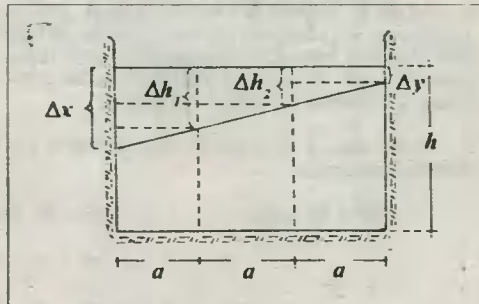


Fig. Solución Prob. 3.15

Para la sombra izquierda (1):

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{h \cdot \Delta t}{\Delta t} \left(\frac{2t_2 - t_1}{t_1 \cdot t_2} \right) \therefore v_x = h \left(\frac{2t_2 - t_1}{t_1 \cdot t_2} \right)$$

Para la sombra derecha (2):

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{h \cdot \Delta t}{\Delta t} \left(\frac{2t_1 - t_2}{t_1 \cdot t_2} \right) \therefore v_y = h \left(\frac{2t_1 - t_2}{t_1 \cdot t_2} \right)$$

3.16. Consideremos que el hombre se encuentra con el omnibus justamente en el borde de la carretera y en el punto E. Si para ambos transcurre el mismo tiempo t , entonces, el espacio recorrido por cada uno será:

Omnibus: $e_o = v_o t = 16t$

Hombre: $e_h = v_h t = 4t$

Utilicemos el gráfico adjunto, y en base al ΔACE usaremos la ley de los Senos.

$$\frac{AE}{\text{sen}\beta} = \frac{CE}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow \frac{4t}{\text{sen}\beta} = \frac{16t}{\text{sen}\alpha}$$

$$\therefore \text{sen}\alpha = 4\text{sen}\beta \dots (1)$$

Luego, del ΔABC : $\text{sen}\beta = AB/AC = 60/400$

$$\Rightarrow \text{sen}\beta = 3/20 \dots (2)$$

Finalmente, de (2) en (1): $\text{sen}\alpha = 3/5 \Rightarrow \alpha_1 = 37^\circ, \alpha_2 = 143^\circ \Rightarrow 37^\circ \leq \alpha \leq 143^\circ$

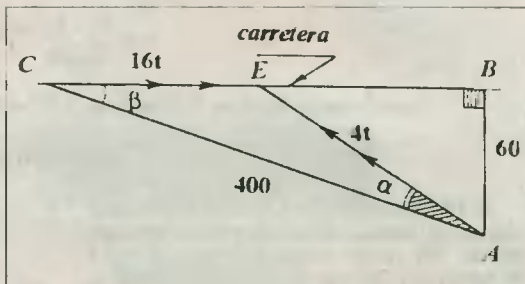


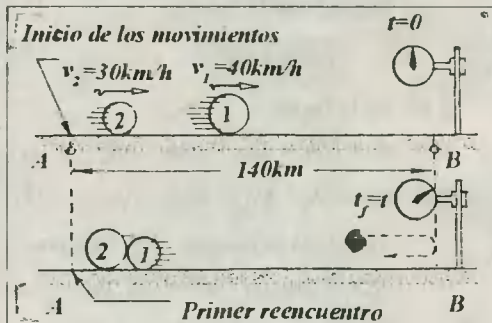
Fig. Solución Prob. 3.16

El resultado nos indica que si $37^\circ < \alpha < 143^\circ$, el hombre llega siempre a la carretera antes que el ómnibus. Si $\alpha = 37^\circ$ o 143° , entonces el hombre y el ómnibus llegan simultáneamente al mismo punto de la carretera, y si $\alpha \approx 81^\circ$, el camino es el más corto, y el tiempo es mínimo.

3.17. Indiquemos por t el tiempo después que salieron de A, y que se reencuentran por primera vez (estos reencuentros suceden con cierta periodicidad: $t, 2t, 3t, \dots$).

Puesto que cada uno de los móviles debe salir de A, llegar a B y volver hasta A, sus recorridos (e_1 y e_2) deberán ser múltiplos de 280 km (ida y vuelta). Esto significa que el primer reencuentro sucede luego que 1 realizó n vueltas completas, y 2 realizó p vueltas completas.

$e_1 = n(280 \text{ km})$, y $e_2 = p(280 \text{ km})$, siendo n y p números naturales.



Pero de la relación (3.6) tendremos para cada uno:

$$e_1 = v_1 t \Rightarrow e_1 = 30t = n(280) \dots (1)$$

$$e_2 = v_2 t \Rightarrow e_2 = 40t = p(280) \dots (2)$$

Luego, dividiendo convenientemente los segundos miembros de estas relaciones tendremos:

$$e_1/e_2 = n(280)/p(280) = 30t/40t \Rightarrow n/p = 3/4 \Rightarrow n = 3 \wedge p = 4$$

Reemplazando $n = 3$: $t = 3 \cdot 280 / 30 \therefore t = 28 \text{ h}$

Notas. - 1) El mismo resultado se obtiene al reemplazar $p = 4$ en (2).

2) Los siguientes reencuentros suceden luego de: 56 h, 84 h, 96 h, \dots 28k (donde $k = 1; 2; 3; 4; \dots$).

3.18. Al observar el movimiento del tren, y particularmente el de sus ruedas, podemos decir que ellas producen un ruido característico cuando pasan de un riel a otro. Denominamos t_0 al ruido producido en tales sucesos. Asumiremos también que la distancia entre ruedas es la misma a lo largo del tren.

Ojo: producido un toc el tren deberá avanzar una distancia d para que se escuche el siguiente toc, siendo d la distancia existente entre las ruedas. Luego:

$$d = v_1 t \dots (1)$$

siendo v_1 la velocidad del tren en km/h .

Si n es el valor numérico de v_1 , entonces, esta velocidad expresada en m/s será:

$$v_1 = 5/18 n \dots (2)$$

Pero además, debemos notar que entre toc y toc existe un tiempo t , el que a su vez se obtendrá aplicando una regla de tres simple.

$$\begin{array}{l} 45 \text{ s} \text{ --- } n \text{ toc} \\ t \text{ s} \text{ --- } 1 \text{ toc} \end{array} \Rightarrow t = \frac{45}{n} \text{ s} \dots (3)$$

Finalmente, de (2) y (3) en (1): $d = 5/18 n (m/s) \cdot 45/n (s) \therefore d = 12,5 \text{ m}$

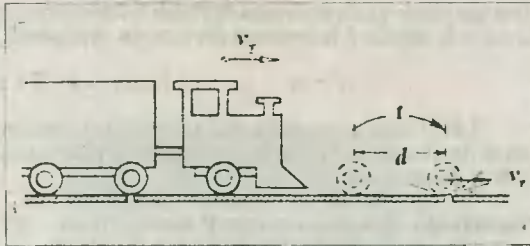


Fig. Solución Prob. 3.18

3.19. Para que el tren termine de pasar frente al alumno, aquel tendrá que avanzar una distancia $d = L$ (longitud del tren) en el tiempo $t_1 = 8 \text{ s}$. Luego, de la relación (3.6) tendremos:

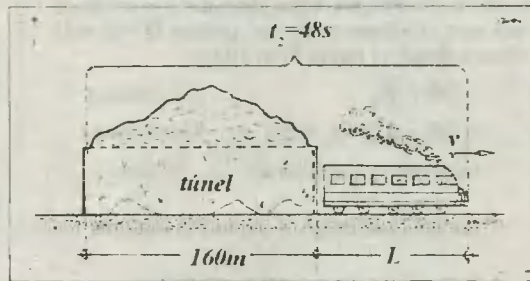
$$L = v \cdot 8 \dots (1)$$

Ahora, para que el tren termine de salir del túnel de 160 m de longitud, deberá recorrer una distancia $d_2 = (160 + L) \text{ m}$, y en el tiempo señalado: $t_2 = 48 \text{ s}$. Luego:

$$d_2 = vt_2 \therefore 160 + L = v \cdot 48 \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2), y resolviendo, encontramos que: $v = 4 \text{ m/s}$.

Finalmente, en (1): $L = 32 \text{ m}$

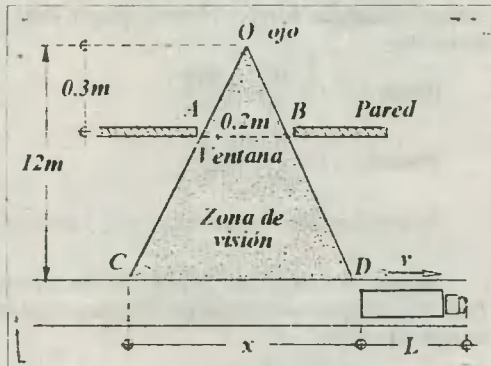


3.20. Interpretemos este problema del mismo modo que el anterior, lo cual nos sugiere calcular primero la distancia visible x que recorre el camión. Luego, determinaremos la velocidad del mismo, según como planteamos la solución del problema 3.19.

Observamos que existe una semejanza de triángulos: $\triangle COD \sim \triangle AOB$

Luego, las alturas y las bases de dichos triángulos guardan proporcionalidad entre sí:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{12 \text{ m}}{0,3 \text{ m}} \Rightarrow \frac{x}{0,2 \text{ m}} = 40 \Rightarrow x = 8 \text{ m}$$



Seguidamente, diremos que si el camión fue observado durante un tiempo $t = 1 \text{ s}$, eso signi-

fica que entrar y salir de la zona de visión le tomó dicho tiempo, y además le permitió recorrer la distancia $d = x + L$, siendo L la longitud del camión. Aplicando la relación (3.6).

$$e = vt \Rightarrow x + L = vt \Rightarrow 8 + L = 20.1 \quad \therefore \boxed{L = 12 \text{ m}}$$

3.21. Designemos por v y t a la velocidad constante del móvil y al tiempo total que emplearía si no se detuviera en el camino y no variará el valor de su velocidad. De este modo, la distancia entre A y B se denominará así: $e = vt \dots (1)$

1er retraso.- Al estacionarse en P durante 20 min experimenta un retraso neto de 30 min, debido al hecho de disminuir su velocidad en $v/3$. Así pues, si t_2 debió ser el tiempo original de P a B con el atraso sería $(t_2 + 30) \text{ min}$.

$$PB = vt_2 \quad \dots \text{ (sin retraso)}$$

$$PB = 2/3 v(t_2 + 30) \quad \dots \text{ (con retraso)}$$

$$\text{Igualando y resolviendo: } t_2 = 60 \text{ min} \dots (2)$$

2do retraso.- Al estacionarse en Q durante 20 min, significa que el retraso neto es 25 min, debido al hecho de disminuir la velocidad en $v/3$, es evidente que aquí el retraso es menor, porque Q está más cerca a B que el punto P en 10 km.

$$QB = vt_3 \quad \dots \text{ (sin retraso)}$$

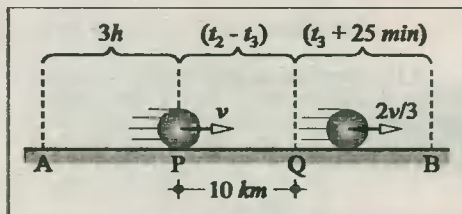
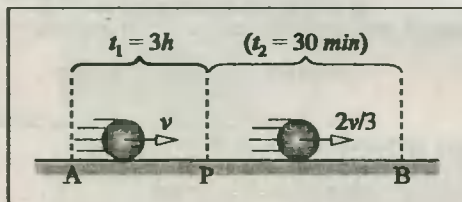
$$QB = 2/3 v(t_3 + 25) \quad \dots \text{ (con retraso)}$$

$$\text{Igualando y resolviendo: } t_3 = 50 \text{ min} \dots (3)$$

Luego, analizando el tramo PQ tenemos:
$$v = \frac{PQ}{\Delta t} = \frac{10 \text{ km}}{t_2 - t_3}$$

Y de (2) en (3): $v = 60 \text{ km/h}$. Luego: $t = t_1 + t_2 \Rightarrow t = 4 \text{ h}$

Finalmente, reemplazamos estos valores en (1):
$$\boxed{d = 240 \text{ km}}$$

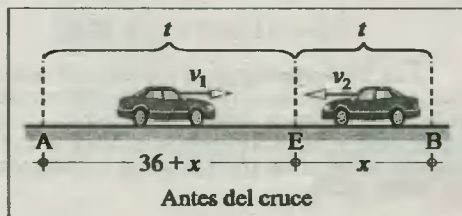


3.22. Antes del encuentro, los dos coches recorren distancias de $(36 + x)$ y x en el mismo tiempo. Luego, los tiempos t empleados por cada uno serán:

Primero:
$$t = \frac{d_1}{v_1} = \frac{36 + x}{v_1}$$

Segundo:
$$t = \frac{d_2}{v_2} = \frac{x}{v_2}$$

Podemos igualar ambas relaciones, y así obtener:
$$\frac{36 + x}{v_1} = \frac{x}{v_2} \Rightarrow \frac{36 + x}{x} = \frac{v_1}{v_2} \dots (1)$$



Después del encuentro, ambos móviles recorren la misma distancia que recorrieron en dirección contraria, y empleando tiempos que se indican en el gráfico adjunto. Luego, la expresión de las velocidades de cada uno serán:

Primero:
$$v_1 = \frac{d_1}{t_1} = \frac{x}{t}$$

$$\text{Segundo: } v_2 = \frac{d_2}{t_2} = \frac{36+x}{4}$$

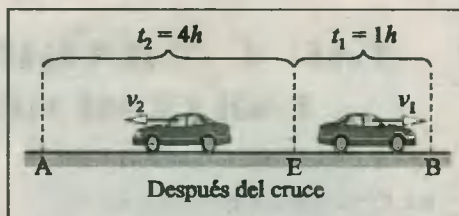
Dividiendo estas dos expresiones obtenemos:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{4x}{36+x} \dots (2)$$

$$\text{Luego, de (1) y (2): } \frac{36+x}{x} = \frac{4x}{36+x} \Rightarrow x = 36 \text{ km}$$

Finalmente, la distancia entre A y B será:

$$d = (36 + x) + x \therefore \boxed{d = 108 \text{ km}}$$



3.23. De acuerdo con los datos y el gráfico original podemos deducir que en la fotografía: $1 \text{ cm} \leftrightarrow 10 \text{ m}$. Asimismo, analizando la silueta del avión comprobamos que este mide 3 cm , reconociéndose también que durante el tiempo de exposición $t=0,1 \text{ s}$ en que fue tomada la imagen, el avión se desplazó $2 \text{ cm} \leftrightarrow 20 \text{ m}$. Luego, la velocidad del avión se obtendrá utilizando la relación (3.5).

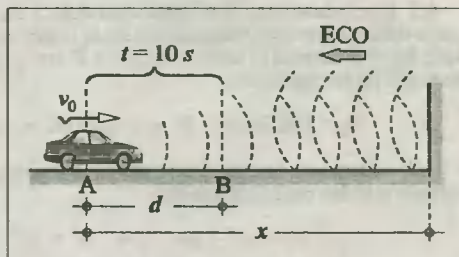
$$v = e/t = 20/0,1 \therefore \boxed{v = 200 \text{ m/s}}$$

3.24. Haciendo un gráfico del suceso convenientemente, observamos que el sonido recorre, un espacio total $e_s = x + (x-d) = 2x - d$ como un móvil "puntual", siendo d la distancia recorrida por el automóvil durante los 10 s que transcurrieron desde que se tocó la bocina en A hasta que se escuchó el eco en B. Luego:

$$d = v_a t = 10 \cdot 10 = 100 \text{ m} \Rightarrow e_s = v_s t = 340 \cdot 10$$

$$2x - d = 3400 \Rightarrow 2x = 3400 + 100$$

$$\therefore \boxed{x = 1750 \text{ m}}$$

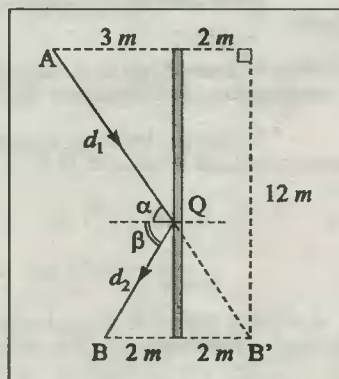


3.25. El *principio de Fermat* establece que el tiempo mínimo de recorrido se presentará cuando la trayectoria seguida por el móvil sea la más corta de todas, y ésta resulta de considerar en Q un choque elástico en el que el ángulo de incidencia α sea igual al ángulo de reflexión β . Así pues, $e_{\min} = d_1 + d_2$. Pero en el triángulo formado por la prolongación de AQ y BH observamos que $OB' = d_2$. Luego:

$$e_{\min} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ m}$$

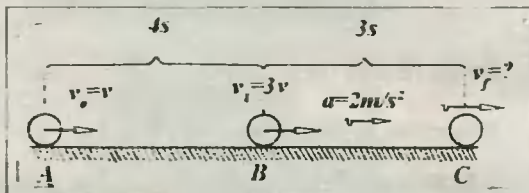
$$t_{\min} = \frac{e_{\min}}{v} = \frac{13}{2,6}$$

$$\therefore \boxed{t_{\min} = 5 \text{ s}}$$



CAP 4 MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO

4.1. Observando el gráfico en donde indicamos los datos, consideramos necesario encontrar el valor de la velocidad en B ($3v$), para luego calcular la velocidad en C ($v_f = ?$). Así pues, es necesario determinar primero el valor de v .



Cálculo de v .- Estudiaremos el tramo AB, y para ello aplicaremos la relación (4.4).

$$v_f = v_0 + at \Rightarrow 3v = v + 2.4 \Rightarrow v = 4 \text{ m/s}$$

Cálculo de v_f .- Estudiaremos el tramo BC aplicando la misma relación del paso anterior.

$$v_f = v_0 + at \Rightarrow v_f = 3v + (2 \text{ m/s}^2)(3 \text{ s}) \therefore v_f = 18 \text{ m/s}$$

4.2. Es evidente que si el conductor aplica una aceleración retardatriz a muy grande, el vehículo podría detenerse completamente antes de llegar al precipicio (P), pero existe una aceleración mínima a que logrará detenerlo justo al llegar a P sin que el automóvil llegue a caer. Esto significa que los datos del problema serían:

$$v_0 = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}, e = 100 \text{ m}, v_f = 0 \text{ m/s} \text{ (el móvil se detiene al final)}$$

Luego, si nuestra incógnita es la aceleración a , entonces recurrimos a la relación (4.5), que contiene a todas estas cantidades.

$$v_f^2 = v_0^2 + 2ae \Rightarrow 0^2 = 30^2 + 2a(100) \therefore a = -4,5 \text{ m/s}^2$$

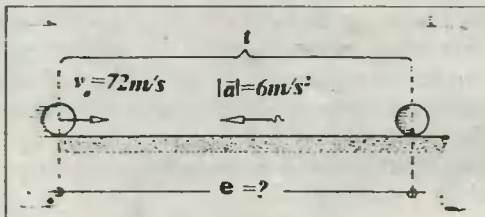
Nota.- El signo negativo de la aceleración se explica porque el movimiento es desacelerado.

4.3. Extrayendo los datos del problema tendremos: $v_0 = 72 \text{ m/s}, a = -6 \text{ m/s}^2, t = 2 \text{ s}, e = ?$.

Estos datos los colocamos en el gráfico adjunto.

(*) Observa detenidamente el sentido del vector aceleración. ¿Recuerdas por qué?

Luego, por los datos notamos que será necesario utilizar la relación (4.6).



$$e = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$\Rightarrow e = (72 \text{ m/s})(2 \text{ s}) + \frac{1}{2} (-6 \text{ m/s}^2)(2 \text{ s})^2 \therefore e = 132 \text{ m}$$

4.4. Estoy seguro de que colocando los datos del problema en un gráfico tendremos una mejor idea para el planteamiento de la solución.

(*) Hemos designado con la letra v al valor de la velocidad inicial. Luego, por condición del problema la velocidad final en el trayecto mostrado será $3v$.

Cálculo de v .- De la relación (4.7) tenemos:

$$\frac{v_0 + v_f}{2} = \frac{e}{t} \Rightarrow \frac{v + 3v}{2} = \frac{200 \text{ m}}{10 \text{ s}}$$

$$\Rightarrow v = 10 \text{ m/s}$$

Ahora que conocemos el valor de v , diremos que las velocidades inicial y final serán: $v_0 = 10 \text{ m/s}$, y $v_f = 30 \text{ m/s}$.

Cálculo de la aceleración.- Para calcular la aceleración recurrimos a la relación (4.4).

$$v_f = v_0 + at \Rightarrow 30 \text{ m/s} = 10 \text{ m/s} + a(10 \text{ s}) \therefore a = 2 \text{ m/s}^2$$

4.5. Extrayendo los datos tendremos: $a = 3 \text{ m/s}^2$, $e = 96 \text{ m}$, $v_f = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$, $t = ?$.

¿Qué relación de las conocidas nos permitirá encontrar el valor de t directamente?. La respuesta es NINGUNA !!!

Efectivamente, ninguna de las relaciones presentadas para el MRUV se adapta directamente a los datos dados. Entonces, lo que corresponde hacer en estos casos es recurrir a dos de dichas relaciones. Veamos.

Cálculo de v_0 .- Te habrás dado cuenta que al conocer v_f , e y a podemos calcular v_0 , utilizando para ello la relación (4.5).

$$v_f^2 = v_0^2 + 2ae$$

$$\Rightarrow (25 \text{ m/s})^2 = v_0^2 + 2(3 \text{ m/s}^2)(96 \text{ m}) \Rightarrow v_0 = 7 \text{ m/s}$$

Cálculo del tiempo t .- Ahora que ya conocemos la velocidad inicial v_0 , y además v_f y e , recurriremos a la relación (4.7).

$$\frac{v_0 + v_f}{2} = \frac{e}{t} \Rightarrow \frac{7 \text{ m/s} + 25 \text{ m/s}}{2} = \frac{96 \text{ m}}{t} \therefore t = 6 \text{ s}$$

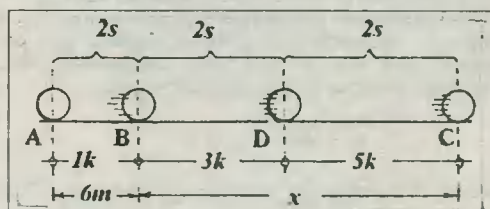
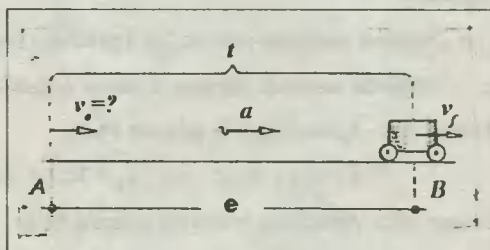
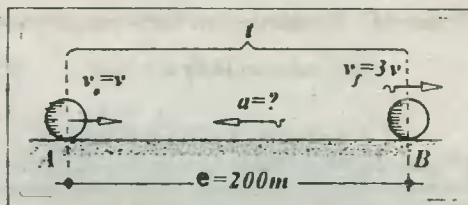
4.6. Este problema, por ser el primero en su género, lo resolveremos por dos métodos: El primero "convencional", y el segundo un método corto, pero igualmente eficaz.

1^{er} método.- Con los datos del problema construimos el gráfico adjunto.

Tramo AB.- Escogemos este tramo porque conocemos: $v_0 = 0 \text{ m/s}$, $e = 6 \text{ m}$, $t = 2 \text{ s}$. Luego, de la relación (4.6) calcularemos la aceleración.

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow 6 = 0.2 + \frac{1}{2} a.2^2$$

$$\Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2$$



Tramo AC.- Escogemos este tramo porque conocemos: $v_0 = 0 \text{ m/s}$, $a = 3 \text{ m/s}^2$, $t = 6 \text{ s}$, $e = (6 + x) \text{ m}$.

De la relación (4.6): $e = \frac{1}{2} at^2 \dots (v_0 = 0)$

$$\Rightarrow 6 + x = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6^2 \quad \therefore \quad \boxed{x = 48 \text{ m}}$$

2^{do} método.- Recordando los números de Galileo durante un MRUV, diremos que en el movimiento analizado el móvil recorre espacios proporcionales a los números 1, 3, 5, 7, etc. durante los intervalos de tiempo iguales a 2 s, y ello debido también a que parte del reposo. A continuación, el gráfico mostrará la proporcionalidad indicada.

$$\text{Si: } 1K = 6 \text{ m} \Rightarrow x = 8K = 8(6 \text{ m}) \quad \therefore \quad \boxed{x = 48 \text{ m}}$$

4.7. 1^{er} método.- Analizaremos el problema según los datos dados, aprovechando el gráfico adjunto.

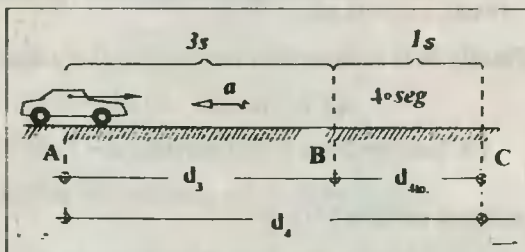
$v_0 = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$, $a = -4 \text{ m/s}^2$ (Movimiento desacelerado).

Del gráfico:

e_3 = Distancia recorrida durante los 3 primeros segundos.

e_4 = Distancia recorrida durante los 4 primeros segundos.

e_{4^o} = Distancia recorrida durante el cuarto segundo.



Tramo AB.- Aplicaremos la relación (4.6).

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow e_3 = 30 \cdot 3 + \frac{1}{2} (-4) \cdot 3^2 \Rightarrow e_3 = 72 \text{ m} \dots (1)$$

Tramo AC.- Aplicamos la misma relación (4.6).

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow e_4 = 30 \cdot 4 + \frac{1}{2} (-4) \cdot 4^2 \Rightarrow e_4 = 88 \text{ m} \dots (2)$$

Luego, del mismo gráfico diremos que: $e_{4^o} = e_4 - e_3 \dots (3)$

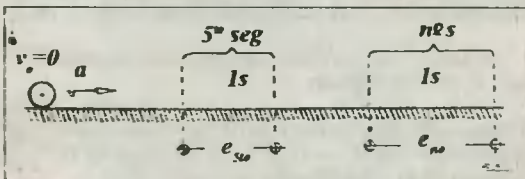
$$\text{Reemplazando (1) y (2) en (3): } e_{4^o} = 88 - 72 \quad \therefore \quad \boxed{e_{4^o} = 16 \text{ m}}$$

2^{do} método.- Recordando la relación que nos da la distancia recorrida en el n -ésimo segundo (relación (4.8)): $e_{n^o} = v_0 + \frac{1}{2} a(2n - 1)$, donde $n = 4$.

$$\Rightarrow e_{4^o} = 30 + \frac{1}{2} (-4)(2 \cdot 4 - 1) \quad \therefore \quad \boxed{e_{4^o} = 16 \text{ m}}$$

4.8. Resolveremos este interesante ejercicio empleando la relación (4.8), que nos da el espacio recorrido por un móvil en el n -ésimo segundo, sabiendo que parte del reposo y marcha con MRUV. Así pues, en nuestro ejercicio tenemos la siguiente condición:

$$e_{n^o} = 3e_{5^o} \dots (1)$$



siendo n el orden del segundo que deseamos encontrar.

$$\text{Analizando el quinto segundo: } e_{5^o} = \frac{1}{2} a(2 \cdot 5 - 1) \Rightarrow e_{5^o} = 9/2 a \dots (2)$$

Así, reemplazando (2) en (1): $1/2 a(2n - 1) = 3.9/2 a \therefore n = 14$

Entonces, este fenómeno en particular sucedió en el decimo cuarto segundo del movimiento

4.9. Designemos por a a la aceleración de este movimiento, y por n al orden del segundo en el cual la distancia recorrida fué 26 m. Luego, $(n + 1)$ sería el orden del segundo inmediato en el cual el móvil recorre 30 m. Así pues, usando la relación (4.8) simplificada, tendremos:

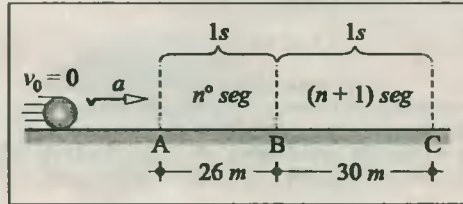
$$e_{n^{\circ}} = 1/2 a(2n - 1) \dots (v_0 = 0)$$

Para el tramo AB: $26 = 1/2 a(2n - 1) \dots (1)$

Para el tramo BC: $30 = 1/2 a[2(n+1) - 1] \dots (2)$

Dividiendo (2) + (1) tenemos: $\frac{30}{26} = \frac{2n+1}{2n-1}$

$\Rightarrow n = 7$; y en (1): $a = 4 \text{ m/s}^2$



(*) Este fenómeno se produce durante el 7° y 8° segundo del movimiento. Luego, para determinar el segundo de orden x en que el móvil recorre los 46 m indicados en el enunciado del problema recurriremos simplemente a la relación (4.8) simplificada, es decir, con $v_0 = 0$.

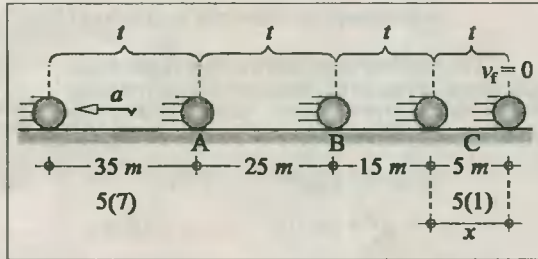
$$e_{x^{\circ}} = 1/2 a(2x - 1) \Rightarrow 46 = 1/2 \cdot 4(2x - 1) \therefore x = 12$$

4.10. Analicemos los valores numéricos de los espacios recorridos; éstos deberán satisfacer la proporcionalidad de los números de Galileo, y en este caso, por tratarse de dos intervalos iguales t consecutivos, dichos valores numéricos serán dos números impares consecutivos.

No debemos dejar de considerar que el movimiento es uniformemente desacelerado; por ello los números de Galileo serán decrecientes. Ahora, fijémonos atentamente en dichos valores y completemos la serie hasta llegar al último espacio recorrido (de igual intervalo t), el cual deberá ser proporcional al número 1.

Luego, el espacio recorrido en el último intervalo de tiempo t será 5 m.

$x = 5 \text{ m}$



4.11. Veamos el gráfico adjunto, en donde indicamos a los tres móviles y sus posiciones según el enunciado del problema.

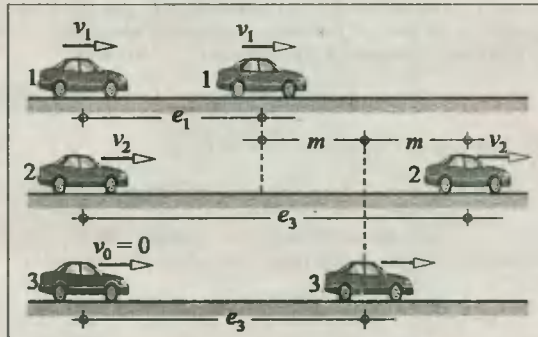
Para el primero: $e_1 = v_1 \cdot t \dots (1)$

Para el segundo: $e_2 = v_2 \cdot t \dots (2)$

Para el tercero: $e_3 = 1/2 at^2 \dots (3)$

De la figura: $e_2 = e_1 + 2m \dots (4)$

$e_3 = e_1 + m \dots (5)$



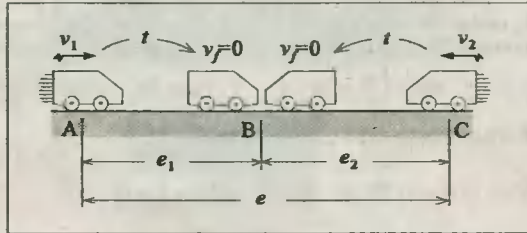
En (4): $e_3 = e_1 + 2e_3 - 2e_1 \Rightarrow v_2 \cdot t = 2 \cdot \frac{1}{2} a t^2 - v_1 \cdot t$

Simplificando: $v_1 + v_2 = at \Rightarrow t = \frac{v_1 + v_2}{a} \therefore t = 10 \text{ s}$

4.12. Según el gráfico adjunto, observamos que la distancia original es e . Asimismo, cada móvil recorre los tramos e_1 y e_2 empleando el mismo tiempo, tal que:

$e = e_1 + e_2 \dots (1)$

Por tratarse de movimientos uniformemente variados, pero con aceleraciones no necesariamente iguales, diremos, por los datos e incógnitas a relacionar, que usaremos la relación (4.7), la cual no contiene aceleración.



Del móvil 1: $e_1 = \left(\frac{v_1 + 0}{2}\right)t \Rightarrow e_1 = \frac{v_1 \cdot t}{2} \dots (2)$

Del móvil 2: $e_2 = \left(\frac{v_2 + 0}{2}\right)t \Rightarrow e_2 = \frac{v_2 \cdot t}{2} \dots (3)$

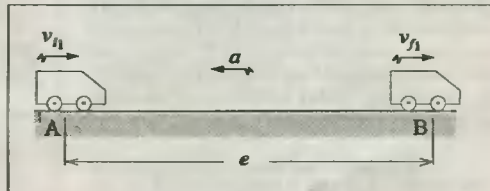
Luego, reemplazando (2) y (3) en (1): $e = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)t \dots$ (Fórmula para este fenómeno)

Reemplazando valores en la fórmula deducida obtenemos: $t = 8 \text{ s}$

Finalmente, llevamos este resultado a (2) y (3): $e_1 = 160 \text{ m}; e_2 = 120 \text{ m}$

4.13. Analicemos primero al móvil que va de ida. Observamos de los datos que este móvil tiene MRU desacelerado, dado que su velocidad disminuye de 20 m/s a 10 m/s . Luego:

$v_{f1}^2 = v_{i1}^2 + 2ae \dots a (-)$
 $\Rightarrow 10^2 = 20^2 + 2(-10)e \Rightarrow e = 15 \text{ m}$

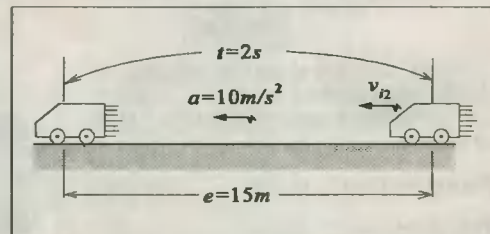


Analicemos ahora al móvil que va de regreso, y llamemos v_{i2} a su velocidad cuando se cruzó con el móvil 1 en el punto B. Lo que no podemos asegurar es si su movimiento es acelerado o retardado. Usaremos para ello la relación (4.6).

$e = v_{o2} \cdot t + \frac{1}{2} a t^2 \dots (*)$

Si a es (+), en (*): $15 = v_{i2} \cdot 2 + \frac{1}{2} 10 \cdot 2^2$

$\Rightarrow v_{i2} = -2,5 \text{ m/s}$ (ABSURDO)



Esto no puede aceptarse, porque ello supondría que el móvil 2 se encuentra moviéndose en sentido contrario al que menciona el propio problema.

Si a es (-), en (*): $15 = v_{i2} \cdot 2 + \frac{1}{2} (-10) \cdot 2^2 \therefore v_{i2} = +17,5 \text{ m/s}$

4.14. Explicaré lo que va sucediendo durante este fenómeno:

- 1°) El automóvil se desplaza a razón de $72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$.
- 2°) Se enciende la luz roja cuando el automóvil se encuentra a x metros del semáforo.
- 3°) La luz roja viaja "casi" instantáneamente hasta los ojos del conductor, encontrándolo (prácticamente) a x metros del semáforo.
- 4°) El conductor emplea $7/10 \text{ s}$ para reaccionar, lo que significa que el automóvil continúa avanzando con velocidad constante durante dicho tiempo. En la figura este desplazamiento es desde A hasta B, e indicado por d_1 .
- 5°) En B el automóvil inicia su movimiento uniformemente retardado con $v_0 = 20 \text{ m/s}$ y $a = -5 \text{ m/s}^2$ hasta detenerse por completo en C (al lado del semáforo), ésto debido a que el conductor aplica los frenos desde B. En la figura, el desplazamiento efectuado es d_2 .

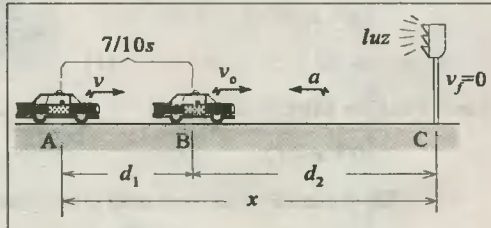
Tramo AB: $d = vt \dots$ (MRU)

$$\Rightarrow d_1 = 20 \cdot 7/10 \Rightarrow d_1 = 14 \text{ m}$$

Tramo BC: $v_f^2 = v_0^2 + 2ad$

$$\Rightarrow 0^2 = 20^2 + 2(-5)d_2 \Rightarrow d_2 = 40 \text{ m}$$

Finalmente: $x = d_1 + d_2 \therefore \boxed{x = 54 \text{ m}}$



4.15. En el gráfico adjunto señalamos los datos del problema, y consideramos a E como el lugar donde se produce el encuentro.

Móvil 1: $d_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 \dots (v_{01} = 0) \dots (1)$

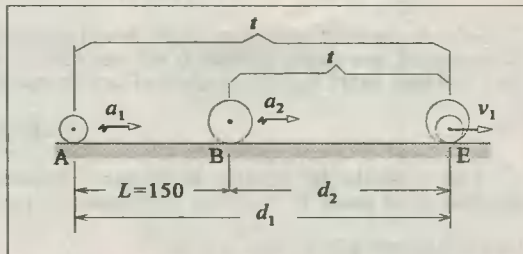
Móvil 2: $d_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 \dots (v_{02} = 0) \dots (2)$

Del gráfico vemos que: $d_1 = L + d_2 \dots (3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$\frac{1}{2} a_1 t^2 = L + \frac{1}{2} a_2 t^2$$

Despejando t : $t = \sqrt{\frac{2L}{a_1 - a_2}} \therefore \boxed{t = 10 \text{ s}}$



Esto significa que luego de 10 s de iniciado cada uno de los movimientos, el móvil 1 alcanza al móvil 2. Hasta el final de este intervalo los móviles poseerán las siguientes velocidades:

Móvil 1: $v_1 = v_{01} + a_1 t = 0 + 8 \cdot 10 \therefore \boxed{v_1 = 80 \text{ m/s}}$

Móvil 2: $v_2 = v_{02} + a_2 t = 0 + 5 \cdot 10 \therefore \boxed{v_2 = 50 \text{ m/s}}$

4.16. Puesto que el móvil 1 se desplaza con mayor aceleración que el móvil 2, entonces, durante el desarrollo de los movimientos ocurrirán dos instantes en que los móviles se encontrarán a 4 m de distancia: La primera, antes que el móvil 1 pase al móvil 2, y la segunda cuando ya lo haya pasado. Así pues, el tiempo mínimo solicitado se presentará en la primera de estas circunstancias. Veamos ahora el gráfico de la página siguiente.

Móvil 1: $d_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 \dots (v_{01} = 0) \dots (1)$

$$\text{Móvil 2: } d_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 \dots (v_{02} = 0) \dots (2)$$

$$\text{Del gráfico: } d_1 + 4 \text{ m} = d_2 + 20 \text{ m} \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3), y resolviendo:

$$\frac{1}{2} \cdot 8t^2 + 4 = \frac{1}{2} \cdot 6t^2 + 20$$

$$\therefore t = 4 \text{ s}$$

4.17. Indiquemos por **E** al punto de encuentro entre el ciclista y el automóvil.

Para el automóvil: MRUV

$$e = \frac{1}{2} a t^2 (v_0 = 0)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} 4t^2 \Rightarrow x = 2t^2 \dots (1)$$

Para el ciclista: MRU $\Rightarrow e = vt$

$$10 + x = 12t \dots (2)$$

De (1) en (2), y reconociendo la ecuación de 2º grado obtenida, tendremos: $t^2 - 6t + 5 = 0$

$$(t - 1)(t - 5) = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}; t_2 = 5 \text{ s}$$

El hecho de que existan dos respuestas para el tiempo significa que luego de 1 s el ciclista logra pasar al automóvil, que en ese instante posee una velocidad de 4 m/s. Seguidamente, diremos que luego de 5 s el auto habrá logrado alcanzar al ciclista por segunda vez, y con una velocidad de 20 m/s.

$$\therefore t = 5 \text{ s}$$

4.18. Cálculo del tiempo de alcance.- Supongamos que el pasajero logra dar alcance al ómnibus en el punto **E**. Entonces tendríamos lo que mostramos a continuación.

Para el hombre: MRU $\Rightarrow e = vt$

$$\Rightarrow 20 + x = 6t \dots (1)$$

Para el ómnibus: MRUV

$$\Rightarrow e = \frac{1}{2} a t^2 \dots (v_0 = 0)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 1t^2 \dots (2)$$

$$\text{Luego, de (2) en (1): } 20 + \frac{1}{2} t^2 = 6t$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenida: $t^2 - 12t + 40 = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{-16}}{2} \therefore t = \text{NUMERO COMPLEJO}$$

Luego, como el tiempo sólo acepta valores reales, nuestra suposición planteada es errada; esto significa que el hombre nunca alcanza al ómnibus. Sin embargo, notaremos que mientras el ómnibus tenga una velocidad menor que la del hombre, éste se le irá acercando paulatinamente hasta

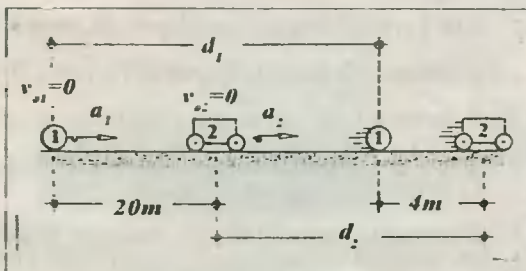
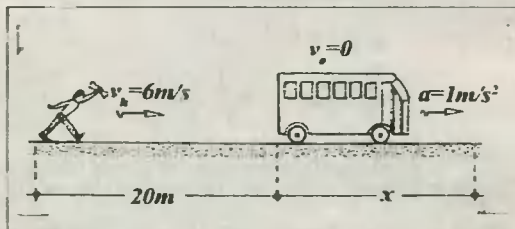
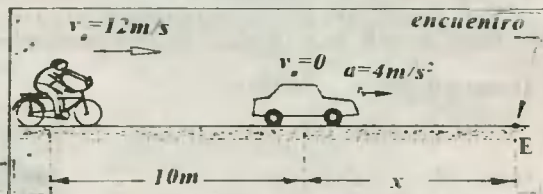


Fig. Solución Prob. 4.16



encontrarse a una distancia mínima e_{\min} . Esto ocurrirá cuando la velocidad del ómnibus haya aumentado hasta el valor de la velocidad del hombre, hecho que se presentará al cabo de 6 s. Luego de este instante el ómnibus seguirá aumentando su velocidad y su alejamiento del hombre.

$$\text{Omnibus: } v_f = v_0 + at \Rightarrow 6 = 0 + 1t$$

$$\Rightarrow t = 6 \text{ s}$$

Hasta este tiempo el hombre y el ómnibus se habrán desplazado 36 m y 18 m. Veamos.

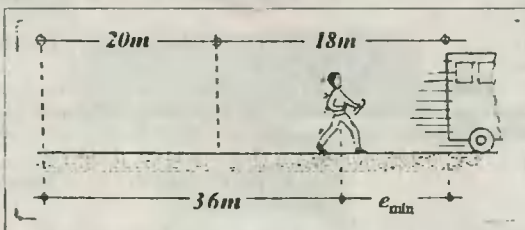
$$\text{Hombre: } e = vt = 6 \cdot 6 \Rightarrow e = 36 \text{ m}$$

$$\text{Omnibus: } e = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6^2$$

$$\Rightarrow e_0 = 18 \text{ m}$$

Grificando estos resultados obtendremos e_{\min} .

$$36 + e_{\min} = 20 + 18 \quad \therefore \quad e_{\min} = 2 \text{ m}$$



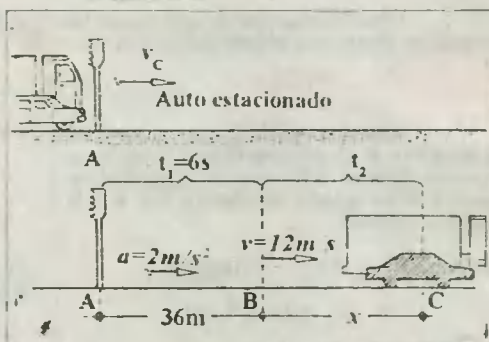
4.19. En los gráficos adjuntos mostramos lo que ocurre en este suceso.

Analicemos lo que ocurre en los primeros 6 segundos. En primer lugar, en este tiempo el auto logra aumentar su velocidad de 0 m/s hasta 12 m/s.

$$v_f = v_0 + at = 0 + 2 \cdot 6$$

$$\Rightarrow v_f = 12 \text{ m/s} \quad \dots \text{ (Punto B)}$$

Además, en este tiempo logra recorrer una distancia de 36 m. En cambio, el camión logró avanzar 60 m desde que pasó por A.



$$\text{Automóvil: } e = \frac{1}{2} at^2 \quad \dots \quad (v_0 = 0) \Rightarrow e = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6^2 \Rightarrow e = 36 \text{ m}$$

$$\text{Camión: } e_c = v_c t \quad \dots \quad (\text{MRU}) \Rightarrow e_c = 10 \cdot 6 \Rightarrow e_c = 60 \text{ m}$$

De este análisis deducimos que el automóvil no logró alcanzar al camión durante su movimiento acelerado. Supongamos que el lugar donde el automóvil alcanza al camión es el punto C. Así pues, observaremos que cada móvil habrá recorrido la misma distancia: $(36 + x) \text{ m}$ en el mismo tiempo: $(t_1 + t_2)$. Veamos los detalles.

Automóvil: Desde el punto B inicia un MRU con $v_A = 12 \text{ m/s}$. Luego, la distancia recorrida hasta C será calculada así:

$$\text{BC: } e = v_A t \Rightarrow x = 12 t_2 \quad \dots \quad (1)$$

Camión: Desde el punto A se desplaza con MRU. Luego, la distancia recorrida hasta C se calculará a partir de:

$$\text{AC: } d = v_c t \Rightarrow 36 + x = 10(6 + t_2) \quad \dots \quad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) tendremos: $t_2 = 12 \text{ s}$, y $x = 144 \text{ m}$

Finalmente, las respuestas para el tiempo t_T y la distancia D respecto a A, en que el auto y el camión se vuelven a encontrar serán:

$$t_T = t_1 + t_2 \quad \therefore \quad t_T = 18 \text{ s}$$

$$D = 36 + x \quad \therefore \quad D = 180 \text{ m}$$

4.20. Analicemos lo que ocurre en los primeros t_1 segundos durante los cuales el automóvil alcanza su velocidad máxima. Si esperamos encontrar el menor tiempo empleado en la operación, debemos suponer que el automóvil utiliza su máxima aceleración. Dicho tiempo lo encontraremos así:

$$v_0 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}; \quad v_T = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}; \quad a = 2,5 \text{ m/s}^2$$

$$t = \frac{v_T - v_0}{a} = \frac{25 - 20}{2,5} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

Pero en este tiempo el automóvil habrá avanzado 45 m desde su posición original P.

$$d_{1a} = \frac{v_T^2 - v_0^2}{2a} = \frac{25^2 - 20^2}{2 \cdot 2,5} \Rightarrow d_{1a} = 45 \text{ m}$$

Observamos también que en este intervalo de tiempo el camiónn habrá avanzado 40m, y por lo tanto se encontrará al lado del automóvil en R.

$$d_{1c} = v_c t_1 = 20 \cdot 2 \Rightarrow d_{1c} = 40 \text{ m}$$

Consideremos ahora que a partir de la posición R el automóvil y el camión se mueven durante el tiempo t_2 , colocándose aquel a 55 m delante del camión (en T y S respectivamente).

Automóvil: $d_{2a} = v_a t_2 \dots$ (MRU)

$$\Rightarrow d_{2a} = 25 t_2 \dots (1)$$

Camión: $d_{2c} = v_c t_2 \Rightarrow d_{2c} = 20 t_2 \dots (2)$

Del gráfico: $d_{2c} + 55 = d_{2a} \dots (3)$

$$\text{De (1) y (2) en (3): } 20 t_2 + 55 = 25 t_2 \Rightarrow t_2 = 11 \text{ s}$$

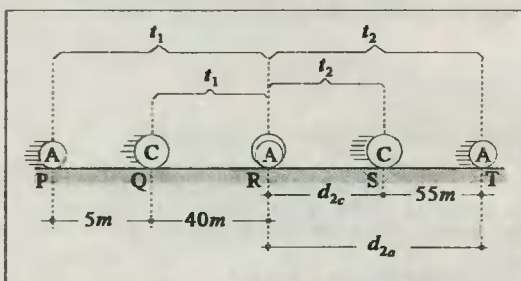
Finalmente, el tiempo total transcurrido para todo el suceso será: $t_T = t_1 + t_2$

$$\therefore \quad t_T = 13 \text{ s}$$

4.21. Al tratarse de trayectorias paralelas, los móviles mantendrán siempre la misma separación lateral, que en este caso viene dado por m . Como condición del problema, A posee un MRU hacia el Norte. Entonces, para un tiempo t dado se habrá desplazado: $d_A = vt$.

En ese mismo tiempo el móvil C habrá salido desde el reposo hacia el Sur, y con MRUV de aceleración a , y que en el mismo tiempo que A se habrá desplazado: $d_C = \frac{1}{2} a t^2$.

Haciendo un gráfico aproximado (página siguiente) para ubicar a los móviles A y C, observamos que sobre la recta que los une se ha de ubicar el móvil B, que para el gráfico construido se deberá desplazar hacia el Norte, y habrá recorrido la distancia d_B en el tiempo t considerado. Seguidamente, utilizando el Teorema de Tales de los puntos medios, diremos que:



$$d_B + d_C = d_A - d_B$$

$$\Rightarrow d_B = \frac{1}{2}(d_A - d_C) = \frac{1}{2}(vt - \frac{1}{2}at^2)$$

$$\Rightarrow d_B = (v/2)t + 1/2(-a/2)t^2$$

$$\therefore v_{0B} = v/2$$

$$Y: a_B = -a/2 \text{ (Movimiento desacelerado)}$$

4.22. Aplicando la relación (4.10) en su forma escalar a la ecuación dada obtendremos por simple comparación de términos los valores de x_0 , v_0 y a .

$$x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = -28 + 8t + 1t^2$$

$$\Rightarrow x_0 = -28 \text{ cm}; a = +2 \text{ cm/s}^2; v_0 = +8 \text{ cm/s}$$

Observa que, por condición del problema el móvil deberá encontrarse en $x = 56 \text{ cm}$. Así, reemplazamos ese valor en la ecuación dada y obtendremos el valor correspondiente de t .

$$56 = -28 + 8t + t^2 \Rightarrow t^2 + 8t - 84 = 0 \quad \therefore t = 6 \text{ s}$$

Asimismo, para ese instante tendremos una velocidad que vendrá dada por la relación (4.9) simplificada.

$$v = v_0 + at \Rightarrow v = +8 + (+2).6$$

$$\therefore v = 20 \text{ cm/s}$$

4.23. Si el móvil pasa por el origen de coordenadas en el instante t , la posición x tomará el valor $x = 0 \text{ m}$. Luego, reemplazando este valor en la ecuación dada determinaremos el valor de t que lo genera. Veamos.

$$0 = 24 - 10t + t^2 \Rightarrow t^2 - 10t + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 6)(t - 4) = 0$$

$$\therefore t = 6 \text{ s (Verdadero)}$$

$$t = 4 \text{ s (Verdadero)}$$

Esto significa que el móvil pasa por el origen de coordenadas en dos oportunidades: La primera vez a los 4 s, y la segunda vez pasa de regreso por el mismo punto a los 6 s de iniciado su movimiento, debido a la aceleración $a = 2 \text{ m/s}^2$.

Observación.- El móvil pasa por el origen de coordenadas con velocidad de módulo $v = 2 \text{ m/s}$.

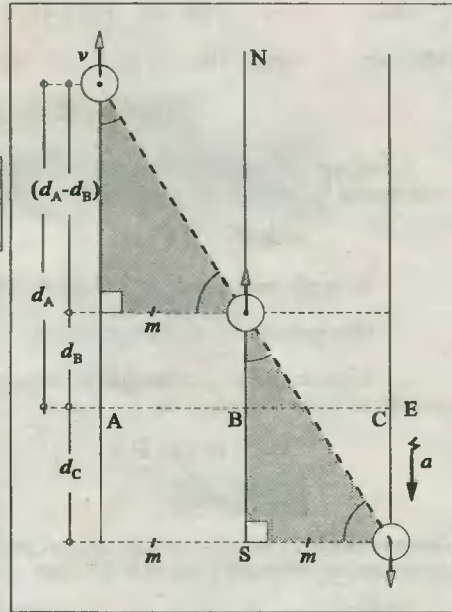


Fig. Solución Prob. 4.21

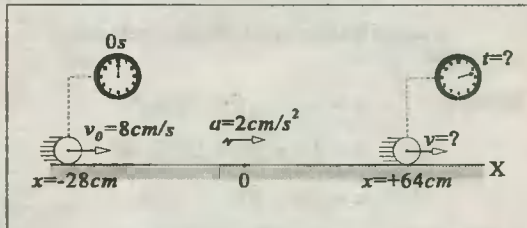


Fig. Solución Prob. 4.22

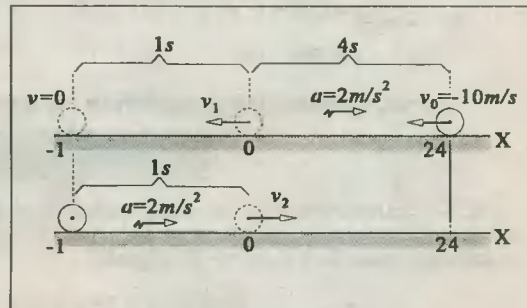


Fig. Solución Prob. 4.23

$$1^{\text{ra}} \text{ vez: } v = v_0 + at \Rightarrow v_1 = (-10) + (+2) \cdot 4 \Rightarrow v_1 = -2 \text{ m/s}$$

$$2^{\text{da}} \text{ vez: } v_2 = (-10) + (+2) \cdot 6 \therefore v_2 = +2 \text{ m/s}$$

Además, el móvil se detiene en $x = -1 \text{ m}$

4.24. En primer lugar calcularemos el tiempo t que emplea el móvil en llegar al origen de coordenadas, para lo cual haremos $x = 0$, y lo reemplazaremos en la ecuación dada.

$$0 = 12t - 135 + 3t^2 \Rightarrow x_0 = -135 \text{ m}; v_0 = +12 \text{ m/s}; a = +6 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Simplificando y ordenando: } t^2 + 4t - 45 = 0 \Rightarrow (t+9)(t-5) = 0$$

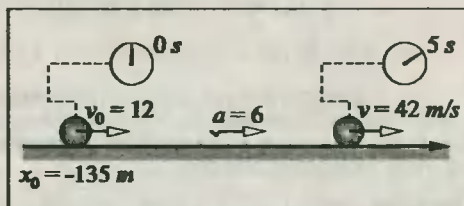
$$\text{Obtenemos: } t = -9 \text{ s (Imposible)} \wedge t = 5 \text{ s (Verdadero)}$$

Seguidamente calcularemos la velocidad para dicho instante a partir de: $v = v_0 + at$.

$$v = +12 + (+6) \cdot 5$$

$$\therefore v = 42 \text{ m/s}$$

Observación.- El móvil pasa sólo una vez por el origen de coordenadas y hacia la derecha.

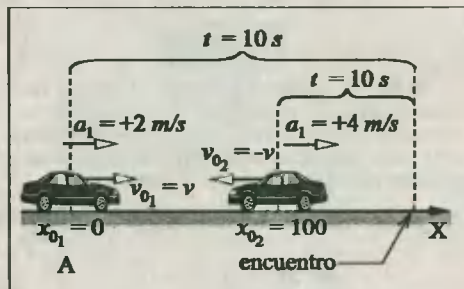


4.25. Elijamos al punto A como el origen de coordenadas para encontrar la ley de los movimientos ($x=f(t)$) para cada móvil. consideremos también como instante inicial $t_0 = 0 \text{ s}$, tal que en dicho instante los móviles ocupan posiciones dadas en el gráfico original.

Usando la relación (4.10) para cada móvil tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Móvil 1: } x &= x_{01} + v_{01} \cdot t + 1/2 a_1 t^2 \\ \Rightarrow x &= 0 + v(10) + 1/2 \cdot 2 \cdot 10^2 \\ \Rightarrow x &= 10v + 100 \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Móvil 2: } x &= x_{02} + v_{02} + 1/2 a_2 t^2 \\ \Rightarrow x &= 100 + (-v) \cdot 10 + 1/2 \cdot 4 \cdot 10^2 \\ \Rightarrow x &= 300 - 10v \dots (2) \end{aligned}$$



$$\text{Luego, sumando (1) y (2) miembro a miembro: } 2x = 400 \therefore x = 200 \text{ m}$$

El encuentro se produce a 200 m de A

4.26. En el instante que los móviles se cruzan, las coordenadas x que señalan su posición coincidirán en valor. Por lo tanto, para determinar dicho instante de encuentro, bastará con igualar las ecuaciones de posición, tanto de A como de B. Veamos.

$$x_A = x_B \Rightarrow 4t^2 + 5t - 1 = 3t^2 + 5t + 8 \Rightarrow t^2 = 9 \therefore t = 3 \text{ s}$$

Esto significa que, luego de 3 s de iniciados los movimiento los móviles logran cruzarse.

Seguidamente, encontraremos la velocidad de A en dicho instante. Para ello nos basaremos en la ecuación que define su posición: $x_A = -1 + 5t + 4t^2$.

Comparando dicha ecuación con la ecuación particular: $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$$\Rightarrow v_0 = 5 \text{ m/s}; a = 8 \text{ m/s}^2$$

Luego: $v_t = v_0 + at = 5 + 8 \cdot 3 \quad \therefore \quad v_t = 29 \text{ m/s}$

4.27. Resolveremos este problema utilizando principalmente la ecuación general que define la posición x de un móvil que se desplaza con MRUV, la misma que da origen a la relación (4.10).

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \dots (*)$$

a) Entre $t_0 = 7 \text{ s}$ y $t = 9 \text{ s}$.- Señalamos en el gráfico adjunto los datos de posición, velocidad y aceleración.

En (*): $80 = 70 + v_0(9 - 7) + \frac{1}{2} a(9 - 7)^2$

$$\Rightarrow v_0 + a = 5 \dots (1)$$

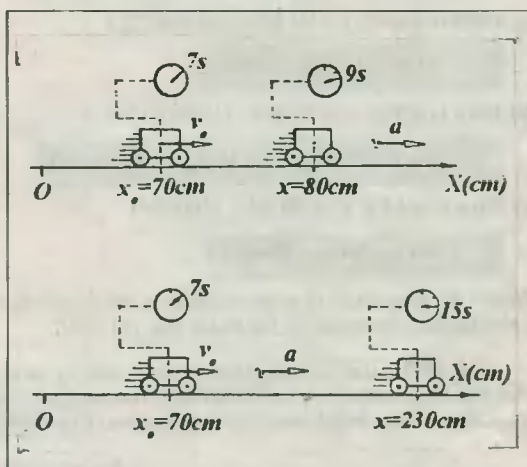
b) Entre $t = 7 \text{ s}$ y $t = 15 \text{ s}$.- De los datos dados ubicamos al móvil en el siguiente x , y al graficarlo notamos que la velocidad inicial v_0 es la misma que en el intervalo anterior. En (*):

$$230 = 70 + v_0(15 - 7) + \frac{1}{2} a(15 - 7)^2$$

$$\Rightarrow v_0 + 4a = 20 \dots (2)$$

Resolviendo (1) y (2) encontramos la aceleración.

$$a = 5 \text{ cm/s}^2$$



CAP 5 CAIDA LIBRE VERTICAL

5.1. Al leer el problema comprobamos que nos proporciona datos para la velocidad inicial (v_0) y el tiempo (t). Por esta razón hacemos uso de la relación (5.1).

$$v_f = v_0 - gt \quad (\text{El signo menos se debe a que el lanzamiento es vertical hacia arriba})$$

a) Para $t_1 = 6 \text{ s}$: $v_1 = 90 \text{ m/s} - (10 \text{ m/s}^2) \cdot 6 \text{ s}$

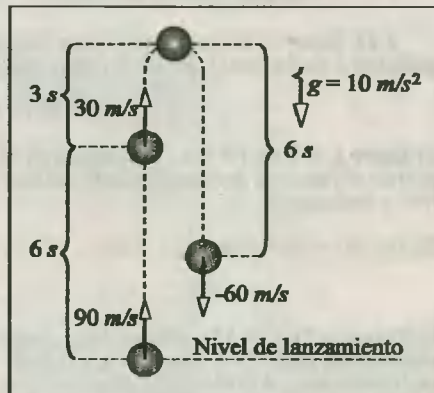
$\therefore v_1 = 30 \text{ m/s}$ (Hacia arriba)

b) Para $t_2 = 9 \text{ s}$: $v_2 = 90 \text{ m/s} - (10 \text{ m/s}^2) \cdot 9 \text{ s}$

$\therefore v_2 = 0 \text{ m/s}$ (Detenido en la parte más alta)

c) Para $t_3 = 15 \text{ s}$: $v_3 = 90 \text{ m/s} - (10 \text{ m/s}^2) \cdot 15 \text{ s}$

$\therefore v_3 = -60 \text{ m/s}$ (hacia abajo)



Nota.- Te propongo el gráfico adjunto, en donde he colocado las posiciones de la pelota con las velocidades obtenidas en los pasos (a), (b) y (c).

5.2. De los datos encontramos que se conoce la velocidad inicial (v_0) y el tiempo (t), y con ellos nos piden encontrar la posición del móvil respecto al punto de lanzamiento, los cuales determinaremos encontrando los desplazamientos verticales (h) mediante la relación (5.3)

$$h = v_0 t - 1/2 g t^2$$

Nota.- El signo (-) se debe a que el lanzamiento es originalmente hacia arriba.

a) Para $t_1 = 10 \text{ s}$:

$$h_1 = 98 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} - 1/2 (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (10 \text{ s})^2$$

$\therefore h_1 = 490 \text{ m}$ (sobre el punto de lanzamiento)

b) Para $t_2 = 20 \text{ s}$:

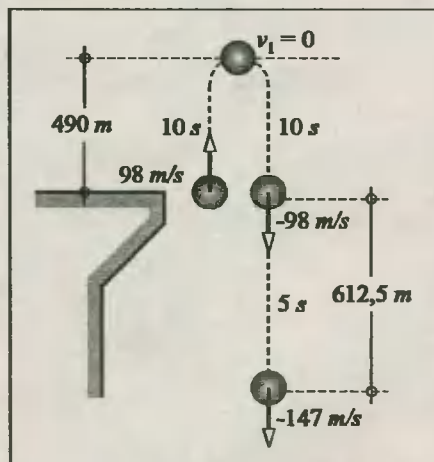
$$h_2 = 98 \text{ m/s} \cdot 20 \text{ s} - 1/2 (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (20 \text{ s})^2$$

$\therefore h_2 = 0 \text{ m}$ (de regreso por el punto de lanzamiento)

c) Para $t_3 = 25 \text{ s}$:

$$h_3 = 98 \text{ m/s} \cdot 25 \text{ s} - 1/2 (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (25 \text{ s})^2$$

$\therefore h_3 = -612,5 \text{ m}$ (debajo del punto de lanzamiento)



En la figura anterior se muestra la gráfica que ubica al móvil en las posiciones obtenidas. Los datos adicionales que se colocan podrás obtenerlos por tu cuenta empleando las demás relaciones de la caída libre vertical.

5.3. Es en estos casos en los que comprobaremos que el desplazamiento vertical (h) no coincide con la altura alcanzada por el móvil, ello debido a que el lanzamiento no se hace desde el piso. Veamos además que si los datos son la velocidad inicial (v_0) y el tiempo (t), la relación (5.3) nos conducirá a la solución correcta.

$$h = v_0 t - 1/2 g t^2 \quad (\text{¿Te explicas por qué empleamos el signo (-)?)}$$

a) Para $t_1 = 2 \text{ s}$: $h_1 = 20 \text{ m/s} \cdot 2 \text{ s} - 1/2 (10 \text{ m/s}^2) \cdot (2 \text{ s})^2 \Rightarrow h_1 = 20 \text{ m}$

Luego, la altura alcanzada será: $H_1 = 70 \text{ m} + h_1 = 70 \text{ m} + 20 \text{ m} \quad \therefore \boxed{H_1 = 90 \text{ m}}$

b) Para $t_2 = 6 \text{ s}$: $h_2 = 20 \text{ m/s} \cdot 6 \text{ s} - 1/2 (10 \text{ m/s}^2) \cdot (6 \text{ s})^2 \Rightarrow h_2 = -60 \text{ m}$ (debajo del punto de lanzamiento).

Luego, la altura alcanzada será: $H_2 = 70 \text{ m} + h_2 = 70 \text{ m} + (-60 \text{ m}) \quad \therefore \boxed{H_2 = 10 \text{ m}}$

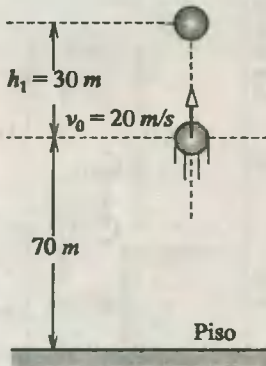


Fig. (1). Solución Prob. 5.3

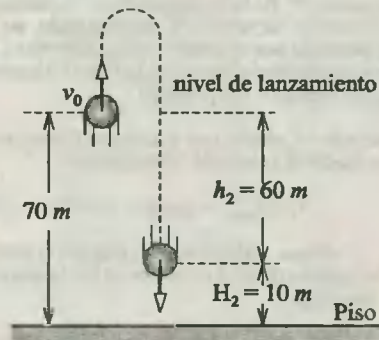


Fig. (2). Solución Prob. 5.3

5.4. En este problema notamos que el desplazamiento vertical (h) concuerda en todo momento con la altura alcanzada por el móvil. Esto se explica porque el lanzamiento se realiza desde el piso y hacia arriba. También notamos que el edificio tiene una altura igual a la alcanzada por el proyectil, lo que determinaremos usando la relación (5.9).

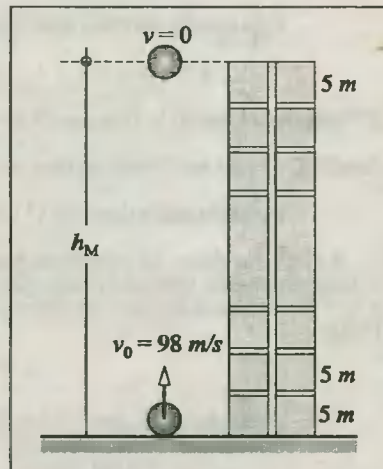
$$h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(98 \text{ m/s})^2}{2(9,8 \text{ m/s}^2)} \Rightarrow h_{\text{máx}} = 490 \text{ m}$$

Si un piso mide 5 m de altura, el edificio tendrá:

$$N = 490 \text{ m} / 5 \text{ m} \quad \therefore \boxed{N = 98 \text{ pisos}}$$

Y el tiempo que emplea el móvil en retornar al piso obtendremos de la relación (5.8).

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{v_0}{g} = \frac{2(98 \text{ m/s})}{9,8 \text{ m/s}^2} \quad \therefore \boxed{t_{\text{vuelo}} = 20 \text{ s}}$$



5.5. De los datos deducimos que: $v_o = 80 \text{ m/s}$ (hacia arriba), y $v_f = 20 \text{ m/s}$ (hacia abajo).

Luego, empleando un gráfico indicando estos datos, ubicaremos también la distancia vertical (h) que separa las posiciones del móvil donde presenta dichas velocidades.

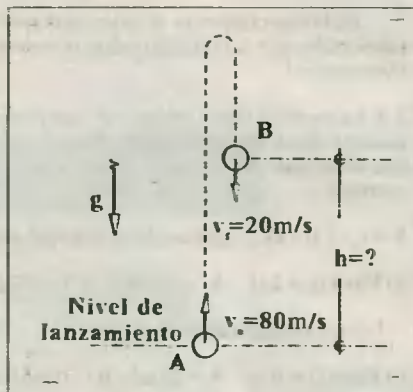
Seguidamente, empleamos la relación (5.2).

$$v_f^2 = v_o^2 - 2gh$$

(Empleamos el signo (-) porque el móvil se lanzó originalmente hacia arriba).

Reemplazando datos:

$$(20 \text{ m/s})^2 = (80 \text{ m/s})^2 - 2(10 \text{ m/s}^2)h \quad \therefore \quad h = 300 \text{ m}$$



5.6. Es evidente que si el cuerpo se lanzó originalmente hacia arriba con $v_o = 10 \text{ m/s}$, subirá hasta disminuir su velocidad a 0 m/s . Seguidamente descenderá aumentando su velocidad, pero hacia abajo, pasando por el punto de lanzamiento a 10 m/s , y a continuación seguirá aumentando su velocidad hasta alcanzar una velocidad $v_f = 40 \text{ m/s}$, pero siempre hacia abajo.

1^{er} método.- Calculemos primero el tiempo t_1 empleado para subir y bajar hasta el punto de lanzamiento.

$$t_1 = t_{\text{vuelo}} = 2v_o/g = 2 \cdot 10/10 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

Ahora, calculemos el tiempo t_2 que le toca pasar de $v_o = 10 \text{ m/s}$ (hacia abajo) hasta $v_f = 40 \text{ m/s}$ (hacia abajo). Aplicando la relación (5.1) tenemos:

$$v_f = v_o + gt \text{ (movimiento descendente)}$$

$$40 = 10 + 10t_2 \Rightarrow t_2 = 3 \text{ s}$$

Finalmente, diremos que el tiempo total empleado será:

$$t = t_1 + t_2 = 2 + 3 \quad \therefore \quad t = 5 \text{ s}$$

2^{do} método.- Usando la relación (5.6) tendremos: $v_f = v_o + gt \dots (*)$

donde: $v_o = + 10 \text{ m/s}$ (hacia arriba), $v_f = - 40 \text{ m/s}$ (hacia abajo); $g = - 10 \text{ m/s}^2$ (hacia abajo)

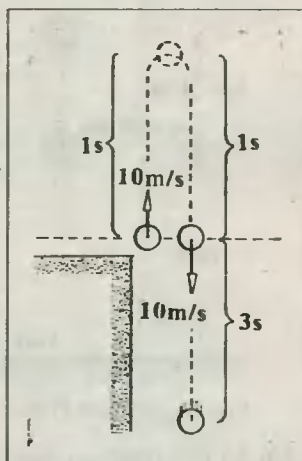
$$\text{Reemplazando datos en (*): } -40 = 10 - 10t \quad \therefore \quad t = 5 \text{ s}$$

5.7. De los datos del problema deducimos que la altura alcanzada por el móvil concuerda con el desplazamiento vertical h , dado que el lanzamiento se efectúa desde el piso. Entonces: $h = 15 \text{ m}$, y $v_o = 20 \text{ m/s}$ hacia arriba. Con estos datos calcularemos el tiempo transcurrido usando la relación (5.3).

$$h = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \text{ (hacia arriba)}$$

$$\text{Reemplazamos datos: } 15 = 20t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 3)(t - 1) = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s (mínimo)}; t_2 = 3 \text{ s (máximo)}$$



Luego, el móvil se encontrará en dos instantes a 15 m de altura; ello ocurrirá luego de 1 s de lanzamiento y luego de 3 s de lanzamiento.

Nos ayudaremos con un gráfico para entender mejor este suceso (Ver figura abajo).

Nota: $h_{\text{máx}} = 20 \text{ m}$; $t_{\text{vuelo}} = 4 \text{ s}$. ¿Puedes calcularlos?

5.8. Presentaremos dos métodos de solución para este ejercicio, tal como en el problema 5.6.

1^{er} método.- Dado que el móvil se lanza originalmente hacia arriba con $v_0 = 30 \text{ m/s}$, entonces transcurrirá un tiempo t_1 para volver al punto de lanzamiento, y luego un tiempo t_2 para descender $h = 80 \text{ m}$ debajo del punto de lanzamiento.

$$t_1 = t_{\text{vuelo}} = 2v_0/g = 2 \cdot 30/10 \Rightarrow t_1 = 6 \text{ s}$$

Ahora, aplicamos la relación (5.3): $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ (hacia abajo)

$$80 = 30t_2 + \frac{1}{2} \cdot 10t_2^2 \Rightarrow t_2 = 2 \text{ s}$$

Entonces, el tiempo total t transcurrido desde que se lanzó el móvil será:

$$t = t_1 + t_2 = 6 + 2 \quad \therefore \quad \boxed{t = 8 \text{ s}}$$

Nota.- N.L.: Nivel de lanzamiento.

2^{do} método.- Empleando la relación (5.7) tendremos: $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \dots (*)$

Considerando que el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento, tendremos:

$$y_0 = 0 \text{ m}; y = -80 \text{ m}; v_0 = +30 \text{ m/s}; g = -10 \text{ m/s}^2$$

Reemplazando en (*): $-80 = 0 + 30t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2$

Y resolviendo: $\boxed{t = 8 \text{ s}}$

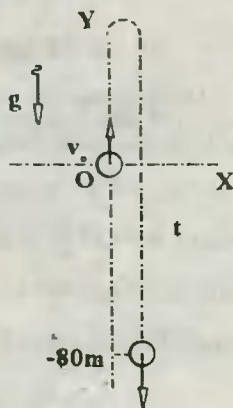
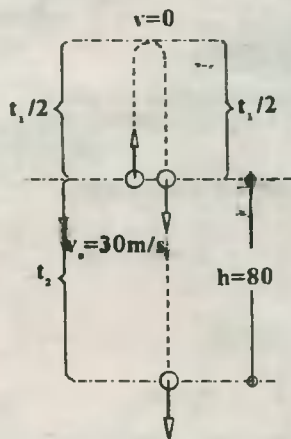
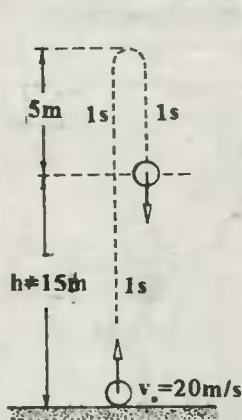


Fig. Solución Prob. 5.7

Fig. (1) Solución Prob. 5.8

Fig. (2). Solución Prob. 5.8

5.9. Analicemos primero el movimiento de subida que se produce frente a la ventana. Observamos del gráfico adjunto que la piedra aparece por el borde B con velocidad inicial v desconocida, pero se desplaza verticalmente $h = 1,8 \text{ m}$ en un tiempo $t = 0,2 \text{ s}$. Entonces, empleando la relación (5.3) tendremos:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

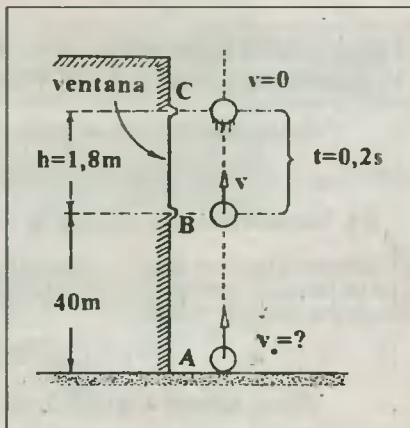
$$1,8 = v(0,2) - \frac{1}{2} \cdot 10(0,2)^2 \Rightarrow v = 10 \text{ m/s}$$

Ahora, analicemos el movimiento ascendente desde A hasta B, donde $v = 10 \text{ m/s}$ se convierte en la velocidad final de dicho ascenso, y nuestra incógnita principal v_0 se determinará en base a la relación (5.2), debido a que en este tramo conocemos el desplazamiento vertical $h = 40 \text{ m}$. Así pues:

$$v_f^2 = v_0^2 - 2gh \text{ (movimiento ascendente)}$$

$$10^2 = v_0^2 - 2 \cdot 10 \cdot 40 \quad \therefore$$

$$v_0 = 30 \text{ m/s}$$



5.10. Con los datos del problema construimos el gráfico adjunto, en donde indicamos algunos valores cinemáticos importantes.

Luego, del movimiento superior de subida y bajada comprobamos que: $t_{\text{vuelo}} = 8 \text{ s}$. Luego:

$$2v_f/g = 8 \text{ s (lanzamiento hacia arriba con velocidad inicial } v_f)$$

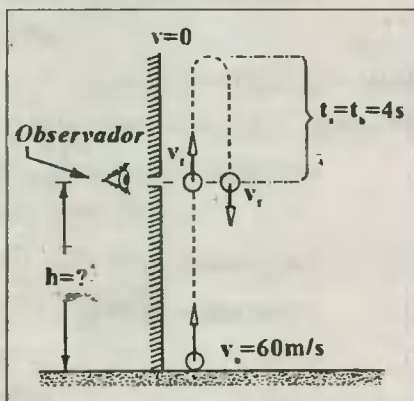
$$\Rightarrow v_f = 40 \text{ m/s}$$

Y ahora, del movimiento ascendente que va desde el piso hasta la rendija:

$$v_f^2 = v_0^2 - 2gh$$

$$40^2 = 60^2 - 2 \cdot 10 h \quad \therefore$$

$$h = 100 \text{ m}$$



5.11. Se deduce que el primer cuerpo demoró $2,4 \text{ s}$ para el choque, y el segundo demoró sólo $0,4 \text{ s}$. Luego, utilizando la relación (5.3) para ambos tendremos:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \text{ (movimiento ascendente) diremos que:}$$

$$\text{Cuerpo 1: } h = v_0(2,4) - 5(2,4)^2$$

$$\text{Cuerpo 2: } h = v_0(0,4) - 5(0,4)^2$$

$$\text{Igualando: } v_0(2,4) - 5(2,4)^2 = v_0(0,4) - 5(0,4)^2$$

$$\Rightarrow 2v_0 = 5(2,4^2 - 0,4^2) \quad \therefore \quad v_0 = 14 \text{ m/s}$$

5.12. En la Luna verificamos los siguientes movimientos:

$$\text{Cuerpo que baja (de A a E): } h = v_0 t + \frac{1}{2} g_{\text{luna}} t^2$$

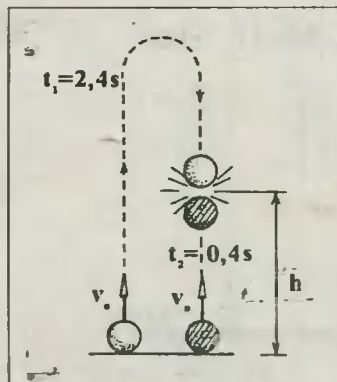


Fig. Solución Prob. 5.11

$$\Rightarrow x = 10t + \frac{1}{2} g_{hna} t^2 \dots (1)$$

Cuerpo que sube (de B a E): $h = v_0 t - \frac{1}{2} g_{hna} t^2 \Rightarrow y = 10t - \frac{1}{2} g_{hna} t^2 \dots (2)$

Sumando (1) y (2) miembro a miembro: $x + y = 20t \Rightarrow 100 = 20t \therefore t = 5 \text{ s}$

5.13. Se observa que los cuerpos demoran igual tiempo en el tramo BC, porque ambos pasan por B con la misma velocidad y hacia abajo. Luego, el retraso de la bola lanzada hacia arriba se debe al tiempo que emplea en subir y bajar el tramo de A a D y de D a B.

Retraso: $t_{\text{vuelo}} = 2v_0/g = 2 \cdot 19,6/9,8 \therefore \text{Retraso} = 4 \text{ s}$

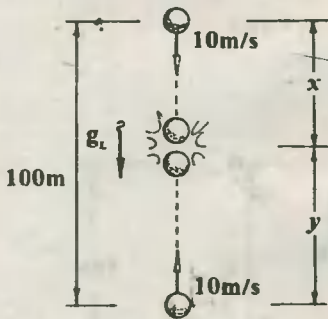


Fig. Solución Prob. 5.12

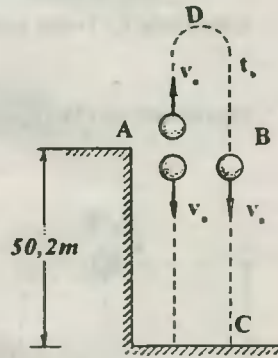


Fig. Solución Prob. 5.13

5.14. Los dos vasos recorrerán la misma altura de 125 m, sólo que el primero demoró t segundos, y el segundo vaso demoró $(t - 3)$ segundos. Luego, empleando para ambos la relación (5.3):

$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ (movimiento descendente), tendremos:

1^{er} vaso: $125 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 10 t^2 \Rightarrow t = 5 \text{ s} \dots (*)$

2^{do} vaso: $125 = v_0(t - 3) + \frac{1}{2} \cdot 10(t - 3)^2$

Y de (*): $125 = 2v_0 + 20 \therefore v_0 = 52,5 \text{ m/s}$

5.15. Calculemos el tiempo que tardó el cuerpo A para lograr su altura máxima (Relación (5.8))

$$t = v_0/g = 50/10 = 5 \text{ s}$$

Como el cuerpo B partió 3 s después que A, entonces éste, para alcanzar a aquél en el punto de máxima altura tardará:

$$5 - 3 = 2 \text{ s}$$

5.16. Analizando el movimiento por tramos, tendremos:

Tramo AC: $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ ($v_0 = 0$) $\Rightarrow H = \frac{1}{2} g t^2 \dots (1)$

Tramo AB: $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ ($v_0 = 0$) $\Rightarrow H/2 = \frac{1}{2} g(t - 1)^2 \Rightarrow H = g(t - 1)^2 \dots (2)$

Iguando (1) y (2): $\frac{1}{2} g t^2 = g(t - 1)^2$

Resolviendo encontramos: $t = (2 + \sqrt{2}) \text{ s}$

En (1): $H = \frac{1}{2} \cdot 9,8(2 + \sqrt{2})^2 \quad \therefore \quad H = 57,036 \text{ m}$

5.17. Según el gráfico adjunto podemos establecer que: $t_{\text{aire}} = t_1 + t_2 \dots (*)$

Calculando t_1 (Tramo superior): $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

$$80 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 10 t_1^2 \quad \therefore \quad t_1 = 4 \text{ s}$$

Calculando v (Tramo superior): $v_f^2 = v_0^2 + 2gh$

$$v^2 = 0^2 + 2 \cdot 10 \cdot 80 \quad \therefore \quad v = 40 \text{ m/s}$$

Calculando t_2 (Tramo inferior): $v_f = v_0 + at \dots (a = -2 \text{ m/s}^2)$

$$2 = 40 - 2t_2 \quad \therefore \quad t_2 = 19 \text{ s}$$

Finalmente, en (*): $t_{\text{aire}} = 23 \text{ s}$

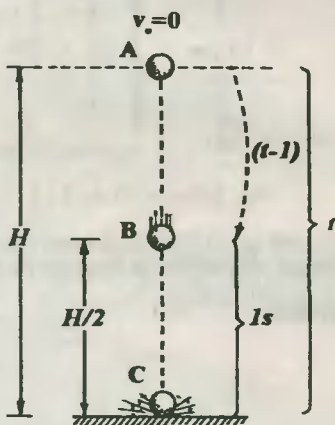


Fig. Solución Prob. 5.16

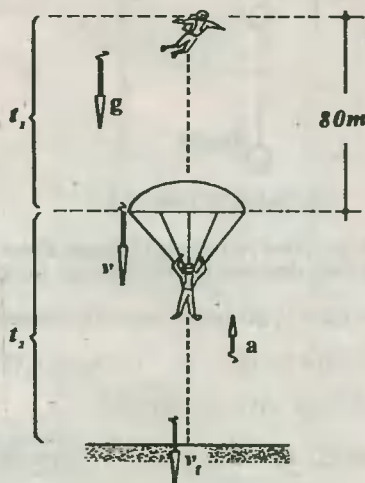


Fig. Solución Prob. 5.17

5.18. El suceso tiene dos partes bien definidas: La primera es una caída libre por parte de la bomba, despreciando el rozamiento con el aire en este caso. La segunda se produce inmediatamente después de la explosión de la bomba, la cual es experimentada por el sonido, al que consideramos como un móvil que va desde el suelo hasta los oídos del piloto, y con MRU de velocidad $v = 300 \text{ m/s}$.

a) Cálculo de t_1 : De la caída libre de la bomba:

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \dots (v_0 = 0) \Rightarrow h = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{2hg} \dots (1)$$

b) Cálculo de t_2 : Del movimiento del sonido: $t = e/v \dots (\text{MRU}) \Rightarrow t_2 = h/v \dots (2)$

Pero, por condición del problema, el tiempo total t que transcurre desde que se suelta la bomba hasta que el piloto escucha la explosión es $t = 120 \text{ s}$. Entonces: $t = t_1 + t_2 \dots (3)$

Luego, de (1) y (2) en (3):

$$120 = \sqrt{2h/10} + h/300$$

Resolviendo: $h = 18\ 000\ m$

Finalmente, calcularemos la velocidad con que la bomba llega al piso a partir de la relación (5.2).

$$v_f^2 = v_o^2 + 2gh \dots (v_o = 0)$$

$$v_f = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 18\ 000} \therefore v_f = 600\ m/s$$

5.19. Sabiendo que el bloque inicia su movimiento desde el reposo y baja aceleradamente con $a = g \text{sen} \alpha$ (según la descomposición vectorial de la aceleración de la gravedad, y debido a que no existe fricción), del MRUV generado tendremos que:

$$e = \frac{1}{2} a t^2 \dots (v_o = 0) \Rightarrow e = \frac{1}{2} g \text{sen} \alpha \cdot t^2 \dots (1)$$

Del gráfico adjunto: $e = OA = \sqrt{L^2 + H^2} \dots (2)$

Y: $\text{sen} \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{H}{\sqrt{L^2 + H^2}} \dots (3)$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$\sqrt{L^2 + H^2} = \frac{1}{2} g \cdot \text{sen} \alpha \cdot t^2$$

$$\sqrt{L^2 + H^2} = \frac{1}{2} g \frac{H}{\sqrt{L^2 + H^2}} t^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(L^2 + H^2)}{gH}} \dots (*)$$

Completando cuadrados en la expresión subradical tendremos:

$$t = \sqrt{\frac{2(L^2 + H^2 - 2LH) + 2LH}{gH}} \dots (*)$$

De (*), para que t sea mínimo, la expresión $L^2 + H^2 - 2LH = (L - H)^2$ debe ser cero. Por lo tanto:

$$H = L$$

Nota.- El tiempo mínimo empleado por el bloque lo obtendremos al reemplazar $H = L$ en (*):

$$t = \sqrt{\frac{2(L^2 + L^2)}{gL}} \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

5.20. Considerando que la bolilla no toca al cilindro durante su caída hasta que llega hasta la base, entonces ésta sólo experimentará una caída libre. Se observa que mientras la bolilla desciende, el cilindro avanza simultáneamente una distancia horizontal e .

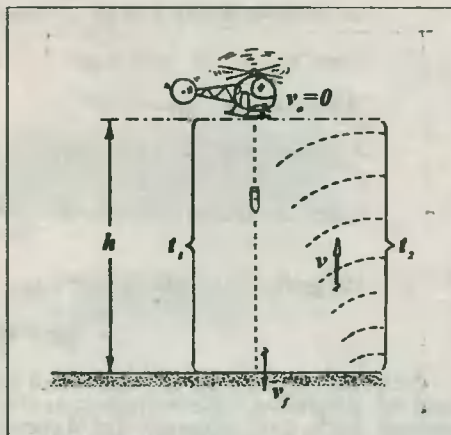


Fig. Solución Prob. 5.18

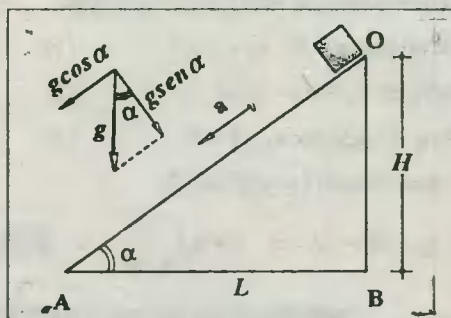


Fig. Solución Prob. 5.19

De la bolita: $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \dots$ (movimiento descendente)

Como $v_0 = 0 \Rightarrow h = \frac{1}{2} g t^2 \dots (1)$

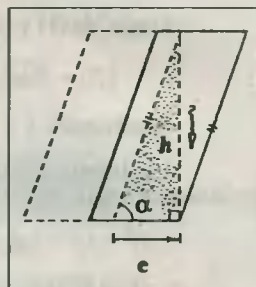
Del cilindro: $e = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

Y como $v_0 = 0 \Rightarrow e = \frac{1}{2} a t^2 \dots (2)$

Luego, dividiendo (1) ÷ (2): $\frac{h}{e} = \frac{\frac{1}{2} g t^2}{\frac{1}{2} a t^2} \Rightarrow \frac{h}{e} = \frac{g}{a} \dots (*)$

Del gráfico: $h/e = \text{tg} \alpha$. Y en (*): $\text{tg} \alpha = g/a = 32/24$

$\Rightarrow \text{tg} \alpha = 4/3 \therefore \alpha = 53^\circ$



5.21. Consideremos que la lámpara toca el piso del ascensor cuando éste acaba de traspasar la línea AA' del gráfico, la que nos representa el lugar donde dicha lámpara se desprendió del techo del ascensor. Según esto, suponemos que el encuentro se produce en la línea BB'. Observamos que la lámpara posee únicamente movimiento de caída libre vertical con velocidad v_0 hacia arriba a partir del desprendimiento. En cambio, el piso del ascensor posee una velocidad v_0 hacia arriba y un MRU desacelerado con aceleración $-a$. Luego:

De la lámpara: $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \dots (1)$

Del piso: $e_A = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \dots (2)$

Pero, del gráfico: $e_A - h = H \dots (3)$

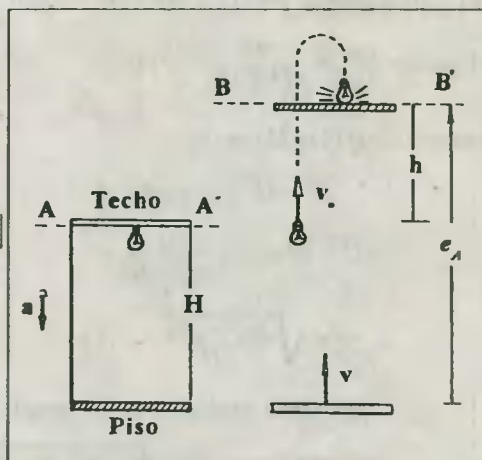
Reemplazando (1) y (2) en (3):

$\frac{1}{2} (g - a) t^2 = H \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g - a}} \Rightarrow t = 1 \text{ s}$

Finalmente, para determinar si el encuentro se produjo cuando la lámpara subía o bajaba, calculemos su tiempo de vuelo respecto a AA'.

$t_{\text{subida}} = 2v_0/g = 2.3/10 = 0,6 \text{ s}$

Como $t > t_{\text{subida}}$, entonces la lámpara se encontraba bajando



2^{do} método.- Utilicemos ahora un sistema de referencia ubicado dentro del ascensor. Un observador colocado allí afirmará que la lámpara tenía $v_0 = 0$, y cayó libremente con una aceleración $g_{\text{ef}} = g - a$ (gravedad efectiva). Luego:

$h = \frac{1}{2} g_{\text{ef}} t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g_{\text{ef}}}} = \sqrt{\frac{2H}{g - a}} \therefore t = 1 \text{ s}$

5.22. En primer lugar debemos considerar la velocidad neta que poseerá la bolsa respecto a la Tierra. Esto lo conseguiremos de la siguiente suma vectorial de velocidades:

$v_0 = v_1 + v_2$

ó: $v_0 = (+30) + (-20) = +10 \text{ m/s } (\uparrow)$

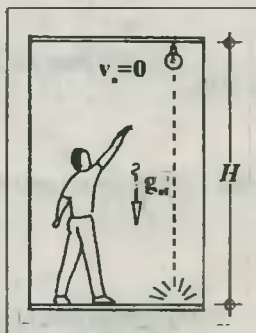


Fig. (2) Soluc. Prob. 3.21

Asimismo, este problema puede resolverse tomando como origen de coordenadas el punto donde la bolsa (O_1) fué lanzada, o también el punto donde llegó la bolsa (O_2). Además, usaremos la relación (5.7).

Respecto a O_1 : $y = y_0 + v_0 t + 1/2 g t^2 \dots (*)$

Del gráfico: $y_0 = 0 \text{ m}$

$$y = -240 \text{ m}$$

de partida) $v_0 = +10 \text{ m/s}$ (velocidad en el punto

$$g = -10 \text{ m/s}^2$$

Luego, en (*): $-240 = 0 + (+10)t - 1/2 (10)t^2$

$$\Rightarrow t^2 - 2t - 48 = 0$$

De donde:

$t = -6 \text{ s}$ (Absurdo);

$$t = +8 \text{ s (Correcto)}$$

2^{do} método.- Considerando como origen de coordenadas el punto de llegada de la bolsa (O_2), diremos que:

$y_0 = +240 \text{ m}$ (posición inicial)

$y = 0 \text{ m}$ (posición final)

$v_0 = +10 \text{ m/s}$ (velocidad final)

$$g = -10 \text{ m/s}^2$$

En la ecuación (*): $0 = +240 + (+10)t - 1/2 (+10)t^2 \Rightarrow t^2 - 2t - 48 = 0$

Por lo que la solución vuelve a ser:

$$t = 8 \text{ s}$$

Nota.- Como se ha demostrado, la solución final no depende del sistema de referencia inicial que se tome.

5.23. La velocidad efectiva de lanzamiento de la manzana es 15 m/s hacia arriba, y llamemos a al valor de la desaceleración del globo.

Globo: Por poseer un MRUD, diremos que:

$$e = v_0 t + 1/2 a t^2 \dots \text{(Ecuación escalar)}$$

$$x = 20t + 1/2 a t^2 \dots (1)$$

Manzana: Esta experimenta una caída libre ($y_0 = 0$)

$$y = v_0 t + 1/2 g t^2 \text{ (Ecuación vectorial)}$$

$$-x = 15t - 5t^2 \dots (2)$$

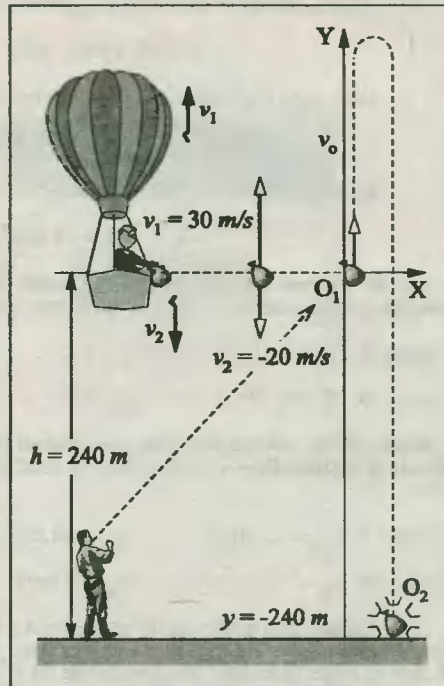
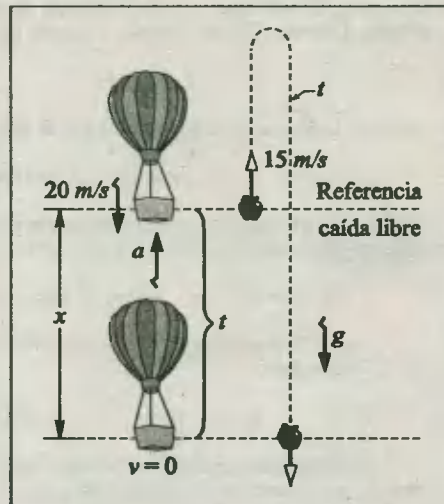


Fig. Solución Prob. 5.22



Ahora, sumando miembro a miembro (1) y (2):

$$0 = 35t + t^2(5 - a/2) \Rightarrow t(5 - a/2) = 35 \dots (3)$$

Pero, para el globo: $v_f = v_0 + at$ (Ecuación escalar)

$$0 = 20 + at \Rightarrow t = -20/a$$

En (3): $(-20/a)(5 - a/2) = 35$

$$\therefore a = -4 \text{ m/s}^2 \text{ (Movimiento desacelerado)}$$

5.24. Cálculo de los tiempos de caída de cada cuerpo.- Aplicaremos la relación (5.3), con $v_0 = 0$.

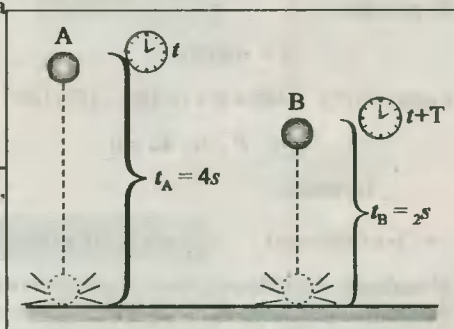
Cuerpo A: $80 = \frac{1}{2} \cdot 10t_A^2 \Rightarrow t_A = 4 \text{ s}$

Cuerpo B: $20 = \frac{1}{2} \cdot 10t_B^2 \Rightarrow t_B = 2 \text{ s}$

Cálculo de las velocidades con que chocan elásticamente a la superficie.- Aplicaremos la relación (5.2), con $v_0 = 0$.

Cuerpo A: $v_{fA} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 80} \Rightarrow v_{fA} = 40 \text{ m/s}$

Cuerpo B: $v_{fB} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} \Rightarrow v_{fB} = 20 \text{ m/s}$



Luego, para que en algún momento A y B lleguen a tener iguales velocidades, debemos soltar a B después del primer choque de A sobre el piso, y cuando el cuerpo B rebote a razón de 20 m/s, el cuerpo A deberá haber reducido su velocidad de 40 a 20 m/s.

Para eso, el cuerpo A demoró:

$$v_f = v_0 - gt \Rightarrow 20 = 40 - 10t$$

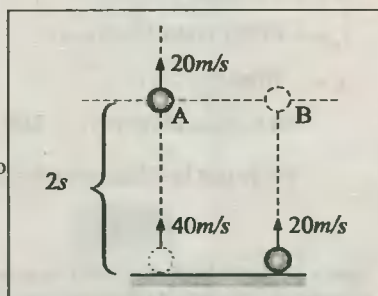
$$\Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

* De aquí se deduce que cuando A rebota, el cuerpo B ha sido soltado. Entonces, A fue soltado 4 s antes que B.

$$\Rightarrow T = 4 \text{ s}$$

* Las velocidades serán iguales mientras B suba y baje.

$$t_{aire} = 2v_0/g = 2 \cdot 20/10 = 4 \text{ s} = \Delta t \quad \therefore t_{aire} = \Delta t = 4 \text{ s}$$



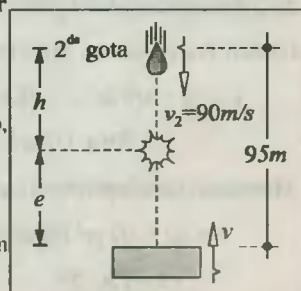
5.25. Cálculo del tiempo que demora la primera gota en alcanzar al objeto.- Aplicamos la relación (5.3), con $v_0 = 0$.

$$h_1 = \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow 500 = \frac{1}{2} \cdot 10t^2 \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

Luego, la segunda gota habrá empleado 9 s para alcanzar al objeto, y habrá descendido:

$$h_2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9^2 \Rightarrow h_2 = 405 \text{ m}$$

Esto significa que desde el momento que la primera gota choca con el objeto, éste dista 95 m de la segunda gota.



Además, calcularemos la velocidad de dicha gota en ese instante aplicando la relación (5.1).

$$v_f = 0 + 10.9 \Rightarrow v_f = 90 \text{ m/s}$$

Para la circunstancia planteada en el problema (según la figura), esta velocidad vendrá a ser inicial ($v_0 = 90 \text{ m/s}$). Así entonces, de acuerdo a la figura podemos plantear la siguiente relación:

$$h_{\text{gota}} + h_{\text{objeto}} = 95$$

$$(v_0 \cdot T + \frac{1}{2} g T^2) + v_{\text{objeto}} \cdot T = 95$$

$$\Rightarrow (90T + 5T^2) + 10T = 95 \Rightarrow T^2 + 20T - 19 = 0$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos: $T = 0,9 \text{ s}$

Finalmente, el objeto habrá subido aproximadamente: $h_{\text{objeto}} = 10 \cdot 0,9$

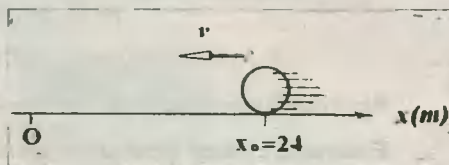
$$\therefore \boxed{h_{\text{objeto}} = 9 \text{ m}}$$

CAP 6 GRÁFICOS DEL MOVIMIENTO REFERIDOS AL TIEMPO

6.1. Recordando que la ecuación:

$$x = x_0 + vt \dots (*)$$

se verifica sólo en el MRU, comparamos esta ecuación con la ecuación dada, y diremos lo siguiente: $x_0 = 24 \text{ m}$, $v = -6 \text{ m/s}$.



a) La velocidad del móvil es 6 m/s , y dirigida hacia el lado negativo del eje X.

b) Para obtener la gráfica espacio - temporal del movimiento haremos una tabulación dando valores a t de 1 en 1 s, y obtendremos los valores correspondientes a x reemplazándolos en la ecuación (*).

t	0	1	2	3	4	5	6	7
x	24	18	12	6	0	-6	-12	-18

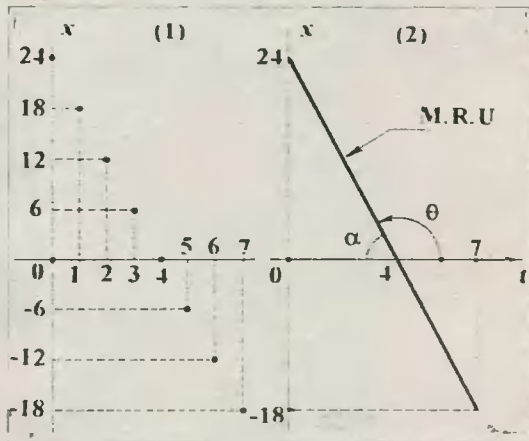
Ubicando los pares ordenados (t, x) en el plano x - vs - t tendremos las figuras (1) y (2).

c) De la tabla de valores comprobamos que el móvil pasa por el origen de coordenadas en $t = 4 \text{ s}$ ($x = 0$). En la gráfica espacio-temporal este instante viene dado por la intersección entre la recta obtenida y el eje del tiempo.

d) Por tratarse de una recta, la pendiente será la misma en todo instante, y en la gráfica viene dada por:

$$\text{tg}\theta = -\text{tg}\alpha = -24 \text{ m}/4 \text{ s} \quad (\theta + \alpha = 180^\circ)$$

$$\therefore \text{tg}\theta = -6 \text{ m/s} \text{ (concuerta con la velocidad)}$$



6.2. Por tratarse de una línea recta, la ecuación que la define vendrá dada por la relación (6.2)

$$x = x_0 + vt \dots (*)$$

Del gráfico comprobamos que:

1) $t = 0 \text{ s}$, $x = -30 \text{ m}$. En (*): $-30 = x_0 + v(0) \Rightarrow x_0 = -30 \text{ m}$

2) $t = 6 \text{ s}$, $x = 0 \text{ m}$. En (*): $0 = -30 + v(6) \Rightarrow v = 5 \text{ m/s}$

a) Luego, la ecuación general será: $x = -30 + 5t \dots (**)$

b) Para determinar la posición del móvil en $t = 10 \text{ s}$ basta reemplazar este valor en la ecuación (**)

$$\Rightarrow x = -30 + 5(10) \quad \therefore \quad \boxed{x = 20 \text{ m}}$$

Nota: $\text{tg}\theta = 30 \text{ m}/6 \text{ s} \Rightarrow \text{tg}\theta = v = 5 \text{ m/s}$.

6.3. La ecuación dada es de 2° grado. Por ello, deducimos que el movimiento representado es un MRUV de la forma: $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \dots (1)$ (Relación (6.5)).

Por comparación deducimos que: $x_0 = 45 \text{ m}$; $v_0 = -6 \text{ m/s}$; $a = -6 \text{ m/s}^2$.

a) Tabulando valores encontramos la gráfica de la figura.

b) La pendiente de la curva viene dada por: $\text{tg}\theta = v_0 + at \dots (\text{tg}\theta = v_t)$

$$\Rightarrow \text{tg}\theta = -6 - 6t$$

Luego, esta pendiente tendrá los siguientes valores:

Para $t = 0 \text{ s} \quad \therefore \quad \text{tg}\alpha = -6 \text{ m/s}$

Para $t = 5 \text{ s} \quad \therefore \quad \text{tg}\beta = -36 \text{ m/s}$

c) **El móvil pasa por el origen de abscisas en $t = 3 \text{ s}$**

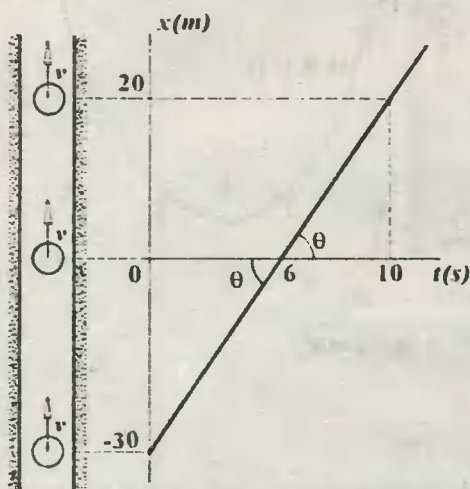


Fig. Solución Prob. 6.2

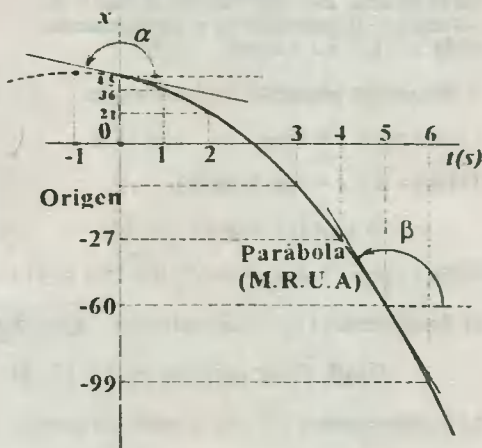


Fig. Solución Prob. 6.3

6.4. Dado que la gráfica es una parábola, ella debe estar representando a un MRUV. Luego, su posición x para todo instante t estará dado por la relación (6.5): $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \dots (*)$

Según los datos del problema, se sabe que en $t = 0 \text{ s}$, $\text{tg}\theta = -8 \text{ m/s}$. Luego, la velocidad inicial será $v_0 = -8 \text{ m/s}$. Además se observa que la curva se inicia en $x = 16 \text{ m}$. Luego, la posición inicial del móvil en $t = 0 \text{ s}$ es $x_0 = 16 \text{ m}$. Reemplazando estos valores en (*):

$$x = 16 - 8t + \frac{1}{2} a t^2 \dots (**)$$

Pero, del gráfico también se observa que en $t = 4 \text{ s}$, $x = 0 \text{ m}$. Reemplazando en (**)

obtendremos:

a) $a = +2 \text{ m/s}^2 \dots$ (Aceleración del móvil)

$$\Rightarrow x = 16 - 8t + t^2$$

b) En estos gráficos la pendiente de la curva es la velocidad. Entonces, ésta será calculada por:

$$\text{tg}\alpha = v_0 + at = -8 + 2t$$

Y en $t = 8 \text{ s}$: $\text{tg}\alpha = +8 \text{ m/s}$

Observación.- Si $\text{tg}\theta = -\text{tg}\alpha \Rightarrow \theta + \alpha = 180^\circ$.

c) Si la curva toca al eje del tiempo sólo en $t = 4 \text{ s}$, significa que el móvil llega al origen de abscisas en dicho instante, pero como su pendiente en ese momento es cero, el móvil llega a dicho lugar con $v = 0$.

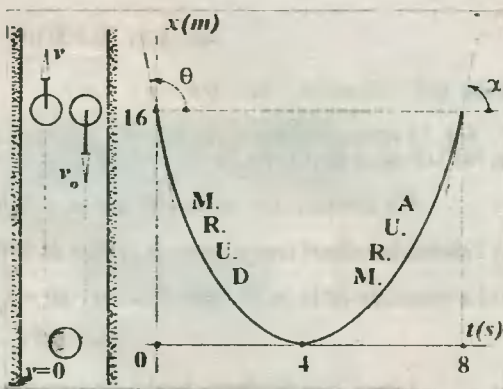


Fig. Solución Prob. 6.4

6.5. La forma de la curva es similar a la del problema anterior, por ello podemos afirmar que el movimiento es uniformemente retardado hasta $t = 4 \text{ s}$, y uniformemente acelerado a partir de dicho instante. Se verifica también que en ese instante la pendiente de la curva es cero; eso significa que el móvil se detiene ($v = 0$) justo en $t = 4 \text{ s}$. De la relación (6.5): $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \dots (*)$

Y del gráfico propuesto tendremos que:

1) En $t = 0 \text{ s}$, $x = 15 \text{ m} \Rightarrow x_0 = 15 \text{ m}$

2) En $t = 3 \text{ s}$, $x = 0 \text{ m}$. Y en (*):

$$0 = 15 + v_0(3) + \frac{1}{2} a(3)^2 \dots (1)$$

3) En $t = 5 \text{ s}$, $x = 0 \text{ m}$. Y en (*): $0 = 15 + v_0(5) + \frac{1}{2} a(5)^2 \dots (2)$

a) Resolviendo (1) y (2) obtendremos: $v_0 = -8 \text{ m/s}$, y $a = 2 \text{ m/s}^2$

Luego, (*) se convierte en: $x = 15 - 8t + t^2$

b) Reemplazando $t = 4 \text{ s}$ en la ecuación general: $x = -1 \text{ m}$

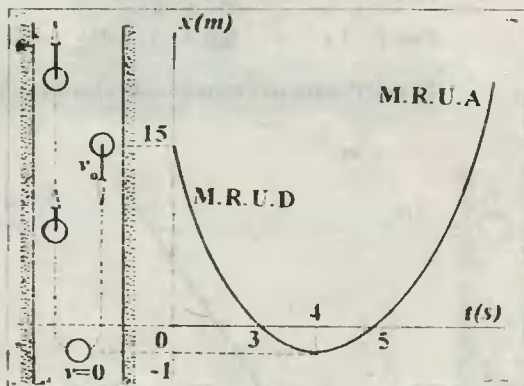
Esto significa que el móvil se detiene a 1 m del origen de abscisas, pero en el lado negativo.

c) El móvil pasa dos veces por el origen de abscisas; una en $t = 3 \text{ s}$ (bajando hacia $-X$), y la otra en $t = 5 \text{ s}$ (subiendo hacia $+X$).

6.6. Ubicando los pares ordenados en el plano x -vs- t tendremos las figuras (1) y (2).

a) Podemos decir con gran seguridad que la curva más aproximada que pasa por los puntos obtenidos es una parábola que se inicia en $t = 0 \text{ s}$, tangente al eje del tiempo, lo cual nos induce a pensar que la velocidad en dicho instante es cero, vale decir, que el móvil parte del origen con $v_0 = 0$. Luego, la ecuación que la podría definir con mucha aproximación sería: $x = \frac{1}{2} at^2$.

b) La velocidad media se calculará así:



$$t_0 = 1 \text{ s} \Rightarrow x_0 = 2 \text{ m}$$

$$t = 5 \text{ s} \Rightarrow x = 50 \text{ m}$$

$$\Rightarrow v_m = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{50 - 2}{5 - 1} \therefore v_m = 12 \text{ m/s}$$

c) Del gráfico observamos que al haber hecho uso de una curva lo más aproximada posible, ésta nos permite hacer el cálculo también bastante aproximado de una tangente a la curva en $t = 5 \text{ s}$. Comprobamos que esta recta pasa por $t = 3 \text{ s}$. Luego, la velocidad en el instante $t = 5 \text{ s}$ viene dado por:

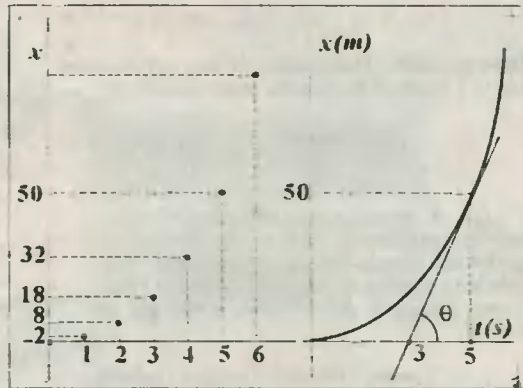


Fig. Solución Prob. 6.6

$$\text{tg}\theta = \frac{50}{5-3} \therefore \text{tg}\theta = 25 \text{ m/s}$$

6.7. Hasta aquí te será fácil comprender que la mayor velocidad se presentará donde la pendiente de la curva sea la mayor de todas. En nuestro gráfico, ésta se presenta entre $t = 4 \text{ s}$ y $t = 5 \text{ s}$. Veamos.

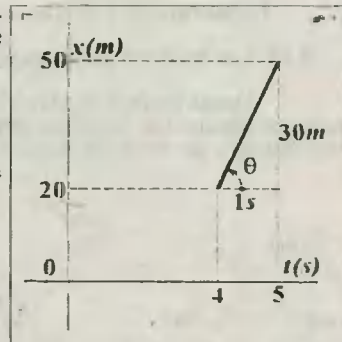
$$v = \text{tg}\theta = 30/1 \therefore v = 30 \text{ m/s}$$

Ahora, para determinar la velocidad media entre $t = 4 \text{ s}$ y $t = 10 \text{ s}$ se procederá así:

$$t_0 = 4 \text{ s} \Rightarrow x_0 = 20 \text{ m}$$

$$t = 10 \text{ s} \Rightarrow x = 0 \text{ m (ver gráfico)}$$

$$v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{0 - 20}{10 - 4} \therefore v_m = -10/3 \text{ m/s}$$



6.8.a. Cálculo de velocidades.- Tomando las pendientes de cada recta conseguiremos las velocidades de A y B.

$$\text{A: } v_A = \text{tg}\alpha = -\text{tg}\theta = -40/8 \therefore v_A = -5 \text{ m/s}$$

$$\text{Nota: } x_A = 40 - 5t$$

$$\text{B: } v_B = \text{tg}\beta = 60/4 \therefore v_B = 15 \text{ m/s}$$

$$\text{Nota: } x_B = -60 + 15t$$

6.8.b. Cálculo de la ubicación y el instante del cruce.- Este suceso viene dado por la intersección de las rectas. Para ubicarlo bastará con igualar las ecuaciones que definen los movimientos de A y B. Veamos.

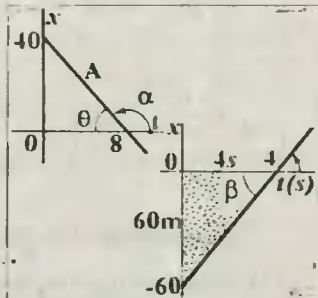


Fig. (1). Solución Prob. 6.8

$$x_A = x_B \Rightarrow 40 - 5t = -60 + 15t \therefore t = 5 \text{ s}$$

Y en A: $x_A = 40 - 5(5) \Rightarrow x_A = 15 \text{ m}$

Otro método.- Por tratarse de dos móviles con MRU y hacia el encuentro, procedemos así:

$$t_c = \frac{d}{v_A + v_B} = \frac{100}{5 + 15} \therefore t_c = 5 \text{ s}$$

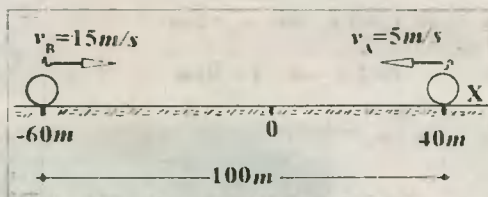


Fig. (2). Solución Prob. 6.8

6.9. A continuación indicamos el movimiento mencionado, pero te sugiero que hagas los cálculos de distancias recorridas, velocidades y aceleraciones, empleando las ecuaciones escalares del MRUV, y eso por tu cuenta.

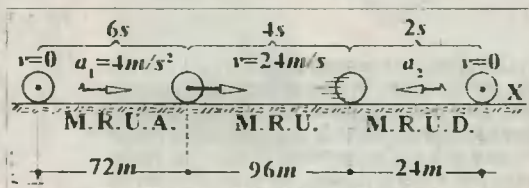


Fig. (1) Solución Prob. 6.9

Luego, podemos rescatar valores coordenados importantes para la gráfica que construiremos a continuación.

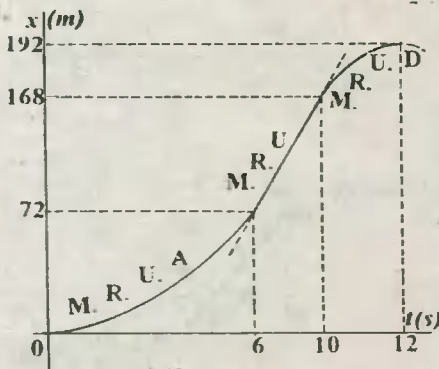
$t \text{ (s)}$	0	6	10	12
$x \text{ (m)}$	0	72	168	192

Y construyendo la grafica espacio - temporal, con estos datos tendremos la figura mostrada.

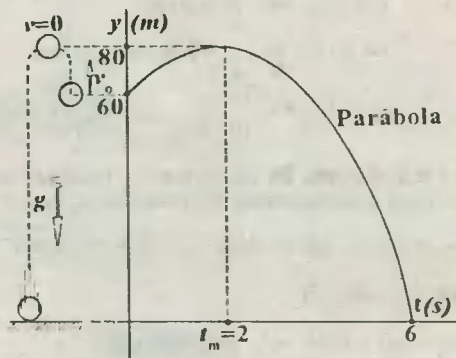
6.10. Con los datos dados tenemos: $y_o = 60 \text{ m}$, $v_o = 20 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Luego, la altura máxima alcanzada será $v_{\text{máx}} = 80 \text{ m}$, y para ello empleará $t = 2 \text{ s}$. Asimismo, debemos calcular que la piedra empleará $t = 6 \text{ s}$ (desde que se lanzó) para llegar al piso ($v = 0$). Seguidamente decimos que la ecuación de la trayectoria espacio temporal viene dado por:

$$y = 60 + 20t - 5t^2$$



Respuesta del Prob. 6.9



Respuesta del Prob. 6.10

6.11. Por la forma que tiene la parábola podemos decir que en $t = 0 \text{ s}$, $x = 0 \text{ m}$, $v_o = 0 \text{ m/s}$ (pendiente cero).

Como se sabe, el área bajo la tangente en todo instante debe estar dado por la relación (6.5). En este caso tomamos el signo (+). ¿Sabes por qué?. Asimismo, al reemplazar los datos deducidos líneas arriba tendremos: $A = + 1/8 at^3 \dots (*)$

Pero, por dato: $A = 64 \text{ cm}\cdot\text{s}$, y $a = 8 \text{ cm/s}^2$.

$$64 = 1/8 \cdot 8t^3 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

Luego, la velocidad en dicho instante deberá estar dado por: $v_f = v_o + at = 0 + 8 \cdot 4$

$$\therefore v_f = 32 \text{ cm/s}$$

6.12.a. El movimiento es un MRU, puesto que el gráfico v - vs - t es una recta paralela al eje t , siendo su valor: $v = +6 \text{ m/s}$, y $x_o = -10 \text{ m}$.

$$x = x_o + vt \quad \therefore x = -10 + 6t \text{ (Ley del movimiento)}$$

6.12.b. Si la velocidad es constante, entonces la aceleración es nula.

$$\therefore a = 0 \text{ m/s}^2$$

6.12.c. El desplazamiento concuerda con el área bajo la curva.

$$d = 6 \cdot 8 \quad \therefore d = 48 \text{ m}$$

Nota: El desplazamiento es positivo.

6.12.d. La posición del móvil en $t = 8 \text{ s}$ se obtendrá de la ley del movimiento.

$$x = -10 + 6(8) \quad \therefore x = +38 \text{ m}$$

6.13.a. Cálculo de la aceleración.- Se sabe que en un gráfico v - vs - t la pendiente nos da la aceleración del móvil.

$$a = \text{tg}\theta = 12/6 \quad \therefore a = 2 \text{ m/s}^2$$

6.13.b. Cálculo de la velocidad.- Por ser un gráfico rectilíneo, el movimiento será del tipo MRUV. Luego:

$$v_f = v_o + at \Rightarrow v_f = 4 + 2t$$

Luego, en $t = 12 \text{ s}$ la velocidad será:

$$v_f = 4 + 2(12) \Rightarrow v_f = 28 \text{ m/s}$$

6.13.c. El desplazamiento será calculado en base al área comprendida entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 12 \text{ s}$, el cual por ser un trapecio, se calculará así:

$$A = \frac{1}{2}(B + b)h \Rightarrow d = \frac{1}{2}(4 + 28)12$$

$$\therefore d = +192 \text{ m}$$

6.13.d. Para el cálculo de la posición final usamos:

$$x_f = x_o + d \Rightarrow x_f = -8 + 192 \quad \therefore x_f = 184 \text{ m}$$

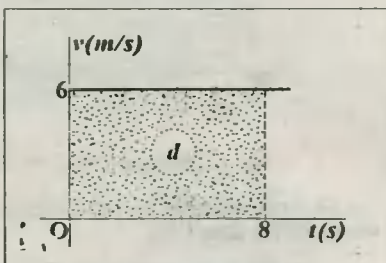


Fig. (1). Solución Prob. 6.12

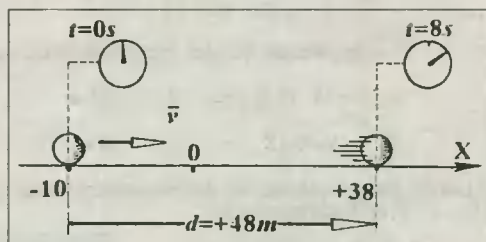


Fig. (2). Solución Prob. 6.12

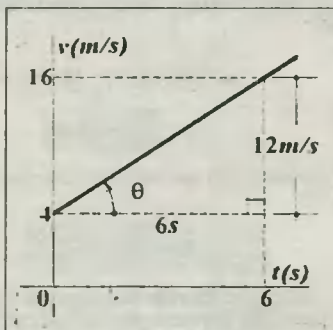


Fig. (1). Solución Prob. 6.13

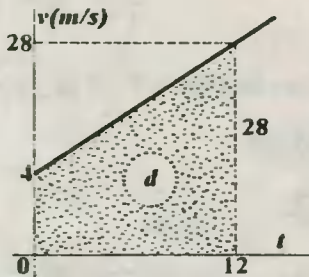


Fig. (2) Solución Prob. 6.13

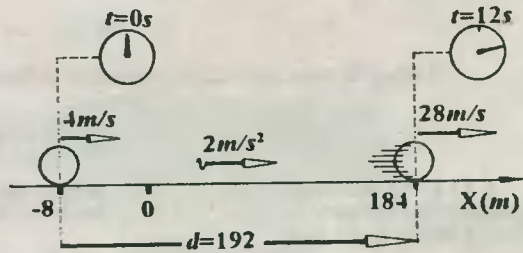


Fig. (3) Solución Prob. 6.13

6.14. Prolonguemos la gráfica (recta) hasta $t = 10$ s, y tendremos la figura (1).

Por semejanza de triángulos: $m/12 = 6/4$

$$\Rightarrow m = 18$$

Luego, vemos que las áreas señaladas son:

$$A_1 = +\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 \Rightarrow A_1 = +24 \text{ m}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 18 \Rightarrow A_2 = -54 \text{ m}$$

a) Luego, para el cálculo del desplazamiento neto entre $t = 0$ s y $t = 10$ s, diremos que:

$$d_n = A_1 + A_2 = +24 + (-54) \therefore d_n = -30 \text{ m}$$

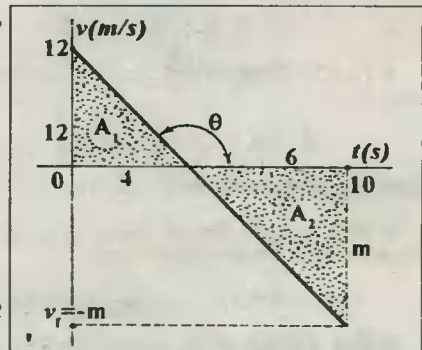


Fig. (1). Solución Prob. 6.14

(*) El signo (-) nos indica que el móvil se desplazó en forma neta 30 m hacia la izquierda de su posición inicial durante este intervalo. Además, el espacio total recorrido se calculará así:

$$e_T = |A_1| + |A_2| = |+24| + |-54|$$

$$\therefore e_T = 78 \text{ m}$$

b) La ecuación que describe este movimiento será:

$$x = -12 + 12t - 3/2 t^2$$

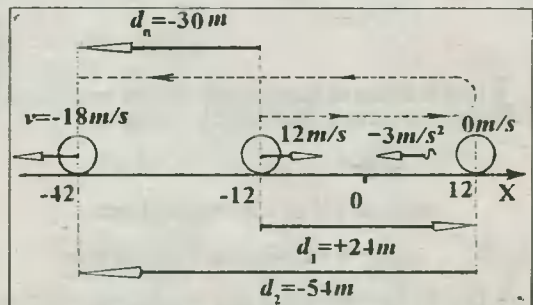


Fig. (2) Solución Prob. 6.14

6.15. De acuerdo con la gráfica original determinamos que el movimiento es un MRUV con una aceleración permanente, lo cual explicaría la rectitud de la gráfica v -vs- t . Así pues: $a = 12/2 = 6 \text{ m/s}^2$.

Como $v_0 = -12 \text{ m/s}$ con $x_0 = +9 \text{ m}$, diremos que la ecuación que describe el movimiento será: $x = 9 - 12t + 3t^2$.

Ahora, cuando el móvil pasa por el origen de abscisas haremos $x = 0$. Luego: $0 = 9 - 12t + 3t^2$.

Ordenando, simplificando y resolviendo encontramos las siguientes raíces: $t = 1$ s, y $t = 3$ s.

De estas raíces deducimos que:

El móvil pasa por segunda vez por el origen de coordenadas luego de 3 s

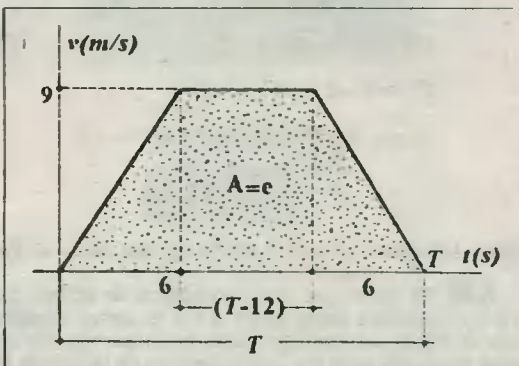
6.16. Grafiquemos el movimiento de los ascensores bajo las siguientes observaciones:

Al arrancar: MRU acelerado hasta alcanzar su velocidad máxima en $t = 6$ s.

En marcha: Mantiene un MRU aprovechando la máxima velocidad alcanzada.

Al frenar: MRU retardado hasta detenerse por completo en $t = 6$ s.

Hallando el área del trapecio mostrado encontramos el espacio recorrido: $e = 180$ m.



$$e = 180 = \left[\frac{(t-12) + t}{2} \right] \cdot 9$$

$$\therefore t = 26 \text{ s}$$

6.17. En la figura el área bajo la curva representa el desplazamiento entre $t = 0$ s y $t = 4$ s.

$$d = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} (4+2) \cdot 1 \Rightarrow d = +7 \text{ m}$$

Como el móvil estaba inicialmente en $x = -2$ m, la nueva posición se obtendrá de:

$$d = x_f - x_o \Rightarrow x_f = x_o + d \Rightarrow x_f = -2 + 7 \therefore x_f = +5 \text{ m}$$

6.18. Construyamos el gráfico v -vs- t .

Del gráfico: $\text{tg}\theta = 10 \text{ m/s}^2 \dots (1)$

$$\text{tg}\beta = -\text{tg}\alpha = +5 \text{ m/s}^2 \dots (2)$$

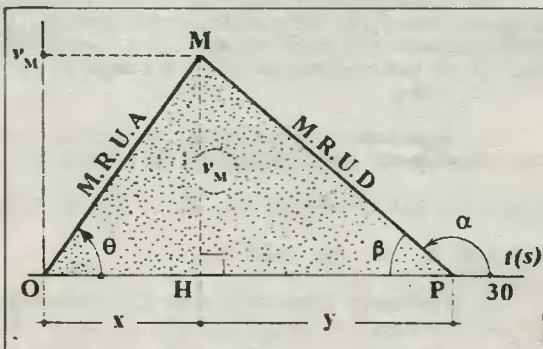
Del triángulo OHM: $x = v_m \cdot \text{ctg}\theta$

Del triángulo MHO: $y = v_m \cdot \text{ctg}\beta$

Sumando miembro a miembro:

$$x + y = v_m(\text{ctg}\theta + \text{ctg}\beta)$$

$$\Rightarrow 30 = v_m(1/\text{tg}\theta + 1/\text{tg}\beta) \dots (3)$$



Luego, de (1) y (2) en (3): $v_m = 100 \text{ m/s}$

Finalmente, el espacio recorrido será el área del triángulo: $e = \frac{1}{2} v_m \cdot t_T = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 30$

$$\therefore e = 1500 \text{ m}$$

6.19. Sabemos que: $v_m = dt \dots (1)$

Además, sabemos que en el gráfico velocidad-vs-tiempo el área nos da el desplazamiento del móvil. De ello tendremos entonces:

$$d_1 = \frac{1}{2}(3+2)(-4) \Rightarrow d_1 = -10 \text{ m}$$

$$d_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \Rightarrow d_2 = +2 \text{ m}$$

$$\text{Por consiguiente: } d = d_1 + d_2 = -8 \text{ m} \dots (2)$$

$$Y: t = 6 - 2 = 4 \text{ s} \dots (3)$$

$$\text{Luego, de (2) y (3) en (1): } v_m = -8/4$$

$$\therefore \boxed{v_m = -2 \text{ m/s}}$$

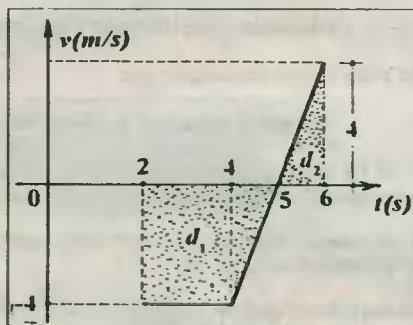


Fig. Solución Prob. 6.19

Nota. El vector velocidad media apunta hacia el lado negativo de la recta de movimiento.

6.20. Es obvio que las velocidades de ambos móviles podrán coincidir a partir de $t = 4 \text{ s}$, y no antes. Tomando un valor de t con estas características levantaremos una vertical de tal modo que pase por la intersección de las rectas M y N.

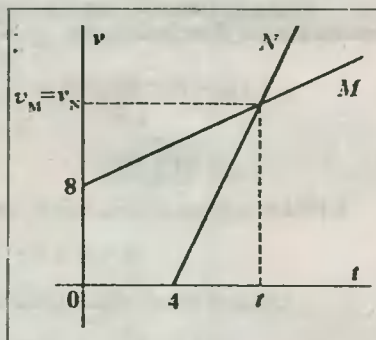
Además, del gráfico original se deduce que las aceleraciones están dadas por las pendientes de las rectas.

$$a_M = 4 \text{ m/s}^2; a_N = 6 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Por condición del problema: } v_M = v_N$$

$$v_{0M} + a_M(t-0) = v_{0N} + a_N(t-4) \dots (v_{0N} = 0)$$

$$8 + 4t = 6(t-4) \therefore \boxed{t = 16 \text{ s}}$$



6.21. Encontraremos el instante t en el cual las velocidades se igualan, usando los datos originales del problema, y teniendo en cuenta al triángulo pitagórico 3, 4, 5, en virtud del ángulo de 53° indicado en la gráfica de A. Luego, del gráfico: $t = 9 + 27 = 36 \text{ s}$.

Seguidamente encontramos los desplazamientos netos que cada uno experimenta hasta ese instante.

$$A: d_A = -\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 27 \Rightarrow d_A = +432 \text{ m}$$

$$B: d_B = 36 \cdot 36 \Rightarrow d_B = 1296 \text{ m}$$

Graficando estos resultados encontraremos la distancia x que separa a los móviles en el instante $t = 36 \text{ s}$.

$$x = 496 - 442 \therefore \boxed{x = 54 \text{ m}}$$

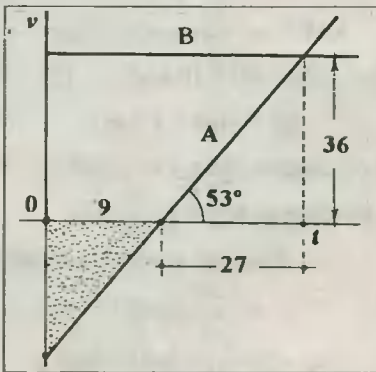


Fig. (1). Solución Prob. 6.21

6.22. Notamos que el instante en que las velocidades de A y B se igualan por segunda vez está dado por el segundo punto de intersección de sus gráficas v -vs- t contadas de izquierda a derecha; esto sucede en $t = 14 \text{ s}$. Luego, todo consiste en calcular las áreas bajo cada curva hasta dicho instante e igualarlas, dado que ellas representan los desplazamientos producidos, y que por condición del problema también son iguales.

$$A_1 = A_2$$

$$\frac{1}{2}(v_0 + 7) \cdot 14 = \frac{1}{2} \pi \cdot 7^2 + 7 \cdot 14$$

Reemplazando $\pi \approx 22/7$, y resolviendo: $v_0 = 18 \text{ m/s}$

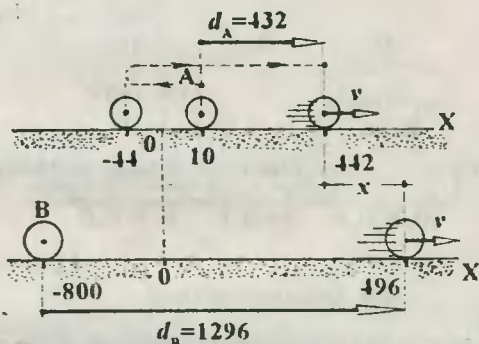


Fig. (2). Solución Prob. 6.21

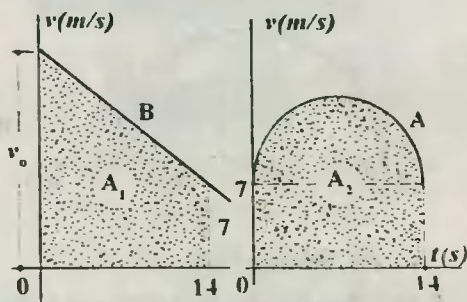


Fig. Solución Prob. 6.22

6.23. Observamos que el gráfico corresponde a un MRUV (caída libre) con $g = 10 \text{ m/s}^2$, y si el gráfico es una recta que concluye en $t = 10 \text{ s}$, eso supone que luego de 10 s el proyectil llega al piso. Veamos.

$$v_f = v_0 - gt$$

Del gráfico original: $v_0 = 40 \text{ m/s}$.

$$v_f = 40 - 10(10) \Rightarrow v_f = -60 \text{ m/s} (\downarrow)$$

Luego, analizando el desplazamiento de A hacia B:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2gh \dots (\text{movimiento descendente})$$

$$60^2 = 40^2 + 2 \cdot 10h \quad \therefore h = 100 \text{ m}$$

6.24. Haciendo la construcción correspondiente observamos que la pendiente de la recta tangente a la curva en P ($t = 16 \text{ s}$) será la aceleración instantánea.

$$\text{sen} \alpha = 6/10 = 3/5 \Rightarrow \alpha = 37^\circ \wedge \theta = 143^\circ$$

$$\text{Por lo tanto: } a = \text{tg} \alpha \quad \therefore a = -0,75 \text{ m/s}^2$$

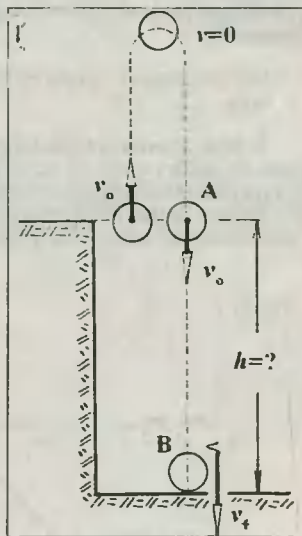


Fig. Solución Prob. 6.23

6.25. Analicemos la curva a -vs- t por intervalos de tiempo definidos.

a) De 0 s a 4 s.- El movimiento presenta una aceleración constante; entonces, es un MRU acelerado. Luego:

$$v_f = v_0 + a_1 \cdot t \Rightarrow v_{(4)} = 0 + 6.4 \quad \therefore v_{(4)} = 24 \text{ m/s}$$

b) De 4 s a 8 s.- El movimiento presenta una aceleración nula; entonces, se trata de un MRU. Entonces:

$$v_{(8)} = 24 \text{ m/s}$$

c) De 8 s a 12 s.- El movimiento presenta una aceleración de signo negativo $a_2 = -2 \text{ m/s}^2$, de sentido contrario al de la velocidad; entonces, se trata de un MRU retardado. Luego: $v_t = v_o + a_2 t$.

$$v_{(12)} = v_{(8)} + a_2(12 - 8) = 24 + (-2)(4) \quad \therefore \quad \boxed{v_{(12)} = 16 \text{ m/s}}$$

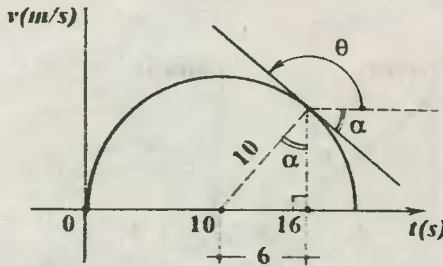


Fig. Solución Prob. 6.24

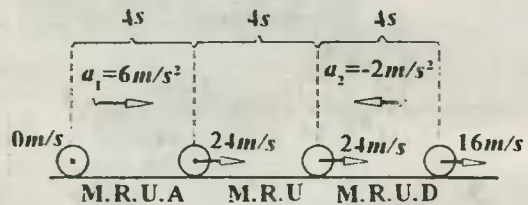


Fig. Solución Prob. 6.25

6.26.a. **Construcción del gráfico v -vs- t .**- Del gráfico a -vs- t notamos que la aceleración durante los dos primeros segundos es nula, lo que significaría que la velocidad $v_o = -12 \text{ m/s}$ se mantiene constante entre $t = 0$ y $t = 2 \text{ s}$. Seguidamente, el móvil experimentará una aceleración $a = +2 \text{ m/s}^2$ (pendiente positiva) que se mantiene constante. Luego, el gráfico v -vs- t será el que se muestra en la figura (1).

(*) Nótese que en $t = 8 \text{ s}$ la recta corta al eje del tiempo, que es el instante en que la velocidad se hace nula.

6.26.b. **Construcción del gráfico x -vs- t .**- El móvil sale de $x_o = 18 \text{ m}$, y con $v = 12 \text{ m/s}$, manteniéndolo así entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 2 \text{ s}$. Luego retarda su movimiento uniformemente hasta detenerse en $t = 8 \text{ s}$ (pendiente nula) para finalmente iniciar un MRU acelerado. Esto significa que entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 2 \text{ s}$ se trata de una línea recta con pendiente negativa ($\text{tg}\theta = -12 \text{ m/s}$). Luego, continúa con una parábola cóncava hacia arriba y bajando hasta $t = 8 \text{ s}$, para luego seguir hacia arriba (Figura (2)).

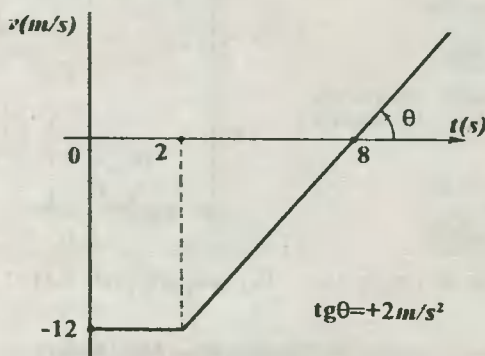


Fig. (1). Solución Prob. 6.26

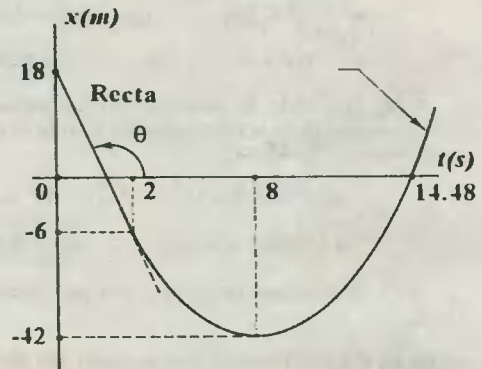


Fig. (2). Solución Prob. 6.26

6.27. Construyamos la gráfica x -vs- t para el móvil 2, y superponiendo el gráfico x -vs- t de 1 tendremos una mejor comprensión del suceso. Para ello debo decirte que el móvil 2 tiene una ley de movimiento que viene dada por: $x_2 = \frac{1}{2} a t^2$ ($x_o = 0$, $v_o = 0$).

Pero, del gráfico a -vs- t para el móvil 2 deducimos que $a = 2 \text{ m/s}^2$. Entonces: $x_2 = t^2$. Tabulando y graficando tenemos la figura mostrada.

Observamos que los móviles se volverán a encontrar en un instante $t > 3 \text{ s}$, pero cuando se encuentren, sus posiciones también se igualarán. Por lo tanto:

$$x_2 = x_1 \Rightarrow t^2 = 36 \therefore t = 6 \text{ s}$$

6.28. Construyamos la gráfica v -vs- t del auto, y tendremos la figura mostrada.

Por dato: $\text{tg}\theta = a_1 = +12 \text{ m/s}^2$

$$\text{tg}\beta = a_2 = -6 \text{ m/s}^2$$

Pero: $\text{tg}\alpha = -\text{tg}\beta \Rightarrow \text{tg}\alpha = 6 \text{ m/s}^2$

Luego: $m = x \cdot \text{tg}\theta \Rightarrow m = 12x \dots (1)$

Y: $m = y \cdot \text{tg}\alpha \Rightarrow m = 6y$

Igualando: $x(12) = y(6) \Rightarrow y = 2x \dots (2)$

Seguidamente, si el desplazamiento debe ser 1800 m , entonces el área bajo la curva debe ser de dicho valor. Así pues: $d = \text{AREA}$.

$$1800 = \frac{1}{2}(x+y)m \dots (3)$$

De (1) y (2) en (3):

$$1800 = \frac{1}{2}(x+2x)(12x) \Rightarrow x = 10 \text{ s}$$

En (2): $y = 20 \text{ s} \therefore t = 30 \text{ s}$

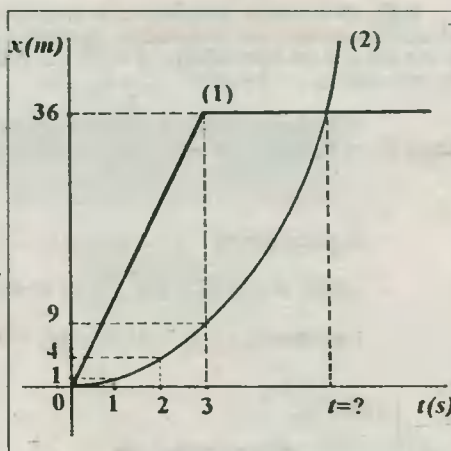


Fig. Solución Prob. 6.27

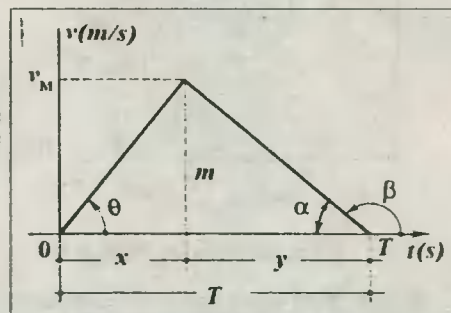


Fig. Solución Prob. 6.28

6.29. Recordando que el área bajo la curva en el plano *aceleración-vs-tiempo* es el cambio experimentado en la velocidad, diremos que $\Delta v = \text{AREA}$. Entonces (ver gráfico original):

$$v_f - v_o = \text{AREA} \Rightarrow v_{(4)} - v_{(0)} = \frac{1}{2}(2+4) \cdot 1 \therefore v_{(0)} = 7 \text{ m/s}$$

6.30. Recordando la solución del problema anterior, calcularemos el área bajo la curva, para así determinar el valor de v , para así calcular finalmente la velocidad en $t = 6 \text{ s}$.

a) Desde 0 s hasta 4 s : $\text{AREA} = \Delta v$

$$\frac{1}{2}(8+12) \cdot 4 = v_{(4)} - v_{(0)}$$

$$\Rightarrow 40 = 3v - v \Rightarrow v = 20 \text{ m/s}$$

Luego, la velocidad en $t = 4 \text{ s}$ es: $v_{(4)} = 3v = 60 \text{ m/s}$

b) Desde 4 s hasta 6 s : $\text{AREA} = \Delta v$

$$12 \cdot 2 = v_{(6)} - v_{(4)} \Rightarrow 24 = v_{(6)} - 60 \therefore v_{(6)} = 84 \text{ m/s}$$

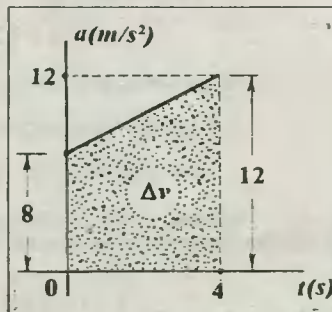


Fig. (1). Solución Prob. 6.30

6.31. Observemos detenidamente el gráfico a -vs- t , de él deducimos que entre $t = 0$ s y $t = 3$ s el movimiento tuvo una aceleración constante $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$. Luego, la pendiente de la recta en el gráfico v -vs- t entre dicho intervalo es: $m = 2/1 = 2$. Esto quiere decir que en el mismo intervalo de tiempo la velocidad en $t = 3$ s será: $v_{(3)} = v_{(0)} + a_1 t \Rightarrow v_{(3)} = 2 + 2(3 - 0) \Rightarrow v_{(3)} = 8 \text{ m/s}$.

Calculemos ahora el valor de T del siguiente modo: Del gráfico a -vs- t , la aceleración a partir de $t = 3$ s es $a_2 = -1 \text{ m/s}^2$. Luego, en el gráfico v -vs- t : $\text{tg}\alpha = -1$. De aquí: $\alpha = 135^\circ$. Por lo tanto:

$$T - 3 = 8 \Rightarrow T = 11 \text{ s}$$

$$\text{A continuación: } v_{(7)} = v_{(3)} + a_2 t \Rightarrow v_{(7)} = 8 + (-1)(7 - 3) \Rightarrow v_{(7)} = 4 \text{ m/s}$$

$$\text{Luego: } d_1 = \frac{1}{2}(2 + 8) \cdot 3 = +15 \text{ m}; d_2 = \frac{1}{2}(8 + 4) \cdot 4 = +24 \text{ m}$$

$$\text{Finalmente: } x_f = x_0 + d = x_0 + (d_1 + d_2) \Rightarrow x_f = -39 + (+15 + 24) \therefore x_f = 0 \text{ m}$$

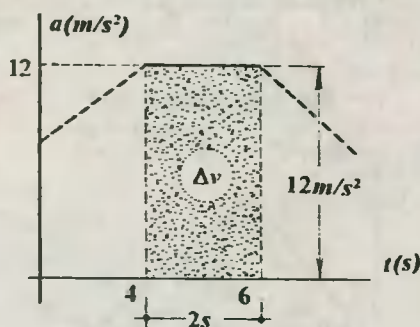


Fig. (2) Solución Prob. 6.30

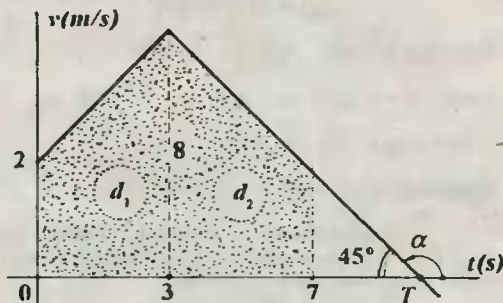


Fig. Solución Prob. 6.31

6.32. En vista que el sentido del movimiento es hacia la derecha del eje X ($+X$), deducimos que el desplazamiento Δx concordará con el espacio recorrido, dado que además la velocidad (que es positiva) también está afectada por una aceleración del mismo sentido (positiva), lo cual garantiza que el móvil no retorne en sentido contrario. Seguidamente, recordando la relación (6.12):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + \frac{1}{6} b t^3 \\ \Rightarrow x - x_0 &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + \frac{1}{6} b t^3 \\ e &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + \frac{1}{6} b t^3 \dots (*) \end{aligned}$$

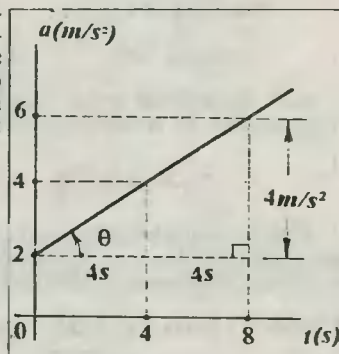
De los datos, se sabe que $v_0 = 1 \text{ m/s}$. Y del gráfico:

$$b = \text{tg}\theta \quad (b = \text{pendiente de la curva } a\text{-vs-}t)$$

$$b = 4/8 = 1/2 \text{ m/s}^3 \quad (b = \text{constante})$$

Además, se verifica que para $t = 4$ s, $a = 4 \text{ m/s}^2$. Luego, para ese instante encontraremos el espacio recorrido reemplazando los datos obtenidos en (*):

$$e = 1.4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4^2 + \frac{1}{6} \cdot (1/2) \cdot 4^3 \therefore e = 41,3 \text{ m}$$



CAP 7 MOVIMIENTOS RELATIVOS Y MOVIMIENTOS DEPENDIENTES

7.1.a. Cálculo de la velocidad relativa ($v_{A/B}$).- Se desea averiguar la velocidad del móvil A respecto a un sistema de referencia móvil ubicado en B. Es conveniente entonces ubicar un observador en B, quien observará venir hacia él al móvil A con una velocidad $v_{A/B}$, que se calculará así:

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \dots (1)$$

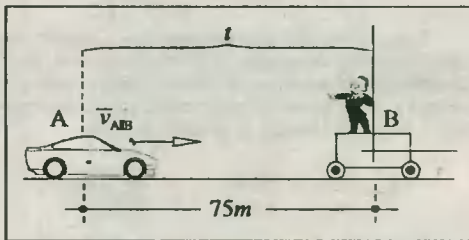
donde, por datos del problema se sabe que: $\vec{v}_A = 40\hat{i} \text{ m/s}$; $\vec{v}_B = 15\hat{i} \text{ m/s}$. Reemplazando esto último en (1) obtenemos:

$$\vec{v}_{A/B} = +25\hat{i} \text{ m/s}$$

Nota: El signo (+) de la velocidad relativa nos sugiere que el vector $v_{A/B}$ está dirigido hacia el lado positivo del eje X.

7.1.b. Cálculo del tiempo de alcance.- El observador ubicado en B observará que el móvil A se le acerca a una velocidad $v_{A/B} = 25 \text{ m/s}$. De aquí, deducimos que para alcanzar a B demorará un tiempo:

$$t = \frac{d}{v} \Rightarrow t = \frac{75\text{m}}{25\text{m/s}} \therefore t = 3 \text{ s}$$



7.2.a. Cálculo de la velocidad relativa $v_{Q/P}$.- Se desea averiguar la velocidad relativa del móvil Q respecto a un sistema de referencia móvil ubicado en P. Será entonces necesario ubicar un observador en P, quien afirmará lo siguiente:

$$\vec{v}_{Q/P} = \vec{v}_Q - \vec{v}_P \dots (1)$$

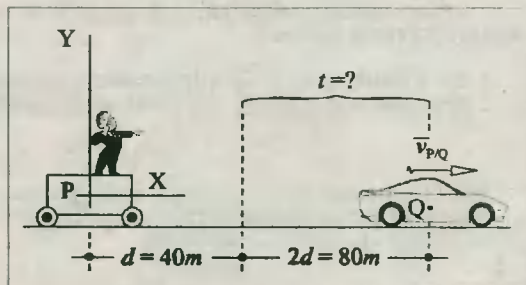
donde, por datos del problema se sabe que: $v_P = 10\hat{i} \text{ m/s}$, $v_Q = 30\hat{i} \text{ m/s}$. Reemplazando esto último en (1) obtendremos:

$$\vec{v}_{Q/P} = +20\hat{i} \text{ m/s}$$

Nota: El signo (+) nos sugiere que el móvil Q se dirige hacia el lado positivo del eje X, alejándose de P.

7.2.b. Cálculo del tiempo t .- Cuando los móviles P y Q estén separados la distancia $3d$, el observador ubicado en P afirmará que el móvil Q se habrá desplazado la distancia $2d$ respecto de su posición original, empleando una velocidad $v_{Q/P} = 20 \text{ m/s}$, y un tiempo t que se calculará así:

$$t = \frac{e}{v} \Rightarrow t = \frac{80\text{m}}{20\text{m/s}} \therefore t = 4\text{s}$$



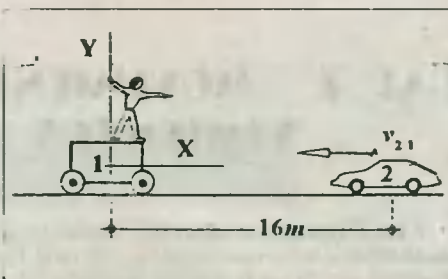
7.3.a. Cálculo de la velocidad relativa $v_{2/1}$.- Colocando un observador en el móvil 1, el móvil 2 será visto con una velocidad $v_{2/1}$ que se obtendrá así:

$$\vec{v}_{2/1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \dots (*)$$

Pero, por datos del problema: $\vec{v}_1 = 5\vec{i} \text{ m/s}$, y $\vec{v}_2 = -3\vec{i} \text{ m/s}$. Luego, de esto último en (*) tenemos:

$$\vec{v}_{2/1} = [(-3) - (+5)]\vec{i} \text{ m/s} \quad \therefore \quad \vec{v}_{2/1} = -8\vec{i} \text{ m/s}$$

Nota: El signo (-) nos indica que el móvil 2 respecto a 1 se ve venir hacia el lado negativo del eje X.

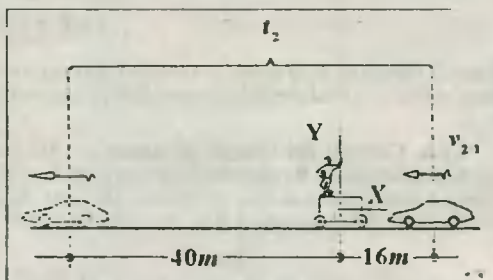


7.3.b. Cálculo del tiempo de encuentro t_1 .- El observador ubicado en 1 afirmará que el móvil 2 pasa por su costado cuando este último haya recorrido la distancia de separación inicial $d_1 = 16 \text{ m}$ en un tiempo que se calculará así:

$$t_1 = \frac{d}{v_{2/1}} = \frac{16 \text{ m}}{8 \text{ m/s}} \quad \therefore \quad t_1 = 2 \text{ s}$$

7.3.c. Cálculo del tiempo t_2 .- Cuando los móviles estén separados la distancia $d_2 = 40 \text{ m}$, el observador ubicado en 1 habrá comprobado que el móvil se desplazó 56 m desde su posición original. Luego, el tiempo t_2 se calculará así:

$$t_2 = \frac{e}{v_{2/1}} = \frac{56 \text{ m}}{8 \text{ m/s}} \quad \therefore \quad t_2 = 7 \text{ s}$$



7.4.a. Cálculo de la velocidad \vec{v}_p .- Llamaremos v_p a la velocidad del móvil P respecto a Tierra; así entonces, algo similar sucederá con el coche A. Veamos.

$$\vec{v}_{A/T} = \vec{v}_A = +6\vec{i} \text{ m/s} \quad (\text{dato})$$

También, se sabe que: $\vec{v}_{B/A} = -3\vec{i} \text{ m/s}$ (dato y figura). Entonces: $\vec{v}_B - \vec{v}_A = -3\vec{i} \text{ m/s}$.

$$\Rightarrow \vec{v}_B - 6\vec{i} \text{ m/s} = -3\vec{i} \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_B = +3\vec{i} \text{ m/s}$$

(*) Esto significa que el coche B se mueve hacia +X respecto a Tierra. Del mismo modo se sabe que:

$$\vec{v}_{P/B} = +2\vec{i} \text{ m/s} \quad (\text{dato y figura})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_p - \vec{v}_B = +2\vec{i} \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_p - 3\vec{i} \text{ m/s} = 2\vec{i} \text{ m/s} \quad \therefore \quad \vec{v}_p = +5\vec{i} \text{ m/s}$$

Este resultado indica que el personaje P se mueve hacia +X (la derecha) respecto al piso (Tierra), y a razón de 5 m/s .

7.4.b. Cálculo de $v_{P/A}$.- Para determinar la velocidad de P respecto a un sistema móvil colocado en A recurriremos a: $\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_p - \vec{v}_A$ (velocidades absolutas).

$$\vec{v}_{P/A} = 5\vec{i} \text{ m/s} - 6\vec{i} \text{ m/s} \quad \therefore \quad \vec{v}_{P/A} = -1\vec{i} \text{ m/s}$$

7.5. El enunciado del problema nos invita a colocar un observador en la cabecera del tren, lo que equivale a utilizar un sistema de referencia móvil ubicado en T. Luego, se verá venir al auto A con una velocidad $v_{A/T}$ que se obtendrá así:

$$\vec{v}_{A/T} = \vec{v}_A - \vec{v}_T \quad (\text{velocidad relativa})$$

$$\Rightarrow v_{A/T} = (90 - 72) \text{ km/h} = 18 \text{ km/h}$$

$$\text{ó: } v_{A/T} = 5 \text{ m/s}$$

Del gráfico podemos deducir que el auto deberá recorrer $112 \text{ m} + 3 \text{ m} = 115 \text{ m}$ respecto a T para poder pasar al tren. Luego, el tiempo empleado para ello será:

$$t = d/v_{A/T} = 115/5 \quad \therefore \quad t = 23 \text{ s}$$

7.6.a. Cálculo de L_2 . Considerando un observador en el tren 1 (según la condición del problema), se observará que el tren 2 viaja con una velocidad $v_{2/1}$ que vendrá dada por:

$$v_{2/1} = v_2 - v_1 \quad \dots (1)$$

$$\text{donde: } \left. \begin{array}{l} v_1 = +36i \text{ km/h} = +10i \text{ m/s} \\ v_2 = -54i \text{ km/h} = -15i \text{ m/s} \end{array} \right\} \dots (2)$$

Luego, de (2) en (1):

$$v_{2/1} = -25i \text{ m/s} \text{ (hacia la izquierda)}$$

De la figura (1) se puede afirmar que el pasajero del tren 1 vió avanzar al tren 2 una distancia $d = L_2$ durante 6 s.

Luego, aplicamos: $d = v_{2/1} \cdot t$.

$$\Rightarrow L_2 = 25 \cdot 6 \quad \therefore \quad L_2 = 150 \text{ m}$$

7.6.b. Cálculo de t_2 . Para que los trenes 1 y 2 logren cruzarse el uno al otro se verificará que el tren 2 deberá desplazarse la distancia $d = 150 \text{ m} + 225 \text{ m} = 375 \text{ m}$, con una velocidad $v_{2/1} = 25 \text{ m/s}$ (vistos desde el tren 1).

$$\Rightarrow t = d/v_{2/1} = 375/25 \quad \therefore \quad t_2 = 15 \text{ s}$$

7.7. De los datos del problema reconocemos que, luego que el conductor avista al camión pasan $0,6 \text{ s}$ hasta que reacciona aplicando los frenos, tiempo durante el cual mantuvo constante su velocidad, para luego frenar y producir una desaceleración a que le impida chocar con el camión, quien siempre se mantuvo en movimiento con $v_c = 10 \text{ m/s}$. Pues bien, nosotros debemos reconocer también que el choque se evitará si, cuando el auto llega a estar justo detrás del camión, la velocidad relativa del auto respecto al camión es 0 en ese instante (reposo relativo). Así, el problema se reduce a colocar un sistema de referencia móvil en el camión.

$$v_{AC} = v_A - v_C \Rightarrow v_{AC} = 30 - 10$$

$$\Rightarrow v_{AC} = v_o = 20 \text{ m/s}$$

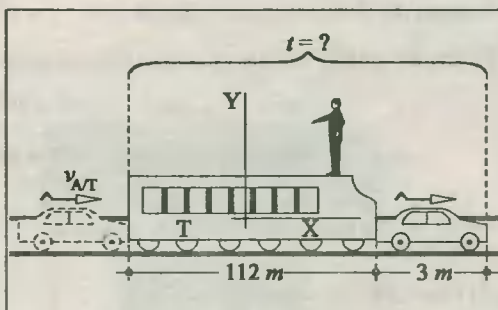


Fig. Solución Prob. 7.5

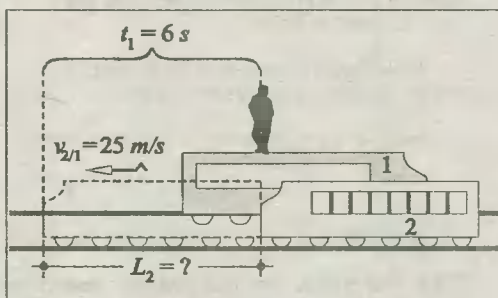


Fig. (1). Solución Prob. 7.6

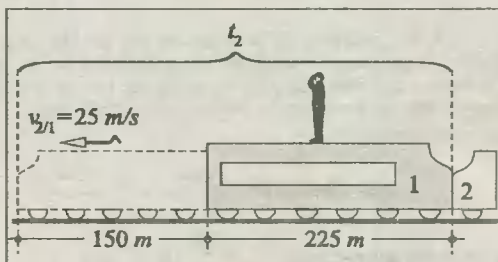
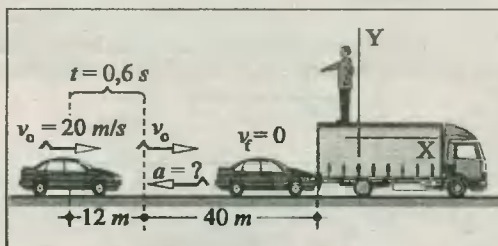


Fig. (2) Solución Prob. 7.6



Tramo AB: (MRU) $e_1 = v_{0,t} = 20.0.6 \Rightarrow e_1 = 12 \text{ m}$

Tramo BC: (MRUV).- Si la distancia original entre el auto y el camión era 52 m, entonces BC = 40 m.

$$v_f^2 = v_0^2 + 2ae_2 \Rightarrow 0^2 = 20^2 + 2a.40 \therefore a = -5 \text{ m/s}^2$$

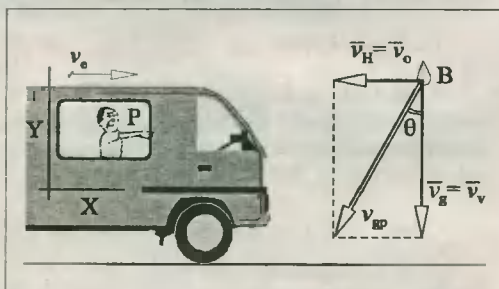
Luego: **la desaceleración mínima a aplicar será 5 m/s²**

7.8.a. Cuando un pasajero observe el movimiento de las gotas, dirá que éstas poseen dos velocidades:

1°) Una velocidad vertical $v_v = 15 \text{ m/s}$.

2°) Una velocidad horizontal y exactamente opuesta a la del ómnibus respecto al piso:
 $v_h = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$.

En la figura se muestran los vectores v_h y v_v para un pasajero respecto al ómnibus.



Luego: $v_{g/p}$ = velocidad de las gotas respecto al pasajero.

$$\vec{v}_{g/p} = \vec{v}_g - \vec{v}_0 = \vec{v}_g + (\vec{v}_0) \Rightarrow \vec{v}_{g/p} = \vec{v}_v - \vec{v}_h$$

Y ya que $v_v \perp v_h$ se cumplirá que: $v_{g/p} = \sqrt{v_v^2 + v_h^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} \therefore v_{g/p} = 25 \text{ m/s}$

7.8.b. Del gráfico vectorial podemos deducir que: $\text{tg}\theta = v_h/v_v = 20/15 \Rightarrow \text{tg}\theta = 4/3$

$$\therefore \theta = 53^\circ$$

7.9. Basándonos en la solución del problema anterior mostramos los diagramas vectoriales de las velocidades del ómnibus y de las gotas de lluvia. Recordando que la aceleración media viene dada por la siguiente relación:

$$a_m = \frac{v_f - v_0}{\Delta t} = \frac{v_g \cdot \text{tg}53^\circ - v_g \cdot \text{tg}37^\circ}{\Delta t}$$

Reemplazando valores: $a_m = \frac{24}{10} (4/3 - 3/4)$

$$\therefore a_m = 1.4 \text{ m/s}^2$$

7.10.a. Cálculo de la velocidad relativa $v_{U/A}$.

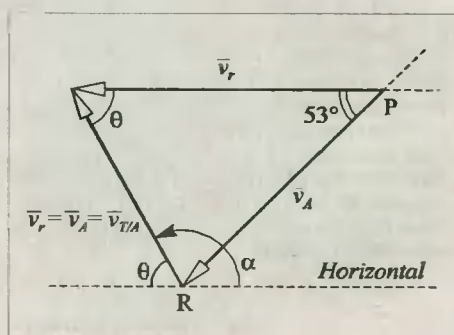
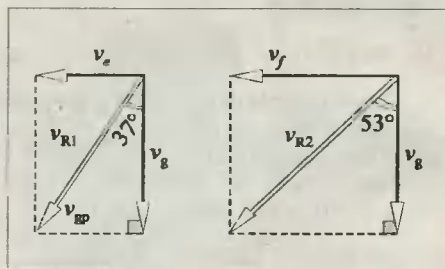
$$v_{U/A} = v_U - v_A$$

En la figura se muestra la gráfica de esta diferencia vectorial. Luego, por la relación (7.6) tendremos:

$$v_{U/A} = \sqrt{v_U^2 + v_A^2 - 2v_U \cdot v_A \cdot \cos 53^\circ}$$

$$v_{U/A} = \sqrt{30^2 + 25^2 - 2 \cdot 30 \cdot 25 \cdot 3/5}$$

$$\therefore v_{U/A} = 25 \text{ m/s}$$



Quiere decir que en el instante mostrado en el gráfico original, el tren se aleja del automóvil a razón de 25 m/s y en la dirección α , que se determinará reconociendo que el triángulo PQR es isósceles (RQ = RP). Luego, $\theta = 53^\circ$, y $\alpha = 180 - \theta = 127^\circ$.

$$\therefore v_{\alpha} = 25 \text{ m/s} / 127^\circ$$

7.10.b. Cálculo de la distancia.- Usando el gráfico original emplearemos la ley de cosenos.

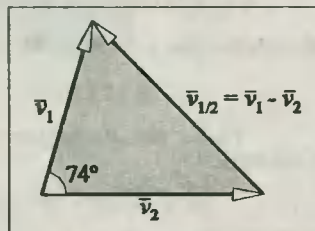
$$AT = \sqrt{35^2 + 196^2 - 2 \cdot 3.5 \cdot 196 \cos 53^\circ} \quad \therefore AT = 175 \text{ m}$$

7.11.a. Cálculo de la velocidad relativa.- Procediendo del mismo modo que en el problema anterior, tendremos:

$$v_{1/2} = \text{velocidad de 1 respecto a 2}$$

$$\Rightarrow v_{1/2} = v_1 - v_2 \dots (*)$$

Utilizando la representación vectorial del gráfico original, la diferencia de vectores indicada en (*) sería la mostrada.



$$v_{1/2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 \cdot v_2 \cdot \cos 74^\circ} \Rightarrow v_{1/2} = \sqrt{14^2 + 50^2 - 2 \cdot 14 \cdot 50 \cdot 7/25} \quad \therefore v_{1/2} = 48 \text{ cm/s}$$

7.11.b. Cálculo del tiempo.- Del resultado anterior deducimos que desde el móvil 2 se observa que el móvil 1 se aleja a razón de 48 cm/s; esto significa que el alejamiento relativo es 48 cm cada vez que transcurre 1 s. Luego, para que la separación sea 960 cm, deberá entonces transcurrir un tiempo que se obtendrá así:

$$t = d/v_{1/2} = 960/48 \quad \therefore t = 20 \text{ s}$$

7.12. Eligiendo un sistema de referencia móvil ubicado en B se observará al móvil A con una velocidad $v_{A/B}$ que vendrá dada por:

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

y que en el gráfico adjunto viene dado por la resultante de v_A y $(-v_B)$. Se observará también (desde B) que el móvil A describe una trayectoria rectilínea, por tener una velocidad constante.

$$v_{AB} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} \Rightarrow v_{A/B} = 15 \text{ cm/s}$$

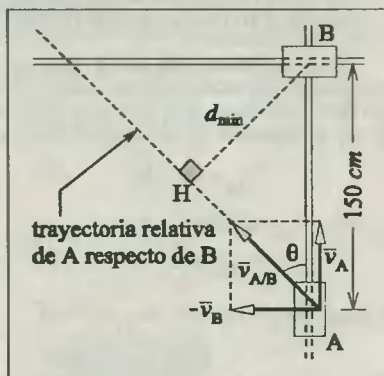
$$\text{Asimismo: } \text{tg } \theta = v_B/v_A = 9/12 = 3/4 \Rightarrow \theta = 37^\circ$$

También observamos que la mínima distancia que se presenta entre A y B es la perpendicular trazada desde B a la trayectoria de A (BH).

$$d_{\min} = BH = AB \cdot \text{sen } \theta \Rightarrow d_{\min} = 150 \cdot \text{sen } 37^\circ \quad \therefore d_{\min} = 90 \text{ cm}$$

Finalmente, el tiempo t para que esto se presente es el empleado por A para recorrer AH.

$$t = \frac{AH}{v_{A/B}} = \frac{AB \cdot \cos \theta}{v_{A/B}} = \frac{150 \cdot 4/5}{15} \quad \therefore t = 8 \text{ s}$$



7.13. Hagamos una representación gráfica del suceso (Fig (1)).

\vec{v}_b = velocidad del barco.

\vec{v}_v = velocidad del viento.

\vec{v} = velocidad del viento (v) respecto al barco (b).

$$\vec{v} = \vec{v}_{v/b} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_v - \vec{v}_b$$

Así, graficamos esta diferencia de vectores.

Se observa que: $y = 15 \cdot \text{sen}53^\circ \Rightarrow y = 12 \text{ m/s}$

$$x = 15 \cdot \text{cos}53^\circ \Rightarrow x = 9 \text{ m/s}$$

Luego, del triángulo rectángulo mayor tendremos:

$$v' = \sqrt{(x+7)^2 + y^2} = \sqrt{(9+7)^2 + 12^2}$$

$$\Rightarrow v' = 20 \text{ m/s}$$

$$\text{Y además: } \text{tg}\phi = \frac{y}{x+7} = \frac{12}{9+7} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \phi = 37^\circ$$

Finalmente, diremos lo siguiente:

El viento tiene una velocidad de 20 m/s vista desde el barco, y en la dirección O-37°-N

7.14. Al colocar un observador en el ómnibus estamos realmente utilizando un sistema de referencia móvil en dicho ómnibus. Así, la aceleración del automóvil respecto al ómnibus se obtendrá del siguiente modo:

$$\vec{a}_{1/2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \dots (*)$$

$$\text{donde: } \left. \begin{aligned} \vec{a}_1 &= 6\vec{i} \text{ m/s}^2 \\ \vec{a}_2 &= 7\vec{i} \text{ m/s}^2 \end{aligned} \right\} \dots (**)$$

Luego, de (**) en (*): $\vec{a}_{1/2} = 6\vec{i} - 7\vec{i}$

$$\therefore \vec{a}_{1/2} = -1\vec{i} \text{ m/s}^2$$

Nota: El signo (-) nos indica que el vector aceleración relativa ($\vec{a}_{1/2}$) apunta hacia el lado negativo del eje X.

7.15. Designando a la aceleración de caída de la gota como $\vec{a}_2 = \vec{g} = -10\vec{j} \text{ m/s}^2$, diremos lo siguiente:

$$\vec{a}_{2/1} = \text{aceleración de la gota respecto al automóvil} \Rightarrow \vec{a}_{2/1} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

En la figura mostramos la diferencia vectorial planteada en el plano x'-y'. Del triángulo vectorial diremos lo siguiente:

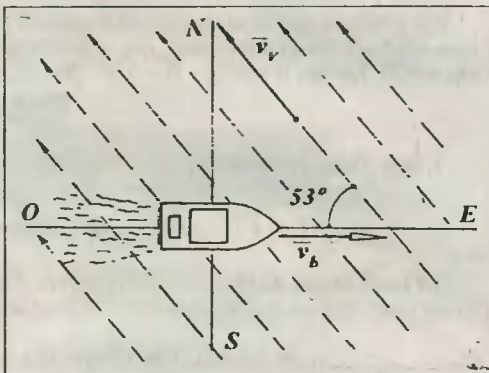


Fig. (1). Solución Prob. 7.13

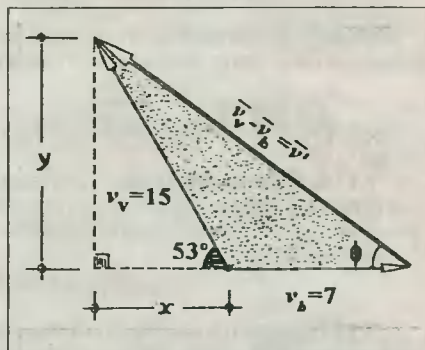
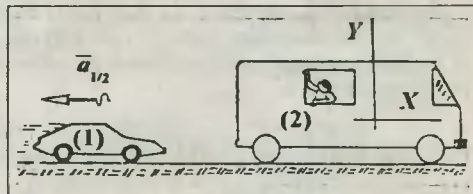


Fig. (2) Solución Prob. 7.13



$$a_{2/1} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 \cdot a_2 \cdot \cos 120^\circ}$$

$$a_{2/1} = \sqrt{6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot (-1/2)} \quad \therefore \quad \boxed{a_{2/1} = 14 \text{ m/s}^2}$$

7.16. Tratemos de averiguar la relación que existe entre las aceleraciones **1** y **2** recurriendo sólo a la geometría del sistema. Consideremos para ello que los bloques estaban inicialmente en reposo; asimismo, reconozcamos que el movimiento de traslación de la polea es el mismo que el del bloque **2**. Ahora, supongamos que la polea se ha trasladado la distancia e_2 ; ello implicará que el bloque **1** se ha trasladado la distancia e_1 , que deberá ser suficiente como para que la porción de cuerda que rodea a la polea y que se indica con línea punteada pueda aparecer en la longitud de $2e_2$, dado que la longitud de la cuerda que pasa por la polea es invariable (inelástica). Veamos.

$$e_1 = 2e_2 \Rightarrow 1/2 a_1 t^2 = 2(1/2 a_2 t^2) \therefore a_1 = 2a_2$$

Reemplazando datos: $\boxed{a_1 = 12 \text{ m/s}^2}$

7.17.1. De las poleas.- La aceleración del bloque **B** es la misma que la de la polea **2**. Luego: $a_2 = a_B$. Del gráfico mostrado deduciremos la aceleración de la polea **1**.

$$a_1 = 2a_2 \text{ (polea móvil)} \Rightarrow a_1 = 2a_B \dots (1)$$

7.17.2. De la polea 1 y el bloque A.-

$$a_Q = 2a_1 \quad \text{(polea móvil)}$$

Pero: $a_Q = a_A \Rightarrow a_A = 2a_1 \dots (2)$

Y de (1) en (2):

$$a_A = 2(2a_B) \Rightarrow a_B = a_A/4$$

Luego, reemplazando datos: $a_B = 8/4$

$$\therefore \quad \boxed{a_B = 2 \text{ m/s}^2}$$

7.18. Del dibujo propuesto notamos que podemos aplicar la relación (7.16): $a_3 = 1/2 (a_1 + a_2)$

Reemplazando datos:

$$a_3 = 1/2 [(+5) + (+3)]$$

$$\therefore \quad \boxed{a_3 = +4 \text{ m/s}^2}$$

7.19. Para este tipo de situaciones es recomendable considerar pequeños desplazamientos entre los cuerpos que nos permitan relacionarlos geoméricamente. Aceptemos que cuando el bloque **2** se desplace x , en el mismo tiempo el bloque **1** se desplace y . Veamos en el gráfico adjunto la formación de un triángulo rectángulo cuyos catetos son x e y .

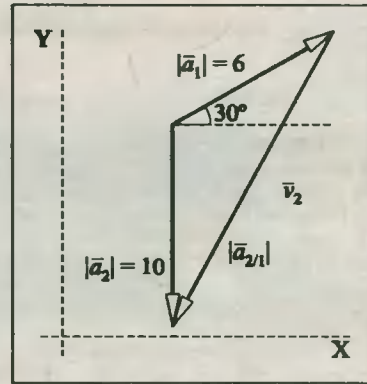


Fig. Solución Prob. 7.15

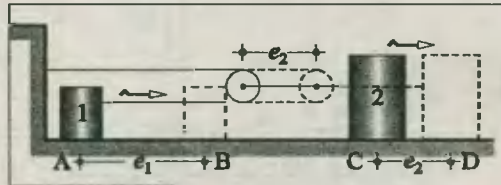


Fig. Solución Prob. 7.16

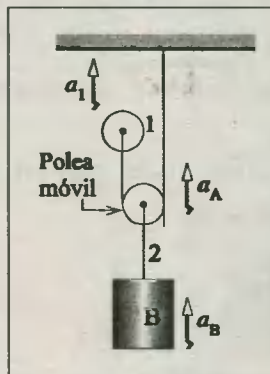


Fig. (1) Solución Prob. 7.17

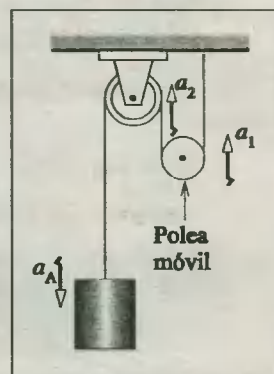


Fig. (2) Solución Prob. 7.17

$$\text{Del triángulo sombreado: } \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{1/2 a_1 t^2}{1/2 a_2 t^2} \Rightarrow a_1 = a_2 \operatorname{tg} \theta$$

$$\text{Reemplazando datos: } a_1 = 8.3/4 \quad \therefore \boxed{a_1 = 6 \text{ m/s}^2}$$

7.20. Observemos el gráfico adjunto. El observador colocado sobre la cuña 2 observa bajar al bloque 1 con una velocidad $v_{1/2}$, que posee el mismo módulo que v_2 , ya que l_2 es la longitud de cuerda igual al espacio que descendió por el plano inclinado, pero es también la distancia horizontal que avanzó la cuña en el mismo tiempo. Luego: $|v_{1/2}| = |v_2|$, y $v_{1/2} = v_1 - v_2$, siendo v_1 la velocidad absoluta del bloque 1, y que está representada por un vector orientado el ángulo β respecto a la horizontal y hacia abajo. Se puede apreciar la gráfica alusiva. De esta figura deducimos que: $v_1 = 2v_2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha/2)$

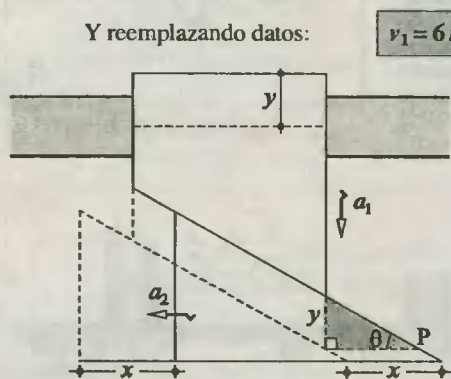


Fig. Solución Prob. 7.19

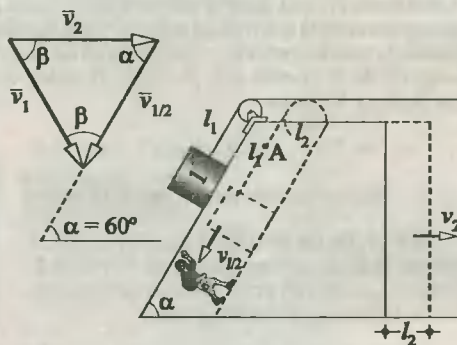


Fig. Solución Prob. 7.20

7.21. Desde que el bloque 1 avanza uniformemente, entonces: $x = v_1 \cdot t \dots (1)$

También, se sabe que la longitud de la cuerda es: $L = \sqrt{a^2 + b^2}$ (constante).

Del bloque 2 podemos decir que: $v_2 = dy/dt \dots (2)$

Y del triángulo mayor: $\sqrt{a^2 + (b+x)^2} + (a-y) = L$. Derivando esta expresión respecto al tiempo tenemos:

$$1/2[a^2 + (b+x)^2]^{-1/2} \cdot [2(b+x) \cdot dy/dt] - dy/dt = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{(b+x) dx/dt}{[a^2 + (b+x)^2]^{1/2}} \dots (3)$$

Finalmente, de (1) y (2) en (3):

$$\boxed{v_2 = \frac{b + v_1 t}{\sqrt{a^2 + (b + v_1 t)^2}} v_1 \dots (*)}$$

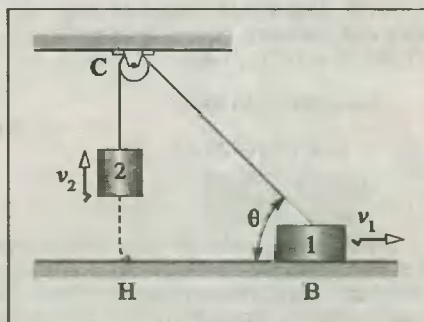
Observación.- En el gráfico notarás que:

$$b + v_1 t = HB; \sqrt{a^2 + (b + v_1 t)^2} = BC$$

$$\text{Luego, la expresión (*) se reduce a: } v_2 = \left(\frac{HB}{BC} \right) v_1$$

En el gráfico se ve que: $HB/BC = \cos \theta$. Finalmente:

$$\boxed{v_2 = v_1 \cdot \cos \theta \text{ (Fórmula general)}}$$



CAP 8 MOVIMIENTOS COMPUESTOS - MOVIMIENTO PARABOLICO

8.1. El movimiento del bote resulta ser un movimiento compuesto, pues además del movimiento que tienen las aguas del río, aquel posee su propio movimiento respecto a las aguas.

a) **Movimiento río abajo.**- Obsérvese en el gráfico la composición de velocidades.

$$v_1 = v_b + v_r = 5 \text{ m/s} + 3 \text{ m/s}$$

$$\therefore v_1 = 8 \text{ m/s}$$

b) **Movimiento río arriba.**- Obsérvese ahora que el bote avanza hacia la izquierda venciendo el arrastre del río.

$$v_2 = v_b - v_r = 5 \text{ m/s} - 3 \text{ m/s}$$

$$\therefore v_2 = 2 \text{ m/s}$$

8.2. **1^{er} método.**- Del movimiento de la lancha:

a) Río abajo: $d_1 = v_1 \cdot t_1 = (v_L + v_r) t_1 \dots (1)$

b) Río arriba: $d_2 = v_2 \cdot t_2 = (v_L - v_r) t_2 \dots (2)$

Luego, restando (2)-(1) miembro a miembro:

$$d_1 - d_2 = (v_L + v_r) t_1 - (v_L - v_r) t_2$$

Pero: $L = d_1 - d_2$, y $t_1 = t_2$ (condición del problema).

$$L = 2v_r \cdot t_1 \Rightarrow v_r = L/2t_1$$

$$\Rightarrow v_r = 6 \text{ km}/2 \cdot (1 \text{ h}) \therefore v_r = 3 \text{ km/h}$$

2^{do} método.- La balsa se mueve impulsada por las aguas con una velocidad v_r , y recorre la distancia L en un tiempo total $t_1 + t_2 = 2t_1$.
Luego, de $v = d/t \Rightarrow v_r = L/2t_1$.

8.3. Construyamos un gráfico con los datos del problema. Recurriendo al principio de la independencia de los movimientos diremos lo siguiente:

a) **Del movimiento transversal de la lancha:** La lancha tiene una velocidad v_1 transversal al río, y en esa dirección recorre la distancia $d = 144 \text{ m}$, para lo cual emplea un tiempo t que se determina así:

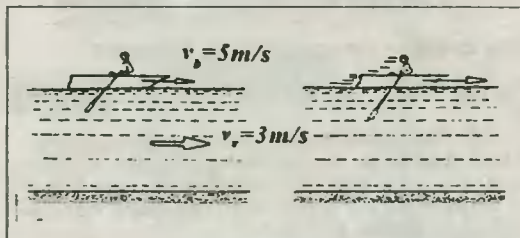


Fig. (1). Solución Prob. 8.1

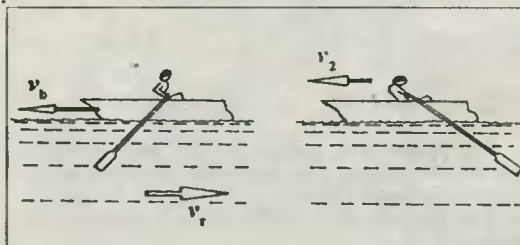


Fig. (2). Solución Prob. 8.1

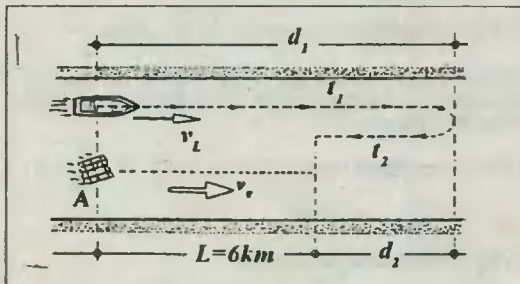


Fig. Solución Prob. 8.2

$$t = \frac{d}{v_1} \Rightarrow t = \frac{144 \text{ m}}{12 \text{ m/s}} \therefore t = 12 \text{ s}$$

b) **Del movimiento longitudinal de la lancha:** Durante el tiempo que emplea ésta en hacer su recorrido transversal, el río lo arrastra una distancia x , que será debido a la velocidad de las aguas. Luego:

$$x = v_r \cdot t = 5 \text{ m/s} \cdot 12 \text{ s} \therefore x = 60 \text{ m}$$

Otro método.- Por semejanza de triángulos:

$$x/144 = v_r/v_1 \Rightarrow x = 144 \cdot 5/12 \therefore x = 60 \text{ m}$$

8.4. Para que el arrastre sea el mínimo posible, el bote debe hacer un recorrido que lo lleve directamente a la orilla opuesta en una dirección que deberá ser perpendicular a la corriente. Para mayor claridad veamos el gráfico adjunto.

Del triángulo rectángulo sombreado:

$$\text{sen } \theta = \frac{v_r}{v_b} = \frac{3 \text{ m/s}}{6 \text{ m/s}} = \frac{1}{2} \therefore \theta = 30^\circ$$

$$\text{Luego: } \alpha = 90^\circ + 30^\circ \therefore \alpha = 120^\circ$$

8.5. Hagamos un gráfico que nos permita visualizar el movimiento y los datos del problema en él. Nuestro problema consiste en determinar la función $y = f(x)$ que nos dé la forma de la trayectoria, en donde:

x = Desplazamiento longitudinal de la lancha.

y = Desplazamiento transversal de la lancha.

Analizando el movimiento de la lancha, en base al principio de la independencia de los movimientos diremos lo siguiente:

a) Del movimiento longitudinal: $x = \frac{1}{2} a_x \cdot t^2$ ($v_{0x} = 0$)

$$t = \sqrt{2x/a_x} \dots (1)$$

b) Del movimiento transversal:

$$v_y = \text{velocidad de la lancha} = 6 \text{ m/s}; y = v_y \cdot t \dots (2)$$

$$\text{Luego, de (1) en (2): } y = v_y \cdot \sqrt{2x/a_x}; \text{ ó } y^2 = (2v_y^2/a_x)x \dots (*)$$

La ecuación obtenida representa a una parábola cóncava hacia la derecha y simétrica respecto al eje X. Luego, cuando la lancha llega a la otra orilla, reemplazando datos en (*) tenemos:

$$60^2 = (2 \cdot 6^2/4)x \therefore x = 200 \text{ m}$$

8.6. Observamos que la lancha sale de la orilla A con un movimiento compuesto, donde sus movimientos componentes serían:

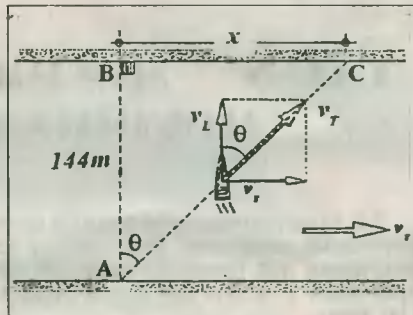


Fig. Solución Prob. 8.3

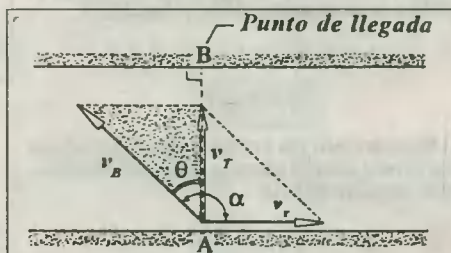


Fig. Solución Prob. 8.4

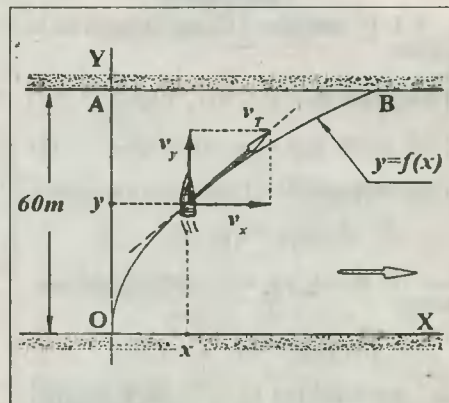


Fig. Solución Prob. 8.5

1°) El movimiento paralelo al eje X con una aceleración constante que le imprime su propio motor: $a_x = 5 \text{ m/s}^2$. Así pues, esta componente del movimiento será del tipo MRUA.

2°) El movimiento paralelo al eje Y con una aceleración constante igual a la que le imprime la corriente de agua ($a_y = a_x$). De este modo, esta componente del movimiento será considerada del tipo MRUA.

Observamos asimismo que si las aceleraciones son constantes, entonces se comprobará que la trayectoria final sería una línea recta que empieza en A y termina en B.

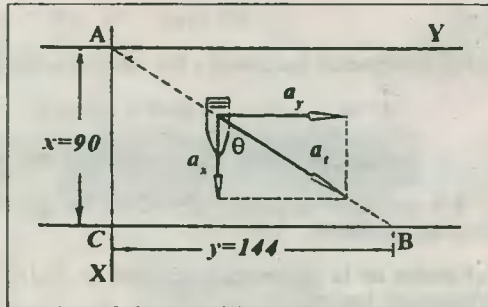


Fig. Solución Prob. 8.6

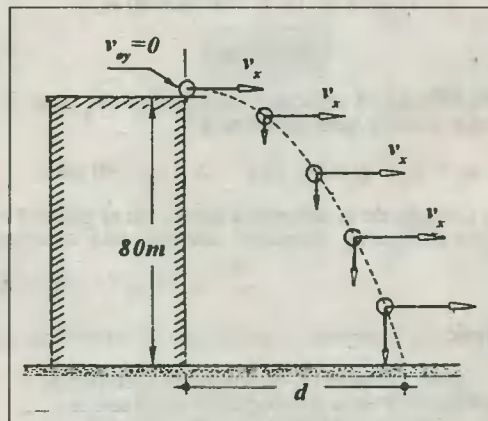
Del eje X: $x = \frac{1}{2} a_x t^2 \dots (1)$

Del eje Y: $y = \frac{1}{2} a_y t^2 \dots (2)$

De (2) ÷ (1): $y/x = a_y/a_x = \text{tg}\theta$

Y del gráfico: $144/90 = a_y/5 \text{ m/s}^2 \Rightarrow a_y = 8 \text{ m/s}^2 \therefore a_{\text{tr}} = 8 \text{ m/s}^2$

8.7. Desde que el lanzamiento de la piedra es horizontal, podemos afirmar que toda la velocidad ($v = 8 \text{ m/s}$) es totalmente horizontal. Luego, la componente vertical de ésta es nula ($v_{0y} = 0$). Seguidamente, se produce un movimiento compuesto parabólico en el cual la piedra logra descender verticalmente 80 m al chocar en el piso (en el eje Y), y en el mismo tiempo que dura la caída libre logra avanzar horizontalmente la distancia d (en el eje X).



a) Del movimiento vertical (eje Y):

$h = v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 \dots (v_{0y} = 0)$

$80 = \frac{1}{2} \cdot 10 t^2 \therefore t = 4 \text{ s}$

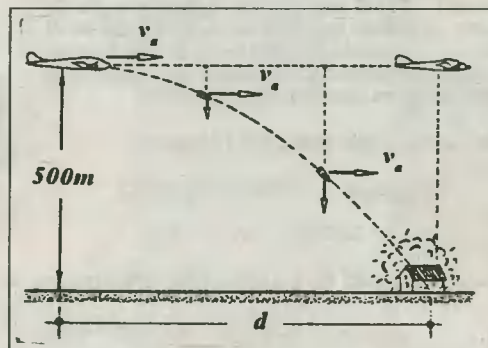
b) Del movimiento horizontal (eje X):

$d = v_x \cdot t \dots (\text{MRU})$

$d = 8 \cdot 4 \therefore d = 32 \text{ m}$

8.8. Cuando el avión suelta la bomba, ésta mantiene la velocidad horizontal del avión durante toda su caída; pero a medida que cae, su velocidad vertical va aumentando gradualmente desde "cero" hasta un máximo en el momento del impacto.

Sea A el punto del plano horizontal en donde el avión suelta la bomba. Durante el tiempo que emplea ésta en descender verticalmente los 500 m, habrá avanzado horizontalmente hasta B, punto donde se encuentra el blanco.



a) Del movimiento vertical.- Por tratarse de una caída libre vertical con $v_{0y} = 0$, diremos que:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 500 = \frac{1}{2} \cdot 10t^2 \quad \therefore \quad t = 10 \text{ s}$$

b) Del movimiento horizontal.- Por tratarse de un MRU, diremos:

$$d = vt \dots (v = 720 \text{ km/h} = 200 \text{ m/s}) \Rightarrow d = 200 \cdot 10 \quad \therefore \quad d = 2000 \text{ m}$$

Luego, la bomba debe soltarse 2 000 m antes de pasar por encima del blanco

8.9. Hagamos un gráfico para visualizar los datos del problema.

a) Cálculo de la distancia horizontal x .- Del movimiento horizontal:

$$v_x = v_o = 30 \text{ m/s} \Rightarrow x = v_x t = 30 \cdot 4$$

$$\therefore \quad x = 120 \text{ m}$$

b) Cálculo de la altura H .- Del movimiento vertical de caída libre:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4^2 \Rightarrow h = 80 \text{ m, y:}$$

$$H = 20 \text{ m}$$

(*) Además, la velocidad vertical final (v_{fy}) que logra adquirir será obtenida de:

$$v_{fy} = v_{oy} + gt = 0 + 10 \cdot 4 \Rightarrow v_{fy} = 40 \text{ m/s}$$

c) Cálculo de la velocidad total.- En el punto P el móvil posee dos velocidades perpendiculares entre sí: $\vec{v}_x \perp \vec{v}_{fy}$. Luego, la velocidad total se conseguirá así:

$$v_T = \sqrt{v_x^2 + v_{fy}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} \quad \therefore \quad v_T = 50 \text{ m/s}$$

Nota: La velocidad v_T forma con la vertical un ángulo $\theta = 37^\circ$. ¿Puedes deducirlo?.

8.10. Veamos el movimiento simultáneo del llavero y de la plataforma; se observará desde el piso que el llavero describe una parábola, pero que en todo momento se encuentra en la misma vertical que contiene al hombre. Por lo tanto, el tiempo que dura su vuelo deberá ser el mismo que emplea la plataforma en desplazarse la misma distancia horizontal que avanzó el llavero en su movimiento parabólico.

Del movimiento vertical del llavero:

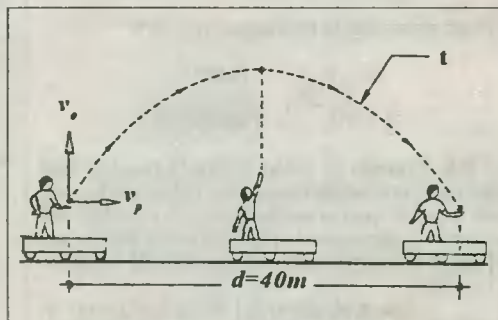
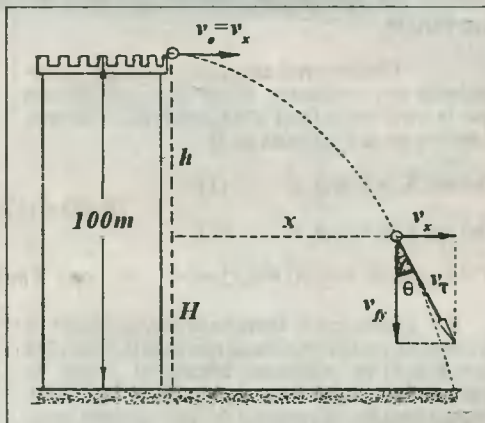
$$t = 2v_o/g \dots (\text{tiempo de vuelo})$$

$$t = 2 \cdot 10/10 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

Del movimiento de la plataforma.- Por tratarse de un movimiento uniforme:

$$v_p = d/t = 40/2 \quad \therefore \quad v_p = 20 \text{ m/s}$$

8.11. Conociendo las coordenadas del punto de altura máxima de la trayectoria parabólica nos



es fácil deducir tanto el alcance máximo (L) y la altura máxima (H). Así pues: $L = 60 \text{ m}$, y $H = 20 \text{ m}$.

a) Cálculo del ángulo de disparo θ .- Aplicaremos la relación (8.8).

$$\text{tg}\theta = 4H/L = 4 \cdot 20/60 = 4/3 \quad \therefore \quad \theta = 53^\circ$$

b) Cálculo de la velocidad de lanzamiento v_o .- Aplicaremos la relación (8.5).

$$H = v_o^2 \text{sen}^2\theta / 2g \Rightarrow v_o = \sqrt{2gH} \cdot \text{csc}\theta$$

$$\Rightarrow v_o = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} \cdot \text{csc}53^\circ = \sqrt{400} \cdot 5/4$$

$$\therefore \quad v_o = 25 \text{ m/s}$$

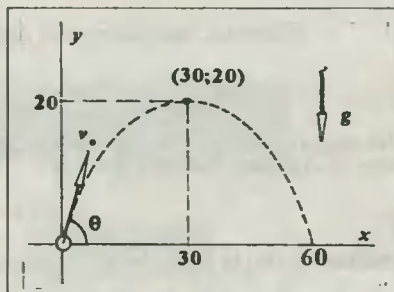


Fig. Solución Prob. 8.11

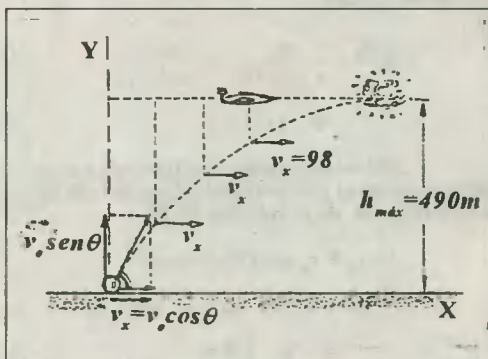
8.12. El problema nos plantea dos condiciones necesarias e imprescindibles para que el proyectil dé en el blanco:

1°) La componente horizontal de la velocidad del proyectil debe tener el mismo módulo que la velocidad del avión, es decir:

$$v_x = v_{\text{avión}} = 98 \text{ m/s} \dots (1)$$

De este modo aseguramos que el avión siempre tenga verticalmente debajo de él al proyectil.

2°) Asimismo, el proyectil debe elevarse verticalmente gracias a una velocidad inicial vertical mínima y suficiente que le permita alcanzar una altura igual a la que vuela el avión. De este modo diremos que: $H = 490 \text{ m} \dots (2)$



Según esto, de (1) diremos: $v_x = v_o \cdot \text{cos}\theta = 98 \dots (3)$

Y de (2) y la relación (8.5): $H = v_o^2 \text{sen}^2\theta / 2g = 490$

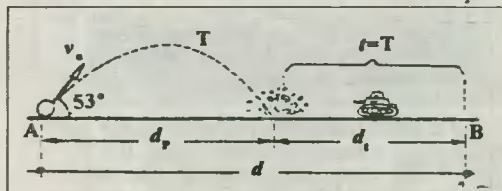
$$\Rightarrow v_o \text{sen}\theta = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 490} \Rightarrow v_o \text{sen}\theta = 98 \dots (4)$$

Finalmente, de (4) ÷ (3): $\text{tg}\theta = 1 \quad \therefore \quad \theta = 45^\circ$

8.13. Llamemos d a la distancia entre el mortero y el tanque en el instante del disparo. Haciendo un gráfico referido a tal suceso tendremos lo siguiente:

d_p = Alcance horizontal del proyectil.

d_t = Distancia recorrida por el tanque.



Sin embargo, para que el proyectil dé en el blanco, tanto el proyectil como el tanque deben llegar simultáneamente al mismo lugar; esto significa que ambos móviles emplean el mismo tiempo en sus movimientos.

Del proyectil: Calcularemos su alcance horizontal d_p : $d_p = \frac{v_o^2 \text{sen}2(53^\circ)}{g} = \frac{50^2 \cdot (24/25)}{g}$

$$\therefore d_p = 240 \text{ m} \dots (1) \quad (\text{sen}2(53^\circ) = \text{sen}106^\circ = \text{sen}74^\circ = 24/25)$$

Asimismo, calcularemos el tiempo de vuelo del proyectil: $T = \frac{2v_o \cdot \text{sen}53^\circ}{10} = \frac{2 \cdot 50 \cdot (4/5)}{10}$

$$\Rightarrow T = 8 \text{ s}$$

Del tanque: Como ya lo habíamos indicado, los tiempos de ambos movimientos deben coincidir entre sí. Así pues, tenemos: $d_t = v_t \cdot t \dots$ (MRU).

$$d_t = 5.8 \Rightarrow d_t = 40 \text{ m} \dots (2)$$

Finalmente, de (1) y (2): $d = d_p + d_t = 240 + 40 \therefore d = 280 \text{ m}$

8.14. Cálculo del tiempo que emplea la pelota en llegar a la valla peruana. - Del movimiento horizontal:

$$t = \frac{d_h}{v_h} = \frac{d_h}{v_o \cdot \text{cos}37^\circ} = \frac{9,6}{10 \cdot (4/5)}$$

$$\Rightarrow t = 1,2 \text{ s}$$

Del mismo modo, averigüemos a qué altura respecto al piso horizontal llega la bola al arco. Entonces, de la relación (5.7):

$$y = y_o + v_o \cdot \text{sen}37^\circ \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow y = 1,5 + 10 \cdot 3/5 \cdot 1,2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (1,2)^2$$

$$\Rightarrow y = 1,5 \text{ m}$$

Lo cual significa que la pelota llega al arco justo cuando se encontraba cayendo a 1,5 m del suelo.

Cálculo del tiempo que emplea Quiroga en llegar a P.

$$AP = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \text{ m}$$

Luego: $t_Q = e/v = 15/10 = 1,5 \text{ s}$

Comparando los tiempos, concluimos que será gol, pues Quiroga llega al arco después que la bola.

8.15. Analizando este problema según sus movimientos componentes, tendremos: $\theta = 37^\circ + 16^\circ = 53^\circ$. Observamos también que: $v_{oy} = v_o \cdot \text{sen}\theta = 100 \cdot \text{sen}53^\circ = 80 \text{ m/s}$, $v_{oh} = v_o \cdot \text{cos}\theta = 100 \cdot \text{cos}53^\circ = 60 \text{ m/s}$.

a) Del movimiento vertical notamos que desde el inicio, el móvil inició su movimiento hacia arriba. Luego, la altura h que alcanza cuando llega a B se determinará a partir de la relación (8.13).

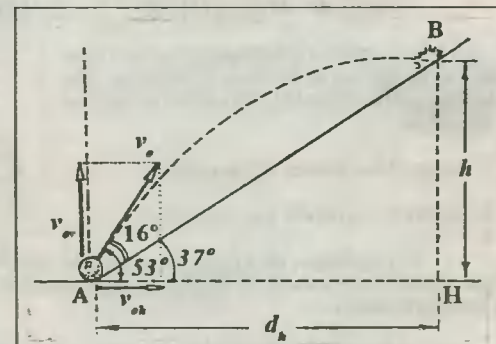
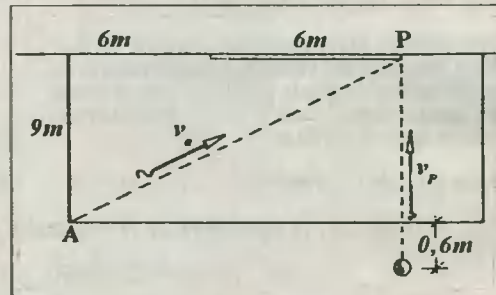
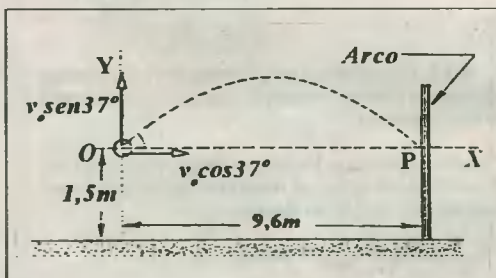


Fig (1). Solución Prob. 8.15

$$h = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 = 80t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2 \Rightarrow h = 80t - 5t^2 \dots (1)$$

b) **Del movimiento horizontal.**- La proyección del movimiento parabólico en el plano horizontal hasta cuando el móvil llega al punto B será tal que: $d_h = v_{oh} t \Rightarrow d_h = 60t \dots (2)$

Apreciando el triángulo AHB notamos que:

$$\operatorname{tg} 37^\circ = 3/4 = h/d_h \dots (3)$$

Luego, de (1) y (2) en (3):

$$\frac{3}{4} = \frac{80t - 5t^2}{60t} = \frac{16 - t}{12} \Rightarrow t = 7 \text{ s}$$

Luego, reemplazando en (2): $d_h = 420 \text{ m}$

Y en el triángulo AHB, según la proporcionalidad que muestra el triángulo pitagórico 37° - 53° , tendremos: $d_h = 4k = 420 \Rightarrow k = 105$.

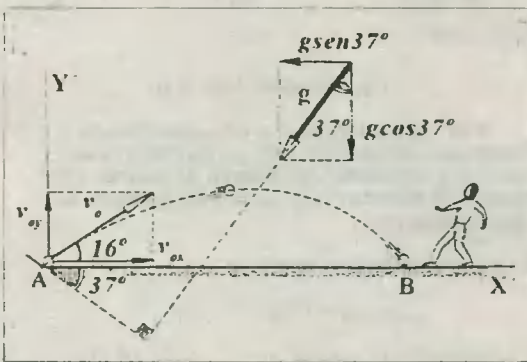
$$\text{Luego: } AB = 5k = 5 \cdot 105 \therefore \boxed{AB = 525 \text{ m}}$$

OTRO METODO: Colocando un observador sobre el plano (gráfico adjunto), se observará un movimiento curvilíneo (compuesto) en el cual la velocidad en los ejes X' e Y' experimentan variación debido a las aceleraciones.

$$a_x = g \cdot \operatorname{sen} 37^\circ$$

$$a_y = g \cdot \operatorname{cos} 37^\circ \text{ (De la descomposición vectorial de } g \text{)}$$

Observa detenidamente el gráfico y estarás de acuerdo conmigo en que las componentes de la velocidad inicial v_o son: $v_{ox} = v_o \cdot \operatorname{cos} 16^\circ$, y $v_{oy} = v_o \cdot \operatorname{sen} 16^\circ$. Seguidamente estudiaremos los movimientos compuestos.



1) **Movimiento vertical.**- Es un MRUV en el cual el tiempo de vuelo se calculará así:

$$t = \frac{2v_{oy}}{a_y} = \frac{2v_o \cdot \operatorname{sen} 16^\circ}{g \cdot \operatorname{cos} 37^\circ} \Rightarrow t = 7 \text{ s}$$

2) **Movimiento horizontal.**- Es otro MRUV en el cual la distancia recorrida d se calcula así:

$$d = v_{ox} t - \frac{1}{2} a_x t^2 = v_o \cdot \operatorname{cos} 16^\circ \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot \operatorname{sen} 37^\circ \cdot t^2 \therefore \boxed{d = 525 \text{ m}}$$

8.16. Se sabe que los proyectiles experimentan la misma aceleración vertical (g); pero, si consideramos que sus movimientos son uniformes, el punto de encuentro E se ubicará en la misma vertical que contiene al punto de choque P. Veamos.

$$\text{Del triángulo rectángulo AHE: } EH = AH \cdot \operatorname{tg} \beta \Rightarrow EH = x \cdot \operatorname{tg} \beta \dots (1)$$

$$\text{Del triángulo rectángulo BCE: } EC = BC \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow EC = x \cdot \operatorname{tg} \alpha \dots (2)$$

$$\text{Y del gráfico: } EC - EH = h \dots (3)$$

$$\text{Luego, de (1) y (2) en (3): } x \cdot \operatorname{tg} \alpha - x \cdot \operatorname{tg} \beta = h \therefore \boxed{x = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}}$$

8.17. Procederemos tal como lo hicimos en el problema anterior, es decir, prolonguemos las trayectorias como si no existiera aceleración de la gravedad.

Cálculo de θ : $EH = 60 \operatorname{tg} \theta = 80 \operatorname{tg} 37^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 1 \therefore \theta = 45^\circ$

Cálculo de v_B : $EH = v_B t \operatorname{sen} \theta = v_o t \operatorname{sen} 37^\circ \Rightarrow v_B = v_o \operatorname{sen} 37^\circ / \operatorname{sen} 45^\circ \therefore v_B = 30\sqrt{2} \text{ m/s}$

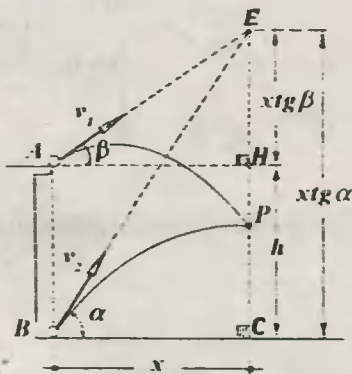


Fig. Solución Prob. 8.16

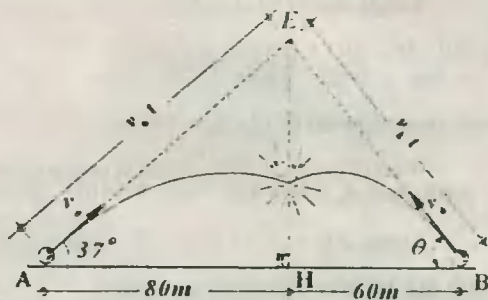


Fig. Solución Prob. 8.17

8.18. Para determinar la velocidad mínima v_o tomaremos en consideración que las componentes vertical y horizontal en el punto de partida son iguales en módulo (v), y ello debido al ángulo de lanzamiento (45°).

Del movimiento horizontal: $d_h = v_h \cdot t$

$$\Rightarrow vt = 15 \text{ m} \dots (1)$$

Del movimiento vertical: $h = v_{ov} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ (*)

Al llegar a la cerca, el móvil habrá ascendido hasta su cima; esto significa haber ascendido una altura de:

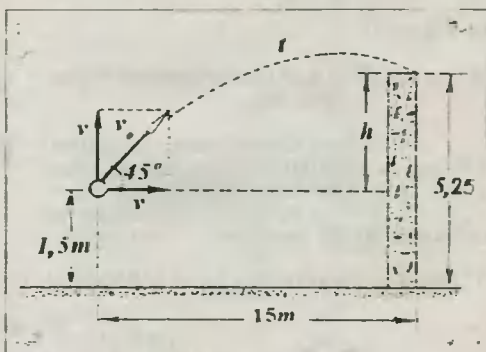
$$h = 5,25 - 1,5 = 3,75 \text{ m}$$

Luego, reemplazando datos en (*): $3,75 = vt - \frac{1}{2} \cdot 10 t^2 \dots (2)$

De (1) en (2): $3,75 = 15 - 5t^2 \Rightarrow t = 1,5 \text{ s}$

Así pues, en (1): $v = 15/1,5 \Rightarrow v = 10 \text{ m/s}$

Finalmente: $v_o = v \cdot \sqrt{2} \therefore v_o = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$



8.19. En este problema nos damos cuenta que, además de las incógnitas x e v , se presenta otra incógnita importante: El tiempo t que emplea el móvil en llegar a la boca del tubo. Entonces, para su cálculo nos basaremos en el detalle de que la velocidad horizontal y vertical del móvil al ingresar al tubo son exactamente del mismo valor, dado que la dirección de la velocidad total forma 45° con la vertical.

Del movimiento vertical.- Observando que la velocidad vertical disminuye durante el ascenso, y luego va aumentando hacia abajo, aplicaremos la relación (8.12):

$$\bar{v}_{v_f} = \bar{v}_{o_v} + \bar{g}t \dots (\text{ecuación vectorial})$$

$$\Rightarrow -v_{v_f} = +v_{o_v} - gt \Rightarrow -6 = +8 - 10t$$

$$\Rightarrow t = 1,4 \text{ s}$$

$$\text{Luego: } h = v_{o_v}t - \frac{1}{2}gt^2 = 8 \cdot 1,4 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (1,4)^2$$

$$\Rightarrow h = 1,4 \text{ m}$$

$$\text{Así pues: } y = 1,2 + 1,4 \therefore y = 2,6 \text{ m}$$

$$\text{Del movimiento horizontal: } x = v_h t = 6 \cdot 1,4 \therefore x = 8,4 \text{ m}$$

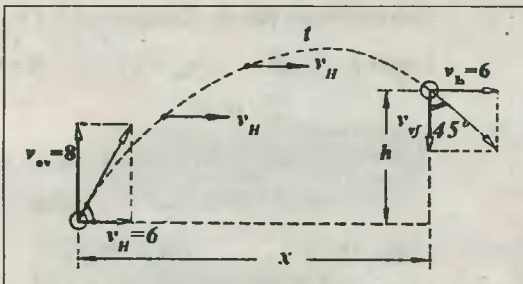


Fig. Solución Prob. 8.19

8.20. Cuando el electrón ingresa al condensador, lo hace con la velocidad v_o , incógnita del problema. A medida que avanza va intersectando a las líneas de fuerza del campo eléctrico, el cual lo acelerará verticalmente hacia la placa cargada positivamente; ésto significa que el electrón desarrolla un movimiento compuesto: El horizontal con MRU y el vertical con MRUV. Analizando el movimiento vertical, diremos:

$$v_{v_f} = v_{o_v} + a_v t \dots (a_v \neq g)$$

$$\Rightarrow v_{v_f} = 0 + a_v t \Rightarrow v_{v_f} = a_v t \dots (1)$$

Analizando la salida del electrón en B:

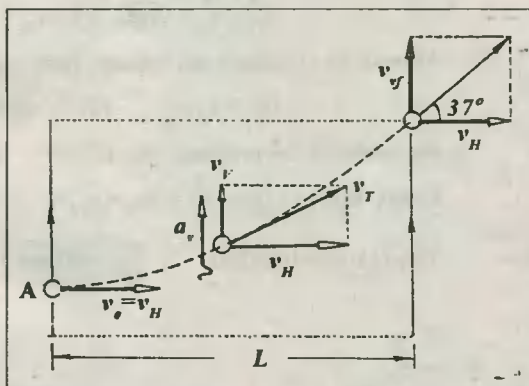
$$v_h = v_{v_f} \text{ctg}37^\circ \dots (2)$$

$$\text{De (1) en (2): } v_h = a_v t \text{ctg}37^\circ \dots (*)$$

$$\text{Y del movimiento horizontal: } t = d/v_h \Rightarrow t = L/v_h \dots (**)$$

$$\text{Finalmente, reemplazando (**) en (*): } v_h = a_v (L/v_h) \text{ctg}37^\circ \Rightarrow v_h = \sqrt{a_v L \text{ctg}37^\circ}$$

$$\text{Reemplazando valores: } v_h = 10^5 \text{ m/s}$$



8.21. Analizando el movimiento del motociclista (que es parabólico) obtendremos el tiempo t de caída y la altura de caída H .

En el punto B notamos que la descomposición vectorial de la velocidad total nos permite determinar la componente vertical v_{v_f}

$$v_{v_f} = v_h \text{ctg}37^\circ \Rightarrow v_{v_f} = v_o \text{ctg}37^\circ \dots (1)$$

$$\text{Y del movimiento vertical del motociclista: } v_{v_f} = v_{o_v} + gt \dots (v_{o_v} = 0)$$

$$v_{v_f} = 0 + gt \Rightarrow v_{v_f} = gt \dots (2)$$

$$\text{Igualando (2) y (1): } gt = v_o \text{ctg}37^\circ$$

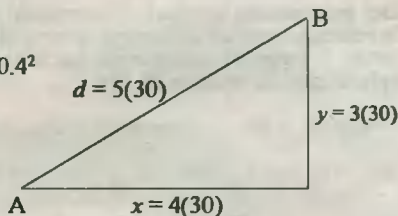
Reemplazando valores obtenemos: $t = 4 \text{ s}$.

Luego: $h = \frac{1}{2}gt^2 \dots (v_{0v} = 0) \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4^2$
 $\Rightarrow h = 80 \text{ m}$

Y de su movimiento horizontal: $x = v_h t = v_o t$
 $\Rightarrow x = 30.4 \Rightarrow x = 120 \text{ m}$

Luego: $H = h + y \therefore H = 170 \text{ m}$

Camión: $v = d/t = 5.30/4 \therefore v = 37,5 \text{ m/s}$



8.22. En la figura presentamos un gráfico donde indicamos los datos del problema. En vista que ambos móviles caen con $v_{0v} = 0$, y simultáneamente, entonces ambos poseerán la misma componente vertical en todo instante.

$$v_{vf}^A = v_{vf}^B = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_{vf} = 100 \text{ m/s} \dots (1)$$

Además, en el instante del impacto, para cada móvil se verifica que:

$$\text{tg}\beta = v_o/v_{vf} \dots (2); \text{ y } \text{ctg}\alpha = v_{vf}/v_h \dots (3)$$

Por condición del problema: $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \text{tg}\beta = \text{ctg}\alpha \dots (4)$

Luego, de (2) y (3) en (4): $v_o/v_{vf} = v_{vf}/v_h \Rightarrow v_o = v_{vf}^2/v_h$

Y de (1): $v_o = 100^2/250 \therefore v_o = 40 \text{ m/s}$

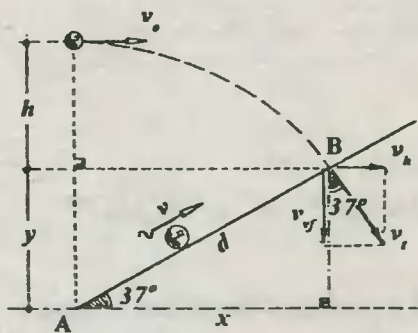


Fig. Solución Prob. 8.21

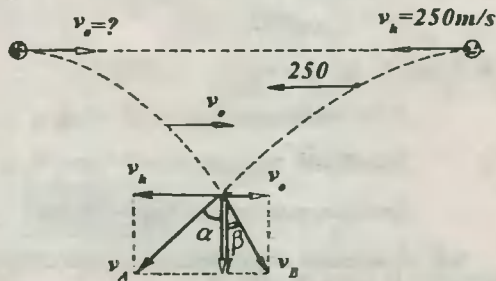


Fig. Solución Prob. 8.22

8.23. Observemos con claridad que el trayecto \widehat{AM} es el mismo que realiza la pelota en su segundo disparo: CB. De este modo se cumplirá que $CB = BD$. Así pues:

$$d_1 + d_2 = L \text{ (alcance horizontal)} \dots (1)$$

Aplicando la relación (8.15) tenemos:

Del lanzamiento desde A: $h = d_1(1 - d_1/L)\text{tg}\theta \dots (2)$

Del lanzamiento desde C:

$$h = d_2(1 - d_2/L) \operatorname{tg}\theta \dots (3)$$

Sumando miembro a miembro (2) + (3):

$$2h = [d_1(1 - d_1/L) + d_2(1 - d_2/L)] \operatorname{tg}\theta$$

Y de (1) obtenemos la siguiente expresión simplificada:

$$2h = \left(\frac{2d_1 d_2}{d_1 + d_2} \right) \operatorname{tg}\theta \dots (*)$$

Además, de la condición del problema: $1/h = 1/d_1 + 1/d_2 \Rightarrow h = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}$

Finalmente, en (*): $h = h \operatorname{tg}\theta \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = 1 \therefore \theta = 45^\circ$

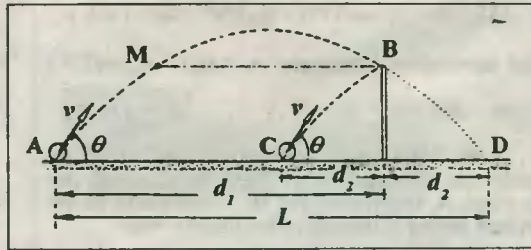


Fig. Solución Prob. 8.23

8.24. Determinando las coordenadas de los dos primeros vértices del hexágono, relativas al origen de coordenadas O, encontramos que:

Punto A: $x_A = L/2 - a = \frac{1}{2}(L - 2a)$

$$y_A = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$$

Punto B: $x_B = L/2 - a/2 = \frac{1}{2}(L - a)$

$$y_B = 2(a/2 \sqrt{3}) = a \sqrt{3}$$

Ya que el móvil pasa por los puntos A y B, utilizaremos la relación (8.15).

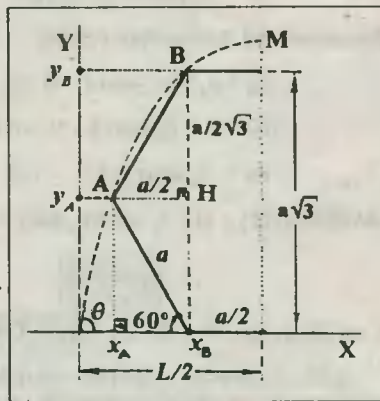
Para A: $\frac{1}{2} a \sqrt{3} = \frac{1}{2}(L - 2a) \cdot \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(L - 2a)}{L} \right] \operatorname{tg}\theta$

Simplificando obtenemos: $a\sqrt{3} = \left(\frac{L^2 - 4a^2}{2L} \right) \operatorname{tg}\theta \dots (1)$

Para B: $a\sqrt{3} = \frac{1}{2}(L - a) \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(L - a)}{L} \right] \operatorname{tg}\theta \Rightarrow a\sqrt{3} = \left(\frac{L^2 - a^2}{4L} \right) \operatorname{tg}\theta \dots (2)$

Observamos que (1) = (2). Luego: $\left(\frac{L^2 - 4a^2}{2L} \right) \operatorname{tg}\theta = \left(\frac{L^2 - a^2}{4L} \right) \operatorname{tg}\theta$

$$2(L^2 - 4a^2) = L^2 - a^2 \Rightarrow L^2 = 7a^2 \Rightarrow L = \sqrt{7} a \therefore L = 7 \text{ m}$$



8.25. El x mínimo se presentará cuando el proyectil, luego de los muchos intentos de lanzamiento, pase por el borde B. Así pues, el primer tramo AB será su alcance horizontal, del cual deduciremos la velocidad de lanzamiento v_0 . Luego, trazando un plano coordenado con origen en A se logrará calcular la medida de x con ayuda de la profundidad BC.

Del trayecto AB: $L = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \Rightarrow \frac{v_0^2 \cdot 24/25}{10} = 240 \Rightarrow v_0 = 50 \text{ m/s}$

Del trayecto AE: Del movimiento vertical: $y_E = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$

$$-135 = 0 + 50 \cdot \text{sen}37^\circ \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2 \Rightarrow t = 9 \text{ s}$$

Del movimiento horizontal: $x_E = v_h \cdot t = v_0 \cdot \text{cos}37^\circ \cdot t$

$$\Rightarrow 240 + x = 50 \cdot 4/5 \cdot 9 \therefore x = 120 \text{ m}$$

8.26. Trazando un plano coordenado X - Y de modo que su origen de coordenadas coincida con el punto A, tendremos que las coordenadas de los puntos inicial y final del movimiento son:

A: $x_0 = 0 \text{ m}, y_0 = 0 \text{ m}$

B: $x_B = 24 \text{ m}, y_B = -162 \text{ m}$

Recordemos del movimiento horizontal que:

$$x_B = v_x \cdot t = v_0 \cdot \text{cos}\alpha \cdot t \Rightarrow 24 = v_0 \cdot \text{cos}\alpha \cdot 6$$

$$\Rightarrow v_0 \cdot \text{cos}\alpha = 4 \dots (1)$$

Asimismo, del movimiento vertical:

$$y_B = y_0 + v_0 \cdot \text{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$-162 = 0 + v_0 \cdot \text{sen}\alpha \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6^2$$

$$\Rightarrow v_0 \cdot \text{sen}\alpha = 3 \dots (2)$$

Dividiendo (2) ÷ (1): $v_0 \cdot \text{sen}\alpha / v_0 \cdot \text{cos}\alpha = 3/4$

$$\therefore \alpha = 37^\circ$$

Y en (1): $v_0 \cdot \text{cos}37^\circ = 4 \therefore v_0 = 5 \text{ m/s}$

8.27. Se muestra el gráfico con todas las magnitudes participantes y que nos interesan.

Cañería A: Aplicamos la relación (8.14) con $y_0 = 0$, $\alpha = 0$ y $x = 2 \text{ m}$.

$$y = y_0 + x \cdot \text{tg}\alpha - \frac{g}{2v_A^2 \cdot \text{cos}^2\alpha} x^2$$

Reemplazando valores obtenemos: $y = -20 \text{ m}$

Cañería B: Calculemos el tiempo de llegada de los chorros al punto C: $t = d_{hA} / v_{hA} = 2/1 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$.

A continuación analicemos el movimiento vertical del chorro que sale de B: $\bar{y} = \bar{y}_0 + \bar{v}_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$.

En el punto C: $-20 = h + (-5) \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2$

$$\therefore h = 10 \text{ m}$$

(*) Queda para el alumno el cálculo de x.

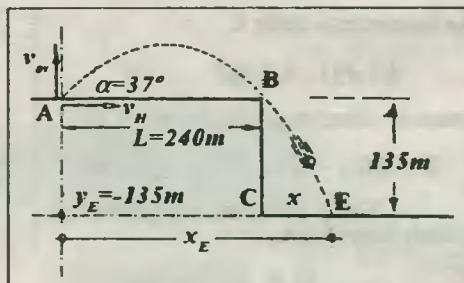


Fig. Solución Prob. 8.25

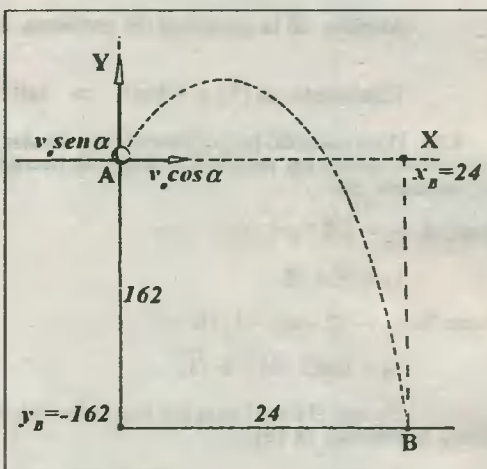


Fig. Solución Prob. 8.26

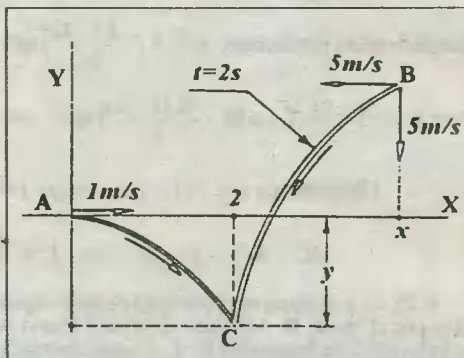


Fig. Solución Prob. 8.27

8.28. Observando el problema, nos damos cuenta que si conociéramos el tiempo de vuelo del movimiento, sería sumamente fácil encontrar el desplazamiento horizontal y vertical. Sin embargo, como los datos conocidos son las velocidades, deduciremos de ahí el tiempo mencionado.

Del movimiento vertical: $v_{fv} = v_{ov} - gt$

$$\Rightarrow -4 = +3 - 10t \Rightarrow t = 0,7 \text{ s}$$

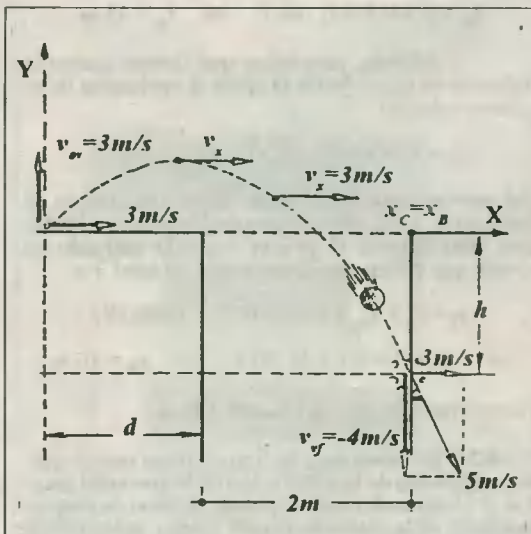
Del movimiento horizontal: $x_C = v_x t$

$$\Rightarrow d + 2 = 3 \cdot 0,7 \quad \therefore \quad \boxed{d = 0,1 \text{ m}}$$

Del movimiento vertical: $y_C = y_0 + v_{ov} t - \frac{1}{2} g t^2$

$$\Rightarrow -h = 0 + 3 \cdot 0,7 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (0,7)^2$$

$$\therefore \quad \boxed{h = 0,35 \text{ m}}$$



8.29. Denominamos H a la altura de M respecto al piso que contiene a P . Estableciendo un sistema coordenado cuyo origen coincida con M tendremos:

Móvil que sale de Q : Aplicaremos la relación (8.14), con $\theta = 0$.

$$y = y_0 + x \cdot \text{tg} \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \theta} x^2 \Rightarrow -H = -220 + 480 \cdot \text{tg} 0^\circ - \frac{10}{2 \cdot 48^2 \cdot \cos^2 0^\circ} (480)^2 \Rightarrow H = 720 \text{ m}$$

El tiempo que demora el móvil que sale de Q en llegar a P es: $t_Q = d_{hQ} / v_{hQ} = 480/48$

$$\Rightarrow t_Q = 10 \text{ s}$$

Así entonces, el tiempo t que empleó el móvil que salió de M en llegar a P fue: $t = t_Q + 10 = 20 \text{ s}$.

Móvil que sale de M : $v_h = v_0 \cdot \cos \theta$, y $v_{ov} = v_0 \cdot \text{sen} \theta$

Del movimiento horizontal: $v_h = d_h / t = 960/20 \Rightarrow v_0 \cdot \cos \theta = 48 \text{ m/s} \dots (1)$

Del movimiento vertical: $y = y_0 + v_{ov} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow -720 = 0 + v_{ov} \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20^2$

$$\Rightarrow v_{ov} = 64 \text{ m/s}, \text{ ó } v_0 \cdot \text{sen} \theta = 64 \text{ m/s} \dots (2)$$

Dividiendo (2) \div (1): $v_0 \cdot \text{sen} \theta / v_0 \cdot \cos \theta = 64/48 \Rightarrow \text{tg} \theta = 4/3 \Rightarrow \theta = 53^\circ$

Finalmente, en (1): $v_0 \cdot \cos 53^\circ = 48 \quad \therefore \quad \boxed{v_0 = 80 \text{ m/s}}$

8.30. Aunque sería preferible estudiar el movimiento descomponiéndolo primero en una caída libre desde O hasta A , y luego como un movimiento compuesto desde A hasta B , nosotros lo resolveremos a partir del principio de la independencia de los movimientos.

Del movimiento vertical.- $v_{ox} = 0 \text{ m/s}$, y $x_0 = 0 \text{ m}$, siendo el tiempo desde O hasta B igual a 3 s . Reconociendo además que durante toda la caída estuvo presente una aceleración vertical constante (la gravedad) $a_x = 10 \text{ m/s}^2$.

$$x_f = x_0 + v_{ox} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \text{ (MRUV)}$$

$$x_B = 0 + 0.3 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2 \Rightarrow x_B = 45 \text{ m}$$

Además, para saber qué tiempo estuvo la partícula en caída desde O hasta A aplicamos la siguiente relación:

$$t_1 = \sqrt{2h/g} = \sqrt{2 \cdot 20/10} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

Del movimiento horizontal.- Este movimiento se inicia en A, y que para nuestro problema lo analizaremos sólo durante el primer segundo teniendo en cuenta que deben complementarse en total 3 s.

$$y_T = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2} a_y t^2 \dots \text{ (MRUV)}$$

$$\Rightarrow y_B = 0 + 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1^2 \Rightarrow y_B = 10 \text{ m}$$

Finalmente: **B** $(x_B, y_B) = (45, 10) \text{ m}$

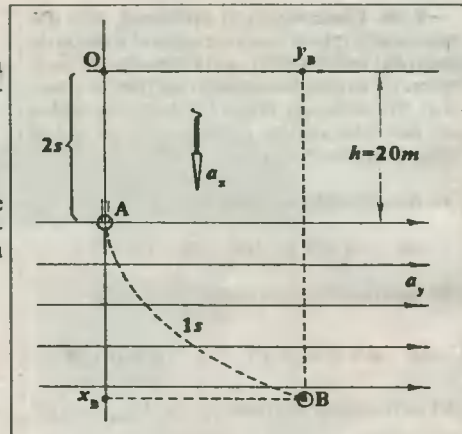
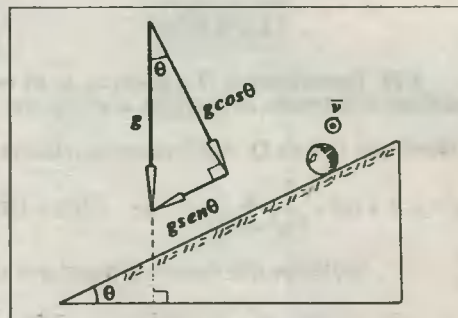


Fig. Solución Prob. 8.30

8.31. De acuerdo a la figura, observamos que la componente de la aceleración de la gravedad paralela al plano inclinado y coplanar al plano de desplazamiento de la esfera es $g \text{sen} \theta$. Luego, aplicando la expresión (8.6) para este caso, tendremos:

$$e = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen} 2\alpha}{g \cdot \text{sen} \theta}$$

Reemplazando datos obtenemos: **e = 192 m**



CAP 9 MOVIMIENTO DE ROTACION

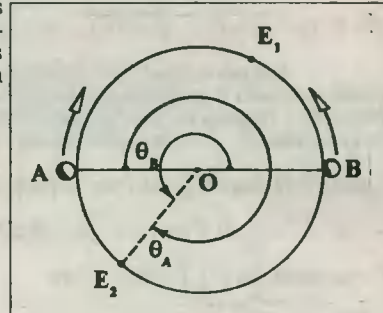
9.1. Del gráfico mostrado reconocemos que los puntos E_1 y E_2 son los lugares del primer y segundo encuentro respectivamente. Asimismo se observa que los ángulos girados θ_A y θ_B señalan el segundo encuentro, los que a su vez están relacionados entre sí de modo que:

$$\theta_A + \theta_B = 3\pi \text{ rad} \dots (*)$$

Y utilizando la relación (9.4) y (9.6) tendremos en (*):

$$\omega_A t + \omega_B t = 3\pi \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T_A} + \frac{2\pi}{T_B}\right)t = 3\pi$$

$$\Rightarrow t = \frac{3}{2} \left(\frac{T_A T_B}{T_A + T_B}\right) \therefore t = 18 \text{ s}$$



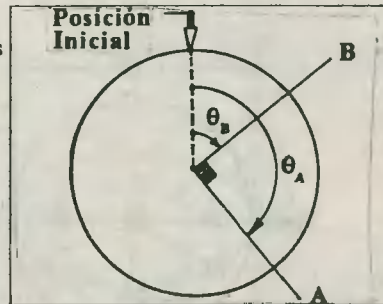
9.2. En base al esquema mostrado, los desplazamientos angulares satisfacen la siguiente relación:

$$\theta_A - \theta_B = \pi/2 \text{ rad} \dots (*)$$

Utilizando las relaciones (9.4) y (9.7) tendremos:

$$(\omega_A - \omega_B)t = \pi/2 \Rightarrow t = \left(\frac{\pi/2}{2\pi f_A - 2\pi f_B}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{f_A - f_B}\right) \therefore t = 1/20 \text{ min} \text{ ó } t = 3 \text{ s}$$

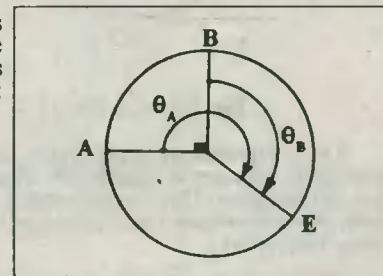


9.3. De acuerdo con los valores de los periodos, podemos afirmar que la barra B es más lenta que el de la barra A, de modo que ésta lo alcanza en un punto tal como E. Los ángulos girados por cada uno estarán relacionados del siguiente modo:

$$\theta_A - \theta_B = \pi/2 \text{ rad} \Rightarrow (\omega_A t - \omega_B t) = \pi/2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T_A} - \frac{2\pi}{T_B}\right)t = \pi/2 \Rightarrow t = \frac{1}{4} \left(\frac{T_A T_B}{T_B - T_A}\right)$$

$$\therefore t = 15 \text{ s}$$



9.4. Al observar el movimiento de la bala comprobamos que la distancia que recorre es igual al diámetro de la esfera. Luego, el tiempo que emplea en atravesarla viene dado por:

$$t = e/v = 2R/v = 2.10/200 \Rightarrow t = 0,1 \text{ s}$$

Para producir un solo agujero, la bala deberá salir por el agujero de entrada, el cual en el mismo tiempo t encontrado deberá girar un ángulo $\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$, etc. Por condición del

problema, la esfera tendrá una velocidad angular mínima, si y sólo si el ángulo θ sea de todos los posibles, el menor. Luego, usando la relación (9.3) tendremos:

$$\omega = \theta/t = \pi \text{ rad}/0,1 \text{ s} \quad \therefore \quad \boxed{\omega = 10\pi \text{ rad/s}} \quad \text{ó} \quad \boxed{\omega = 5 \text{ rev/s}}$$

9.5. Calculemos el tiempo que emplea cada pelota en llegar hasta la plataforma horizontal aplicando la relación (5.3), con $v_0 = 0$.

$$\text{De A: } t_A = \sqrt{2h_A/g} = \sqrt{2 \cdot 20/10} \Rightarrow t_A = 2 \text{ s}$$

$$\text{De B: } t_B = \sqrt{2h_B/g} = \sqrt{2 \cdot 45/10} \Rightarrow t_B = 3 \text{ s}$$

De estos resultados comprendemos que A tocó primero la plataforma, y durante 1 s el punto marcado P gira conjuntamente con la plataforma hasta que la pelota B la toca marcando el punto Q, y formándose en ese preciso instante el ángulo POQ. En el gráfico adjunto, indicamos dicho ángulo como β , y observamos además que: $\beta + \theta = 180^\circ \dots (*)$

siendo θ el ángulo girado por la plataforma con velocidad angular constante, y durante 1 s.

$$\theta = \omega t \Rightarrow \theta = (2\pi/T)t = (2\pi/12) \cdot 1 \quad \theta = \pi/6 \text{ rad} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

$$\text{Finalmente, en (*): } \beta + 30^\circ = 180^\circ \quad \therefore \quad \boxed{\beta = 150^\circ}$$

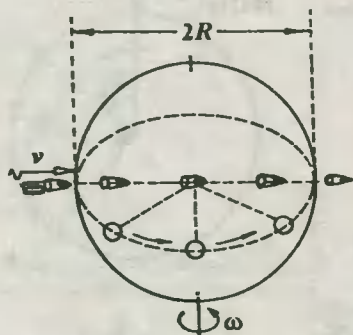


Fig. Solución Prob. 9.4

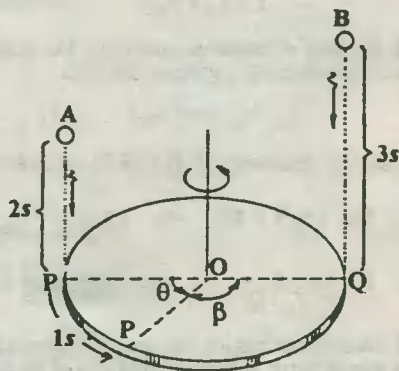
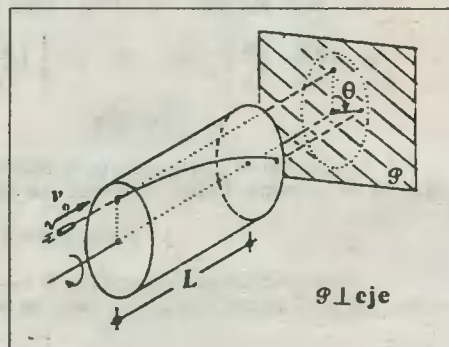


Fig. Solución Prob. 9.5

9.6. Comprobamos con el gráfico adjunto que al avanzar la bala por el interior del cilindro describe dos movimientos: Uno circunferencial y el otro lineal, denominándose a este movimiento compuesto como helicoidal.

Basándonos en el principio de la independencia de los movimientos, diremos que el movimiento lineal (paralelo al eje del cilindro) es independiente al movimiento circunferencial que le imprime la rotación del cilindro.

Del movimiento lineal. - Por tratarse de un movimiento rectilíneo uniformemente retardado, aplicando la relación (4.7) tendremos:



$$\frac{v_o + v_f}{2} = \frac{e}{t} \Rightarrow \frac{350 + 250}{2} = \frac{3}{t} \Rightarrow t = 1/100 \text{ s}$$

Luego, la bala empleó 1/100 s en atravesar el cilindro.

Del movimiento circular.- La proyección de la bala se desplaza con movimiento de rotación uniformemente en el plano P. Luego:

$$\theta = \omega t \Rightarrow \theta = 2 \text{ rev/s} \cdot 1/100 \text{ s} = 1/50 \text{ rev} = 1/50 \cdot (360^\circ) \therefore \theta = 7.2^\circ$$

9.7. Notamos que en el mismo tiempo que la esferilla emplea en volver a la plataforma, ésta (y el punto B) gira un ángulo de 270° (3π/2), que por condición del problema permitirá que dicha esferilla encuentre a su paso al punto B.

Del movimiento parabólico.- Notamos que el alcance horizontal es 2R. Aplicando la relación (8.6) tendremos:

$$\frac{v_o^2 \cdot \text{sen}^2(37^\circ)}{g} \Rightarrow v_o = \sqrt{2gR \cdot \text{csc}74^\circ}$$

Reemplazando datos obtenemos: $v_o = 5 \text{ m/s}$.

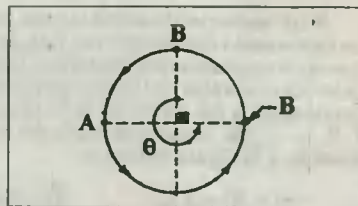
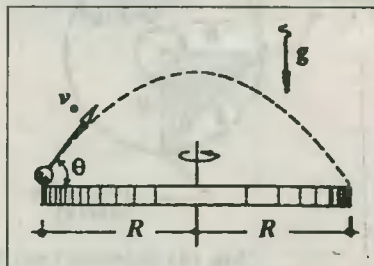
Luego, el tiempo de vuelo será: $t = 2v_o \cdot \text{sen}37^\circ/g$

Reemplazando datos: $t = 0,6 \text{ s}$

Del movimiento de rotación de la plataforma.- Por ser un movimiento de rotación uniforme, aplicamos la relación (9.3).

$$\omega = \frac{\theta}{t} \Rightarrow \omega = \frac{3\pi/2}{0,6 \text{ s}}$$

$$\therefore \omega = 2,5\pi \text{ rad/s} \quad \text{ó} \quad \omega = 75 \text{ rpm}$$



9.8. Del gráfico adjunto, la piedra se encuentra inicialmente en reposo y en la misma vertical que contiene al punto P del disco que gira horizontalmente. De este modo, ambos movimientos independientes toman el mismo tiempo hasta que la piedra toque a la plataforma, tiempo en el cual el punto P se habrá trasladado a otra posición debido al movimiento de rotación del disco.

De la piedra.- Por tener un movimiento de caída libre con $v_o = 0$, aplicamos la relación (5.3).

$$t = \sqrt{2h/g} = \sqrt{2 \cdot 4,9/9,8} \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

Del disco.- Por poseer un movimiento de rotación uniforme, el desplazamiento angular experimentado será:

$$\theta = \omega t = (45 \text{ rpm}) \cdot 1 \text{ s} = (45 \cdot 2\pi \text{ rad}/60 \text{ s}) \cdot 1 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \theta = 3\pi/2 \text{ rad} \quad \text{ó} \quad \theta = 270^\circ$$

En la figura (2) tenemos el gráfico de este resultado.

Del triángulo rectángulo sombreado tenemos: $d = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2} R \Rightarrow d = \sqrt{2} \cdot 15\sqrt{2}$

$$\therefore d = 30 \text{ cm}$$

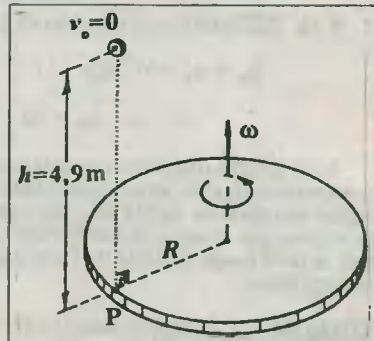


Fig. (1). Solución Prob. 9.8

9.9. En la figura se muestra el gráfico para este movimiento.

$$\text{De la relación (9.11): } 600 \text{ rev} = \frac{1}{2} (3\omega_0 + \omega_0) \cdot 20 \text{ s} \Rightarrow \omega_0 = 15 \text{ rev/s}$$

$$\text{Ahora, aplicamos la relación (9.2): } \alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{3\omega_0 - \omega_0}{t} \Rightarrow \alpha = \frac{2\omega_0}{t}$$

$$\text{Reemplazando datos: } \alpha = 2 \cdot 15 / 20 \quad \therefore \quad \alpha = 1,5 \text{ rev/s}^2$$

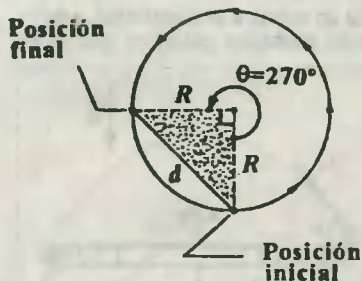


Fig. (2). Solución Prob. 9.8

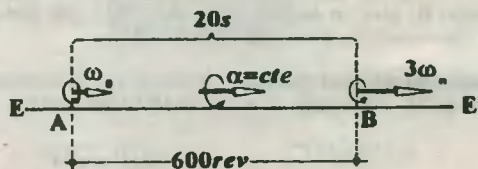


Fig. Solución Prob. 9.9

9.10. Recurriendo sólo a la característica de un movimiento uniformemente variado, diremos que los desplazamientos (angulares) experimentados en intervalos de tiempo también son proporcionales a los números de Galileo: 1, 3, 5, 7, 9, ... etc. cuando se parte del reposo. De acuerdo a la figura tenemos:

$$1\theta + 3\theta = 8 \text{ rev} \quad \therefore \quad \theta = 2 \text{ rev}$$

9.11. Aplicaremos la relación (9.12):

$$\theta_{n^\circ} = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha (2n - 1)$$

$$\Rightarrow \theta_{n^\circ} = 40 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot (2 \cdot 4 - 1) \quad \therefore \quad \theta_{n^\circ} = 33 \text{ rev}$$

9.12. Este movimiento circunferencial uniformemente variado será representado gráficamente, teniendo en cuenta sólo sus aspectos rotacionales; por lo tanto, la descripción que haremos se hará desde el punto de vista angular del movimiento.

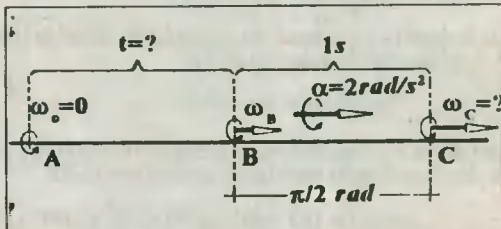
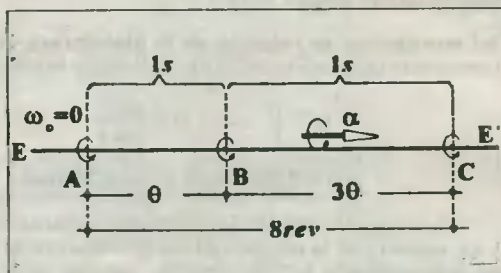
Tramo BC.- Aplicando la relación (9.10) tenemos lo siguiente:

$$\theta = \omega_B t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow \pi/2 = \omega_B \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^2$$

$$\Rightarrow \omega_B = \frac{1}{2} (\pi - 2) \text{ rad/s}$$

Asimismo, aplicamos la relación (9.8): $\omega_f = \omega_0 + \alpha t$

$$\Rightarrow \omega_C = \omega_B + \alpha t = \frac{1}{2} (\pi - 2) + 2 \cdot 1 \Rightarrow \omega_C = \frac{1}{2} (\pi + 2) \text{ rad/s}$$



Tramo AB.- Reconociendo que el móvil parte del reposo ($\omega_A = 0$), aplicaremos la relación (9.8):

$$\omega_B = \alpha t \Rightarrow t = \omega_B / \alpha = \frac{1}{2} (\pi - 2) / 2 \therefore t = \frac{1}{2} (\pi - 2) \text{ ó } t \approx 0,285 \text{ s}$$

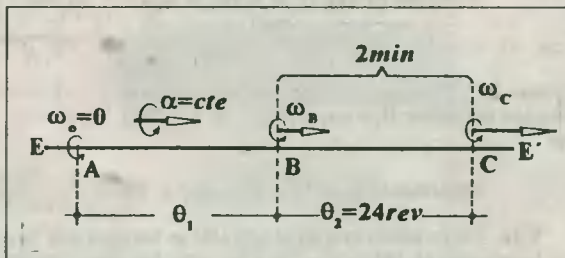
9.13. Hagamos la descripción del movimiento sobre el eje imaginario de rotación adjunto, y así tendremos:

A: Punto de partida.

B: Primer punto.

$$\omega_C = 18 \text{ rpm}, \theta_1 = ??$$

C: Segundo punto.



Tramo BC.- Por ser un movimiento uniformemente acelerado, aplicaremos la relación (9.11).

$$\theta_2 = \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega_f) t \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} (\omega_B + 18) \cdot 2 \Rightarrow \omega_B = 6 \text{ rpm}$$

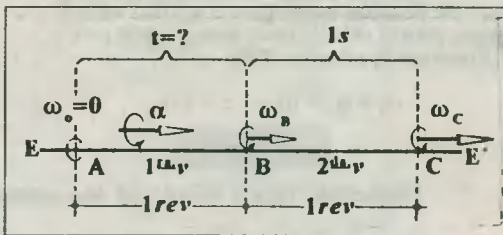
Asimismo, podemos calcular la aceleración angular del movimiento aplicando la relación (9.2).

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{\omega_C - \omega_B}{t_{BC}} \Rightarrow \alpha = \frac{18 - 6}{2} \Rightarrow \alpha = 6 \text{ rev/min}^2$$

Tramo AB.- Ya que en este tramo la aceleración angular es la misma, aplicaremos la relación (9.9).

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \Rightarrow \omega_B^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \Rightarrow 6^2 = 0^2 + 2 \cdot 6 \cdot \theta_1 \therefore \theta_1 = 3 \text{ rev}$$

9.14. Por tratarse de un movimiento de rotación uniformemente variado, tendremos la necesidad de utilizar un eje de rotación imaginario EE', en el cual indicaremos la velocidad angular instantánea en cada posición, y cada segmento del eje nos dará el desplazamiento angular experimentado. Veamos.



Tramo AB.- Puesto que la velocidad en A es conocida ($\omega_A = 0$), aplicaremos la relación (9.10).

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow 1 \text{ rev} = \frac{1}{2} \alpha t^2 \dots (1)$$

Tramo BC.- En este tramo se conoce la velocidad en la posición inicial A ($\omega_A = 0$); además, el tiempo transcurrido desde A hasta C es $(t + 1)$ s. Aplicaremos la relación (9.10), y así obtenemos:

$$2 \text{ rev} = \frac{1}{2} \alpha (t + 1)^2 \dots (2)$$

Luego, dividiendo (2) \div (1) miembro a miembro: $\frac{2 \text{ rev}}{1 \text{ rev}} = \frac{\frac{1}{2} \alpha (t + 1)^2}{\frac{1}{2} \alpha t^2} \Rightarrow 2t^2 = (t + 1)^2$

Despejando t obtenemos: $t = (\sqrt{2} + 1) \text{ s}$

9.15. En primer lugar calcularemos el número de vueltas (θ_1) que experimentará el ventilador durante sus primeros 40 s. Seguidamente, calcularemos el número de vueltas (θ_2) que dará con su velocidad máxima de trabajo en forma constante y durante los siguientes 20 s, completando así el primer minuto de su movimiento.

Tramo AB.- Por tratarse de un movimiento uniformemente variado diremos: $\omega_f = \omega_B = 900 \text{ rpm} = 15 \text{ rev/s}$.

$$\text{Relación (9.11): } \theta_1 = \frac{1}{2} (\omega_o + \omega_f) t_1$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2} (0 + 15) \cdot 40 \Rightarrow \theta_1 = 300 \text{ rev}$$

Tramo BC: Por tratarse de un movimiento de rotación uniforme: $\theta_2 = \omega t_2 = 15 \cdot 20 \Rightarrow \theta_2 = 300 \text{ rev}$.

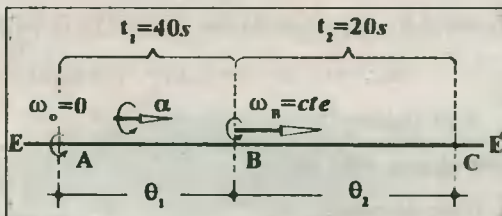


Fig. Solución Prob. 9.15

$$\text{Finalmente: } \theta_T = \theta_1 + \theta_2 = 300 + 300 \quad \therefore \quad \theta_T = 600 \text{ rev}$$

9.16. Recordando que en el MRUV se verifica que la posición del móvil en el eje X viene dada por la relación (4.10) ($x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2$), hacemos una analogía con el movimiento rotacional uniformemente variado, y obtenemos: $\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \dots (*)$

Luego, ordenando la ley para el movimiento dado, tendremos: $\theta = 7 - 5t + 3t^2 \dots (**)$

Así, comparando (*) con (**) concluimos lo siguiente:

$$\theta_o = 7 \text{ rad (posición angular inicial)}$$

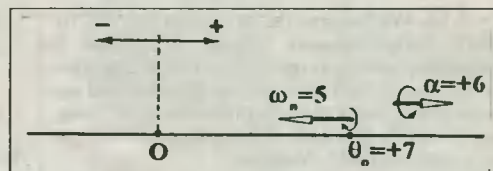
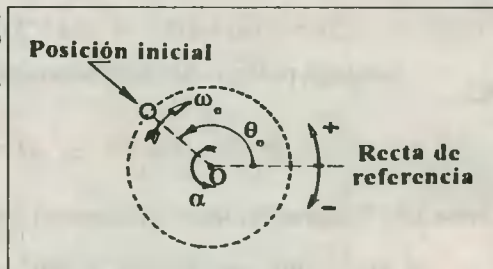
$$\omega_o = -5 \text{ rad/s (velocidad angular inicial)}$$

$$\alpha = +6 \text{ rad/s}^2 \text{ (aceleración angular).}$$

Trasladando estos datos a un eje imaginario de rotación tendremos el gráfico adjunto. Luego, para el cálculo de la velocidad en $t = 6 \text{ s}$, utilizaremos la relación (9.8).

$$\omega_f = \omega_o + \alpha t = -5 + 6 \cdot 6$$

$$\therefore \quad \omega_f = 31 \text{ rad/s}$$



Finalmente, para el cálculo del desplazamiento angular aplicaremos la relación (9.12).

$$\theta_{n^o} = \omega_o + \frac{1}{2} \alpha (2n - 1) = -5 + \frac{1}{2} \cdot 6(2 \cdot 6 - 1) \quad \therefore \quad \theta_{n^o} = +28 \text{ rad}$$

9.17. Reconocemos que el movimiento parte del reposo ($\omega_o = 0$). A continuación presentamos un gráfico del movimiento sobre el eje de rotación imaginario.

Tramo AB.- $\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 \dots (\omega_A = 0)$

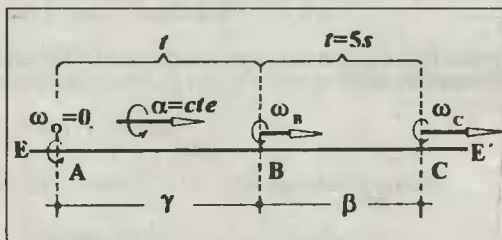
$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \cdot 2t^2 \Rightarrow \gamma = t^2 \dots (1)$$

Tramo AC.- $\theta = \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

$$\Rightarrow \gamma + \beta = \frac{1}{2} \cdot 2(t+5)^2 \Rightarrow \gamma + \beta = (t+5)^2 \dots (2)$$

Luego, dividiendo (2) ÷ (1) miembro a miembro obtenemos: $1 + \beta/\gamma = (1 + 5/t)^2 \dots (*)$

Por dato del problema: $\beta/\gamma = 7/9 \dots (**)$



Llevando (**) a (*), obtenemos: $t = 15$ s.

Luego, en (1) $\gamma = 225$ rev. y finalmente, en (**): $\beta = 175$ rev

9.18. Resolveremos este problema utilizando un gráfico *velocidad angular-vs-tiempo*, recordando que el área bajo la curva nos da el desplazamiento angular del móvil. Asimismo, la pendiente de la recta nos da la aceleración angular del movimiento.

Del MCUA: $\text{tg}(r) = \alpha_1 \Rightarrow \omega_{\max}/12 \text{ min} = 2 \text{ rev/min}^2 \Rightarrow \omega_{\max} = 24 \text{ rpm} \dots (1)$

Del MCUR: Del gráfico vemos que $u + s = 180^\circ$

$\text{tg}(s) = \alpha_2 \Rightarrow -\text{tg}(u) = -4 \text{ rev/min}^2 \Rightarrow \omega_{\max}/x = 4 \Rightarrow \omega_{\max} = 4x \dots (2)$

Iguando (1) y (2) obtenemos: $x = 6 \text{ min} \dots (*)$

Luego: $\theta = \text{Area sombreada} = \frac{1}{2} \omega_{\max}(12 + x) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18 \therefore \theta = 216 \text{ rev}$

9.19. Completemos los datos que faltarían en el gráfico original, teniendo en cuenta que los triángulos que se forman son notables y de lados proporcionales a los números 3, 4 y 5.

Para calcular el número de revoluciones entre $t = 12$ s y $t = 30$ s, bastaría con calcular la magnitud del área sombreada que se muestra en la figura.

$\theta = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} (4 + 20) \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 3$

$\therefore \theta = 180 \text{ rev}$

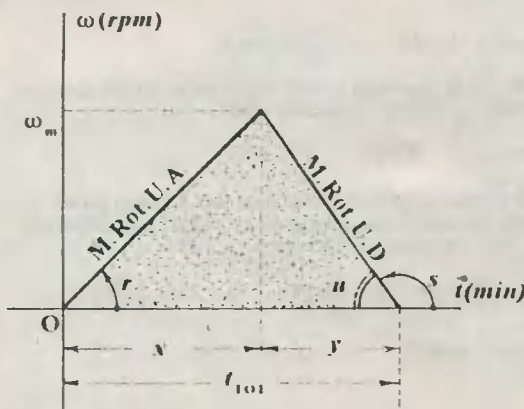


Fig. Solución Prob. 9.18

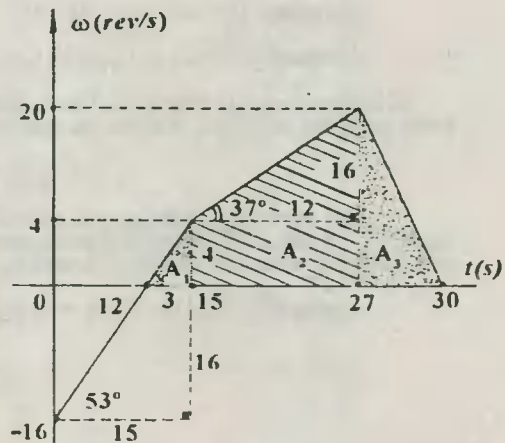


Fig. Solución Prob. 9.19

9.20. Completemos los datos en el gráfico dado para calcular el valor de α en $t = 10$ s.

De la zona rayada de 0 a 2 s tenemos: Area = cambio de velocidad

$\frac{1}{2} (6 + \alpha_1) \cdot 2 = \omega_{(2)} - \omega_{(0)}$

$6 + \alpha_1 = 18 - 0 \Rightarrow \alpha_1 = 12 \text{ rev/s}^2$

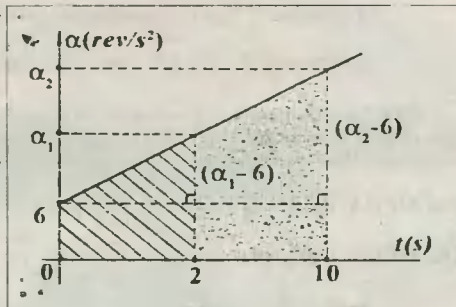
De la relación de semejanza entre los triángulos rectángulos, tendremos:

$$\frac{\alpha_2 - 6}{\alpha_1 - 6} = \frac{10}{2} \Rightarrow \alpha_2 = 36 \text{ rev/s}^2$$

Luego, calculando el área del trapecio (punteado) comprendido entre 2 s y 10 s, tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \text{cambio de velocidad} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_1) \cdot 8 &= \omega_{(10)} - \omega_{(2)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} (36 + 12) \cdot 8 = \omega_{(10)} - 18 \quad \therefore \quad \omega_{(10)} = 210 \text{ rev/s}$$



9.21. Para este suceso es conveniente hacer un gráfico en base a la trayectoria real de los móviles. Si ambos parten de un mismo punto (A), se volverán a encontrar en otro punto (B), verificándose que el desplazamiento angular del móvil acelerado (θ_2) será mayor que aquel que experimenta el móvil con movimiento uniforme (θ_1), tal que después del tiempo t tendremos:

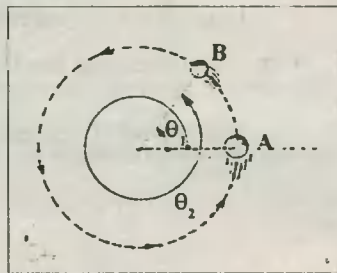
$$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi \text{ rad} \dots (1)$$

$$\text{Aplicando la relación (9.10): } \theta_2 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\Rightarrow \theta_2 = 2t + \frac{1}{2} 2t^2 \Rightarrow \theta_2 = 2t + t^2 \dots (2)$$

$$\text{Asimismo: } \theta_1 = \omega t \Rightarrow \theta_1 = 2t \dots (3)$$

$$\text{Finalmente, de (2) y (3) en (1): } (2t + t^2) - 2t = 2\pi \quad \therefore \quad t = \sqrt{2\pi} \text{ s}$$



9.22. Observando el movimiento de la partícula A, diremos que al llegar ésta al otro extremo habrá girado un ángulo $\theta_A = \pi \text{ rad}$. De este modo, el tiempo empleado será:

$$t = \theta_A / \omega_A = \pi / \omega_A \dots (1)$$

Del móvil B, éste al llegar al mismo extremo izquierdo y cruzarse con A habrá girado un ángulo $\theta_B = \pi \text{ rad}$. Pero, por ser un movimiento de rotación uniformemente variado el que desarrolla esta partícula, se verifica que: $\theta_B = \frac{1}{2} \alpha t^2$ ($\omega_B = 0$). Entonces: $\pi = \frac{1}{2} \alpha t^2 \dots (2)$

$$\text{Reemplazando (1) en (2): } \pi = \frac{1}{2} \alpha (\pi / \omega_A)^2 \Rightarrow \alpha = 2\omega_A^2 / \pi \Rightarrow \alpha = 2(\sqrt{\pi})^2 / \pi$$

$$\therefore \quad \alpha = 2 \text{ rad/s}^2$$

CAP 10 MOVIMIENTO CURVILINEO

MOVIMIENTO DE ROTACION Y TRASLACION

10.1. Construyamos un gráfico con los datos del problema: $v_{i0} = 6 \text{ m/s}$, $a_t = 4 \text{ m/s}^2$, $t = 12 \text{ s}$, $R = 9 \text{ m}$.

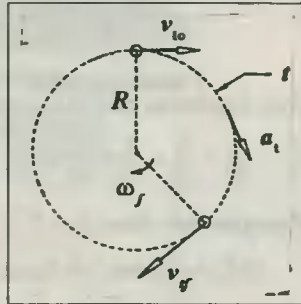
a) Cálculo de la velocidad tangencial final.- De la relación (10.13) tenemos:

$$v_{if} = v_{i0} + a_t \cdot t \Rightarrow v_{if} = 6 \text{ m/s} + 4 \text{ m/s}^2 \cdot 12 \text{ s}$$

$$\therefore \boxed{v_{if} = 54 \text{ m/s}}$$

b) Cálculo de la velocidad angular final.- Aplicando la relación (10.3) despejamos ω , y obtenemos:

$$\omega_f = \frac{v_{if}}{r} \Rightarrow \omega_f = \frac{54 \text{ m/s}}{9 \text{ m}} \therefore \boxed{\omega_f = 6 \text{ rad/s}}$$



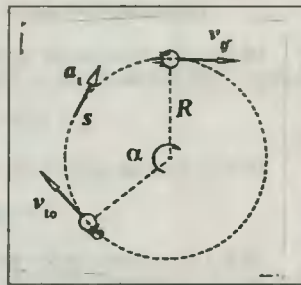
10.2. Construyamos un gráfico con estos datos: $v_{i0} = 4 \text{ m/s}$, $v_{if} = 12 \text{ m/s}$, $s = 8 \text{ m}$, $r = 4 \text{ m}$.

a) Cálculo de la aceleración tangencial.- De la relación (10.14) tenemos:

$$v_{if}^2 = v_{i0}^2 + 2a_t \cdot s \Rightarrow 12^2 = 4^2 + 2a_t \cdot 8 \therefore \boxed{a_t = 8 \text{ m/s}^2}$$

b) Cálculo de la aceleración angular.- Aplicamos la relación (10.5) y despejamos α , obteniendo:

$$\alpha = a_t/r \Rightarrow \alpha = 8/4 \therefore \boxed{\alpha = 2 \text{ rad/s}^2}$$



10.3. Construyamos el gráfico que nos permita visualizar los datos del problema: $v_{i0} = 2 \text{ m/s}$, $t = 4 \text{ s}$, $a_t = 3 \text{ m/s}^2$, $r = 32 \text{ m}$.

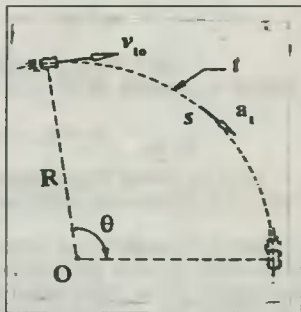
a) Cálculo de la longitud de arco.- Aplicamos la relación (10.15).

$$s = v_{i0} \cdot t + \frac{1}{2} a_t \cdot t^2 \Rightarrow s = 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4^2 \therefore \boxed{s = 32 \text{ m}}$$

b) Cálculo del desplazamiento angular.- Aplicando la relación (10.1) despejamos θ , y obtenemos:

$$s = \theta r \Rightarrow \theta = s/r = 32/32 \therefore \boxed{\theta = 1 \text{ rad}} \quad \text{ó} \quad \boxed{\theta = 57,29^\circ}$$

10.4. De los datos reconocemos que: $v_{if} = 15 \text{ m/s}$, $t = 5 \text{ s}$, $\theta = 2 \text{ rad}$, $r = 25 \text{ m}$.



Reemplazando la relación (10.1) en la relación (10.16) obtendremos v_{i0} .

$$s = \frac{1}{2} (v_{i0} + v_{if})t \Rightarrow \theta r = \frac{1}{2} (v_{i0} + v_{if})t$$

$$\text{Y sustituyendo datos: } 2.25 = \frac{1}{2} (v_{i0} + 15) \cdot 5 \therefore \boxed{v_{i0} = 5 \text{ m/s}}$$

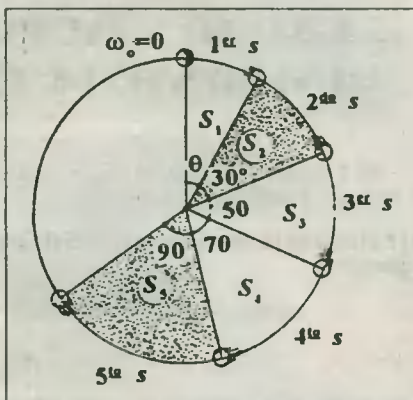
10.5. Graficando la posición del móvil a lo largo de la circunferencia durante los primeros 5 s de su movimiento, observamos que cada sector circular S subtende un arco s proporcional a los ángulos centrales θ , los cuales se van sucediendo en el siguiente orden: $\theta, 3\theta, 5\theta, 7\theta, 9\theta, \dots$, etc., que son los números de Galileo para un MCUV. Así pues, el área de un sector circular viene dado por:

$$S = \frac{1}{2} \theta r^2 \Rightarrow S/\theta = \text{constante}$$

Y ahora, colocando los sectores con sus respectivos ángulos en esta última relación, tendremos:

$$\frac{S_1}{\theta} = \frac{S_2}{3\theta} = \frac{S_3}{5\theta} = \frac{S_4}{7\theta} = \frac{S_5}{9\theta} \Rightarrow \frac{S_5}{9} = \frac{S_2}{3} \Rightarrow S_5 = 3S_2$$

Reemplazando datos: $S_5 = 3.15 \therefore S_2 = 45 \text{ cm}^2$



10.6. Aplicando la relación (10.6) despejaremos el radio de giro.

$$a_c = v_t^2/r \Rightarrow r = v_t^2/a_c$$

Reemplazando datos: $r = 6^2/3 \therefore r = 12 \text{ m}$

10.7.a. Por tratarse de un MCU, el móvil sólo estará afectado de una aceleración centrípeta. Luego, para el cálculo de la velocidad angular aplicaremos la relación (10.7).

$$a_c = \omega^2 r \Rightarrow \omega = \sqrt{a_c/r} = \sqrt{9/4} \therefore \omega = 1,5 \text{ rad/s}$$

10.7.b. Para el cálculo del periodo aplicamos la relación (9.6).

$$T = 2\pi/\omega \Rightarrow T = 2\pi/1,5 \therefore T = 4/3 \pi \text{ s}$$

10.8. De los datos dados podemos determinar en primer lugar, el valor de la aceleración angular α a partir de la relación (10.5).

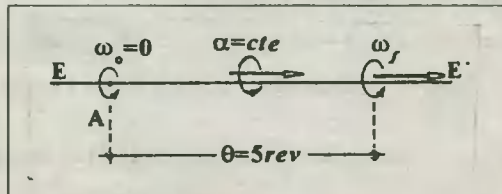
$$a_t = \alpha r \Rightarrow \alpha = a_t/r \Rightarrow \alpha = 8/10 \Rightarrow \alpha = 0,8 \text{ rad/s}^2$$

Y por tratarse de un MCUV, podemos utilizar la relación (9.8) para calcular la velocidad angular ω_f después de 40 s de haber partido del reposo.

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \omega_f = 0 + 0,8 \cdot 40 \therefore \omega_f = 32 \text{ rad/s}$$

10.9. En primer lugar determinaremos el valor de la aceleración angular, y posteriormente calcularemos la aceleración centrípeta.

Cálculo de la aceleración angular. - Al analizar lo sucedido durante las 5 primeras vueltas, reconocemos que el punto material desarrolla un MCUV, dado que actúa una aceleración tangencial constante sobre él. Obtenemos asimismo el valor de la velocidad angular al final de este primer trayecto.



$$v_t = \omega_f r \Rightarrow \omega_f = v_t/r \Rightarrow \omega_f = 10/10 \Rightarrow \omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} \text{De la relación (9.9): } \omega_f^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha\theta \quad (\omega_0 = 0) \Rightarrow 1^2 = 2\alpha \cdot (5 \text{ rev}) \Rightarrow 1 = 2\alpha \cdot (5 \cdot 2\pi \text{ rad}) \\ &\Rightarrow \alpha = 1/20\pi \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

Cálculo de la velocidad angular luego de 20 s de haber iniciado su movimiento.- Aplicamos la relación (9.8).

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \omega = 0 + (1/20\pi) \cdot 20 \Rightarrow \omega = 1/\pi \text{ rad/s}$$

Cálculo de la aceleración centripeta en ese instante.- Aplicamos la relación (10.7).

$$a_c = \omega^2 r = (1/\pi)^2 \cdot \pi^2 \therefore a_c = 1 \text{ cm/s}^2$$

10.10. Análogamente al procedimiento del problema anterior tendremos:

$$\omega_f = v_f/r = 40 \sqrt{\pi}/10 \Rightarrow \omega_f = 4 \sqrt{\pi} \text{ rad/s}$$

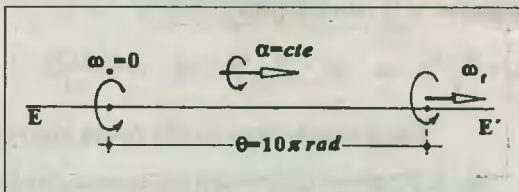
Grafiquemos el movimiento en un eje imaginario.

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \Rightarrow (4\sqrt{\pi})^2 = 0^2 + 2\alpha \cdot 10\pi$$

$$\Rightarrow \alpha = 0,8 \text{ rad/s}^2$$

Luego, la aceleración tangencial del movimiento será (Relación (10.5)):

$$a_t = \alpha r = 0,8 \cdot 10 \therefore a_t = 8 \text{ cm/s}^2$$



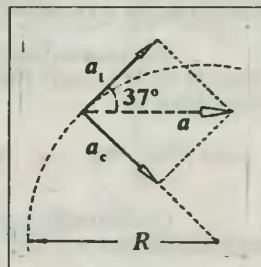
10.11. En este tipo de problemas conviene descomponer al vector aceleración a en dos componentes: Una sobre el eje tangencial (a_t) y la otra en el eje radial (a_c).

De la descomposición rectangular obtenemos:

$$a_c = a \cdot \text{sen}37^\circ = 15.3/5 \Rightarrow a_c = 9 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Luego: } r = v_t^2/a_c = 21^2/9 \therefore r = 49 \text{ m}$$

$$\text{Así también: } a_t = a \cdot \text{cos}37^\circ = 15.4/5 \Rightarrow a_t = 12 \text{ m/s}^2$$



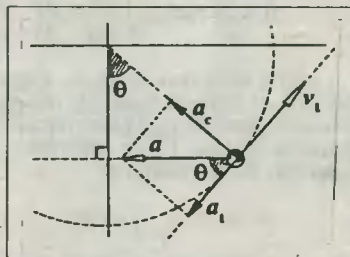
10.12. Haciendo un gráfico donde indicamos el vector a y sus componentes rectangulares, notamos que el ángulo formado por \vec{a} y \vec{a}_t es el ángulo θ que buscamos. Veamos.

De la descomposición rectangular:

$$\text{tg}\theta = a_c/a_t = \omega^2 r/\alpha r \Rightarrow \text{tg}\theta = \omega^2/\alpha \quad (*)$$

$$\text{Reemplazando valores: } \text{tg}\theta = 2^2/3 \Rightarrow \text{tg}\theta = 4/3$$

$$\therefore \theta = 53^\circ$$



10.13. Observando sólo a un punto de la periferia de la rueda comprobaremos que su movimiento es del tipo MCUV. Al partir desde el reposo transcurre 1 s, y se comprobará que la velocidad angular habrá aumentado de valor, y por lo tanto su aceleración centripeta; en cambio, la aceleración tangencial mantiene el mismo valor durante todo el movimiento.

De la descomposición rectangular de la aceleración total notamos lo siguiente:

$$\text{tg}37^\circ = a_c/a_t \Rightarrow 3/4 = \omega^2/\alpha \quad (\text{Relación obtenida en el problema anterior } (*))$$

$$\Rightarrow 3/4 = (\omega_0 + \alpha t)^2/\alpha \quad (\omega_0 = 0)$$

Simplificando obtenemos: $\alpha = 3/4t^2$

$$\Rightarrow \alpha = 3/4 \cdot 1.2^2 \therefore \alpha = 0.75 \text{ rad/s}^2$$

10.14. Aplicando las relaciones (10.1) y (10.16) tenemos: $s = \theta r = \frac{1}{2} (v_0 + v_f)t$

Reemplazando valores: $\pi/2 \cdot r = \frac{1}{2} (4 + 18) \cdot 2$

$$\Rightarrow (22/7)/2 \cdot r = 22 \Rightarrow r = 14 \text{ m}$$

Así pues, conociendo el radio de curvatura utilizaremos la relación (10.4).

$$a_t = \frac{v_f - v_0}{t} \Rightarrow \alpha r = \frac{v_B - v_A}{t} \Rightarrow \alpha = \frac{v_B - v_A}{rt}$$

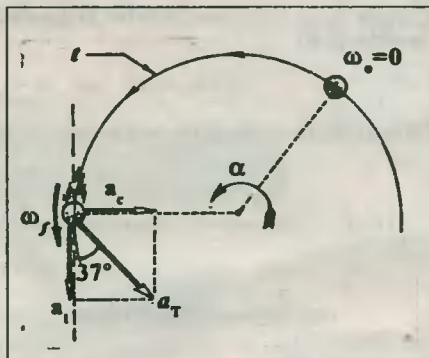


Fig. Solución Prob. 10.13

Reemplazando datos en esta última expresión, obtenemos: $\alpha = 0.5 \text{ rad/s}^2$

10.15. El cambio de dirección que experimenta la velocidad tangencial viene dado por el ángulo θ , que además coincide con la medida del ángulo central POQ, que representa el desplazamiento angular logrado por el móvil. Con el gráfico que mostramos a continuación apreciamos mejor lo afirmado arriba.

Por tratarse de un MCVU, se verifica la misma relación obtenida en la primera línea del problema anterior, de la cual despejamos θ .

$$\theta = \frac{(v_0 + v_f)t}{2r} \Rightarrow \theta = \frac{(5 + 6)}{2 \cdot 21} \Rightarrow \theta = 22/21 \text{ rad}$$

Convirtiendo los radianes a grados sexagesimales, considerando que $\pi \approx 22/7$ tenemos:

$$\theta = \frac{22}{21} \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{22}{21} \cdot \frac{180^\circ}{22/7} \therefore \theta = 60^\circ$$

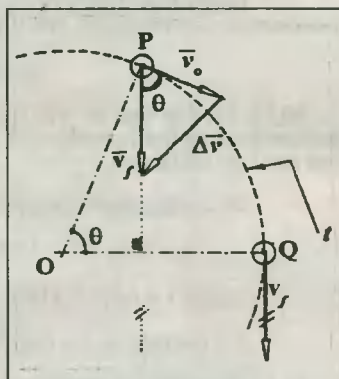
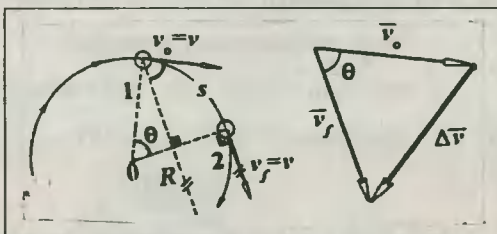


Fig. Solución Prob. 10.15

10.16. Para determinar la aceleración media para el trayecto mostrado debemos indicar primero que si el móvil posee rapidez constante, entonces el arco $\widehat{12}$ de longitud $s = \theta r$ será recorrido en un tiempo t .

$$t = s/v \Rightarrow t = \theta r/v \dots (1)$$

Del mismo modo analicemos la composición de los vectores velocidad tangencial.



$$\Delta \vec{v} = \text{Vector diferencia} = \vec{v}_f - \vec{v}_0$$

$$\Delta v = \sqrt{v_0^2 + v_f^2 - 2v_0 \cdot v_f \cdot \cos \theta} = \sqrt{v^2 + v^2 - 2v \cdot v \cdot \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \Delta v = \sqrt{2} \cdot v \cdot \sqrt{1 - \cos \theta} = 2v \cdot \text{sen}(\theta/2) \dots (2)$$

$$\text{Luego, la aceleración media será: } a_m = \Delta v / \Delta t \dots (3)$$

Finalmente, reemplazamos (1) y (2) en (3), y obtenemos: $a_{\theta} = \frac{2v^2 \cdot \text{sen}(\theta/2)}{R}$

10.17. Calculemos la velocidad con la cual la bolita ingresa al codo; esto lo obtendremos de la relación (5.2).

$$v_{OB} = \sqrt{2gh} \quad (v_{OA} = 0) \Rightarrow v_{OB} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 3,2} \Rightarrow v_{OB} = 8 \text{ m/s}$$

Por condición del problema, la bolita sale del codo con la mitad de su velocidad, es decir, 4 m/s; es con esta velocidad que ingresa al tubo en forma de cuadrante. Por lo tanto, su velocidad angular será:

$$\omega_o = \omega_c \Rightarrow \omega_o = v_c/r = 4/0,5 \Rightarrow \omega_o = 8 \text{ rad/s}$$

Por condición del problema, el tramo CD se hace con MCUV. Luego, aplicamos la relación (9.9).

$$\omega_o^2 + 2\alpha\theta = \omega_f^2 \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_o^2}{2\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{14^2 - 8^2}{2 \cdot \pi/2} = \frac{132}{22/7} \therefore \alpha = 42 \text{ rad/s}^2$$

10.18. Es evidente que para cumplir con la condición de "reencuentro" entre el paquete y el "avioncito", ambos móviles emplearán el mismo tiempo en sus correspondientes movimientos desde A hasta B.

Del movimiento parabólico del paquete: Utilizando las relaciones (8.4) y (8.6) deducimos que el alcance horizontal viene dado por: $L = 1/2 g t^2 \cdot \text{ctg}\alpha$, donde: $L = \sqrt{2}R$, y $\alpha = 45^\circ$. Luego:

$$t = \sqrt{2\sqrt{2}R/g} \dots (1)$$

Del movimiento circular del avioncito: En vista de que se trata de un MCU, diremos lo siguiente:

$$\omega = \theta/t \dots (2)$$

Donde: $\theta = \pi/2 \text{ rad}$. Luego, reemplazando (1) en (2) tendremos: $\omega = \theta \sqrt{\frac{g}{2\sqrt{2}R}}$

Reemplazando valores obtenemos: $\omega = \pi/4 \text{ rad/s}$

10.19. En primer lugar determinaremos la velocidad tangencial del balde respecto a C. Para ello analicemos el triángulo rectángulo ACD (figura 1); en él observamos que:

$$r = L \cdot \text{sen}37^\circ = 5.3/5 \Rightarrow r = 3 \text{ m}$$

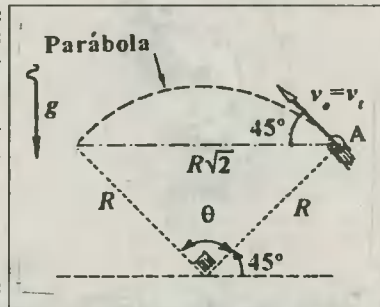
Luego, la velocidad tangencial del balde será:

$$v_1 = \omega r = \frac{2\pi}{T} \cdot r = \frac{2\pi}{3\pi/2} \cdot 3 \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$$

Ahora, cuando las gotas escapan del balde, éstas experimentarán un movimiento parabólico con velocidad inicial horizontal de tal modo que al llegar una de ellas al piso también horizontal, se verifica la trayectoria que se indica en la figura 2.

Observamos que en la caída libre una gota emplea un tiempo igual a:

$$t = \sqrt{2h/g} = \sqrt{2 \cdot 5/10} \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$



En ese mismo tiempo una gota avanza horizontalmente una distancia d .

$$d = v_h t = v_t t = 4.1 \Rightarrow d = 4 \text{ m}$$

Finalmente, de la figura 3 diremos: $R = \sqrt{d^2 + r^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} \therefore R = 5 \text{ m}$

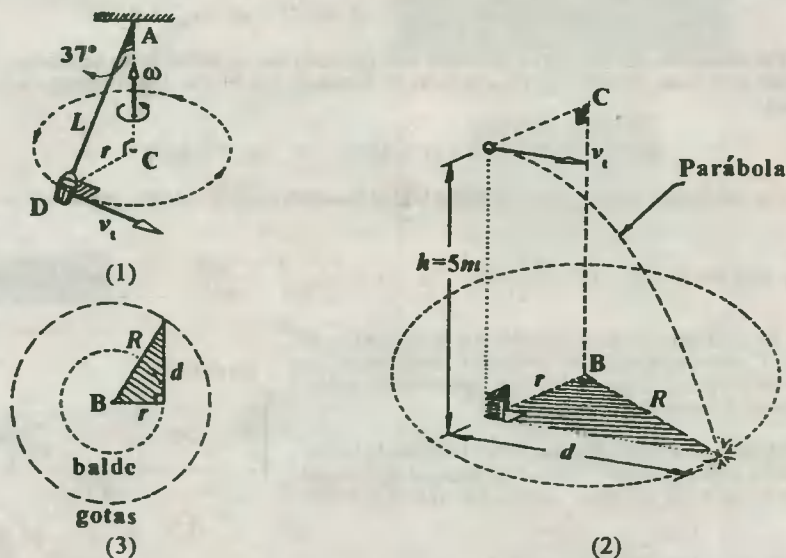


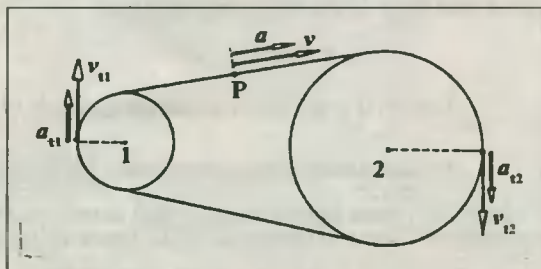
Fig. Solución Prob. 10.19

10.20. Para este problema vamos a utilizar la relación (10.19).

$$a_{t1} = a_{t2} \Rightarrow \alpha_1 R_1 = \alpha_2 R_2$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = (R_1/R_2)\alpha_1 \dots (1)$$

Ahora, refiriéndonos a la polea 2, ésta, al igual que la polea 1, parte del reposo y acelera uniformemente con α_2 . Para determinar el número de vueltas θ_2 que se pide, recurriremos a la relación (9.9).



$$\omega_{t2}^2 = \omega_{t1}^2 + 2\alpha_2 \theta_2 \dots (\omega_{t1} = 0) \Rightarrow \theta_2 = \omega_{t2}^2 / 2\alpha_2 \dots (2)$$

$$\text{De (1) en (2): } \theta_2 = (\omega_{t2}^2 / 2\alpha_1)(R_2/R_1)$$

$$\text{Reemplazando valores: } \theta_2 = (20^2 / 2.5)(0.2\pi / 0.1) \Rightarrow \theta_2 = 80\pi \text{ rad} \therefore \theta_2 = 40 \text{ rev}$$

10.21. Analizaremos este problema, relacionando a cada par de poleas. Así pues, tendremos:

a) Poleas D y C. - Estas, por moverse debido a que una faja las envuelve, poseerán la misma velocidad tangencial. Entonces: $v_{tC} = v_{tD}$

$$\omega_C R_C = \omega_D R_D \Rightarrow \omega_C = (R_D/R_C)\omega_D \dots (1)$$

b) Poleas B y C. - Estas poleas giran como un todo por estar solidariamente unidas, y por lo tanto se cumplirá lo siguiente: $\omega_B = \omega_C$.

$$\text{De (1): } \omega_B = (R_D/R_C)\omega_D \dots (2)$$

c) Poleas B y E. - Estas poleas giran tocándose por su borde, lo cual motiva a que posean la misma velocidad tangencial. Luego:

$$v_{tE} = v_{tB} \Rightarrow \omega_E \cdot R_E = \omega_B \cdot R_B \Rightarrow \omega_E = \omega_B(R_B/R_E)$$

$$\text{Y de (2): } \omega_E = \omega_D(R_D/R_C)(R_B/R_E) \dots (3)$$

d) Poleas E y A. - Al igual que en el caso (b) se verifica que: $\omega_A = \omega_E$.

$$\Rightarrow \omega_A = \omega_D(R_D/R_C)(R_B/R_E) \dots (4)$$

e) Finalmente, la polea A posee una velocidad tangencial en su borde, que es igual a la velocidad con la cual se desplaza la cuerda que lo envuelve, y por consiguiente el bloque Q que pende de él.

$$v_Q = v_{tA} \Rightarrow v_Q = \omega_A \cdot R_A \dots (5)$$

$$\text{Reemplazando (4) en (5): } v_Q = \omega_D(R_D/R_C)(R_B/R_E) \cdot R_A$$

$$\text{Reemplazando datos: } v_Q = 8 \cdot (10/12)(50/25) \cdot 18 \quad \therefore \quad v_Q = 240 \text{ cm/s}$$

10.22. Este problema nos invita a analizar lo que sucede con la cuerda que siempre está expuesta ante la vista, y de tales consideraciones obtendremos finalmente que, mientras la polea pequeña suelta una porción de cuerda e_1 , la polea mayor envuelve una porción mayor e_2 en el mismo tiempo, de tal modo que el centro de la polea móvil se ve obligada a ascender.

$$\text{Longitud inicial expuesta: } L_o = 2L + l \dots (1)$$

$$\text{Longitud final expuesta: } L_f = 2(L - d) + l \dots (2)$$

$$\text{ó: } L_f = L_o - e_2 + e_1 \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

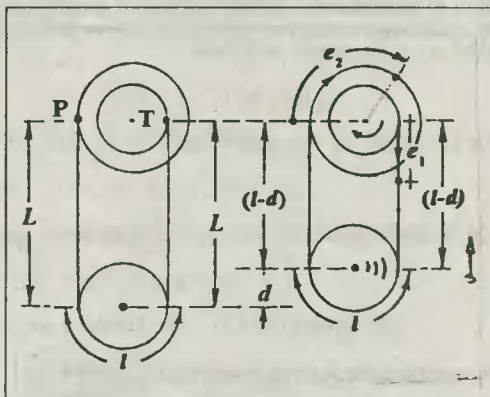
$$2L - 2d + l = 2L + l - e_2 + e_1$$

$$\Rightarrow e_2 - e_1 = 2d \Rightarrow d = \frac{1}{2}(e_2 - e_1) \dots (*)$$

Pero: $e_2 = v_{t2} \cdot t$; $e_1 = v_{t1} \cdot t$, y $d = v_B \cdot t$. En (*): $v_B = \frac{1}{2}(v_{t2} - v_{t1})$, ó $v_B = \frac{1}{2}(\omega R - \omega r)$

$$\Rightarrow v_B = \frac{1}{2} \omega(R - r)$$

Reemplazando datos obtenemos: $v_B = 16 \text{ cm/s}$



10.23. Haciendo un gráfico del movimiento, indicamos con H a la altura máxima, y con L al alcance horizontal. En el punto de altura máxima M el móvil presenta una velocidad total igual a v_h , que como se sabe es la velocidad horizontal del proyectil, la cual se mantiene constante para todo el movimiento. Asimismo, esta velocidad es tangente a la curva, y por lo tanto es perpendicular a la aceleración de la gravedad (g), lo cual nos induce a afirmar que g es la aceleración centrípeta.

$$v_h = v_o \cdot \cos\theta \dots (1)$$

$$a_c = v_t^2/R = v_h^2/R \dots (2)$$

$$a_c = g \dots (3)$$

De (3) en (2): $g = v_h^2/R \Rightarrow R = v_h^2/g$

Y de (1): $R = v_o^2 \cdot \cos^2\theta/g \dots (*)$

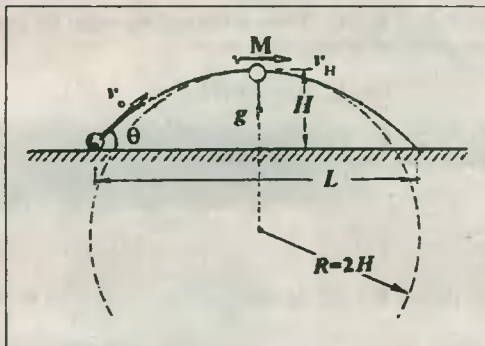
Recordando que en un movimiento parabólico:

$$H = v_o^2 \cdot \sin^2\theta/2g \dots (**)$$

Pero, por condición del problema: $R = 2H$. Luego, de (*) en (**):

$$v_o^2 \cdot \cos^2\theta/g = 2(v_o^2 \cdot \sin^2\theta/2g)$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta/\cos^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = 1 \therefore \theta = 45^\circ$$



10.24. En primer lugar, calculemos la componente horizontal de la velocidad total del móvil.

De A: $v_h = v_o \cdot \cos 53^\circ \dots (1)$

(*) Esta componente se mantiene constante durante todo el movimiento. Luego, cuando el móvil pase por B, esta componente nos permitirá conocer la velocidad total en dicho punto. Así pues:

$$v_B = v_h \cdot \sec 37^\circ \dots (2)$$

De (1) en (2): $v_B = v_o \cdot \cos 53^\circ \cdot \sec 37^\circ = 16 \cdot 3/5 \cdot 5/4$

$$\Rightarrow v_o = 12 \text{ m/s}$$

De la descomposición vectorial de g notamos que:

$$a_c = g \cdot \cos 37^\circ \dots (3) \text{ y } a_c = v_B^2/R \dots (4)$$

Se aprecia que (3) = (4). Luego: $g \cdot \cos 37^\circ = v_B^2/R \Rightarrow R = v_B^2/g \cdot \cos 37^\circ$

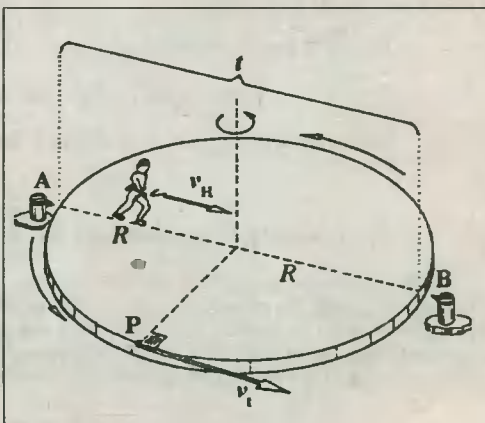
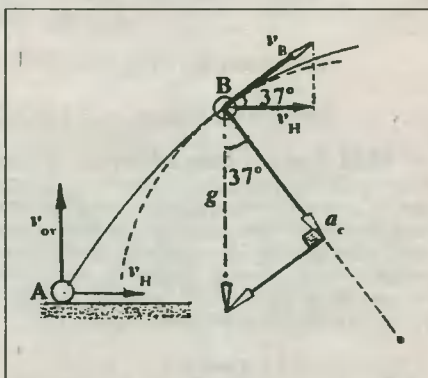
Reemplazando valores obtenemos: $R = 18 \text{ m}$

10.25. Considerando los extremos A y B fijos en Tierra, y que en el primer instante coinciden con el diámetro por el cual se desplazará el hombre, notamos que en el mismo tiempo en que el hombre recorre la distancia $2R$, la plataforma experimenta una vuelta completa. El tiempo t empleado por el hombre coincidirá pues con el período T de la plataforma que gira con MRU.

$$t = T = 2\pi/\omega \dots (1)$$

Ahora, el valor de la velocidad tangencial de un punto P cualquiera de la periferia de la plataforma vendrá dado por la relación (10.3).

$$v_t = \omega R \dots (2)$$



El hombre, quien respecto a la plataforma posee un MRU, tendrá una velocidad cuyo valor se obtendrá de la relación (3.5): $v_h = dt = 2R/t \dots (3)$

Luego, de (1) en (3): $v_h = \frac{2R}{2\pi/\omega} = \frac{\omega R}{\pi}$

Y de (2): $v_h = v_t/\pi \Rightarrow v_t = \pi \cdot v_h \Rightarrow v_t \approx 22/7 \cdot 7 \therefore v_t \approx 22 \text{ km/h}$

10.26. Analizando los movimientos de la hormiga y de la plataforma por separado, deduciremos primero la velocidad que adquiere la hormiga respecto a la plataforma (v_1), y luego la velocidad tangencial que le corresponde a la hormiga (v_2) en dicho punto. De tal modo que la velocidad total será ($v_1 \perp v_2$):

$$v_T^2 = v_1^2 + v_2^2 \dots (1)$$

Movimiento de la hormiga respecto a la plataforma. - Este movimiento resulta ser un MRUV. Luego, se deberá cumplir que:

$$v_t = v_0 + at \dots (v_0 = 0) \Rightarrow v_1 = at \dots (2)$$

$$\text{También: } e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow e = \frac{1}{2} at^2 \dots (*)$$

Movimiento de la hormiga respecto al eje de la plataforma. - Con respecto al eje, la hormiga experimenta un MCU además de un MRUV, tal que la velocidad tangencial será: $v_2 = \omega r$. Y del gráfico:

$$v_2 = \omega(R - e) \dots (**)$$

Luego, de (*) en (**): $v_2 = \omega(R - \frac{1}{2} at^2) \dots (3)$

Finalmente, de (2) y (3) en (1):

$$v_T^2 = (at)^2 + [\omega(R - \frac{1}{2} at^2)]^2$$

Reemplazando valores:

$$26^2 = (2t)^2 + [3(33 - \frac{1}{2} \cdot 2t^2)]^2$$

Simplificando obtenemos: $9t^4 - 590t^2 + 9 \cdot 125 = 0 \Rightarrow (t^2 - 25)(9t^2 - 365) = 0$

Resolviendo la ecuación, tomaremos la solución positiva mínima, encontrando que:

$$t = 5 \text{ s}$$

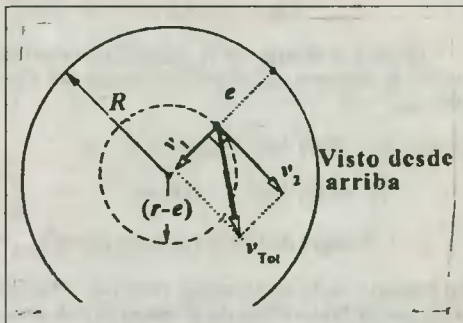
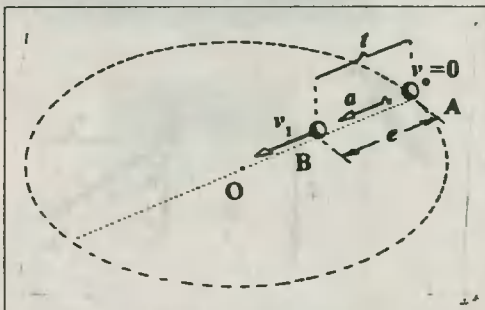
10.27. Analizando el movimiento parabólico comprobamos lo siguiente:

a) **Del movimiento vertical.** - Por ser una caída libre: $v_v = v_{0v} + gt \dots (v_{0v} = 0)$

$$\Rightarrow v_v = 10 \cdot 12 = 120 \text{ m/s}$$

b) En la figura (1) se muestran las componentes horizontal y vertical de la velocidad total del proyectil, y encontramos el ángulo θ que forma la vertical con la tangente en B.

$$\text{tg}\theta = v_h/v_v = 90/120 \Rightarrow \text{tg}\theta = 3/4 \Rightarrow \theta = 37^\circ$$



$$\text{Asimismo: } v_T = \sqrt{v_h^2 + v_v^2} = \sqrt{90^2 + 120^2} \Rightarrow v_T = 150 \text{ m/s}$$

Luego, del movimiento curvilíneo en **B** observamos lo siguiente:

$$a_c = g \cdot \text{sen} \theta \Rightarrow v_T^2/R = g \cdot \text{sen} \theta \Rightarrow R = v_T^2/g \cdot \text{sen} \theta$$

Reemplazando valores obtenemos: $R = 3\,750 \text{ m}$

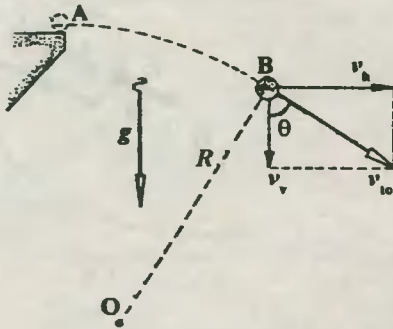


Fig. (1) Solución Prob. 10.27

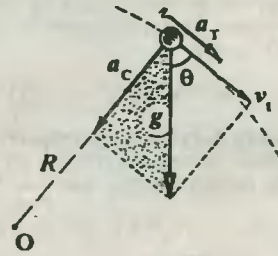


Fig. (2) Solución Prob. 10.27

10.28. a. Cálculo de la velocidad relativa.- Colocando un sistema de referencia móvil en el avión **A**, diremos que el piloto ubicado allí observará al avión **B** con una velocidad que se obtendrá así: $\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \dots (1)$

$$\text{donde: } \vec{v}_A = 720\vec{j} \text{ km/h} = 200\vec{j} \text{ m/s} \\ \vec{v}_B = 540\vec{j} \text{ km/h} = 150\vec{j} \text{ m/s} \dots (2)$$

$$\text{Luego, de (2) en (1) tendremos: } \vec{v}_{B/A} = 150\vec{j} - 200\vec{j} \therefore \vec{v}_{B/A} = -50\vec{j} \text{ m/s}$$

b) Cálculo de la aceleración relativa.- Utilizando el mismo sistema de referencia móvil (**A**), diremos que la aceleración de **B** respecto a **A** será: $\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A \dots (3)$, para lo cual será necesario calcular la aceleración absoluta de **A** y de **B**. Veamos:

$$\vec{a}_A = 5\vec{j} \text{ m/s}^2 \dots (4)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{tB} + \vec{a}_{nB} \dots (*)$$

$$\text{donde: } \vec{a}_{tB} = -7\vec{j} \text{ m/s}^2 \dots (**)$$

$$a_{nB} = v_T^2/R = 150^2/4\,500 \Rightarrow a_{nB} = 5 \text{ m/s}^2 \dots (***)$$

$$\text{Seguidamente, de (***) y (***) en (*)} \vec{a}_B = 5\vec{i} - 7\vec{j} \text{ m/s}^2 \dots (5)$$

$$\text{Finalmente, de (4) y (5) en (3): } \vec{a}_{B/A} = (5\vec{i} - 7\vec{j}) - 5\vec{j} \Rightarrow \vec{a}_{B/A} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$$

$$\Rightarrow a_{B/A} = \sqrt{5^2 + 12^2} \therefore \vec{a}_{B/A} = 13 \text{ m/s}^2$$

10.29. Como recordaremos, de la teoría que explica este movimiento de rotación y traslación simultáneos, la velocidad de traslación del centro de la llanta viene dado por la relación (10.20), de la cual despejamos la velocidad angular ω_o (velocidad angular de la llanta respecto a su centro).

$$\omega_o = v/r \dots (*)$$

Reemplazando datos en (*): $\omega_o = 12/0,3$

$$\therefore \omega_o = 40 \text{ rad/s}$$

10.30. De los datos del problema deducimos que el disco rueda con movimiento de traslación y rotación uniformes. Así, si calculamos la velocidad de traslación (v) del centro de la rueda, podremos a continuación calcular la velocidad angular de rotación (ω_o) respecto al centro, valor que a su vez nos permitirá encontrar el periodo de rotación (T) y el ángulo girado (θ).

a) **Cálculo de la velocidad angular (ω).**- Por ser un MRU, tendremos: $v = d/t = 12/4 \Rightarrow v = 3 \text{ m/s}$.

Pero: $v = \omega_o \cdot r \dots (r = D/2 = 0,25 \text{ m})$

$$\Rightarrow \omega_o = v/r = 3/0,25 \therefore \omega_o = 12 \text{ rad/s}$$

b) **Cálculo del periodo de rotación (T).**- Por tratarse de un movimiento de rotación uniforme, aplicaremos la relación (9.6).

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/12 \therefore T = \pi/6 \text{ rad/s}$$

c) **Cálculo del ángulo girado por el disco (θ).**- Aplicando la relación (9.4) tenemos:

$$\theta = \omega t = 12 \cdot 4 \therefore \theta = 48 \text{ rad}$$

10.31. Aplicamos la relación (10.21) y despejamos α_o : $\alpha_o = a/r \dots (*)$

$$\alpha_o = 6/0,5 \therefore \alpha_o = 12 \text{ rad/s}^2$$

10.32. Reconocemos que el movimiento de traslación del automóvil es el mismo que adquieren cualquiera de sus llantas; así, si calculamos la aceleración de traslación a del auto, estaremos calculando la aceleración del centro de sus ruedas.

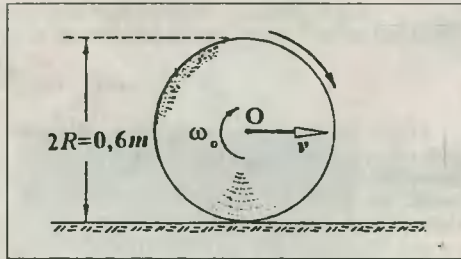


Fig. Solución Prob. 10.29

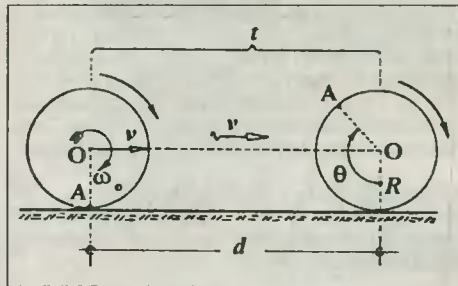


Fig. Solución Prob. 10.30

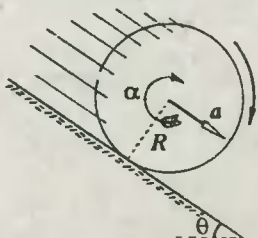


Fig. Solución Prob. 10.31

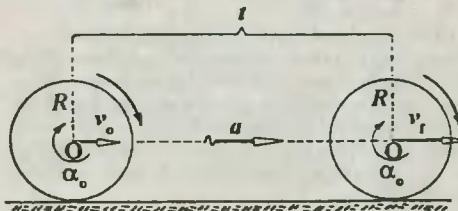


Fig. Solución Prob. 10.32

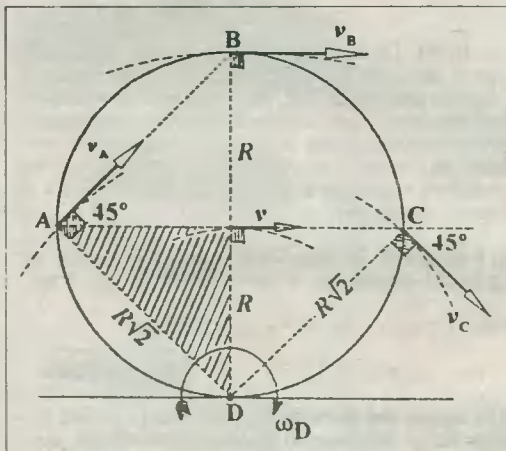
Por tratarse de un movimiento de traslación uniformemente variado, la aceleración a se calculará mediante la relación (10.4).

$$a = \frac{v_f - v_o}{t} = \frac{(55 - 19) \text{ km/h}}{10 \text{ s}} = \frac{36 \text{ km/h}}{10 \text{ s}} = \frac{36 \cdot 5/18 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2$$

Seguidamente, calcularemos la aceleración angular (α_0) del movimiento de rotación de la llanta del mismo modo que lo hicimos en el problema anterior.

$$\alpha_0 = ar = 1/0,25 \quad \therefore \quad \alpha_0 = 4 \text{ rad/s}^2$$

10.33. Colocar un eje instantáneo de rotación que pase por el punto de contacto de la llanta con el piso (D) equivale a colocar un elemento de unión en dicho punto, como por ejemplo una bisagra, de tal modo que todo el cuerpo de la llanta girará respecto a dicho punto. Sin embargo, toda la velocidad lineal de cualquier punto del cuerpo de la llanta será precisamente la que verá un observador ubicado en el piso. El único cambio se encuentra en que estas velocidades serán tangenciales a la curva que se trace con el radio que sirve para ubicarlos desde el punto de contacto D (eje instantáneo de rotación). Se muestra la gráfica de este cambio de sistema de referencia, y así tendremos:



a) Cálculo de la velocidad angular ω_D .- Ya que conocemos la velocidad de traslación del centro de la rueda (v), aplicando la relación (10.3) diremos que:

$$\omega_D = v/R \dots (*) \Rightarrow \omega_D = 16/0,4 \quad \therefore \quad \omega_D = 40 \text{ rad/s}$$

b) Cálculo de las velocidades lineales de A, B, C y D.- Utilizando la geometría del problema deducimos los radios de giro de cada punto, y teniendo en cuenta que todos los puntos de la llanta giran con la misma velocidad angular ω_D respecto a D, diremos que:

$$\text{Para A: } v_A = \omega_D \cdot R_A = \omega_D \cdot R\sqrt{2}$$

$$\text{Y de (*): } v_A = v\sqrt{2} \quad \therefore \quad v_A = 16\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$\text{Para B: } v_B = \omega_D \cdot R_B = \omega_D \cdot 2R \Rightarrow v_B = 2v \quad \therefore \quad v_B = 32 \text{ m/s}$$

$$\text{Para C: } v_C = \omega_D \cdot R_C = \omega_D \cdot R\sqrt{2} \Rightarrow v_C = v\sqrt{2} \quad \therefore \quad v_C = 16\sqrt{2} \text{ m/s}$$

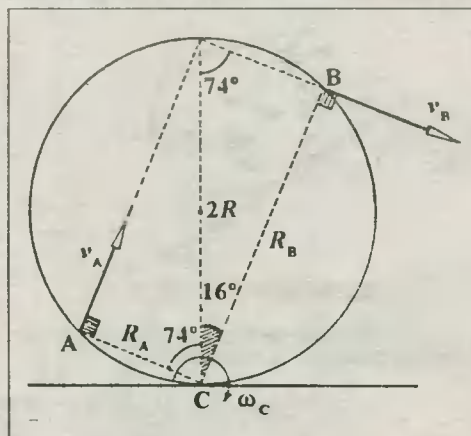
$$\text{Para D: } v_D = \omega_D \cdot R_D = \omega_D \cdot 0 \quad \therefore \quad v_D = 0$$

10.34. Tomando un eje instantáneo de rotación que pase por el punto de contacto del disco con el piso (C), y utilizando todo lo deducido en el problema anterior, diremos que los puntos A y B poseen la misma velocidad angular ω_C , y por consiguiente sus velocidades estarán en proporción directa con sus respectivos radios de giro, medidos respecto a C.

$$\left. \begin{array}{l} v_B = \omega_C \cdot R_B \\ v_A = \omega_C \cdot R_A \end{array} \right\} \Rightarrow v_B/v_A = R_B/R_A$$

Y de la geometría del problema:

$$v_B/v_A = 2R\cos 16^\circ / 2R\cos 74^\circ = \text{sen} 74^\circ / \cos 74^\circ$$



$$\Rightarrow v_B = v_A \cdot \text{tg} 74^\circ$$

Finalmente, reemplazando datos: $v_B = 7.24/7 \therefore$

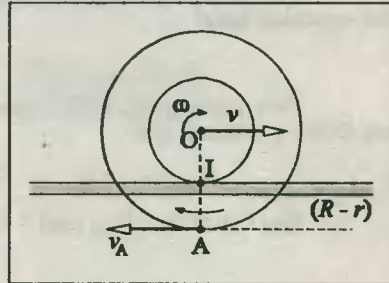
$$v_B = 24 \text{ m/s}$$

10.35. Notamos que la polea se mantiene rodando sobre el riel. Por lo tanto posee un movimiento de traslación y rotación simultáneos. Colocando un observador en el punto de contacto I entre la polea pequeña y el riel, notaremos que el centro de la polea posee una velocidad de traslación v , que será también la velocidad tangencial del centro O respecto al punto de contacto I (centro instantáneo de rotación), de tal modo que:

$$\omega = v/r \dots (1)$$

siendo ω a la vez la velocidad angular de rotación de las poleas respecto a su centro O. Luego, el punto A posee una velocidad v_A respecto a I o al riel, que será a su vez una velocidad tangencial con centro de rotación en I, y con radio de giro $(R - r)$. Entonces: $v_A = \omega(R - r) \dots (2)$

De (1) en (2): $v_A = v/r (R - r)$



10.36. Aplicando la relación (10.23) despejamos la velocidad angular ω de la rueda, tomando como referencia la velocidad y el radio de giro del punto P.

$$\omega = v_P/r_P \dots (1)$$

Cuando el triángulo PQR haya colocado su vértice Q en el piso, el lado RP quedará horizontal, lo cual se debe a que dicho triángulo es isósceles ($QR = QP$). Así pues, de la figura (1) deducimos que:

$$r_P = 2r \cos(\theta/2) = D \cos(\theta/2) \dots (2)$$

Luego, llevando (2) a (1) obtenemos:

$$\omega = \frac{v_P}{D \cos(\theta/2)} \dots (3)$$

De la figura (2) deducimos que: $\cos(\theta/2) = 2/\sqrt{5} \dots (4)$

Finalmente, de (4) y reemplazando datos en (3):

$$\omega = 20 \text{ rad/s}$$

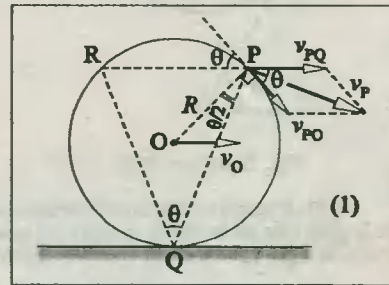


Fig. (1). Solución Prob. 10.36

10.37. Procedemos tal como hicimos en el problema anterior. Primero aplicamos la relación (10.20).

$$\omega = v_O/r \dots (1)$$

Para determinar la velocidad del punto P aplicamos la relación (10.23), y de la figura determinamos que:

$$r_P = 2r \cos 30^\circ \Rightarrow v_P = \omega r_P = \omega (2r \cos 30^\circ) \dots (2)$$

De (1) en (2): $v_P = 2v_O \cdot \cos 30^\circ$

$$\therefore v_P = 10 \sqrt{3} \text{ m/s}$$

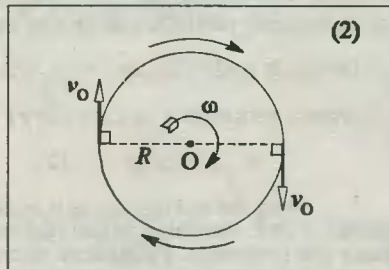


Fig. (2). Solución Prob. 10.36

10.38. Este problema nos sugiere vincular dos movimientos de rotación; para ello escogeremos convenientemente un punto que sea común para ambos movimientos, y que además relacione las características de dichos movimientos. Colocándonos en el eje vertical veríamos que la generatriz OP está en reposo respecto al piso, y se movería con movimiento de rotación respecto al eje, siendo la velocidad lineal del punto P respecto a O :

$$v_{PO} = \Omega R \Rightarrow v_{PO} = \Omega h \sec \theta \dots (1)$$

Pero, si nos colocamos en el centro de la base del cono (A) veríamos que el punto P tendría una velocidad lineal:

$$v_{PA} = \omega r = \omega h \tan \theta \dots (2)$$

Pero, como hemos dicho, el punto P está en reposo respecto al piso. Luego: $v_P = 0$, lo cual nos induce a asegurar que:

$$\vec{v}_{PA} + \vec{v}_{PO} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{PA} = -\vec{v}_{PO} \Rightarrow |\vec{v}_{PA}| = |\vec{v}_{PO}| \dots (3)$$

$$\text{De (1) y (2) en (3): } \omega h \tan \theta = \Omega h \sec \theta \quad \therefore \boxed{\omega = \Omega \csc \theta}$$

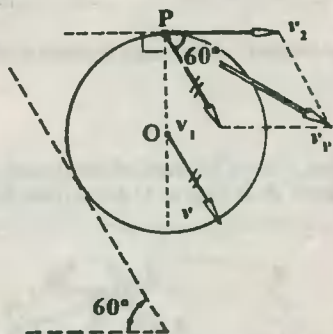


Fig. Solución Prob. 10.37

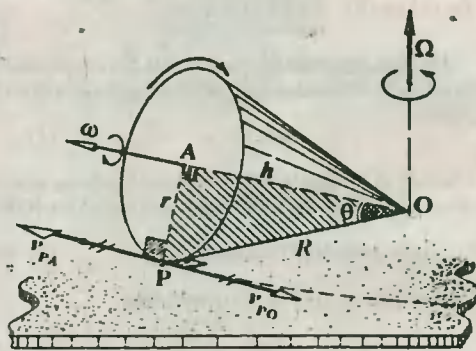


Fig. Solución Prob. 10.38

10.39. Hagamos el gráfico de velocidades cuando la gota sale de la rueda, siendo v el módulo de la velocidad del centro de la rueda respecto al piso.

La gota tiene una velocidad total $v\sqrt{2}$ al salir, que formará 45° con la horizontal. Así pues, sus velocidades componentes son: $v_h = v$, y $v_{ov} = v$. Luego, del movimiento parabólico de la gota tendremos:

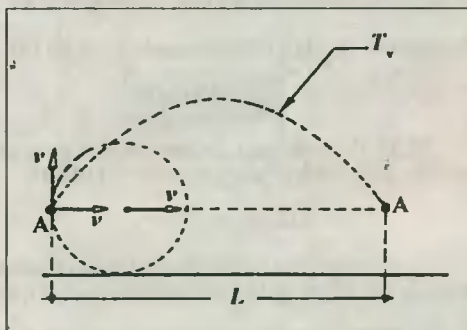
$$t_v = \text{tiempo de vuelo} = 2v_{ov}/g \Rightarrow t_v = 2v/g \dots (1)$$

$$L = \text{alcance horizontal} = v_h t_v = v(2v/g)$$

$$\Rightarrow L = 2v^2/g \dots (2)$$

Pero, del movimiento de la rueda podemos decir que ésta se habrá trasladado una distancia igual a $L = 2\pi R$, considerando que vuelve a caer en el punto A cuando la rueda ha completado exactamente una revolución. Finalmente entonces:

$$2v^2/g = 2\pi R \quad \therefore \boxed{v = \sqrt{gR}}$$



CAP 11 ESTÁTICA I

11.1.a. El ángulo formado por la normal (N) y el peso (P) es siempre igual al ángulo formado por el plano inclinado y la horizontal.

11.1.b. En base a la regla del paso (a) tendremos el esquema que se muestra.

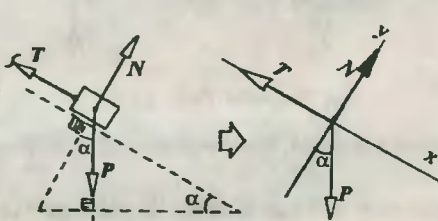


Fig. Solución Prob. 11.1.a

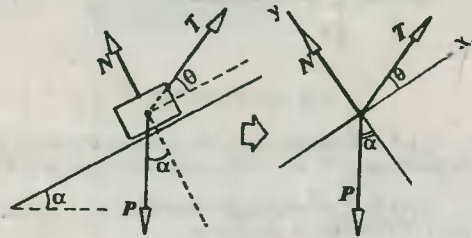


Fig. Solución Prob. 11.1.b

11.1.c. Por tratarse de superficies lisas, las reacciones N_1 y N_2 en los contactos del bloque con las paredes serán respectivamente perpendiculares a aquellas.

11.1.d. La reacción (R) del bloque B sobre el bloque A es hacia abajo, según como se indica.

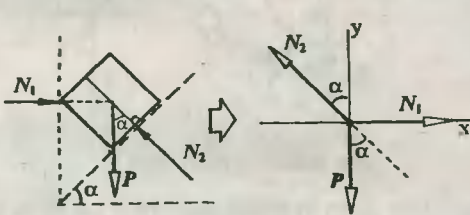


Fig. Solución Prob. 11.1.c

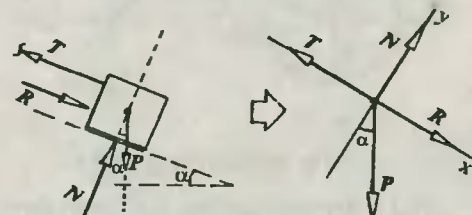


Fig. Solución Prob. 11.1.d

11.2.a. Señalaremos con f a la fuerza de rozamiento. Esta siempre es paralela a las superficies en contacto y opuesta al movimiento relativo. En este caso el bloque intenta resbalar hacia abajo, luego f será hacia arriba del plano inclinado.

11.2.b. Suponiendo que el sistema intenta deslizar hacia el lado de B, tendremos que la fuerza de rozamiento para A es hacia la izquierda.

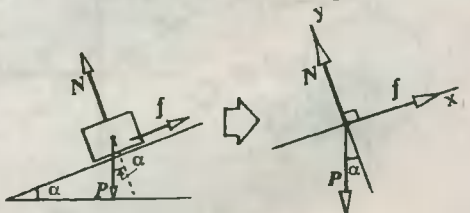


Fig. Solución Prob. 11.2.a

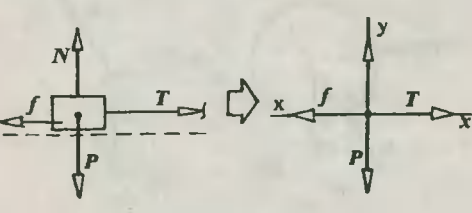


Fig. Solución Prob. 11.2.b

11.2.c. Reconocemos que el bloque B ejerce una tracción (T) sobre el cable, el cual se transmite hasta el bloque A, intentando levantarlo, y jalándolo hacia la derecha.

11.2.d. Ya que no hay rozamiento entre A y B, entonces la reacción N_1 entre ambos es perpendicular a las superficies en contacto. La fuerza de rozamiento f sobre A es hacia la izquierda.

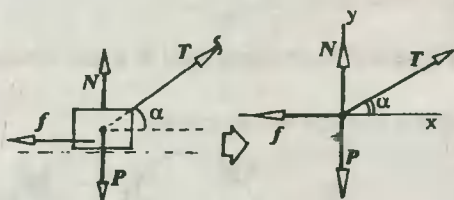


Fig. Solución Prob. 11.2.c

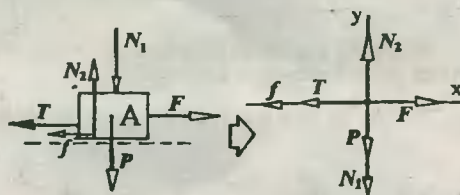


Fig. Solución Prob. 11.2.d.

11.3.a. Cuando no existe rozamiento entre la esfera y la pared, aquella se orienta de modo que la prolongación del cable pasa por su centro (O).

11.3.b. Las reacciones normales N_1 y N_2 concurren en el centro de la esfera, de modo que N_1 y el peso (P) forman el ángulo α .

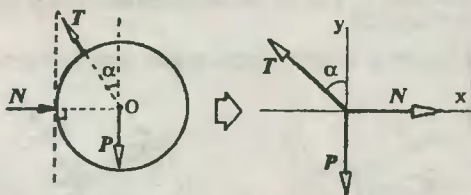


Fig. Solución Prob. 11.3.a

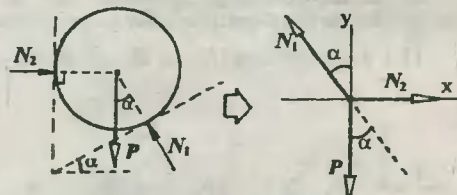


Fig. Solución Prob. 11.3.b

11.3.c. Reconociendo que la reacción normal (N) del plano inclinado pasa por el centro de la esfera, tendremos el esquema adjunto.

11.3.d. Suponiendo que la esfera toca aún al piso horizontal, habrá entonces una reacción (N) sobre ella y hacia arriba. Asimismo, la reacción (R) de la esquina es inclinada, y pasa por el centro (O) de la esfera.

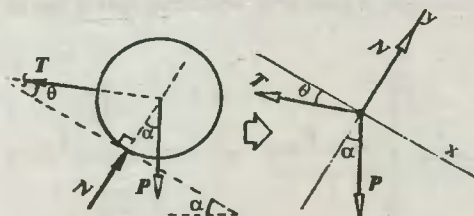


Fig. Solución Prob. 11.3.c

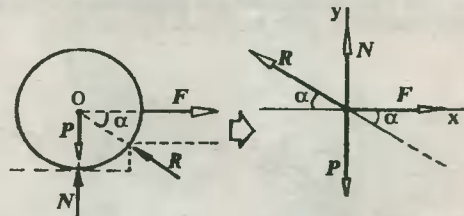


Fig. Solución Prob. 11.3.d

11.4.a. Del esquema inicial observamos que la reacción R del bloque C sobre B es horizontal

y hacia la izquierda. Además, N_T es la reacción normal total del piso.

11.4.b. Designando por R a la reacción de C sobre B tendremos que el sistema conjunto ($A + B$) tiene un peso total ($P_A + P_B$), y la reacción N_T es la total del plano inclinado sobre el sistema dado.

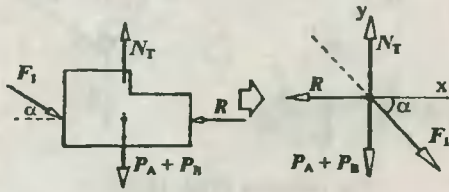


Fig. Solución Prob. 11.4.a

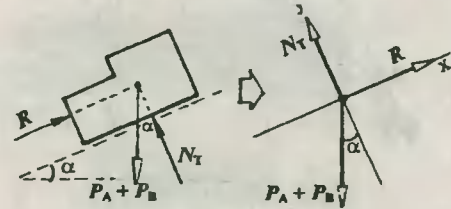


Fig. Solución Prob. 11.4.b

11.4.c. Al considerar el sistema ($A + B$) no se dibuja la tensión en la cuerda que los une. El bloque C ejerce una tracción (T) sobre el cable, la cual se transmite hasta B .

11.4.d. Considerando la simetría de las poleas diremos que las tensiones (T) en los cables son iguales. La compresión existente entre los bloques no se señala, por ser una fuerza interna del sistema ($A + B$).

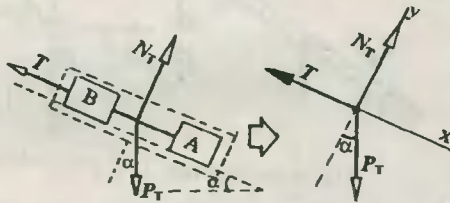


Fig. Solución Prob. 11.4.c

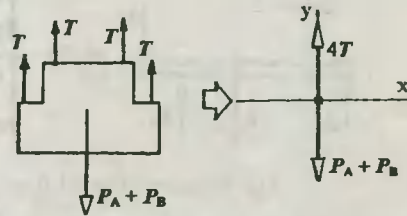


Fig. Solución Prob. 11.4.d

11.5.a. Ya que la barra está sometida a tres fuerzas: El peso (P), la tensión (T) de la cuerda y la reacción (R) de la bisagra, sus rectas de acción deberán ser coplanares y concurrentes.

11.5.b. Del mismo modo que el caso anterior, la barra está afectada por tres fuerzas: La reacción (R) del piso, el peso (P) y la tensión (T) de la cuerda, cuyas rectas de acción deben concurrir en un punto.

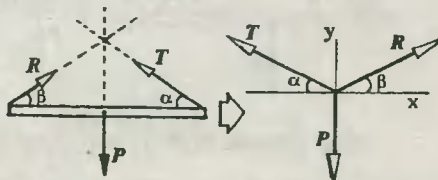


Fig. Solución Prob. 11.5.a

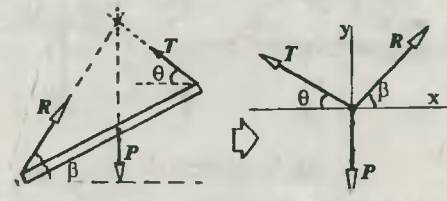


Fig. Solución Prob. 11.5.b

11.5.c. Reconocemos que la reacción N de la pared vertical es horizontal y hacia la izquierda, por ser ésta lisa. Por el punto de intersección de las rectas de acción del peso (P) y la normal (N) pasará la reacción (R) del piso.

11.5.d. La reacción (R) de la pared pasará por el punto de intersección O entre la recta de acción

del peso (P) y de la tensión (T) del cable. Por geometría se comprueba que R y T son perpendiculares

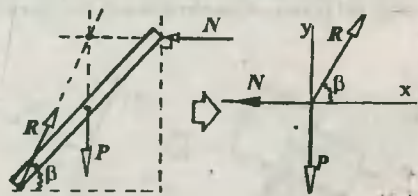


Fig. Solución Prob. 11.5.c

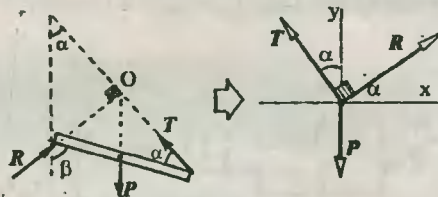


Fig. Solución Prob. 11.5.d

11.6.a. Sean R_A y R_B las reacciones de los apoyos sobre la barra, y N la fuerza con la cual el bloque C comprime a la barra. Se verifica que N es igual al peso de C.

11.6.b. Sea R la reacción en la bisagra, y Q el peso de la carga en B. Se nota que las fuerzas no son concurrentes; a pesar de ello, las hacemos concurrir en el plano X-Y.

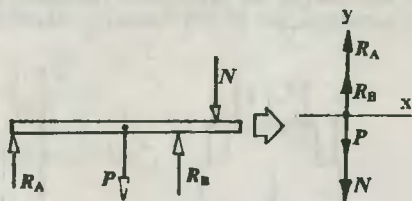


Fig. Solución Prob. 11.6.a

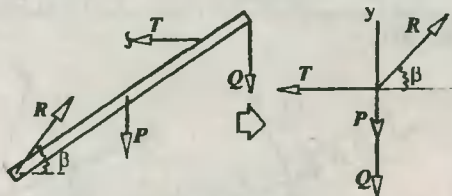


Fig. Solución Prob. 11.6.b

11.6.c. Sea R la reacción total de la pared, y sea Q el peso de la carga en B. Se ha dibujado a R dirigido hacia arriba, suponiendo que el extremo A de la barra pretende resbalar hacia abajo.

11.6.d. Considerando que el bloque C presiona a la barra con una fuerza N hacia abajo, y T la tensión en el cable, tendremos el esquema adjunto.

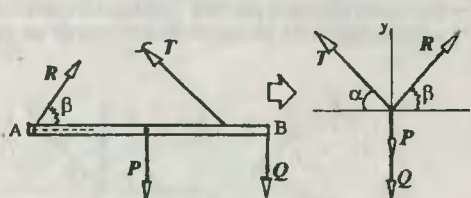


Fig. Solución Prob. 11.6.c

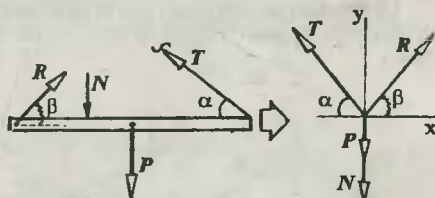


Fig. Solución Prob. 11.6.d

11.7. Utilizando el DCL construido en el problema 11.1.b, procedemos a descomponer el peso P , utilizando la proporcionalidad de los lados en un triángulo rectángulo $30^\circ-60^\circ$. Si consideramos que la tensión buscada es $T = 5x$, entonces, al descomponerla rectangularmente notamos que, por equilibrio, se debe cumplir que las componentes paralelas al eje X deben ser iguales. Veamos.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 4x = 320 \Rightarrow x = 80 \Rightarrow T = 5(80) \therefore T = 400 \text{ N}$$

11.8. El mínimo valor de la fuerza F que es capaz de hacer pasar la esfera por encima del escalón

se consigue en el instante que la reacción (N) del piso se hace mínima (cero), lo cual significaría que la esfera pierde contacto con el piso horizontal. Luego, del DCL conseguido en el problema 11.3.d tendremos, que al descomponer la reacción $R = 5x$, su componente vertical ($3x$) debe equilibrarse con el peso. Luego:

$$1) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 3x = 300 \Rightarrow x = 100$$

$$2) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = 4x = 4(100) \therefore \boxed{F = 400 \text{ N}}$$

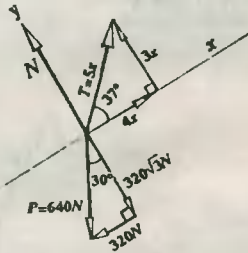


Fig. Solución Prob. 11.7

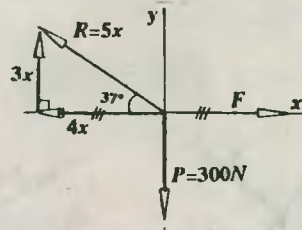


Fig. Solución Prob. 11.8

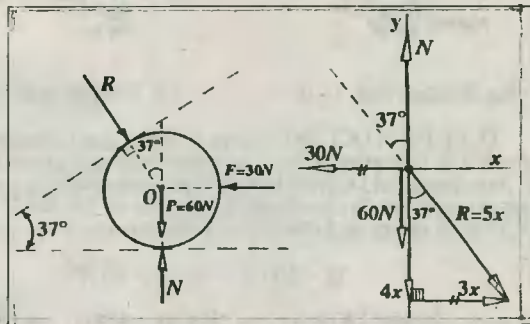
11.9. Haciendo el DCL de la esfera encontramos que la reacción R de la pared inclinada forma un ángulo de 37° con la vertical. Luego, para el cálculo de la reacción normal (N) se procede a descomponer $R = 5x$ y a aplicar la primera condición de equilibrio en cada eje.

$$1) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow 3x = 30 \Rightarrow x = 10$$

$$2) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = 60 + 4x$$

$$\Rightarrow N = 60 + 4(10)$$

$$\therefore \boxed{N = 100 \text{ N}}$$



11.10. Utilizando el DCL encontrado para el problema 11.4.b, tendremos que el peso total es $P_T = P_A + P_B = 100 \text{ N}$. Luego, al descomponer este peso, notamos que las fuerzas paralelas al eje X se equilibran entre sí. (Ver figura en la sgte. página)

$$\Sigma F_x = 0 \therefore \boxed{R = 50 \text{ N}}$$

11.11. Analizando por separado a los bloques 1 y 3, deducimos que las tensiones T_1 y T_3 en los cables que los sostienen tienen igual valor que sus pesos; así: $T_1 = P_1 = 70 \text{ N}$, y $T_3 = P_3$. Luego, analizando el DCL del bloque 2, vemos que al descomponer el peso $P_2 = 60 \text{ N}$ se verifica el equilibrio entre las fuerzas paralelas al eje X. (Ver figura en la sgte. página)

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P_3 + 30 = 70 \therefore \boxed{P_3 = 40 \text{ N}}$$

11.12. Utilizando el DCL construido para el problema 11.2.a, vemos que al descomponer el peso $P = 120 \text{ N}$, entonces las fuerzas paralelas al eje X se equilibran entre sí. Veamos.

$$\text{Si: } P = 5x \Rightarrow 5x = 120 \Rightarrow x = 24$$

$$\text{Luego: } \Sigma F_x = 0 \Rightarrow f = 3x = 3(24) \therefore \boxed{f = 72 \text{ N}}$$

11.13. En base al DCL elaborado en el problema 11.2.c tendremos por equilibrio que la tensión

T en el cable tiene el mismo valor que el peso del bloque B. Luego: $T = P_B = 250 \text{ N}$. Seguidamente, descomponemos esta tensión y comprobamos que las fuerzas paralelas al eje X se equilibran entre sí.

$$\text{Si hacemos: } T = 5x \Rightarrow 5x = 250 \Rightarrow x = 50$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f = 3x = 3(50) \therefore \boxed{f = 150 \text{ N}}$$

$$y: \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + 4x = 400 \therefore \boxed{N = 200 \text{ N}}$$

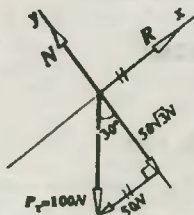


Fig. Solución Prob. 11.10

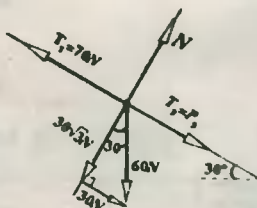


Fig. Solución Prob. 11.11

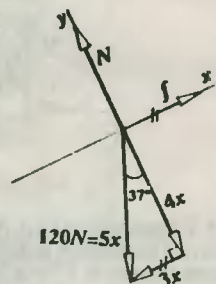


Fig. Solución Prob. 11.12

11.14. Por el DCL de la esfera notamos que la fuerza que ejerce el cable de la izquierda tiene el mismo valor que el peso del bloque R. Asimismo, del DCL del bloque Q podemos deducir por equilibrio que la tensión en la cuerda que lo sostiene es $T = 200 \text{ N}$. Luego, del DCL de la esfera se tiene que al descomponer T se verifica:

$$5x = 200 \text{ N} \Rightarrow x = 40 \text{ N}$$

$$\text{Luego: } \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R = 4x = 4(40) \Rightarrow \boxed{R = 160 \text{ N}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + 3x = 200 \therefore \boxed{N = 80 \text{ N}}$$

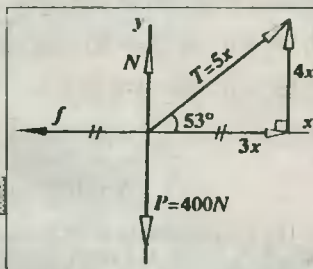


Fig. Solución Prob. 11.13

11.15. Haciendo cortes imaginarios en los cables AB, BC y DE podemos apreciar las tensiones que ellos soportan. Asimismo, al descomponer la tensión T_{AB} podemos aplicar la primera condición de equilibrio.

$$1) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow y = 32 + 8 \Rightarrow y = 40 \text{ N} \dots (1)$$

$$2) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow x + T_{DE} = T_{BC} \Rightarrow x = T_{BC} - T_{DE}$$

$$\text{Por condición del problema se obtiene: } x = 30 \text{ N} \dots (2)$$

Finalmente, de (1) y (2) por aplicación del Teorema de Pitágoras encontramos:

$$T_{AB} = \sqrt{x^2 + y^2} \therefore \boxed{T_{AB} = 50 \text{ N}}$$

11.16. Haciendo el DCL de cada nudo por separado, tendremos los esquemas de la página siguiente. Observamos del triángulo pitagórico en la figura (a) que: $P = 320 \text{ N} = 4k$, donde $k = 80 \text{ N}$. Luego: $T = 3k = 3(80 \text{ N}) \Rightarrow T = 240 \text{ N}$.

Del triángulo vectorial (Figura (b)) notamos que: $T = 240 \text{ N} = 4(k')$, donde $k' = 60 \text{ N}$. Luego:

$$Q = 3k' = 3(60 \text{ N}) \quad \therefore \quad \boxed{Q = 180 \text{ N}}$$

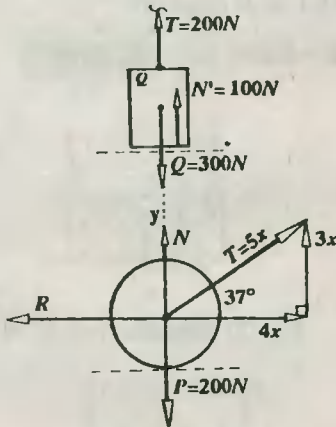


Fig. Solución Prob. 11.14

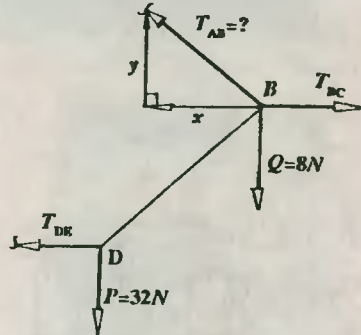


Fig. Solución Prob. 11.15

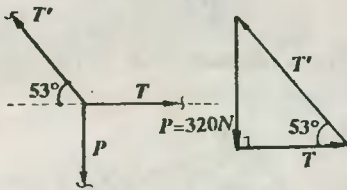


Fig. (a). Solución Prob. 11.16

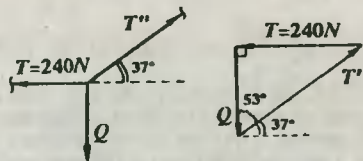


Fig. (b) Solución Prob. 11.16

11.17. El problema se presta para ser resuelto sin necesidad de separar las esferas, sino por el contrario, manteniéndolas unidas. Haremos el DCL de las dos como un todo, para así indicar directamente las fuerzas de reacción del piso R_B y de la pared R_A .

$$\text{Así, } \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_A = S \quad \therefore \quad \boxed{R_A = 25 \text{ N}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_B = P_A + P_B = 25 + 10$$

$$\therefore \quad \boxed{R_B = 35 \text{ N}}$$

11.18. Cálculo de las tensiones en las cuerdas.- Considerando que los bloques están colocados simétricamente respecto a la vertical que pasa por sus centros de gravedad, notaremos que las tensiones son iguales entre sí (T). Asimismo, si consideramos al todo como un solo cuerpo, tendremos el DCL de la figura (a).

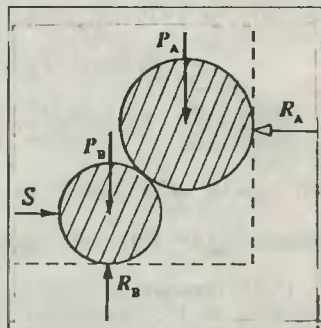


Fig. Solución Prob. 11.17

$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow T + T + T + T = P_T$$

$$4T = P_A + P_B + P_C = 1000 \text{ N} \Rightarrow T = 250 \text{ N}$$

Cálculo de R_x .- Analizando el bloque A tendremos el DCL de la figura (b).

$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow 2T + R_x = P_A \Rightarrow 2(250) + R_x = 600 \therefore R_x = 100 \text{ N}$$

Cálculo de R_y .- Analizando el bloque C tendremos el DCL de la figura (c).

$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow R_y + P_C = 2T \Rightarrow R_y + 300 = 2(250) \therefore R_y = 200 \text{ N}$$

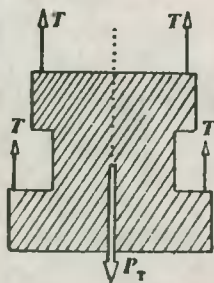


Fig. (a) Solución Prob. 11.18

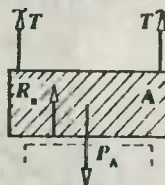


Fig. (b). Solución Prob. 11.18

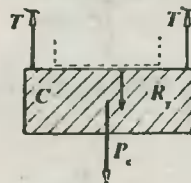


Fig. (c) Solución Prob. 11.18

11.19. Al realizar los DCL de cada bloque observamos que éstos logran mantenerse en equilibrio gracias a que las su componentes de sus pesos, paralelas a las caras del prisma son iguales entre sí. Notamos asimismo que los ángulos α y β tienen valores que están relacionados con el ángulo θ (incógnita) del siguiente modo:

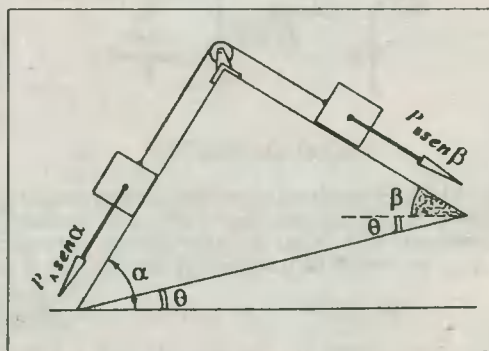
$$\alpha = 45^\circ + \theta; \beta = 45^\circ - \theta$$

$$\Rightarrow P_A \cdot \text{sen} \alpha = P_B \cdot \text{sen} \beta$$

$$\frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \beta} = \frac{P_B}{P_A} \Rightarrow \frac{\text{sen}(45^\circ + \theta)}{\text{sen}(45^\circ - \theta)} = \frac{480}{360}$$

Pero: $\text{sen}(45^\circ - \theta) = \text{cos}(45^\circ + \theta)$

Entonces: $\text{tg}(45^\circ + \theta) = 4/3 = \text{tg}53^\circ \Rightarrow 45^\circ + \theta = 53^\circ \therefore \theta = 8^\circ$



11.20. Teniendo en cuenta que la tensión en una misma cuerda es la misma en todo punto de su extensión, del DCL mostrado podemos deducir lo siguiente:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 5T = 600 \text{ N} \therefore T = 120 \text{ N}$$

Nota.- No se han hecho los cortes imaginarios para las cuerdas que salen de las poleas inferiores, ya que se las ha considerado como parte de un todo o sistema cuyo peso es 600 N.

11.21. En base al DCL mostrado se ha indicado con x la tensión de la cuerda del lado izquierdo, la cual se transmite por el resto del sistema de modo que la tensión buscada es $T = 3x$. Luego, por el equilibrio del bloque tenemos:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow x + 9x = 500 \text{ N} \Rightarrow x = 50 \text{ N}$$

Luego: $T = 3x = 3 \cdot 50 \therefore T = 150 \text{ N}$

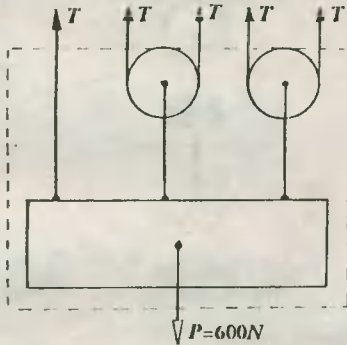


Fig. Solución Prob. 11.20

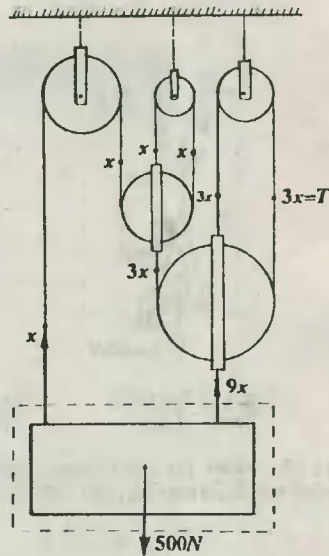


Fig. Solución Prob. 11.21

11.22. A partir del DCL del sistema (1) mostrado en la Fig. (1), establecemos que:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 4T = P + Q = 60 + 40$$

$$\Rightarrow T = 25 \text{ N}$$

Y del DCL del bloque P (Fig. (2)) tendremos:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T + N = P \Rightarrow N = 60 - 2(25)$$

$$\therefore N = 10 \text{ N}$$

11.23. A partir del DCL N° 1 comprobamos que la fuerza F que aplica el hombre se traduce en una tensión sobre la cuerda. Luego, por equilibrio:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 3F = 600 \Rightarrow F = 200 \text{ N}$$

Y del DCL N° 2 encontraremos la fuerza de compresión N que buscamos.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F = P \Rightarrow N = 600 - 200 \therefore N = 400 \text{ N}$$

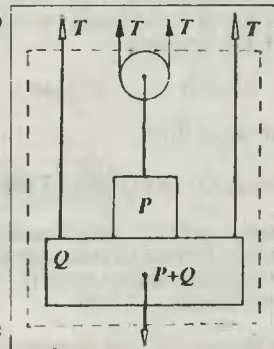


Fig. (1) Solución Prob. 11.22

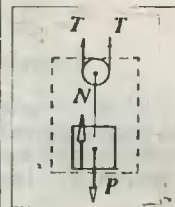


Fig. (2). Solución Prob. 11.22

11.24. Del DCL N° 1 tendremos por equilibrio:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T + 20 + 20 = 50 + 2Q \Rightarrow T = 2Q + 10 \dots (1)$$

Del DCL N° 2 obtendremos por equilibrio: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T = 50 + Q \dots (2)$

Luego, de (1) en (2): $2(2Q + 10) = 50 + Q \therefore Q = 10 \text{ N}$

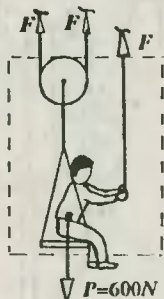


Fig. (1) Solución
Prob. 11.23



Fig. (2) Solución
Prob. 11.23

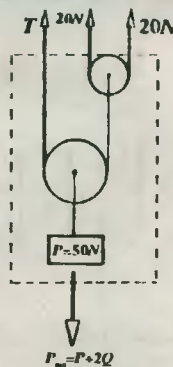


Fig. (1) Solución
Prob. 11.24

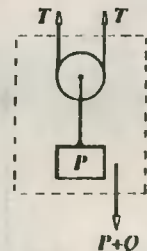


Fig. (2) Solución
Prob. 11.24

11.25. Dadas las condiciones del problema, tendremos que la longitud sin deformar (l_0) del resorte viene dada por:

$$l_0 = l_f - x \dots (1)$$

siendo $l_f = 8 \text{ cm}$, y x la deformación del resorte. Aplicando la primera condición de equilibrio en base al DCL mostrado para el bloque, reconociendo que la fuerza F del resorte viene dada por la Ley de Hooke (relación (11.1)), tenemos:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow kx = 40 \text{ N}$$

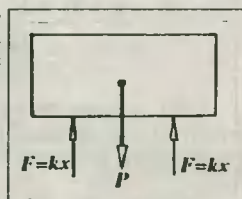
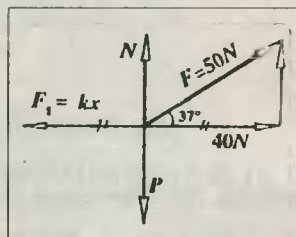
$$\Rightarrow 40 \text{ (N/cm)}x = 40 \text{ N} \Rightarrow x = 1 \text{ cm} \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1): $l_0 = 7 \text{ cm}$

11.26. Observando el gráfico original podemos deducir que los resortes están comprimidos en una magnitud x , que viene dada por la diferencia existente entre sus longitudes sin deformar ($l_0 = 20 \text{ cm}$), y la longitud que presentan ($l_f = 18 \text{ cm}$). Luego, $x = 2 \text{ cm}$.

Del DCL de la plataforma aplicamos la primera condición de equilibrio.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P = 2kx = 2 \cdot 100 \text{ N/cm} \cdot 2 \text{ cm} \therefore P = 400 \text{ N}$$



11.27. Al analizar los resortes y el bloque por separado, logramos deducir que la fuerza interna F es la misma para los dos primeros, y concuerda con el peso del tercero. Así, por la ley de Hooke podemos encontrar las deformaciones x_1 y x_2 de cada resorte.

$$F_1 = F_2 = F \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2 = P$$

$$k_1 x_1 = P \Rightarrow 300 \text{ N/cm} \cdot x_1 = 600 \text{ N} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ cm}$$

$$k_2 x_2 = P \Rightarrow 200 \text{ N/cm} \cdot x_2 = 600 \text{ N} \Rightarrow x_2 = 3 \text{ cm}$$

Finalmente, las longitudes originales de los resortes se obtendrán de las siguientes relaciones:

$$1) l_{o1} = l_{f1} - x_1 = 18 - 2 \quad \therefore \quad l_{o1} = 16 \text{ cm}$$

$$2) l_{o2} = l_{f2} - x_2 = 24 - 3 \quad \therefore \quad l_{o2} = 21 \text{ cm}$$

11.28. A partir del DCL del bloque diremos que por equilibrio se debe verificar:

$$1) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow 4m = 80 \text{ N} \Rightarrow m = 20 \text{ N}$$

Del triángulo notable 37°-53° vemos que:

$$kx = 5m \Rightarrow (400 \text{ N/m})x = 5(20 \text{ N})$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{4} m \quad \text{ó} \quad x = 25 \text{ cm}$$

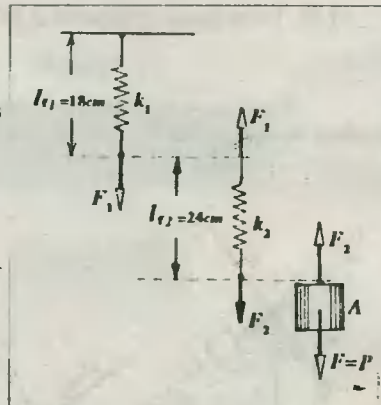


Fig. Solución Prob. 11.27

11.29. Al encontrarse el resorte comprimido, este ejerce una fuerza F sobre el bloque y hacia arriba, pretendiendo desplazarlo en ese mismo sentido. Por esta razón y por el DCL del bloque deducimos que la fuerza de fricción debe estar dirigida hacia abajo.

$$\text{Se sabe que: } F = kx = 100.0,2 \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

Luego, de la descomposición del peso y del equilibrio de fuerzas tenemos:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f + 30 = 20 + 20 \quad \therefore \quad f = 10 \text{ N}$$

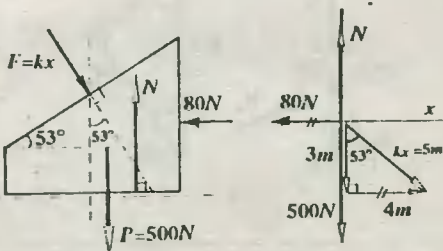


Fig. Solución Prob. 11.28

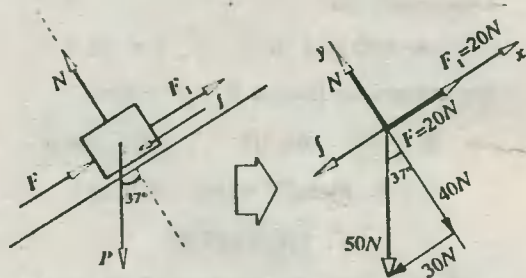


Fig. Solución Prob. 11.29

11.30. Consideremos el sistema formado por A + B. En él se verifica que su peso total es $P_T = 5P_B$. Luego, del DCL (1) se verifica por equilibrio lo siguiente:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 3P_B = 150 \Rightarrow P_B = 50 \text{ N}$$

A continuación, del DCL (2) para el bloque A, tenemos que su peso $P_A = 4P_B = 200 \text{ N}$ se descompone de modo que su componente paralela al eje X se equilibra con la fuerza (F) que ejerce el resorte.

$$\text{Si: } 5m = 200 \text{ N} \Rightarrow m = 40 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow kx = 3m \Rightarrow 500x = 3.40 \quad \therefore \quad x = 0,24 \text{ m} \quad \text{ó} \quad x = 24 \text{ cm}$$

11.31. En la figura se muestra el DCL del cajón.

$$F = P \operatorname{sen} 30^\circ \Rightarrow F = 400 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow F = 200 \text{ N}$$

Esta fuerza nos indica que el resorte experimenta una tensión de 200 N, la cual a su vez le produce un alargamiento x que se obtendrá de la ley de Hooke para resortes ideales.

$$F = kx \Rightarrow 200 = 500x \quad \therefore \quad x = 0,4 \text{ m}$$

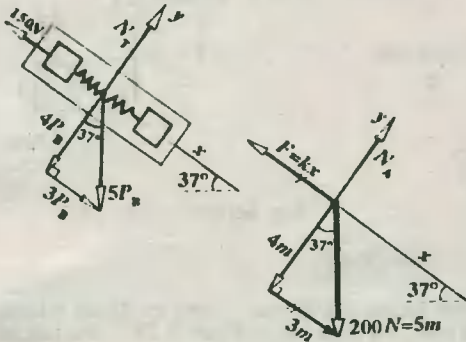


Fig. Solución Prob. 11.30



Fig. Solución Prob. 11.31

11.32. Analizando los datos deducimos que el resorte está estirado, y por lo tanto experimenta una fuerza interna de tensión. Adjunto se muestra el DCL de la esfera.

Observamos que:

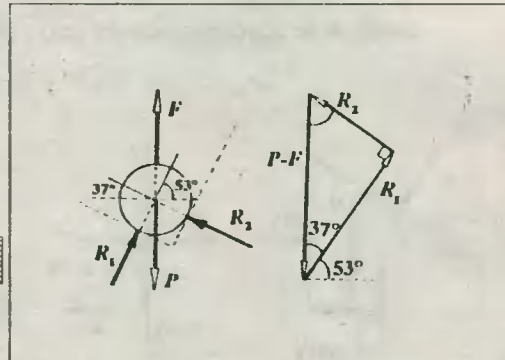
$$F = kx = 600(0,5 - 0,2) \Rightarrow F = 180 \text{ N}$$

Del triángulo de fuerzas: $R_1 = (P - F) \cos 37^\circ$

$$\Rightarrow R_1 = (500 - 180) \cdot 4/5 \quad \therefore \quad R_1 = 256 \text{ N}$$

$$R_2 = (P - F) \operatorname{sen} 37^\circ = (500 - 180) \cdot 3/5$$

$$\therefore \quad R_2 = 192 \text{ N}$$



11.33. A partir del DCL de la esferilla construimos el triángulo vectorial con el peso (P), la fuerza horizontal (F) y la tensión (T). Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$T = \sqrt{36^2 + 27^2} \quad \therefore \quad T = 45 \text{ N}$$

Nota.- Obsérvese que los lados son múltiplos de los números 3, 4 y 5.

11.34. Utilizando el DCL del problema 11.5.c tendremos que los vectores representativos del peso (P), normal (N) y reacción del piso (R) forman entre sí un triángulo rectángulo. Luego:

$$R = \sqrt{N^2 + P^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} \quad \therefore \quad R = 26 \text{ N}$$

11.35. Construyendo el DCL comprobamos que la reacción en A tiene una dirección tal que pasará por el punto de concurrencia M de la recta de acción del peso (P) de la barra y de la tensión

(T) de la cuerda. Luego, construyendo el triángulo vectorial tendremos: $5x = 100\text{ N} \Rightarrow x = 20\text{ N}$.

$$R = 4x = 4(20\text{ N}) \therefore R = 80\text{ N}$$

$$T = 3x = 3(20\text{ N}) \therefore T = 60\text{ N}$$

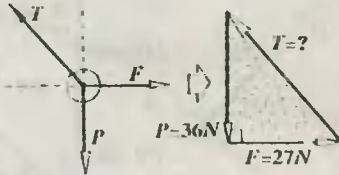


Fig. Solución Prob. 11.33

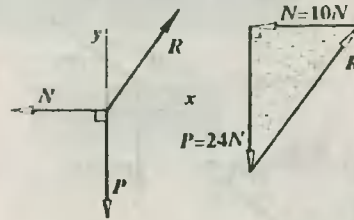


Fig. Solución Prob. 11.34

11.36. Haciendo el DCL de la barra, vemos que la recta de acción de las tres fuerzas que la afectan concurren en O , y construyendo el triángulo vectorial encontramos lo siguiente:

$$3x = 18\text{ N} \Rightarrow x = 6\text{ N}$$

$$\Rightarrow P = 4x = 4(6) \therefore P = 24\text{ N}$$

$$R_B = 5x = 5(6) \therefore R_B = 30\text{ N}$$

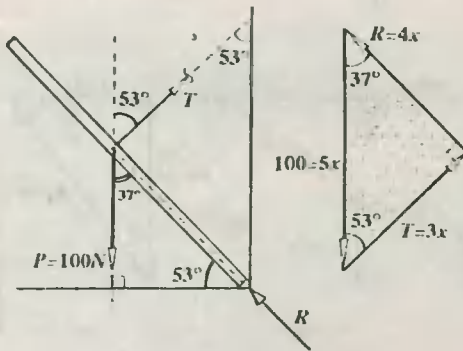


Fig. Solución Prob. 11.35

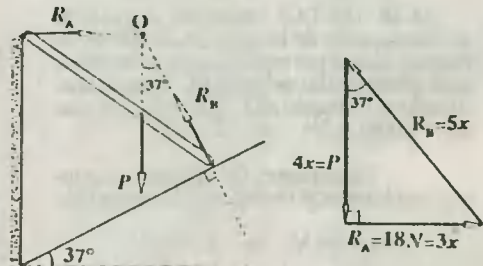


Fig. Solución Prob. 11.36

11.37. Reconocemos que la barra está sometida a la acción de tres fuerzas cuyas rectas de acción concurren en M . También notamos que la tensión en la cuerda concuerda con el peso del bloque C . Finalmente, del triángulo vectorial tendremos: $3x = 24\text{ N} \Rightarrow x = 8\text{ N}$.

$$\Rightarrow R = 4x = 4(8) \therefore R = 32\text{ N}$$

$$P_C = 5x = 5(8) \therefore P_C = 40\text{ N}$$

11.38. Al construir el DCL, notamos que por simetría respecto al punto medio de la barra encontramos que los ángulos formados por las reacciones en A y B son iguales a 53° . Luego, del triángulo vectorial se encuentra que esta particularidad de las reacciones se debe a que sus valores son iguales. Luego, resolviendo el triángulo encontramos que las reacciones son:

$$R_A = R_B = 50 \text{ N}$$

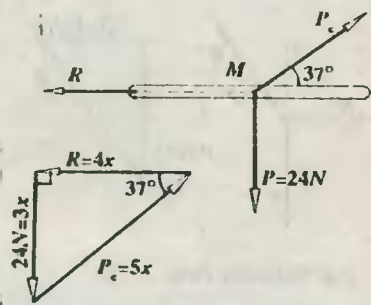


Fig. Solución Prob. 11.37

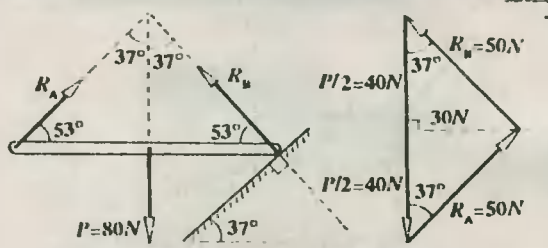
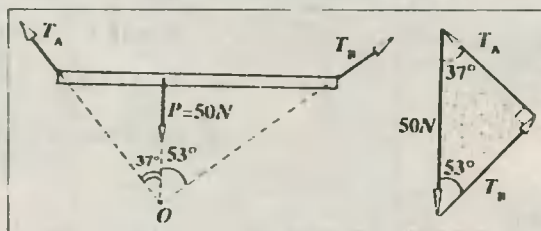


Fig. Solución Prob. 11.38

11.39. De la construcción del DCL comprobamos que las tres fuerzas que afectan a la barra concurren en el punto O, siendo las direcciones de las rectas de acción de las tensiones perpendiculares entre sí. La línea de acción del peso de la barra pasa por la vertical que pasa por O. Luego, del triángulo vectorial se consigue que:

$$T_A = 40 \text{ N} \text{ y } T_B = 30 \text{ N}$$



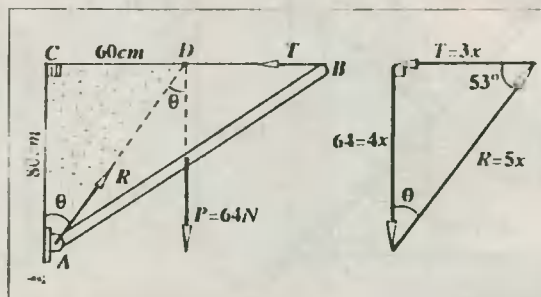
11.40. Del DCL ubicamos el punto O de intersección de la recta de acción de las fuerzas, el cual por construcción geométrica es el punto medio del lado BC. Luego, analizando el triángulo ADC encontramos que: $\text{tg}\theta = 60/80 = 3/4 \Rightarrow \theta = 37^\circ$.

Finalmente, del triángulo vectorial resolvemos y obtenemos lo siguiente:

$$4x = 64 \text{ N} \Rightarrow x = 16 \text{ N}$$

$$\Rightarrow T = 3x = 3 \cdot 16 \therefore T = 48 \text{ N}$$

$$R = 5x = 5 \cdot 16 \therefore R = 80 \text{ N}$$



11.41. En base al DCL de la barra reconocemos que por el punto de intersección de la recta de acción de la tensión (T) y la reacción (R) de la pared pasará necesariamente la resultante de los pesos P y Q, que también será vertical; esto nos permitirá construir el triángulo vectorial. Teniendo en cuenta que $Q = R$, y resolviendo el triángulo conseguimos:

$$\text{tg}37^\circ = \frac{R}{P+Q} \Rightarrow R = 3P = 3 \cdot 20 \therefore R = 60 \text{ N}$$

Y además: $T = 100 \text{ N}$

11.42. Utilizando el DCL del problema 11.5.d colocamos los datos para $\alpha = 37^\circ$ y $\beta = 74^\circ$. Luego, reconociendo que los vectores peso (P), tensión (T) y reacción (R) forman un triángulo rectángulo pitagórico de lados proporcionales a 3, 4 y 5, diremos finalmente que:

$$P = 5x \Rightarrow 5x = 600 \text{ N} \Rightarrow x = 120 \text{ N}$$

$$\text{Luego: } R = 3x = 3.120 \quad \therefore \quad \boxed{R = 360 \text{ N}}$$

$$T = 4x = 4.120 \quad \therefore \quad \boxed{T = 480 \text{ N}}$$

Observación. - La reacción (R) de la pared tiene dos componentes; una es horizontal (N) y la otra es vertical (f). La primera es la reacción normal y la segunda es la fuerza de fricción.

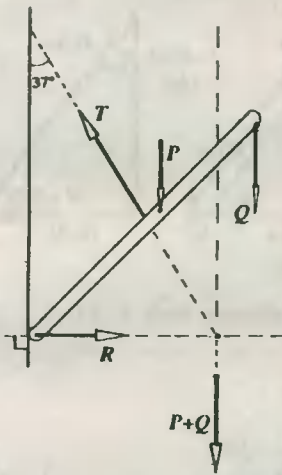


Fig. Solución Prob. 11.41

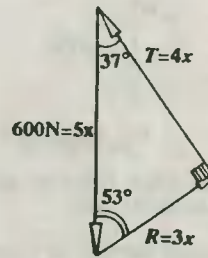
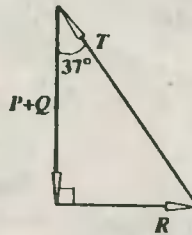


Fig. Solución Prob. 11.42

11.43. Haciendo el DCL del extremo B del mástil, reconocemos que los vectores peso (P), esfuerzo interno (Q) y tensión (T) forman un triángulo, en el cual aplicaremos la ley de Senos.

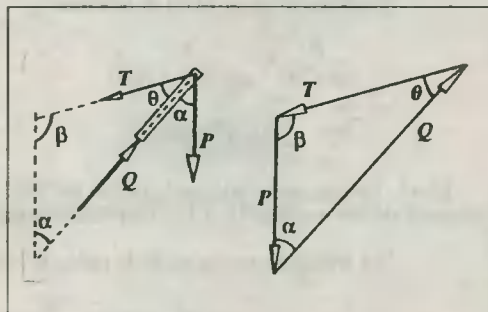
$$\frac{T}{\text{sen}\alpha} = \frac{Q}{\text{sen}\beta} = \frac{P}{\text{sen}\theta} \dots (\theta = 16^\circ)$$

$$(*) \quad \alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\text{sen}37^\circ} = \frac{Q}{\text{sen}127^\circ} = \frac{70}{\text{sen}16^\circ}$$

Resolviendo estas igualdades obtenemos:

$$\boxed{T = 150 \text{ N}; Q = 200 \text{ N}}$$



11.44. Aprovechando el DCL obtenido para el problema 11.3.c, reemplazamos los datos y construimos el triángulo vectorial mostrada en la sgte página.

$$\text{De: } x\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ N} \Rightarrow x = 10 \text{ N} \Rightarrow T = x \quad \therefore \quad \boxed{T = 10 \text{ N}}$$

Finalmente: $N = 2x \quad \therefore \quad \boxed{N = 20 \text{ N}}$

11.45. Haciendo el DCL de la esfera, observamos que N es perpendicular a las superficies en contacto, porque éstas son lisas. Observamos también que el triángulo OAB es notable. Luego, del equilibrio de las fuerzas (3) podemos construir el triángulo vectorial.

Vemos que: $P = 4k = 400 \text{ N} \Rightarrow k = 100 \text{ N}$

Finalmente entonces: $\boxed{T = 500 \text{ N}; N = 300 \text{ N}}$

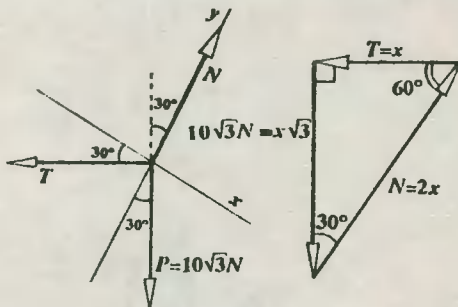


Fig. Solución Prob. 11.44

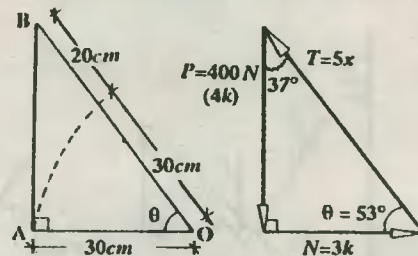


Fig. Solución Prob. 11.45

11.46. En la figura se muestra el DCL de cada nudo. Así tendremos:

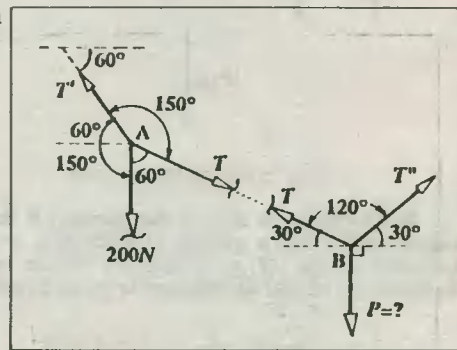
Aplicando el teorema de Lami en el nudo A:

$$\frac{T}{\text{sen}150^\circ} = \frac{200 \text{ N}}{\text{sen}150^\circ} \Rightarrow T = 200 \text{ N}$$

Igualmente, en el nudo B tenemos:

$$\frac{P}{\text{sen}120^\circ} = \frac{T}{\text{sen}(90^\circ + 30^\circ)}$$

$\therefore \quad \boxed{P = T = 200 \text{ N}}$



11.47. Construimos adecuadamente los DCL de cada polea, siendo N_1 y N_2 las reacciones normales de las varillas AC y BC respectivamente.

Del triángulo vectorial de la polea P tenemos:

$$\frac{T}{\text{sen}37^\circ} = \frac{P}{\text{sen}(90^\circ - \theta)} \dots \text{(ley de senos)}$$

Como: $\text{sen}(90^\circ - \theta) = \text{cos}\theta$, entonces: $T = P \cdot \frac{\text{sen}37^\circ}{\text{cos}\theta} \dots (1)$

Del triángulo vectorial de la polea Q tenemos: $\frac{T}{\text{sen}53^\circ} = \frac{Q}{\text{sen}\theta} \Rightarrow T = Q \cdot \frac{\text{sen}53^\circ}{\text{sen}\theta} \dots (2)$

Observamos que (1) = (2). Luego: $P \cdot \frac{\text{sen}37^\circ}{\text{cos}\theta} = Q \cdot \frac{\text{sen}53^\circ}{\text{sen}\theta} \Rightarrow \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} = \left(\frac{Q}{P}\right) \cdot \frac{\text{sen}53^\circ}{\text{cos}53^\circ}$

$$\Rightarrow \text{tg}\theta = (21/96) \cdot 4/3 = 7/24 = \text{tg}16^\circ \quad \therefore \theta = 16^\circ$$

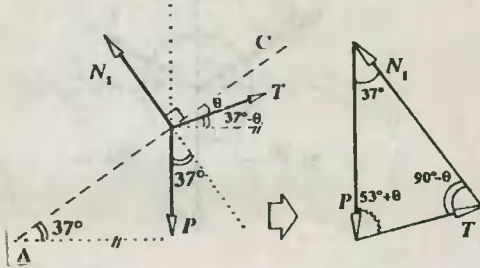


Fig. (1). Solución Prob. 11.47

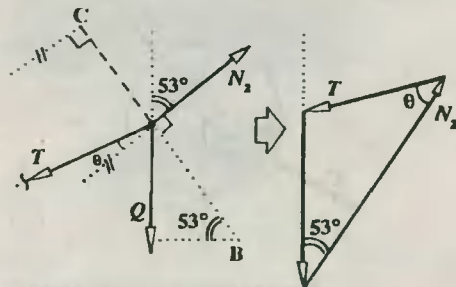


Fig. (2). Solución Prob. 11.47

11.48. Haciendo el DCL de cada esfera conseguiremos relacionar ambas esferas a través de un elemento común: La tensión (T). Es de notar que hemos completado ángulos en los gráficos para poder utilizar el Teorema de Lami, además que el triángulo AOB es equilátero.

Aplicando el Teorema de Lami en la esfera A tenemos:

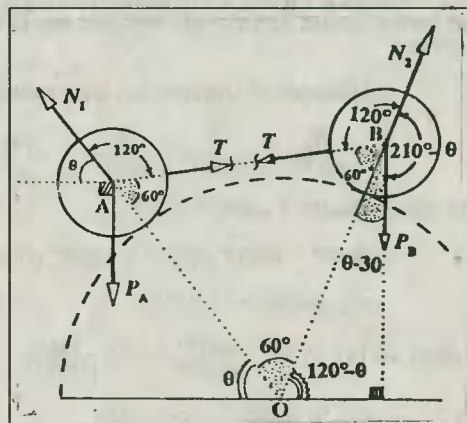
$$\frac{P_A}{\text{sen}120^\circ} = \frac{T}{\text{sen}(90^\circ + \theta)} \quad \dots (1)$$

Aplicando el Teorema de Lami en la esfera B tenemos:

$$\frac{P_B}{\text{sen}120^\circ} = \frac{T}{\text{sen}(210^\circ - \theta)} \quad \dots (2)$$

Luego, dividiendo (1) ÷ (2) miembro a miembro:

$$\begin{aligned} \frac{P_A}{P_B} &= \frac{\text{sen}(210^\circ - \theta)}{\text{sen}(90^\circ - \theta)} \Rightarrow \frac{196}{300} = \frac{\text{sen}(\theta - 30^\circ)}{\text{cos}\theta} \Rightarrow 196 = \frac{300}{\text{cos}\theta} \cdot (\text{sen}\theta \cdot \text{cos}30^\circ - \text{sen}30^\circ \cdot \text{cos}\theta) \\ &\Rightarrow 196 = 300(\text{tg}\theta \cdot \sqrt{3}/2 - 1/2) \quad \dots (\sqrt{3} = 1,73) \\ &\Rightarrow \text{tg}\theta = 692/519 = 4/3 \quad \therefore \theta = 53^\circ \end{aligned}$$



11.49. Analizando el equilibrio de una de las esferas mayores encontraremos la fuerza de tensión (T) en el cable que lo sostiene, y además la fuerza de compresión (C) que se manifiesta en el contacto con la esfera pequeña. Luego, analizando el equilibrio de la esfera pequeña, conociendo las fuerzas de compresión (C) que la sostiene, aplicaremos el Teorema de Lami (Figura 1)).

$$\begin{aligned} \frac{C}{\text{sen}143^\circ} &= \frac{P}{\text{sen}164^\circ} \Rightarrow C = P \cdot \frac{\text{sen}143^\circ}{\text{sen}164^\circ} \Rightarrow C = P \cdot \frac{\text{sen}37^\circ}{\text{sen}16^\circ} \Rightarrow C = 140 \cdot \frac{3/5}{7/25} \\ &\Rightarrow C = 300 \text{ N} \end{aligned}$$

Y analizando la esfera pequeña (Figura (2)): $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_x = 2C \text{sen} \alpha \Rightarrow P_x = 2.300.3/5$

$\therefore P_x = 360 \text{ N}$

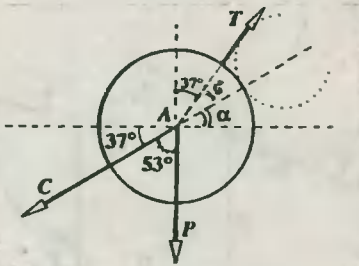


Fig. (1) Solución Prob. 11.49

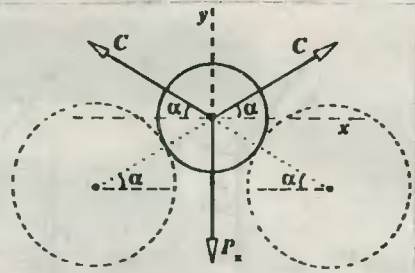


Fig. (2). Solución Prob. 11.49

11.50. Al hacer el DCL del cilindro, vemos que las reacciones en A y B son N_1 y N_2 respectivamente, cuyas rectas de acción forman un triángulo vectorial con la del peso del cilindro.

Aplicando el teorema de Lami tenemos:

$$\frac{N_1}{\text{sen}74^\circ} = \frac{P}{\text{sen}69^\circ} = \frac{N_2}{\text{sen}37^\circ} \dots (*)$$

En donde: $\text{sen}69^\circ = \text{sen}(53^\circ + 16^\circ)$

$$\text{sen}69^\circ = \text{sen}53^\circ \cdot \text{cos}16^\circ + \text{sen}16^\circ \cdot \text{cos}53^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sen}69^\circ = 117/125$$

Luego, en (a): $N_1 = P \cdot \frac{\text{sen}74^\circ}{\text{sen}69^\circ} = 117 \cdot \frac{24/25}{117/125} \Rightarrow N_1 = 120 \text{ N}$

Y: $N_2 = P \cdot \frac{\text{sen}37^\circ}{\text{sen}69^\circ} = 117 \cdot \frac{3/5}{117/125} \Rightarrow N_2 = 75 \text{ N}$

$\therefore N_2 = 75 \text{ N}$

11.51. Sobre la base del DCL mostrado, y teniendo en cuenta la semejanza existente entre el triángulo vectorial y el triángulo ABC, diremos que:

$$\frac{T}{BC} = \frac{R}{AB} = \frac{Q}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{6} = \frac{R}{4} = \frac{800 \text{ N}}{5} \therefore T = 960 \text{ N} \text{ y } R = 640 \text{ N}$$

11.52. Al construir el DCL de la barra notamos que el punto de concurrencia de las líneas de acción de las tres fuerzas (T, Q y R) que afectan a la barra es M, el cual por la geometría del sistema es punto medio del lado BC. Luego, al aplicar la semejanza de triángulos entre ΔAMC y ΔPQR tenemos:

$$MC/P = AC/Q \Rightarrow L/2 = 10.150 \text{ N}/300 \text{ N} \Rightarrow L = 10 \text{ m}$$

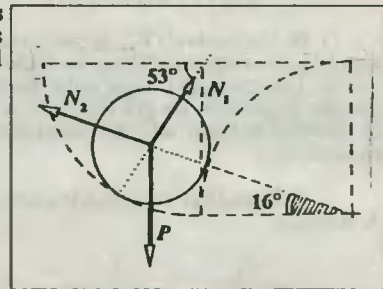


Fig. (1). Solución Prob. 11.50

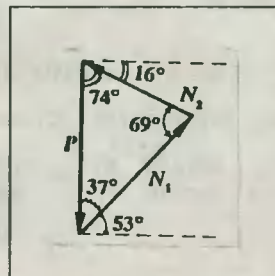


Fig. (2) Solución Prob. 11.50

Con ésto, reconocemos que el triángulo ABC es isósceles. Luego, $\hat{A} = \hat{B} = 62^\circ$ y:

$$\hat{\theta} + \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \quad \therefore \hat{\theta} = 56^\circ$$

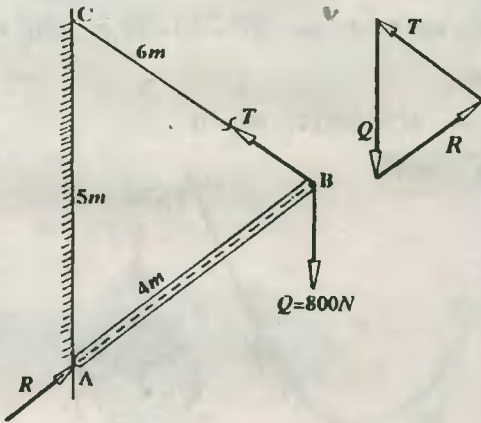


Fig. Solución Prob. 11.51

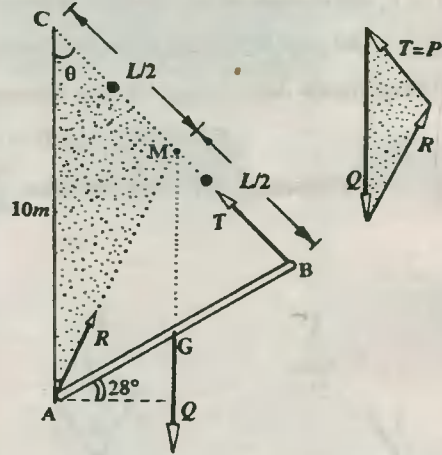


Fig. Solución Prob. 11.52

11.53. Notamos que la barra AB está en equilibrio gracias a la acción de tres fuerzas, en el cual N , que es la reacción de la pared, tiene su recta de acción perpendicular a aquella, ya que esta última es lisa. Asimismo, se forman triángulos rectángulos que nos conducirán a determinar que los segmentos CA y AH son iguales, en virtud a la aplicación del teorema de los puntos medios.

G: Punto medio de AB; M: Punto medio de BC:

$$\overline{AM} \parallel \overline{HB}; BC = L = \sqrt{13} \text{ m}; AB = a = 2 \text{ m}$$

Del triángulo rectángulo BHC: $y^2 = L^2 - (2x)^2 \dots (1)$

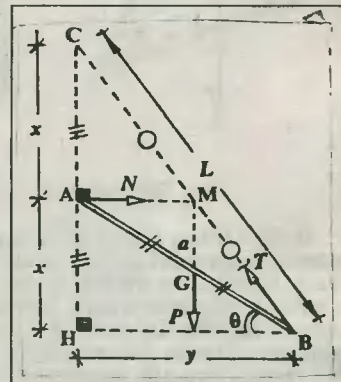
Del triángulo rectángulo AHB: $y^2 = a^2 - x^2 \dots (2)$

Iguando (1) y (2): $a^2 - x^2 = L^2 - 4x^2$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{L^2 - a^2}{3}} \text{ (Propiedad)}$$

Reemplazando datos: $x = \sqrt{3} \text{ m}$

Finalmente, del triángulo rectángulo AHB: $\text{sen} \theta = x/a = \sqrt{3}/2 \quad \therefore \hat{\theta} = 60^\circ$



11.54. En la siguiente página se presenta el DCL de la barra. En él notamos que las rectas de acción de las tres fuerzas concurren en la polea (C); por esta razón aplicaremos uno de los acápites del teorema de Lami, de modo que la resultante de las dos fuerzas de tensión (T) sea igual pero de dirección opuesta que la tercera fuerza (P). Así, calcularemos el ángulo α para luego calcular θ .

Recordando el método del paralelogramo: $\sqrt{T^2 + T^2 + 2.T.T.\text{cos} \alpha} = R$

$$\Rightarrow \sqrt{10^2 + 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos \alpha} = P \Rightarrow 200 + 200 \cos \alpha = (8\sqrt{5})^2 \Rightarrow \cos \alpha = 3/5 \Rightarrow \alpha = 53^\circ$$

$$\text{Luego, del } \triangle ABC: 80^\circ + \alpha + \theta = 180^\circ \quad \therefore \quad \theta = 47^\circ$$

11.55. Del DCL de la cadena comprobamos que ésta se encuentra afectada de tres fuerzas: T_1 , T_2 y P , cuyas líneas de acción deben ser coplanares y concurrentes.

$$\text{Del paralelogramo de fuerzas observamos que } R = P \Rightarrow \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cos 60^\circ} = P$$

Reemplazando datos y simplificando obtenemos:

$$T_1^2 + 100T_1 - 9600 = 0 \Rightarrow (T_1 + 160)(T_1 - 60) = 0$$

Obtenemos como solución-única: $T_1 = 60 \text{ N}$

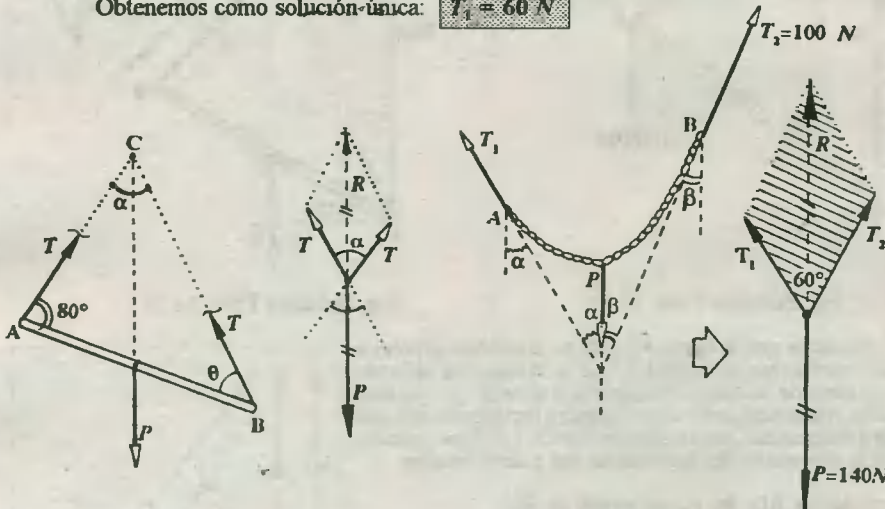


Fig. Solución Prob. 11.54

Fig. Solución Prob. 11.55

11.56. Al hacer el DCL de la barra, observamos que G es su centro de gravedad, el que a su vez está ubicado en su punto medio. Además, por tratarse de tres fuerzas: N_1 , N_2 y P , sus rectas de acción concurren en C, verificándose que las prolongaciones de las rectas de acción de N_1 y N_2 forman un rectángulo. Asimismo, el vector peso se encuentra contenido en la diagonal CD; esto permitirá encontrar la medida del ángulo θ .

Observamos que el $\triangle AGD$ es isósceles, dado que $AG = GD$. De este modo:

$$\hat{A} = \hat{D} \Rightarrow \theta + 37^\circ = 53^\circ \quad \therefore \quad \theta = 16^\circ$$

11.57. Construyendo el DCL comprobamos que el punto de concurrencia de las rectas de acción de las tres fuerzas es E, ubicado en la circunferencia de centro O. Así, por construcciones geométricas deducimos que:

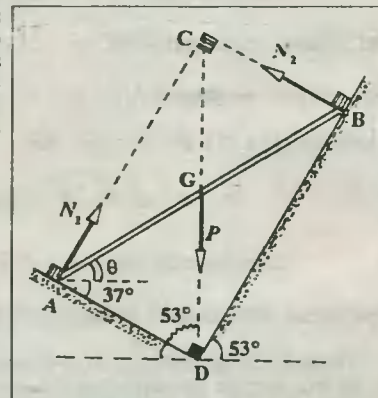


Fig. Solución Prob. 11.56

$$\text{Del } \triangle AHG: x = 35 \cos \phi$$

$$\text{Del } \triangle AHE: x = 100 \cos 2\phi$$

CAP 12 ESTÁTICA II

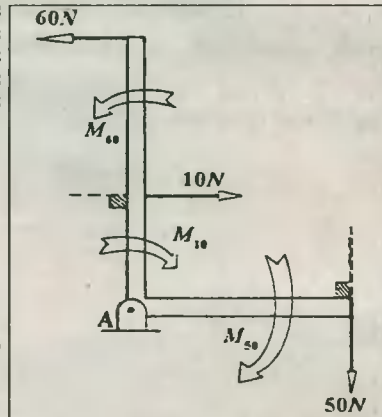
12.1. Al tomar momentos respecto de A, notamos que los correspondientes brazos de palanca para cada una de las fuerzas son las perpendiculares a las direcciones de dichas fuerzas. Los signos de los momentos vendrán dados por los sentidos de giro de la estructura debido a cada fuerza si éstas actuaran solas.

$$M_R = M_A \Rightarrow M_R = M_{60} - M_{10} - M_{50}$$

$$M_R = 60 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} - 10 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} - 50 \text{ N} \cdot 4 \text{ m}$$

$$\therefore \boxed{M_R = + 80 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

Observación. - El signo del momento resultante nos indica que toda la estructura girará en sentido antihorario, debido al efecto simultáneo de todas las fuerzas y sus correspondientes momentos.



12.2. Para determinar con precisión y sin complicar el gráfico recargándolo con prolongaciones de rectas de acción de fuerzas, sólo recurriremos a la descomposición rectangular de todas las fuerzas, con excepción de F_5 . Así, el cálculo se limitará a determinar los momentos de todas las componentes rectangulares.

(*) Las componentes cuyas direcciones pasan por O tienen brazo de palanca $b=0$; luego, no poseen momento.

(**) Las componentes de la fuerza $F_3 = 20 \text{ N}$ tienen momentos diferentes: M'_3 (de $10\sqrt{3} \text{ N}$) y M''_3 (de 10 N).

(***) El punto O será el centro de momentos.

Luego: $M_1 = + 8 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} = + 32 \text{ N} \cdot \text{m}$

$$M_2 = - 10 \sqrt{3} \text{ N} \cdot 2 \sqrt{3} \text{ m} = - 60 \text{ N} \cdot \text{m}$$

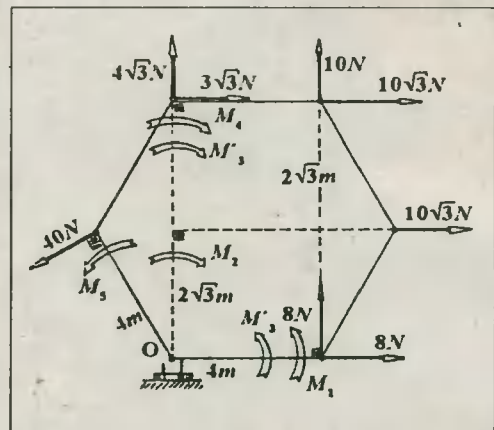
$$M_3 = - 10 \sqrt{3} \text{ N} \cdot 4 \sqrt{3} \text{ m} = - 120 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M''_3 = + 10 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_4 = - 3 \sqrt{3} \text{ N} \cdot 4 \sqrt{3} \text{ m} = - 36 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_5 = + 40 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} = + 160 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\therefore \boxed{\Sigma M_O = + 16 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (momento resultante)}}$$



12.3.a. Momento de la fuerza P - De la figura (1) tenemos lo siguiente:

$$b_D = (4 \text{ m}) \cdot \text{sen} \theta ; b_B = (2 \text{ m}) \cdot \text{sen} \theta$$

Luego: $(M_P)_A = -P \cdot b_D$; y $(M_P)_B = +P \cdot b_B$

$$\frac{(M_P)_B}{(M_P)_D} = \frac{b_B}{-b_D} \Rightarrow \frac{(M_P)_B}{-480 \text{ N}\cdot\text{m}} = \frac{2 \text{ m} \cdot \text{sen} \theta}{-4 \text{ m} \cdot \text{sen} \theta}$$

$$\therefore (M_P)_B = -240 \text{ N}\cdot\text{m}$$

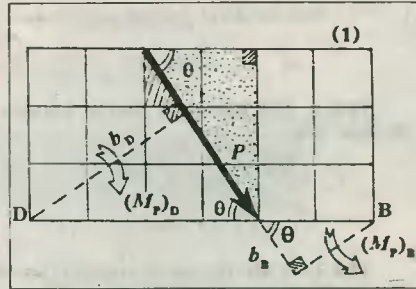


Fig. (1) Solución Prob. 12.3

12.3.b. Respecto a la fuerza F (Figura (2)): Observamos que: $b_A = b_C = 5 \text{cos} \theta$. Luego, el momento de F respecto de A y C respectivamente tienen el mismo módulo, por poseer el mismo brazo de palanca; la única diferencia está en el signo.

$$(M_F)_A = - (M_F)_C$$

$$(M_F)_A = - (-750 \text{ N}\cdot\text{m})$$

$$\therefore (M_F)_A = +750 \text{ N}\cdot\text{m}$$

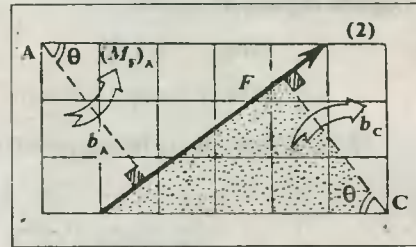


Fig. (2). Solución Prob. 12.3

12.4. Prolongando la recta de acción de la fuerza F , y trazando una perpendicular desde O hasta dicha recta encontraremos el brazo de palanca de F para el cálculo del momento. Veamos.

$$\alpha = \theta - 30^\circ \dots (*)$$

Se aprecia que: $(M_F)_O = -Fb$

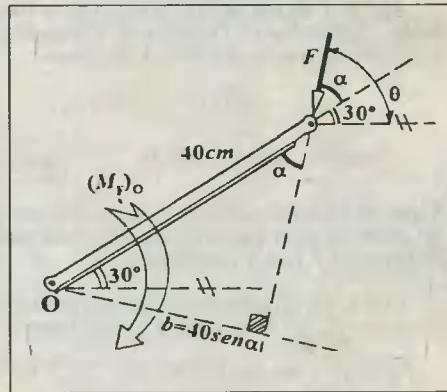
$$(M_F)_O = - (80 \text{ N})(0,4 \text{ m}) \text{sen} \theta \dots (**)$$

Como se desea que el momento de F sea máximo, entonces $\text{sen} \alpha$ debe tomar su máximo valor, es decir:

$$\text{sen} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

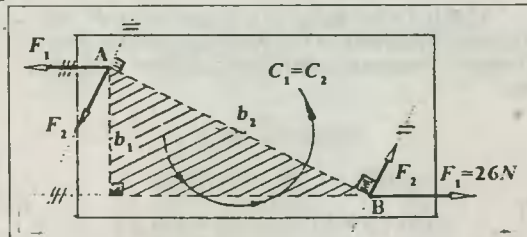
De (*): $90^\circ = \theta - 30^\circ \therefore \theta = 120^\circ$

Finalmente, en (**): $(M_F)_O^{\text{max}} = -32 \text{ N}\cdot\text{m}$



12.5. En primer lugar, recordemos que para el caso de una cupla, ésta posee un momento cuyo valor viene dado por la relación (12.2).

Si deseamos que F sea mínimo, buscaremos el modo de hacer b lo más grande posible. En nuestro caso, el momento de la cupla se determina así:



$$C_1 = F_1 \cdot b_1 = +26 \text{ N} \cdot 100 \text{ cm} = +2600 \text{ N}\cdot\text{cm}$$

Fig. Solución Prob. 12.5

Observando el gráfico adjunto notamos que $C_2 = +F_2 \cdot b_2$, siendo $b_2 = \sqrt{100^2 + 240^2} = 260 \text{ cm}$.

$$\Rightarrow C_2 = 260 \text{ cm} \cdot F_1 = C_1 \Rightarrow 260 \text{ cm} \cdot F_2 = 2\,600 \text{ N} \cdot \text{cm} \quad \therefore F_2 = 10 \text{ N}$$

12.6.a. Cálculo de la fuerza resultante.-
Se sabe que:

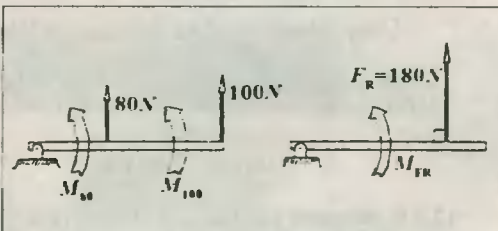
$$F_R = \Sigma F_v \Rightarrow F_R = +80 + 100$$

$$\therefore F_R = +180 \text{ N} \dots (1)$$

12.6.b. Cálculo de la ubicación de la fuerza resultante.- Aplicando el Teorema de Varignon (relación (12.3)) y tomando momentos respecto al punto O, diremos:

$$(MF_R)_O = \Sigma(M_F)_O$$

$$+180 \cdot x = +80 \cdot 2 + 100 \cdot 10 \quad \therefore x \approx 6,44 \text{ m}$$



12.7.a. Cálculo de la fuerza resultante.-

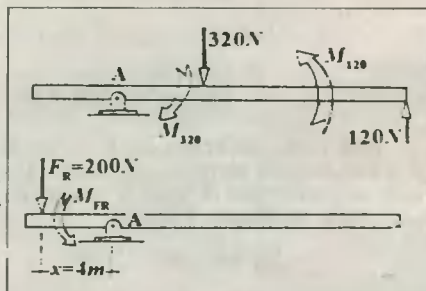
$$F_R = \Sigma F_v \Rightarrow F_R = -320 + 120$$

$$\therefore F_R = -200 \text{ N} (\downarrow)$$

12.7.b. Cálculo de la ubicación de la fuerza resultante.- Aplicando el Teorema de Varignon y tomando momentos respecto al punto A tenemos:

$$(MF_R)_A = \Sigma(M_F)_A$$

$$-200x = -320 \cdot 5 + 120 \cdot 20 \quad \therefore x = 4 \text{ m}$$



Nota.- El signo negativo de x nos indica que la fuerza resultante se ha de colocar al lado izquierdo del punto A, para que pueda producir un momento equivalente al que producen las fuerzas de 320 N (horario) y 120 N (antihorario).

12.8.a. De la condición de fuerza resultante nos dicen que $F_R = 150 \text{ N}$ y hacia arriba. Luego:

$$F_R = \Sigma F_v \Rightarrow +150 = -50 + P - F + 100$$

$$\Rightarrow P - F = 100 \text{ N} \dots (1)$$

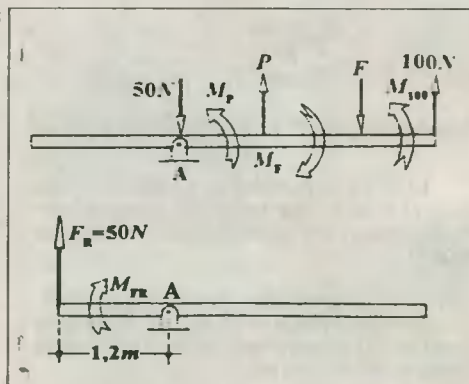
12.8.b. De la condición de ubicación de F_R , utilizamos el Teorema de Varignon y el gráfico adjunto. Tomando momentos con respecto al punto A tendremos:

$$(MF_R)_A = \Sigma(M_F)_A$$

$$-MF_R = +M_P - M_F + M_{100}$$

$$-150 \cdot 1,2 = P \cdot 0,6 - F \cdot 1,5 + 100 \cdot 2,1$$

$$\Rightarrow 5F - 2P = 1\,300 \text{ N} \dots (2)$$



Finalmente, de (1) y (2) tendremos: $F = 500\text{ N}, P = 600\text{ N}$

12.9.a. Cálculo de la fuerza resultante. - Considerando el eje vertical como una recta vertical, tendremos que, según la orientación original de las fuerzas, éstas tendrán una resultante que será obtenida del siguiente modo:

$$F_R = \Sigma F_y = -3 + 2 - 4 \Rightarrow F_R = -5\text{ N}$$

(*) El signo (-) nos indica que el vector F_R está orientado hacia abajo.

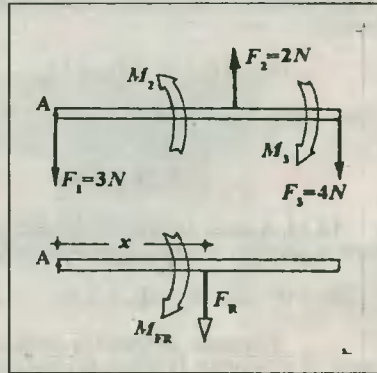
12.9.b. Cálculo de la ubicación de F_R . - Utilizando el Teorema de Varignon, diremos que:

$$(MF_R)_A = \Sigma M_A \dots (1)$$

en el cual A será considerado como el centro de momentos (punto fijo), y respecto al cual trazaremos todos los brazos de palanca para el cálculo de los momentos.

En (1): $M_1 + M_2 - M_3 = -MF_R$

$$3.0 + 2.60 - 4.100 = -5x \Rightarrow -280 = -5x \therefore x = 56\text{ cm}$$



12.10. Comprobamos que de todos los ladrillos apilados, el único que siempre permanecería en su lugar y en equilibrio sería el ladrillo N° 1. El resto será (N - 1) ladrillos, cuyo peso total como máximo podrá colocarse en el extremo B del ladrillo 1; de ubicarse más a la derecha, el apilamiento se vendría abajo.

Por el teorema de Varignon:

$$\Sigma(M_F)_A = (MF_R)_A \dots (1)$$

$$\Rightarrow (M_2)_A = (a + L/2)P$$

$$(M_3)_A = (2a + L/2)P$$

$$(M_4)_A = (3a + L/2)P \dots (2)$$

$$(M_N)_A = [(N - 1)a + L/2]P$$

y: $(MF_R)_A = L \cdot F_R = L(N - 1)P \dots (3)$

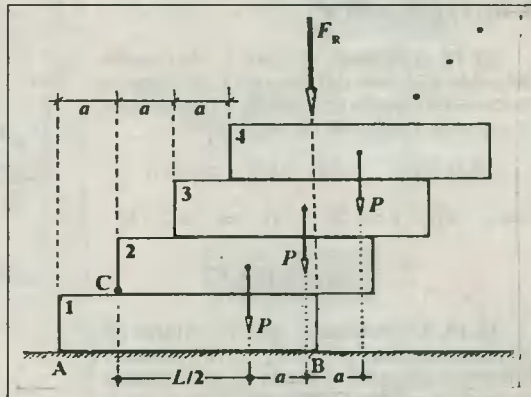
Reemplazando (2) y (3) en (1): $[a + 2a + 3a + \dots + (N - 1)a + (N - 1)L/2]P = L(N - 1)P$

$$\frac{1}{2} \{(N - 1)[(N - 1) + 1]\}a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} N(N - 1)a + (N - 1)L/2 = L(N - 1) \Rightarrow Na/2 = L/2 \Rightarrow N = L/a$$

Como: $a = \frac{L}{n} \Rightarrow N = \frac{L}{L/n} \therefore N = n$

Aplicaciones. - Si $a = L/2 \Rightarrow N = 2$ ladrillos; Si $a = L/3 \Rightarrow N = 3$ ladrillos.



12.11. Teniendo en cuenta el DCL de la barra, y tomando momentos respecto al punto A utilizaremos la segunda condición de equilibrio.

$$\begin{aligned}\Sigma M_A = 0 &\Rightarrow M_P = M_{R_B} \\ \Rightarrow 20(x-2) &= 5(2x-2) \Rightarrow x = 3 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\therefore L = 2x = 6 \text{ m}$$

12.12. A partir del DCL de la barra aplicamos la primera condición de equilibrio.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 210 \dots (1)$$

Tomando momentos respecto al punto A aplicamos la segunda condición de equilibrio.

$$\begin{aligned}\Sigma M_A = 0 &\Rightarrow M_{R_B} = M_P + M_F \\ \Rightarrow R_B \cdot 7 &= 70 \cdot 4 + 140 \cdot 6 \therefore R_B = 160 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\text{Y en (1): } R_A = 50 \text{ N}$$

12.13. Asignando el valor x a la tensión del cable y al peso del bloque Q , tomaremos momentos respecto al punto B, y aplicaremos la segunda condición de equilibrio.

$$\begin{aligned}\Sigma M_B = 0 &\quad -M_T + M_Q + M_P = 0 \\ \Rightarrow -x \cdot 6 + x \cdot 5 + 50 \cdot 3 &= 0 \Rightarrow x = 150\end{aligned}$$

$$\therefore T = Q = 150 \text{ N}$$

12.14. Considerando que los valores de las tensiones son $T_B = x$ y $T_A = 5x$, y tomando momentos respecto al punto C, aplicaremos la segunda condición de equilibrio.

$$\begin{aligned}\Sigma M_C = 0 &\Rightarrow M_{T_A} = M_{T_B} \\ \Rightarrow 5x(a-4) &= xa \Rightarrow a = 5 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\therefore L = 10 \text{ m}$$

12.15. A partir del DCL de la barra, siendo R_A la reacción que buscamos, y T la tensión en la cuerda más larga, aplicamos la primera condición de equilibrio.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + 4T = 60 \dots (*)$$

A continuación, elegimos el punto A como centro de momentos, y aplicamos la 2^{da} condición de equilibrio.

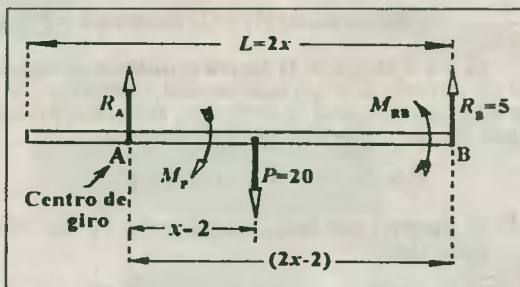


Fig. Solución Prob. 12.11

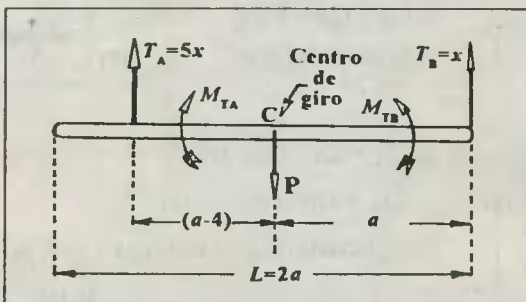
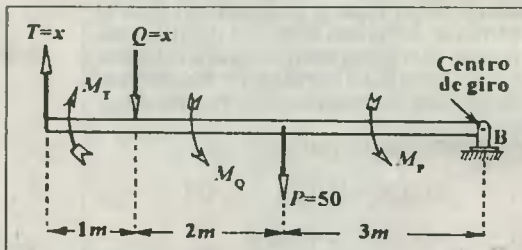
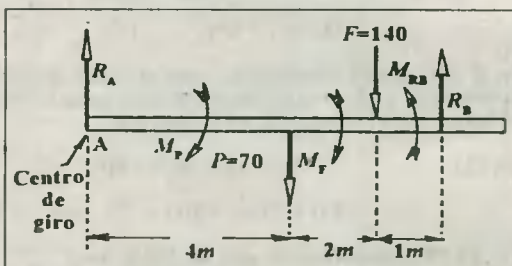


Fig. Solución Prob. 12.14

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_1 + M_2 + M_3 = M_P \Rightarrow T \cdot 2 + 2T \cdot 3 + T \cdot 4 = 60.2 \Rightarrow T = 10 \text{ N}$$

Luego, en (*) despejamos R_A : $R_A = 20 \text{ N}$

12.16. A partir del DCL de la barra aplicamos la segunda condición de equilibrio, eligiendo como centro de momentos al punto B.

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_T = M_Q + M_P \Rightarrow T \cdot 6 = 30.4 + 150.3 \Rightarrow T = 95 \text{ N}$$

Luego, aplicando la primera condición de equilibrio en cada eje tenemos:

a) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_E = T \therefore T_E = 95 \text{ N}$

b) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T + T_D = Q + P \therefore T_D = 85 \text{ N}$

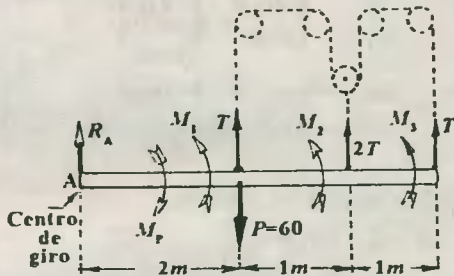


Fig. Solución Prob. 12.15

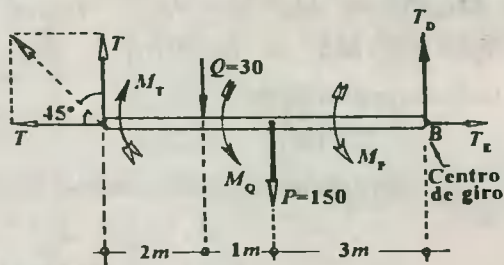


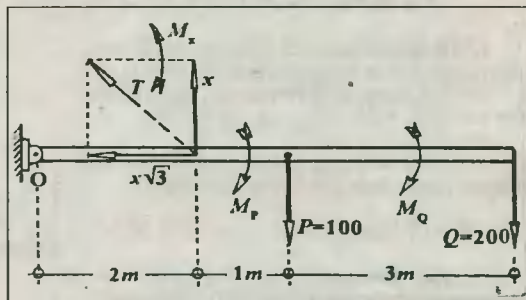
Fig. Solución Prob. 12.16

12.17. En el DCL de la barra hemos descompuesto la tensión ($T = 2x$) del cable en x y $x\sqrt{3}$. Tomando momentos respecto al pasador aplicaremos la segunda condición de equilibrio.

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_x = M_P + M_Q$$

$$\Rightarrow x \cdot 2 = 100.3 + 200.6 \Rightarrow x = 750 \text{ N}$$

$$\therefore T = 2x = 1500 \text{ N}$$



Observación. - La componente $x\sqrt{3}$ de la tensión (T) no tiene momento respecto a O, porque su recta de acción pasa por aquel.

12.18. Haciendo el DCL de la barra, notamos que será necesario calcular en primer lugar la tensión (T) del cable vertical, para lo cual aplicaremos la segunda condición de equilibrio, tomando como centro de momentos al punto B, anulando así los momentos de las reacciones.

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow +16.8 - T \cdot 5 + 3.4 = 0$$

$$\Rightarrow T = 28 \text{ N}$$

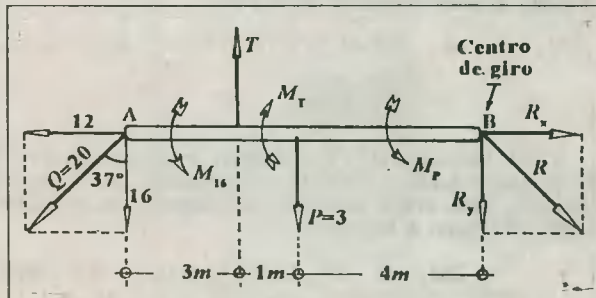


Fig. Solución Prob. 12.18

Luego, al aplicar la primera condición de equilibrio en cada eje tendremos:

$$a) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_x = 12 \text{ N}$$

$$b) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 16 + P + R_y = T \Rightarrow R_y = 9 \text{ N}$$

$$\text{Finalmente, aplicando el teorema de Pitágoras: } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \therefore R = 15 \text{ N}$$

12.19. Procediendo del mismo modo que el problema anterior, tenemos:

1°) Aplicando la segunda condición de equilibrio, tomando como centro de momentos al punto A:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_{T_y} = M_P + M_Q$$

$$T_y \cdot 6 = 80.3 + 60.5 \Rightarrow T_y = 90 \text{ N}$$

De la descomposición de T:

$$T_x = 120 \text{ N}$$

2°) Aplicando la primera condición de equilibrio en cada eje, tenemos:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_x = T_x \Rightarrow R_x = 120 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_y + T_y = P + Q \Rightarrow R_y = 50 \text{ N}$$

$$\text{Finalmente, por el teorema de Pitágoras: } R = \sqrt{120^2 + 50^2} \therefore R = 130 \text{ N}$$

12.20. Resolviendo el triángulo BCD encontramos que la longitud final del resorte es $l_f = 20 \text{ cm}$. Luego, su deformación viene dada por $x = l_f - l_0 = 20 - 15 \Rightarrow x = 5 \text{ cm}$.

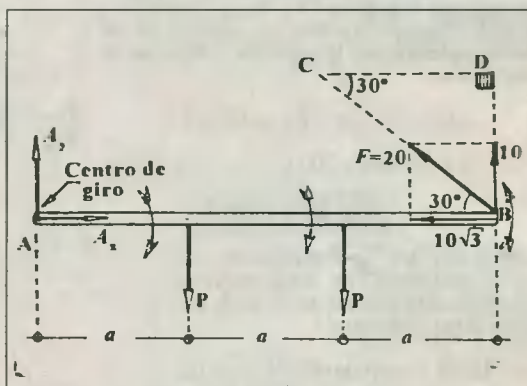
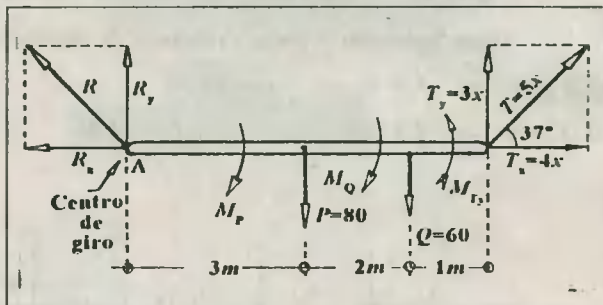
Por ésto, la fuerza que ejerce el resorte viene dada por la ley de Hooke.

$$F = kx = (4 \text{ N/cm}) \cdot (5 \text{ cm}) \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

Finalmente, descomponemos F y aplicamos la segunda condición de equilibrio, eligiendo el punto A como centro de momentos.

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -P \cdot a - P \cdot 2a + 10 \cdot 3a = 0$$

$$\therefore P = 10 \text{ N}$$



12.21. Indicamos el DCL de la barra señalando que el resorte 2 aplica una fuerza F_2 hacia arriba sobre la barra debido a su condición de estirado. Luego, podemos predecir que la fuerza F_3 del tercer resorte es hacia abajo, para tratar de mantener un equilibrio rotacional. Tomando momentos con respecto al punto A tenemos:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_P + M_{F_3} = M_{F_2} \Rightarrow 5.4a + F_3 \cdot 8a = F_2 \cdot 5a \dots (*)$$

$$\text{donde: } F_2 = k_2 \cdot x_2 = (16 \text{ N/cm}) \cdot 5 \text{ cm} \Rightarrow F_2 = 80 \text{ N}$$

Luego, al reemplazar en (*) despejamos F_3 : $F_3 = 25 \text{ N} \Rightarrow x_3 = F_3/k_3 = 25/5$

$$\therefore x_3 = 5 \text{ cm}$$

Al reemplazar los valores de todas las fuerzas conocidas hasta aquí, en el DCL dado notaremos que la fuerza F_1 del primer resorte en A debe ser hacia abajo para establecer el equilibrio. Así:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 + P + F_3 = F_2 \Rightarrow F_1 = 5 \text{ N}$$

Finalmente: $x_1 = F_1/k_1 = 5/5 \therefore x = 1 \text{ cm}$

12.22. Tal como hicimos en el problema anterior, construiremos el DCL de la barra sobre la base de las fuerzas ya determinadas: El peso de la barra (P), la tensión (T) de la cuerda y el peso del bloque (Q). Tomaremos momentos respecto de A y calcularemos la componente T_y de la tensión.

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_{T_y} = M_P + M_Q \Rightarrow T_y \cdot 5 = 200 \cdot 4 + 60 \cdot 8 \Rightarrow T_y = 256 \text{ N}$$

De la descomposición de la tensión encontramos que: $T_x = 192 \text{ N}$

Vemos que la fuerza F_2 del resorte 2 debe ser hacia la derecha para que logre equilibrar a T_x . Luego: $F_2 = T_x = 192 \text{ N}$.

$$\Rightarrow x_2 = F_2/k_2 = 192/48 \therefore x_2 = 4 \text{ cm}$$

Y finalmente, la fuerza F_1 del resorte 1 debe ser hacia arriba para establecer el equilibrio vertical.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 + T_y = P + Q \Rightarrow F_1 = 4 \text{ N}$$

$$\Rightarrow x_1 = F_1/k_1 = 4/4 \therefore x_1 = 1 \text{ cm}$$

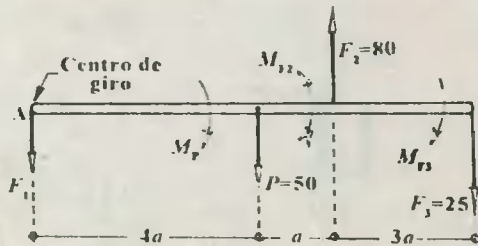


Fig. Solución Prob. 12.21

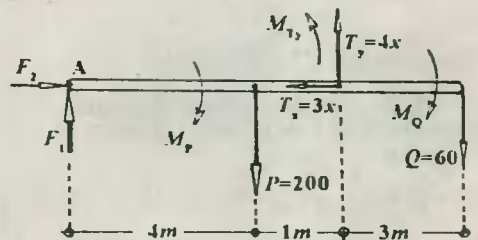


Fig. Solución Prob. 12.22

12.23. El hombre logrará el equilibrio cuando haya pasado al lado derecho del apoyo C, permitiendo que toda la barra quede en posición horizontal. Sea x la posición del hombre respecto a C en el equilibrio. Tomando momentos respecto al punto C tenemos:

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow +M_1 - M_2 - M_3 = 0 \Rightarrow P_{\text{barra}} \cdot 5 - P_{\text{hombre}} \cdot x - 5 \cdot Q = 0$$

$$\Rightarrow 1320 \cdot 5 - 800 \cdot x - 5 \cdot 1000 = 0 \therefore x = 2 \text{ m}$$

12.24. En la figura se muestra el DCL de la barra AB, y en ella N es la acción de la carga Q sobre dicha barra, tal que $N = Q$. Así, tomando momentos respecto al apoyo C (las reacciones R_y y R_x no poseen momentos respecto de C) tenemos:

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_1 = M_2 + M_3 + M_4$$

$$520.4 = 400.3 + N.8 + 40.10 \Rightarrow N = 48 \text{ N}$$

Luego, la carga Q pesará: $Q = N = 48 \text{ N}$

12.25. Construyendo el DCL de la barra AB tendremos que ésta está afectada de 5 fuerzas:

$$R = R_x + R_y \text{ (Reacción del apoyo A)}$$

$P = 130 \text{ N}$ (Peso de la barra).

$C = 60 \text{ N}$ (Fuerza de compresión en D).

$$T = Q - 60 \text{ N} \dots (*)$$

T = Fuerza de tensión en la cuerda.

$S = 40 \text{ N}$ (Peso de la carga suspendida).

Del triángulo rectángulo formado por la cuerda y la barra AB determinamos el brazo de palanca que le corresponde a la componente $T \cdot \cos 37^\circ$.

Tomando momentos respecto al punto A:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$P.6 + C.7 + S.12 = T \cdot \cos 37^\circ \cdot 10$$

$$130.6 + 60.7 + 40.12 = T.4/5 \cdot 10$$

$$\Rightarrow T = 210 \text{ N}$$

Finalmente, en (*): $Q = 270 \text{ N}$

12.26. Cálculo de las tensiones.- Haciendo el DCL de la barra, notaremos lo siguiente:

$$T_1 + T_2 = P_b \Rightarrow T_1 + T_2 = 15 \text{ N} \dots (1)$$

Además, por la segunda condición de equilibrio, tomando momentos con respecto a G tendremos:

$$\Sigma M_G = 0 \Rightarrow M_1 = M_2$$

$$\Rightarrow T_1.8 = T_2.7 \Rightarrow T_1/T_2 = 7/8 \dots (2)$$

De (1) y (2): $T_1 = 7 \text{ N}$; $T_2 = 8 \text{ N}$

Cálculo de θ .- Para medir este ángulo indirectamente, analizaremos el equilibrio del nudo en el cual concurren las cuerdas. Se observa que: $\beta = 90^\circ + \theta \dots (*)$

$$\text{Por el teorema de Lami: } R = T_1 \Rightarrow \sqrt{T_2^2 + T^2 + 2T_2 \cdot T \cdot \cos \beta} = T_1$$

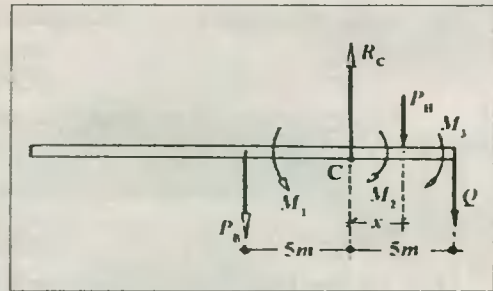


Fig. Solución Prob. 12.23

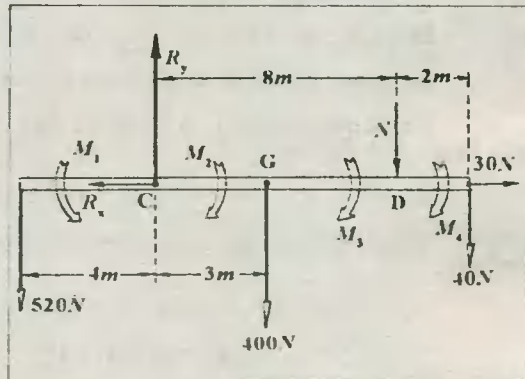


Fig. Solución Prob. 12.24

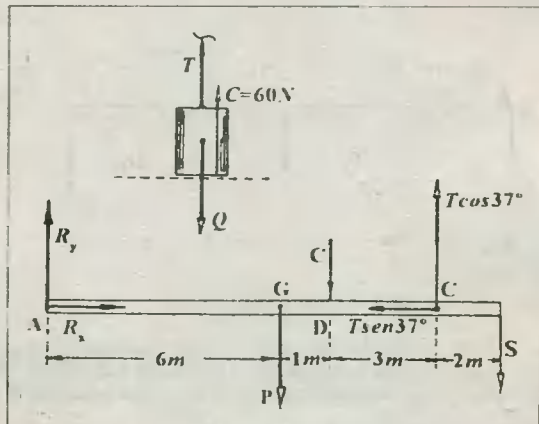


Fig. Solución Prob. 12.25

$$\Rightarrow 8^2 + 5^2 + 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\beta = 7^2 \Rightarrow \cos\beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 120^\circ$$

Finalmente, en (*): $\theta = 30^\circ$

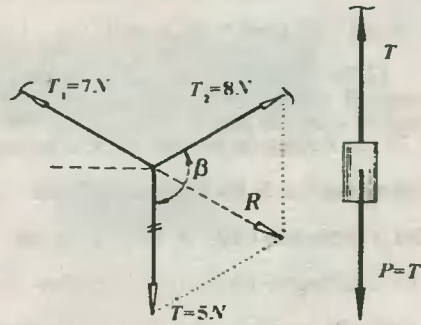
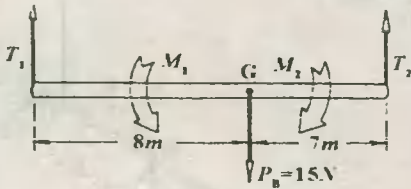


Fig. (1) Solución Prob. 12.26

Fig. (2) Solución Prob. 12.26

12.27. En la figura se muestra el DCL de la estructura, en el cual indicamos únicamente las acciones de los bloques sobre la estructura y sus efectos de rotación respecto a C.

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_1 = M_2 \Rightarrow 20 \cdot b_1 = 70 \cdot b_2 \Rightarrow 2(90 - y)\cos\theta = 7y\cos\theta \Rightarrow y = 20 \text{ cm}$$

$$\text{Luego: } x = 60 - y \Rightarrow x = 40 \text{ cm}$$

Finalmente, del triángulo CHM: $\text{tg}\theta = x/30 = 40/30 = 4/3 \therefore \theta = 53^\circ$

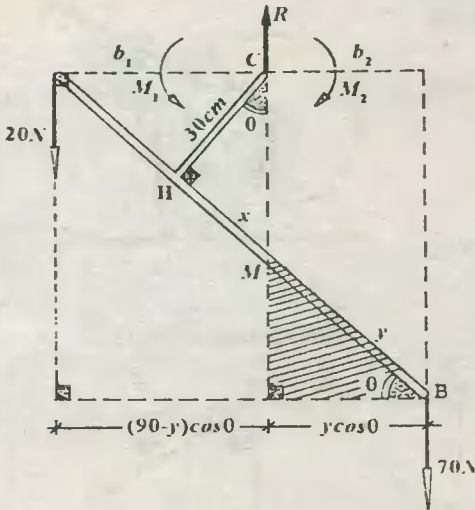


Fig. Solución Prob. 12.27

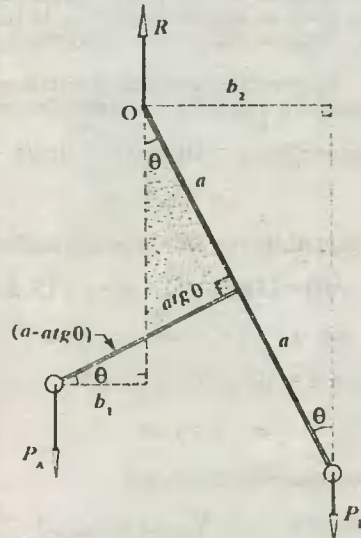


Fig. Solución Prob. 12.18

12.28. En la figura se muestra el DCL de las pesas, indicando a la vez sus brazos de palanca b_1 y b_2 .

$$b_1 = (a - atg\theta)\cos\theta = a(1 - tg\theta)\cos\theta; b_2 = 2a.\text{sen}\theta$$

Tomando momentos respecto a **O** tenemos: $\Sigma M_O = 0 \Rightarrow P_A \cdot b_1 = P_B \cdot b_2$

$$60.a(1 - tg\theta)\cos\theta = 10.2a.\text{sen}\theta \Rightarrow 1 - tg\theta = 1/3 \text{ sen}\theta/\cos\theta \Rightarrow tg\theta = 3/4 \therefore \theta = 37^\circ$$

12.29. Ya que el alambre se dobla por su punto medio **B**, entonces los segmentos de alambre AB y BC tendrán el mismo peso *P*. Además, AB = BC = L = 40/2 = 20 cm. Adjunto se muestra el DCL del alambre.

Determinación de los brazos de palanca.-

$$\left. \begin{aligned} \text{Del } \Delta \text{ rectángulo OHG: } b_1 &= (x - L/2)\cos\theta \\ \text{Del } \Delta \text{ rectángulo ONB: } b_2 &= (L - x)\cos\theta \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Luego, del equilibrio rotacional, tendremos:

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow P \cdot b_1 = P \cdot b_2 \dots (2)$$

De (1) en (2): $(x - L/2)\cos\theta = (L - x)\cos\theta$

$$\Rightarrow x = 3/4 L = 3/4 \cdot 20 \therefore x = 15 \text{ cm}$$

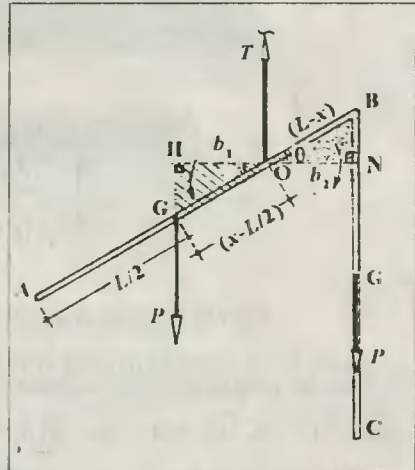


Fig. Solución Prob. 12.29

12.30. Este problema será resuelto sin recurrir al DCL de los cuerpos por separado, vale decir, sólo graficaremos al conjunto como un solo cuerpo, sin indicar las fuerzas internas en la cuerda BC y la compresión entre la esfera y la puerta. Así, sólo se presentarán dos fuerzas: el peso de la esfera y el de la puerta, las cuales tendrán un momento igual en módulo respecto a la bisagra, y en sentidos contrarios, tal que uno equilibra al otro.

Ya que es indispensable determinar *x* y *z*, éstos serán calculados a partir de los triángulos mostrados.

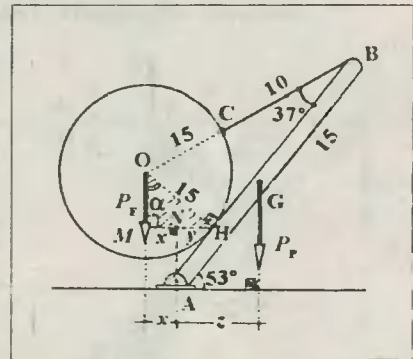
Δ rectángulo BHO: $y = AH.\text{sen}37^\circ = 10.3/5$

$$\Rightarrow y = 6 \text{ cm}$$

Δ rectángulo AMH: $\alpha = 53^\circ$ (lados perpendiculares a A).

$$MH = 15\text{sen}\alpha \Rightarrow x + y = 15.4/5$$

$$\Rightarrow x = 12 - 6 \Rightarrow x = 6 \text{ cm}$$



DCL. Solución Prob 12.30

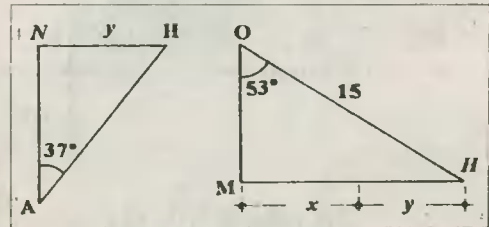
Finalmente: $z = AG.\text{cos}53^\circ = 15.3/5$

$$\Rightarrow z = 9 \text{ cm}$$

Luego, por equilibrio rotacional:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow P_{\text{esfera}} \cdot x = P_{\text{puerta}} \cdot z$$

$$\Rightarrow P_e = P_p \cdot z/x = 60.9/6 \therefore P_e = 90 \text{ N}$$



12.31. Al trazar los segmentos horizontales punteados, construimos triángulos rectángulos que nos permitan determinar los brazos de palanca *b*₁ y *b*₂. Nótese también que el $\Delta IO2$ es isósceles.

Entonces:

$$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow 60^\circ - \theta = \alpha + \theta$$

$$\Rightarrow \alpha = 60^\circ - 2\theta$$

Del Δ rectángulo IPO: $b_1 = R \cdot \text{sen}30^\circ = R/2$

Del Δ rectángulo OH2: $b_2 = R \cdot \text{cos}\alpha$

$$\Rightarrow b_2 = R \text{cos}(60^\circ - 2\theta)$$

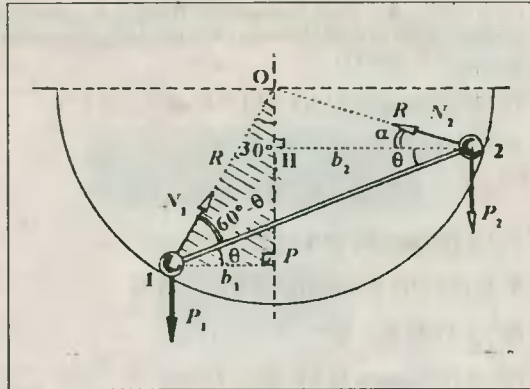
Luego, tomando momentos con respecto a O tenemos:

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow P_1 \cdot b_1 = P_2 \cdot b_2$$

(*) N_1 y N_2 no tienen momento respecto a O.

$$\Rightarrow 80 \cdot R/2 = 50 \cdot R \cdot \text{cos}(60^\circ - 2\theta) \Rightarrow \text{cos}(60^\circ - 2\theta) = 4/5 = \text{cos}37^\circ$$

$$\Rightarrow 60^\circ - 2\theta = 37^\circ \therefore \theta = 11,5^\circ$$



12.32. En primer lugar, determinaremos la relación entre los pesos de las esferas, para lo cual recordaremos que, dado el volumen V y el peso específico ρ del material, tendremos:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho V_1}{\rho V_2} = \frac{4/3 \pi a^3}{4/3 \pi b^3} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{a^3}{b^3} \dots (1)$$

Notamos además que: $O_1 = R - a = 8 \text{ cm}$

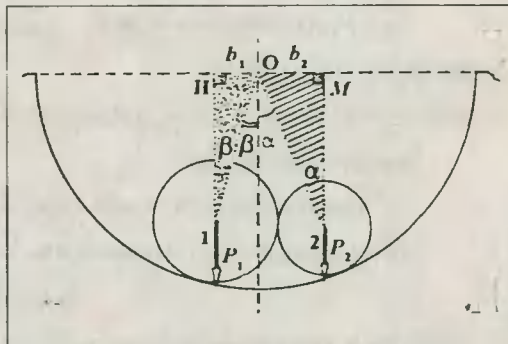
$$O_2 = R - b = 9 \text{ cm}$$

Luego, aplicando la segunda condición de equilibrio respecto a O, tendremos:

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow P_1 \cdot b_1 = P_2 \cdot b_2$$

$$P_1 \cdot O_1 \cdot \text{sen}\beta = P_2 \cdot O_2 \cdot \text{sen}\alpha \Rightarrow 8 \text{sen}\beta \cdot P_1/P_2 = 9 \text{sen}\alpha \dots (2)$$

$$\text{De (1) en (2): } 8 \cdot 1/6 \cdot 3^3/2^3 = 9 \text{sen}\alpha \Rightarrow \text{sen}\alpha = 1/2 \therefore \alpha = 30^\circ$$



12.33. Primeramente establezcamos la condición dada en el problema: $a^2 + 2ab = b^2 \dots (1)$

Del DCL notamos lo siguiente: $P_1 = ka$; $P_2 = kb$ (pesos proporcionales a las longitudes de los alambres). Además, se verifica que los brazos de palanca son:

$$b_1 = a/2 \cdot \text{sen}\theta, \text{ y } b_2 = (b/2 - a \text{tg}\theta) \cdot \text{cos}\theta$$

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow P_1 \cdot b_1 = P_2 \cdot b_2 \Rightarrow ka \cdot a/2 \cdot \text{sen}\theta = kb \cdot (b/2 - a \text{tg}\theta) \text{cos}\theta$$

Al ordenar adecuadamente obtenemos: $(a^2 + 2ab) \text{sen}\theta = b^2 \text{cos}\theta \dots (*)$

$$\text{De (1) en (2): } b^2 \text{sen}\theta = b^2 \text{cos}\theta \Rightarrow \text{tg}\theta = 1 \therefore \theta = 45^\circ$$

12.34. Al hacer el DCL del sistema, sólo indicamos las fuerzas que obran sobre el triángulo de masas debido a la gravedad, y no señalamos las fuerzas internas, como las reacciones del aro sobre

cada esfera, así como también las fuerzas de compresión dentro de las varillas. De este modo, sólo analizaremos el equilibrio de rotación de dicho triángulo, tomando como centro de rotación al centro mismo del aro (O).

$$\text{Del } \Delta \text{ rectángulo AMO: } AM = R \cdot \text{sen} \theta \dots (1)$$

$$\text{Del } \Delta \text{ AOC: } (90^\circ - \theta) + \alpha = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = \theta + 30^\circ \dots (*)$$

$$\text{Del } \Delta \text{ rectángulo OHC: } HO = R \cdot \text{cos} \alpha$$

$$\text{Y de } (*): HO = R \cdot \text{cos}(\theta + 30^\circ) \dots (2)$$

$$\text{Del } \Delta \text{ AOB: } \beta = 120^\circ - \theta \dots (**)$$

$$\text{Del } \Delta \text{ rectángulo BQO: } BQ = R \cdot \text{sen} \beta$$

$$\text{Y de } (**): BQ = R \cdot \text{sen}(120^\circ - \theta) \dots (3)$$

$$\text{Finalmente, del equilibrio rotacional: } \Sigma M_O = 0$$

$$\Rightarrow M_A + M_C = M_B$$

$$\Rightarrow P_A \cdot AM + P_C \cdot BQ = P_B \cdot BQ \dots (4)$$

Luego, de (1), (2) y (3) en (4):

$$30 \cdot R \cdot \text{sen} \theta + 10 \cdot R \cdot \text{cos}(\theta + 30^\circ) = 20 \cdot R \cdot \text{sen}(120^\circ - \theta)$$

Desarrollando tenemos:

$$3 \text{sen} \theta + \text{cos} \theta \cdot \text{cos} 30^\circ - \text{sen} \theta \cdot \text{sen} 30^\circ = 2(\text{sen} 120^\circ \cdot \text{cos} \theta - \text{sen} \theta \cdot \text{cos} 120^\circ)$$

$$\text{Dividiendo entre } \text{cos} \theta \text{ obtenemos: } 3 \text{tg} \theta + \sqrt{3}/2 - 1/2 \text{tg} \theta = \sqrt{3} + \text{tg} \theta \Rightarrow \text{tg} \theta = \sqrt{3}/3$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

12.35. Por la geometría del problema, notamos la presencia de varios triángulos isósceles, de los cuales podemos determinar $\text{cos} \theta$ utilizando la ley de cosenos en el Δ sombreado.

$$(2r)^2 = (4r)^2 + (4r)^2 - 2 \cdot 4r \cdot 4r \cdot \text{cos} \theta \Rightarrow 32r^2 \cdot \text{cos} \theta = 28r^2 \Rightarrow \text{cos} \theta = 7/8$$

(Nótese que no hemos indicado las reacciones normales de la cavidad cilíndrica contra cada cojinete, pues estas no producen momentos con respecto a O).

$$\text{Del } \Delta \text{ rectángulo IHO: } b_1 = 4r \cdot \text{sen} \theta$$

$$\text{Del } \Delta \text{ rectángulo 2QO: } b_2 = 4r \cdot \text{sen} 2\theta$$

$$\text{Del } \Delta \text{ rectángulo ODM: } b_D = 4r \cdot \text{sen} \theta$$

$$\text{Luego, tomando momentos con respecto a O: } \Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_1 + M_2 = M_D$$

$$\Rightarrow P \cdot b_1 + P \cdot b_2 = P_D \cdot b_D \Rightarrow P \cdot 4r \cdot \text{sen} \theta + P \cdot 4r \cdot \text{sen} 2\theta = P_D \cdot 4r \cdot \text{sen} \theta$$

$$\Rightarrow P \text{sen} \theta + P \cdot 2 \text{sen} \theta \cdot \text{cos} \theta = P_D \cdot \text{sen} \theta \Rightarrow P_D = P(1 + 2 \text{cos} \theta) = 4(1 + 2 \cdot 7/8)$$

$$\therefore P_D = 11 \text{ N}$$

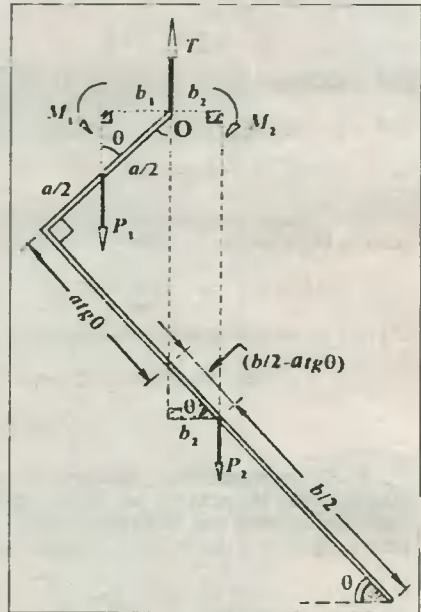


Fig. Solución Prob. 12.33

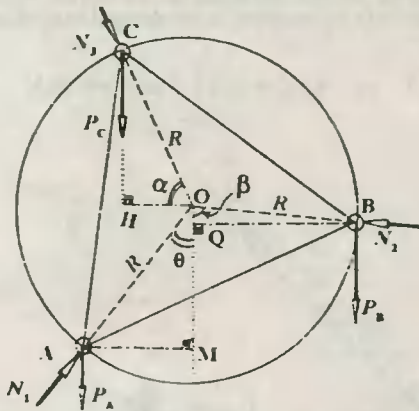


Fig. Solución Prob. 12.34

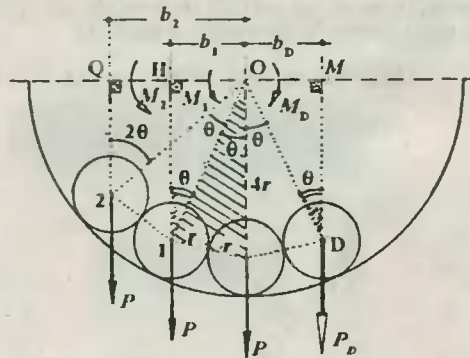


Fig. Solución Prob. 12.35

12.36. En el DCL de cada porción de la varilla tenemos un par de fuerzas a los lados del punto de apoyo A.

$$P_1 = k \cdot AB; P_2 = k \cdot BC$$

k = constante de proporcionalidad

$$\text{Del } \Delta \text{ rectángulo AHB: } BH = AB \cdot \cos\theta \dots (1)$$

$$\text{Del } \Delta \text{ rectángulo BMG: } BM = BG \cdot \cos 2\theta$$

$$\Rightarrow BM = BM/2 \cdot \cos 2\theta \dots (*)$$

$$\text{También: } HM = BM - BH$$

$$\text{De (1) y (*): } HM = \frac{1}{2} BC \cdot \cos 2\theta - AB \cdot \cos\theta \dots (2)$$

Luego, del equilibrio rotacional:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$\Rightarrow M_1 = M_2 \Rightarrow P_1 \cdot BH = P_2 \cdot HM \dots (3)$$

$$\text{De (1) y (2) en (3) tenemos: } k \cdot AB \cdot AB \cdot \cos\theta = k \cdot BC \cdot (BC/2 \cdot \cos 2\theta - AB \cdot \cos\theta)$$

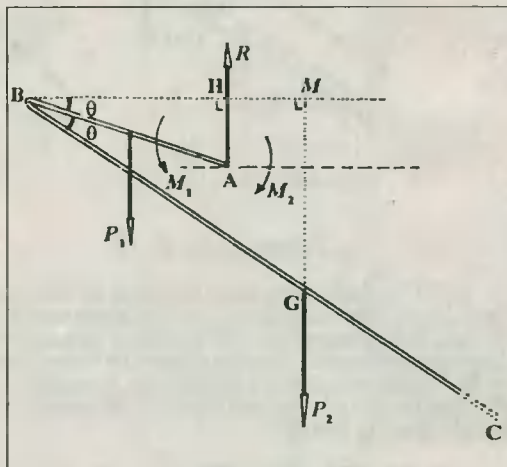
$$\text{Y de la condición: } BC = 3AB, \text{ tendremos: } 18\cos^2\theta - 8\cos\theta - 9 = 0$$

Aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones de 2° grado con una incógnita tenemos:

$$\cos\theta = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 18 \cdot (-9)}}{2(18)} \Rightarrow \cos\theta \approx 0,96 = 24/25 \therefore \theta = 16^\circ$$

12.37. Por construcción geométrica se verifica que la recta de acción de tensión T es perpendicular a la barra. Luego, aplicando la segunda condición de equilibrio, tomando momentos respecto al punto A, tenemos:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_T = M_P + M_Q \Rightarrow T \cdot 6 = T_4 + 15,8 \therefore T = 60 \text{ N}$$



12.38. Sea Q la compresión existente en la varilla AC, la cual concuerda con las fuerzas externas que lo provocan. Así, del DCL de la varilla AB, aplicamos la segunda condición de equilibrio, eligiendo como centro de momentos el punto O.

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_{Q_y} = M_P \Rightarrow Q_y \cdot 12 = P \cdot 3 \Rightarrow 4x \cdot 12 = 160 \cdot 3 \Rightarrow x = 10 \text{ N}$$

$$\text{Finalmente: } Q = 5x \therefore \boxed{Q = 50 \text{ N}}$$

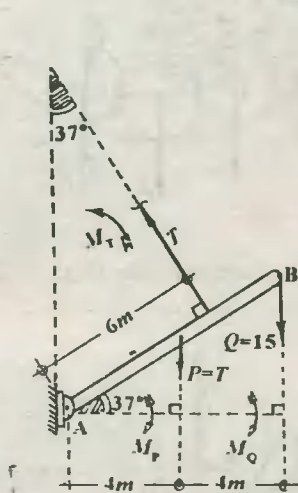


Fig. Solución Prob. 12.37

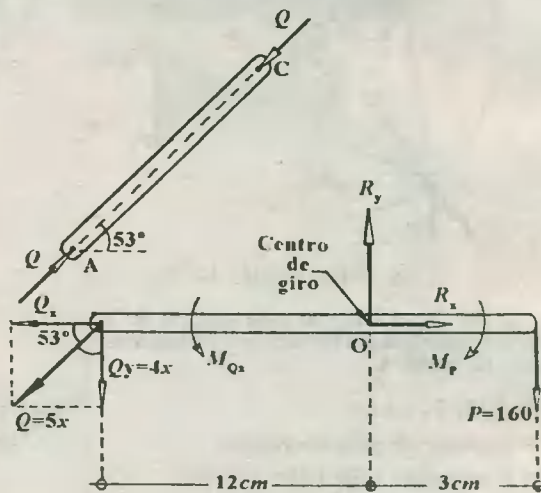


Fig. Solución Prob. 12.38

12.39. Prolonguemos las direcciones de algunas fuerzas para determinar los brazos de palanca respecto de A. Observamos que si tomamos momentos respecto a dicho punto, las componentes de la reacción de la bisagra ubicada ahí no tendrán momento; y recurriendo sólo a la segunda condición de equilibrio calcularemos la fuerza P .

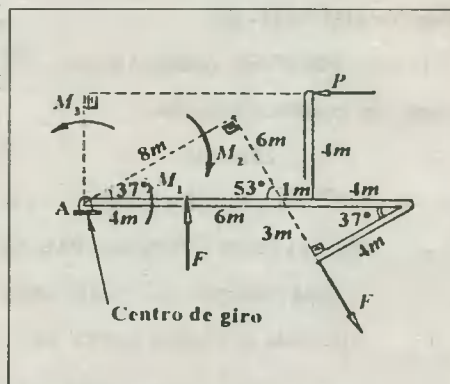
$$M_1 = F \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_2 = F \cdot 8 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_3 = P \cdot 4$$

$$\text{Luego: } \Sigma M_A = 0 \Rightarrow +M_1 - M_2 + M_3 = 0$$

$$\Rightarrow 16 - 32 + P \cdot 4 = 0 \therefore \boxed{P = 4 \text{ N}}$$



12.40. Haciendo el DCL de la barra AB, y trazando el triángulo rectángulo pitagórico AHC (3, 4, 5) tendremos: $\text{sen}\theta = 12/15 = 4/5 \Rightarrow \theta = 53^\circ$.

$$\text{Aplicando la segunda condición de equilibrio tenemos: } \Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_R = M_P$$

$$R \cdot 15 = P \cdot AM \Rightarrow R \cdot 15 = P \cdot 10 \cos\theta \Rightarrow R \cdot 15 = 400 \cdot 10 \cdot 3/5 \therefore \boxed{R = 160 \text{ N}}$$

12.41. En la figura se muestra el DCL de la placa.

Del Δ rectángulo ACB: $AB = \sqrt{30^2 + (10\sqrt{3})^2} \Rightarrow AB = 20\sqrt{3} \text{ m}$

Luego: $\cos\theta = \frac{30 \text{ m}}{20\sqrt{3} \text{ m}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$

Ahora: $\Sigma M_O = 0$

(*) Las fuerzas $T\text{sen}\theta$, R_y y R_x no tienen momento respecto a C.

$\Rightarrow T \cdot \cos\theta \cdot 10\sqrt{3} = P \cdot 5 \Rightarrow T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\sqrt{3} = 6000 \cdot 5 \Rightarrow T = 2000 \text{ N}$

Ahora aplicaremos la primera condición de equilibrio.

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_y = T\text{sen}\theta + P \Rightarrow R_y = 2000 \cdot \frac{1}{2} + 6000 \Rightarrow R_y = 7000 \text{ N}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_x = T\cos\theta = 2000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R_x = 1000\sqrt{3} \text{ N}$

Finalmente: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = 2000\sqrt{13} \therefore R = 7200 \text{ N}$

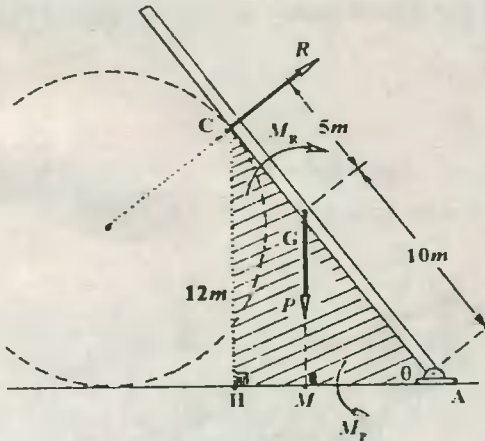


Fig. Solución Prob. 12.40

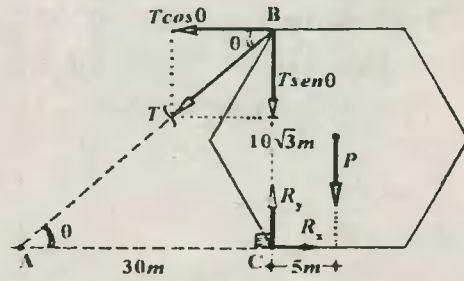


Fig. Solución Prob. 12.41

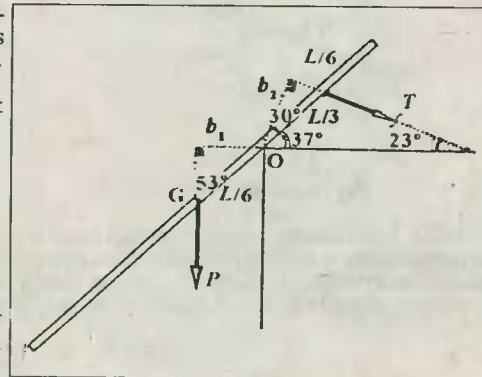
12.42. Hagamos el DCL de la barra y completemos ángulos en el gráfico para así determinar los brazos de palanca b_1 y b_2 del peso P y la tensión T .

Tomando momentos respecto al punto O tenemos:

$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow T \cdot b_2 = P \cdot b_1$

$T \cdot L/6 \cdot \cos 30^\circ = 10 \sqrt{3} L/6 \cdot \text{sen} 53^\circ$

$\therefore T = 16 \text{ N}$



12.43. Del DCL de la barra podemos observar que el triángulo ABC es isósceles, y además, por el ángulo exterior a B se cumplirá:

$$\theta + \theta = 60^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

Tomando momentos respecto a B tenemos:

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow T \cdot MB = P \cdot 10 \text{sen} 30^\circ$$

$$\Rightarrow T \cdot 16 \text{sen} \theta = P \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow T = 200 \cdot 10 / 16 \therefore \boxed{T = 125 \text{ N}}$$

12.44. Del DCL de la barra notamos que las fuerzas que equilibran sus momentos son el peso de la barra (M_1) y la tensión de la cuerda (M_2). Nuestro problema se reduce a calcular los brazos de palanca respecto de A.

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow T \cdot b_1 = P \cdot b_2$$

$$25 \cdot L \text{sen} 2\theta = 60 \cdot L / 2 \cdot \text{cos} \theta$$

$$25 \cdot 2 \text{sen} \theta \cdot \text{cos} \theta = 30 \text{cos} \theta \Rightarrow \text{sen} \theta = 3/5 \therefore \boxed{\theta = 37^\circ}$$

12.45. Hagamos el DCL de la barra, y tracemos los brazos de palanca de las dos tensiones T y del peso P. Veamos.

Del Δ rectángulo BAC: $\text{tg} \theta = 16/12 = 4/3 \Rightarrow \theta = 53^\circ$

Del Δ rectángulo BAD: $\text{tg} \alpha = 12/9 = 4/3 \Rightarrow \alpha = 53^\circ$

$$\text{Luego: } \Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_P = M_{T_1} + M_{T_2} \Rightarrow P \cdot b_3 = T \cdot b_1 + T \cdot b_2$$

$$P \cdot 8 \text{cos} 60^\circ = T(9 \text{sen} \alpha + 12 \text{sen} \theta) \Rightarrow 63 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = T(9 \cdot 4/5 + 12 \cdot 4/5) \therefore \boxed{T = 15 \text{ N}}$$

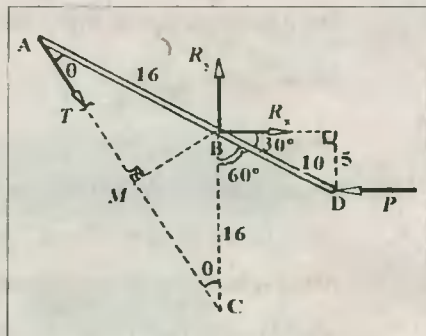


Fig. Solución Prob. 12.43

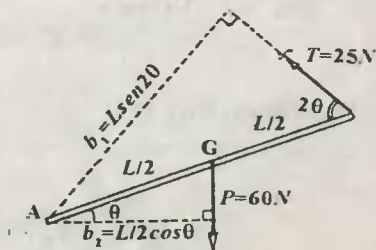


Fig. Solución Prob. 12.44

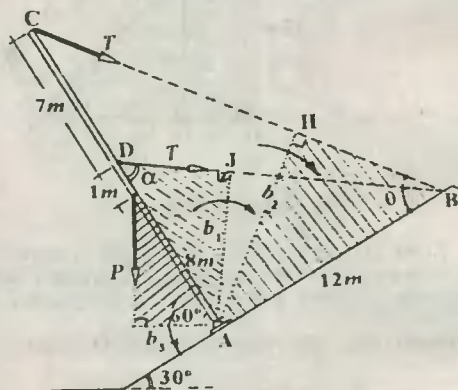


Fig. Solución Prob. 12.45

12.46. Notamos que cuando el cilindro está a punto de volcar, lo hará en sentido antihorario. En ese instante toda la reacción del piso contra el cilindro se concentrará en el borde de apoyo A. Cuando esto esté ocurriendo, el cilindro poseerá un peso Q que será capaz de mantenerlo en equilibrio, que se ubica en el punto G perteneciente al eje del mismo.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_1 = N_2 \dots (*)$$

Por la segunda condición de equilibrio: $\Sigma M_A = 0$

$$\Rightarrow M_3 \geq M_1 - M_2 \Rightarrow QR \geq N_1 h_1 - N_2 h_2$$

De (*) obtenemos: $Q \geq \left(\frac{h_1 - h_2}{R}\right) N_1 \dots (1)$

Al analizar la esfera superior tenemos, en la figura (2):
 $N_1 = W \cdot \text{ctg} \theta \dots (2)$

De la figura (c): $r + 2r \cos \theta + r = 2R \Rightarrow \cos \theta = \frac{R - r}{r} \dots (**)$

Además, se observa que: $h_1 - h_2 = 2r \text{sen} \theta \dots (3)$

Finalmente, de (2) y (3) en (1):

$$Q \geq (2r \text{sen} \theta / R) \cdot W \text{ctg} \theta = 2rW/R \cdot \cos \theta$$

Y de (**): $Q \geq \frac{2(R - r)}{R} \cdot W \Rightarrow Q \geq 80 \text{ N}$

Luego, el peso mínimo que debe tener el cilindro será 80 N. Si su peso fuera menor, entonces volcaría.

12.47. Al hacer el DCL de la varilla, notamos que la recta de acción de la reacción N del cilindro es perpendicular a la barra en C, y que la recta de acción de la reacción del collarín es también perpendicular a la guía vertical. Luego, el peso P, N y R son las tres únicas fuerzas que actúan sobre la barra.

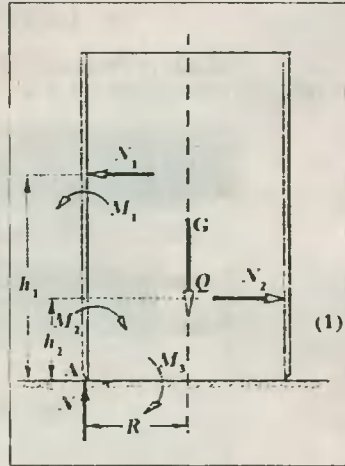
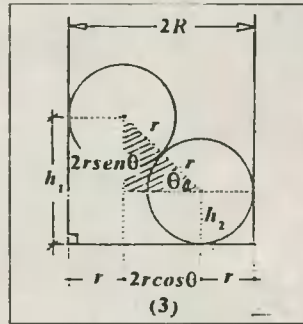
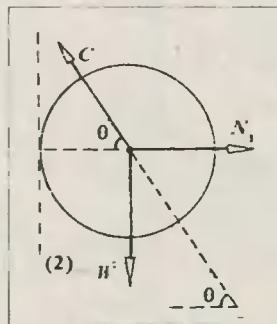


Fig. (1) Solución Prob. 12.46

Fig. (2) Solución Prob. 12.46

Fig. (3) Solución Prob. 12.46

Del Δ rectángulo BEG:

$$BG = L/2; BE = BG \cdot \cos \theta$$

$$\Rightarrow BE = L/2 \cdot \cos \theta \dots (1)$$

Del Δ rectángulo BCO: $BC = r \cdot \text{tg} \theta \dots (2)$

Ya que las rectas de acción de las fuerzas son concurrentes, del triángulo vectorial mostrado en la página siguiente notamos que:

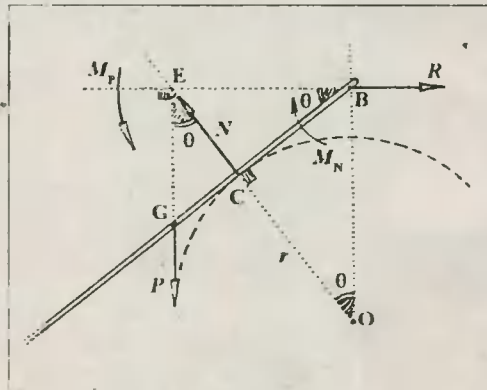
$$N = P \text{sec} \theta \dots (3)$$

Ahora, del equilibrio rotacional de la barra, tomaremos momentos respecto B.

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_P = M_N$$

$$\Rightarrow P \cdot EB = N \cdot BC \dots (4)$$

Finalmente, de (1), (2) y (3) en (4): $P \cdot L/2 \cdot \cos \theta = P \text{sec} \theta \cdot r \cdot \text{tg} \theta$



$$\Rightarrow L \cdot \cos^3\theta = 2r \cdot \operatorname{sen}\theta \dots (*)$$

Pasando $\cos^3\theta$ al segundo miembro, y recordando que $\operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \operatorname{tg}\theta$, y $1/\cos^2\theta = \sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta$, (*) quedará del siguiente modo:

$$L = 2r \cdot \operatorname{tg}\theta(1 + \operatorname{tg}^2\theta) \dots (**)$$

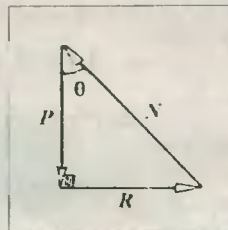
Reemplazando datos y ordenando, (**) quedará:

$$27\operatorname{tg}^3\theta + 27\operatorname{tg}\theta - 100 = 0$$

La ecuación factorizada resulta: $(3\operatorname{tg}\theta - 4)(9\operatorname{tg}^2\theta + 12\operatorname{tg}\theta + 25) = 0$

De esta factorización encontramos que el único factor que nos dará la solución real para θ es:

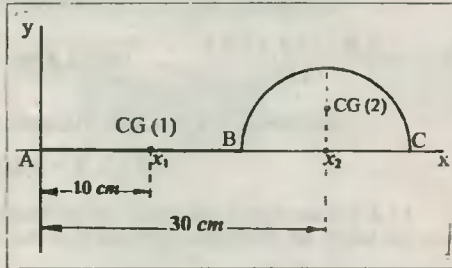
$$(3\operatorname{tg}\theta - 4) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = 4/3 \quad \therefore \theta = 53^\circ$$



CAP 13 CENTRO DE GRAVEDAD

13.1. Ubicando los centros de gravedad de cada elemento, encontramos el siguiente cuadro de datos para los pesos (P) y las abscisas (x) de los centros de gravedad individuales.

AB	BC
$P_1 = 40 \text{ N}$	$P_2 = 60 \text{ N}$
$x_1 = 10 \text{ cm}$	$x_2 = 30 \text{ cm}$



Utilizando la relación (13.2) encontraremos la abscisa del CG.

$$X = \frac{x_1 P_1 + x_2 P_2}{P_1 + P_2} = \frac{10 \text{ cm} \cdot 40 \text{ N} + 30 \text{ cm} \cdot 60 \text{ N}}{40 \text{ N} + 60 \text{ N}} \therefore \boxed{X = 22 \text{ cm}}$$

13.2. Según el esquema mostrado extraemos los siguientes datos ordenados en el siguiente cuadro.

i	1	2	3	4
$P_i \text{ (N)}$	4	8	3	5
$x_i \text{ (cm)}$	0	30	60	30
$y_i \text{ (cm)}$	40	80	40	0

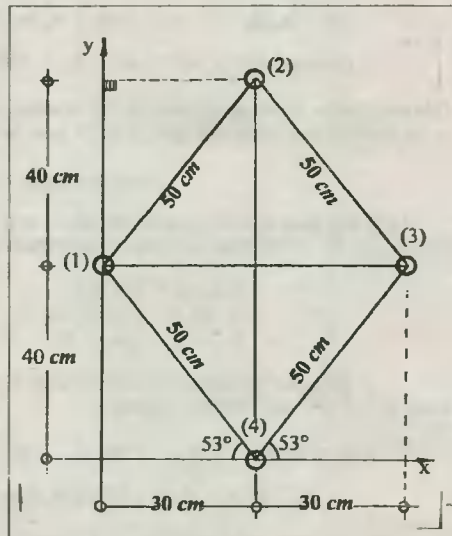
Y de las relaciones (13.3) encontraremos la abscisa (X) y la ordenada (Y) del CG.

$$a) X = \frac{x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}$$

$$X = \frac{0 \cdot 4 + 30 \cdot 8 + 60 \cdot 3 + 30 \cdot 5}{4 + 8 + 3 + 5} \therefore \boxed{X = 28,5 \text{ cm}}$$

$$b) Y = \frac{y_1 P_1 + y_2 P_2 + y_3 P_3 + y_4 P_4}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}$$

$$Y = \frac{40 \cdot 4 + 80 \cdot 8 + 40 \cdot 3 + 0 \cdot 5}{20} \therefore \boxed{Y = 46 \text{ cm}}$$



i	A	B	C
$m_i \text{ (kg)}$	2	2,5	8
$x_i \text{ (cm)}$	-16	0	9
$y_i \text{ (cm)}$	0	12	0

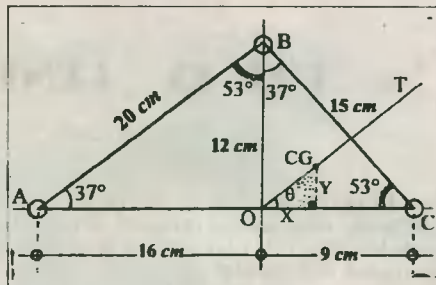
13.3. Recordando que toda recta queda determinada por un punto y su pendiente, en nuestro caso la recta OT pasa por el CG, lo que haremos será ubicar a este último, y luego tomaremos la pendiente de la recta. Así, del gráfico adjunto mostramos el cuadro de datos, para de él obtener el CG. del sistema:

Y utilizando las relaciones (13.3) encontramos:

$$\text{a) } X = \frac{x_A \cdot m_A + x_B \cdot m_B + x_C \cdot m_C}{m_A + m_B + m_C}$$

$$X = \frac{-16.2 + 0.2 \cdot 5 + 9.8}{2 + 2.5 + 8} \quad \therefore \quad \boxed{X = 3.2 \text{ cm}}$$

$$\text{b) } Y = \frac{0.2 + 12.2 \cdot 5 + 0.8}{12.5} \quad \therefore \quad \boxed{Y = 2.4 \text{ cm}}$$



Finalmente, del pequeño triángulo rectángulo sombreado:

$$\text{tg} \theta = Y/X = 2.4/3.2 = 3/4 \quad \therefore \quad \boxed{\theta = 37^\circ}$$

13.4. Por condición del problema podemos deducir que la abscisa del CG es cero ($X=0$). Luego, por los datos del problema aplicamos la relación (13.3):

$$X = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3 + x_4 \cdot m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = 0$$

La relación será nula si y sólo si el numerador es nulo.

$$\Rightarrow x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + 0 \cdot m_3 + x_4 \cdot m_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 \cdot m_4 = -x_1 \cdot m_1 - x_2 \cdot m_2 \dots (*)$$

$$\text{Reemplazando datos: } 4 \cdot m_4 = -(-6)8 - (-2) \cdot 4 \quad \therefore \quad \boxed{m_4 = 14 \text{ kg}}$$

Observación. - Si en la expresión (*), obviamos los signos y trabajamos con los valores absolutos de x , se deduce que toda vez que el C.G. cae en el eje Y , se cumple que:

$$\Sigma(x \cdot m)_{\text{a la derecha de } Y} = \Sigma(x \cdot m)_{\text{a la izquierda de } Y}$$

13.5. En base al esquema mostrado, y utilizando la observación del problema anterior, tendremos que:

$$\begin{array}{l} \Sigma(x \cdot m) = \Sigma(x \cdot m) \\ \text{a la derecha} \quad \text{a la izquierda} \\ \text{del eje } Y' \quad \text{del eje } Y' \end{array}$$

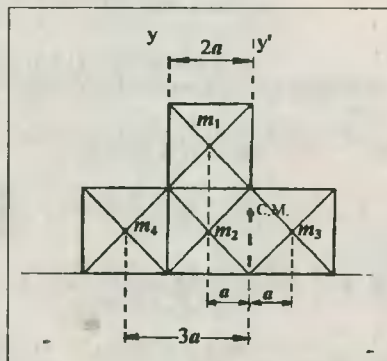
Para lo cual hemos trazado un eje Y' auxiliar que pase por el CG del sistema. Luego:

$$a \cdot m_1 + a \cdot m_2 + 3a \cdot m_4 = a \cdot m_3 \dots (m = dA)$$

$$\Rightarrow d_1 A + d_2 A + 3d_4 A = d_3 A$$

$$\Rightarrow d_4 = 1/3 [d_3 - (d_1 + d_2)]$$

$$\therefore \quad \boxed{d_4 = 1 \text{ kg/m}^2}$$



13.6. Del gráfico mostrado en la página siguiente extraemos el cuadro de datos respectivo para los elementos longitudinales.

Luego: utilizando las relaciones (13.6) tenemos:

$$\text{a) } X = \frac{x_1 \cdot L_1 + x_2 \cdot L_2 + x_3 \cdot L_3}{L_1 + L_2 + L_3} = \frac{0.20 + 6.12 + 4.8}{20 + 12 + 8} \quad \therefore \quad \boxed{X = 2.6 \text{ cm}}$$

b) $Y = \frac{y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3}{L_1 + L_2 + L_3}$

$Y = \frac{10 \cdot 20 + 20 \cdot 12 + 10 \cdot 8}{40}$

$\therefore Y = 13 \text{ cm}$

	AB	BC	AC
i	1	2	3
L_i (cm)	20	12	8
x_i (cm)	0	6	4
y_i (cm)	10	20	10

13.7. Resolviendo el triángulo original de modo que sus lados queden completamente definidos, podemos determinar los CG de cada elemento, y conseguir así los datos que se muestran en la tabla adjunta.

Luego, procedemos según se hizo en el problema anterior utilizando las relaciones (13.6).

	AB	BC	AC
i	1	2	3
L_i (cm)	40	30	50
x_i (cm)	20	40	20
y_i (cm)	0	15	15

a) $X = \frac{20 \cdot 40 + 40 \cdot 30 + 20 \cdot 50}{40 + 30 + 50} \therefore X = 25 \text{ cm}$

b) $Y = \frac{0 \cdot 40 + 15 \cdot 30 + 15 \cdot 50}{120} \therefore Y = 10 \text{ cm}$

13.8. Utilizando la relación que aparece en el cuadro (13.1) para un arco de circunferencia, para el cual nuestro dato es $\theta = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ ó $\theta = 5/6 \pi \text{ rad}$. Luego, la abscisa del CG vendrá dada por:

$X = \frac{2r \cdot \text{sen}150^\circ}{5/6 \pi}$, donde $\text{sen}150^\circ = \text{sen}30^\circ = 1/2$

$\Rightarrow X = \frac{2r \cdot 1/2}{5/6 \cdot 22/7} = \frac{21}{55} r = \frac{21}{55} 55 \text{ cm} \therefore X = 21 \text{ cm}$

13.9. Del dibujo del problema podemos deducir los siguientes datos:

Segmento

Semicircunferencia

$L_1 = 2r$

$L_2 = \pi r$

$y_1 = 0$

$y_2 = 2r/\pi$ (cuadro (13.1))

Luego, aplicando la relación (13.6) tenemos: $Y = \frac{y_1 L_1 + y_2 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{0 \cdot 2r + 2r/\pi \cdot (\pi r)}{2r + \pi r} = \frac{2r}{2 + \pi}$

Luego de reemplazar $r = 18 \text{ cm}$ y $\pi \approx 22/7$, encontramos: $Y = 7 \text{ cm}$

13.10. Haciendo $4a = 8,8 \text{ m}$, encontramos que $a = 2,2 \text{ m}$. Luego, del esquema (página siguiente)

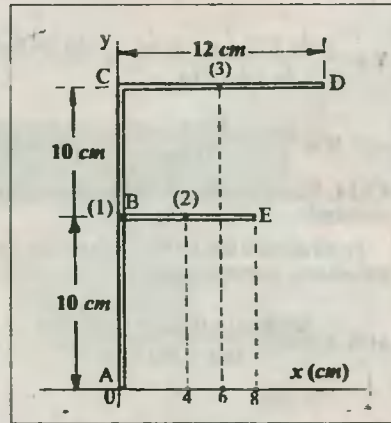


Fig. Solución Prob. 13.6

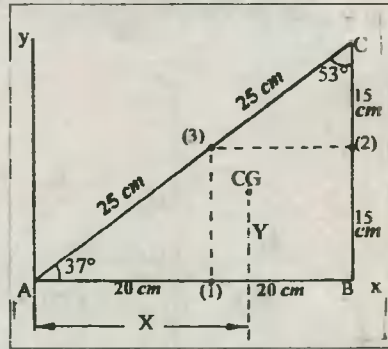


Fig. Solución Prob. 13.7

$$Y = \frac{y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + y_3 \cdot L_3}{L_1 + L_2 + L_3} = \frac{2a/\pi(\pi a) + 2a/\pi(\pi a) + 4a/\pi(2\pi a)}{2\pi a + \pi a + \pi a}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{3a}{\pi} = \frac{3 \cdot 2,2}{22/7} \quad \therefore \quad \boxed{Y = 2,1 \text{ m}}$$

<i>i</i>	3	2	1
L_i (cm)	$\pi(2a)$	πa	πa
y_i (cm)	$2(2a)/\pi$	$2a/\pi$	$2a/\pi$

13.11. Construyamos la tabla de datos a partir del esquema mostrado.

Procediendo del mismo modo que en los problemas anteriores, encontramos:

$$a) X = \frac{4a(4\pi a) + 6a(2\pi a) + 5a(\pi a)}{4\pi a + 2\pi a + \pi a} \Rightarrow X = 33/7 a$$

$$\therefore \quad \boxed{X = 363 \text{ cm}}$$

<i>i</i>	1	2	3
L_i (cm)	$\pi(4a)$	$\pi(2a)$	πa
x_i (cm)	$4a$	$6a$	$5a$
y_i (cm)	$2(4a)/\pi$	$-2(2a)/\pi$	$2a/\pi$

$$b) Y = \frac{8a/\pi(4\pi a) - 4a/\pi(2\pi a) + 2a/\pi(\pi a)}{7\pi a} = \frac{26a}{7\pi} \quad \therefore \quad \boxed{Y = 91 \text{ cm}}$$

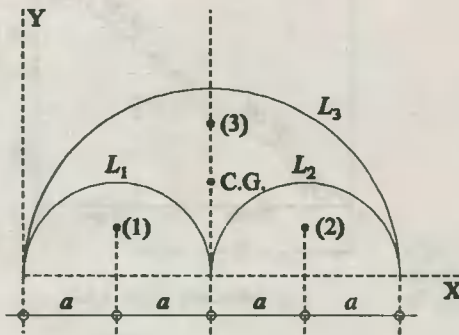


Fig. Solución Prob. 13.10

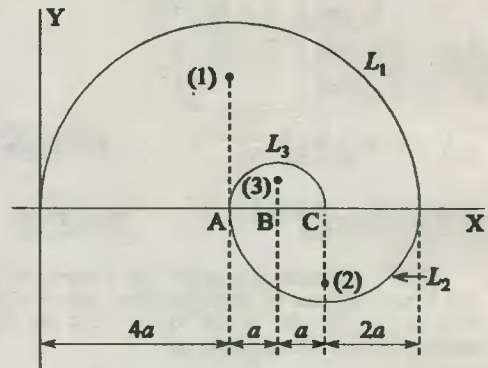


Fig. Solución Prob. 13.11

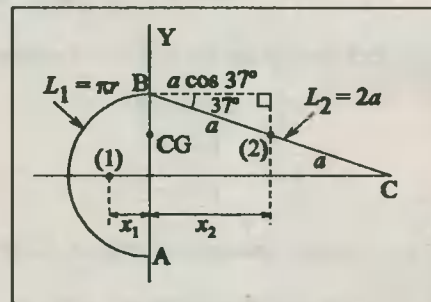
13.12. Haciendo un esquema con los datos del problema, y utilizando la observación del problema 13.4 tendremos:

$$\begin{array}{l} \Sigma(x \cdot L) = \Sigma(x \cdot L) \\ \text{a la izquierda} \quad \text{a la derecha} \\ \text{de Y} \quad \quad \quad \text{de Y} \end{array}$$

$$L_1 \cdot x_1 = L_2 \cdot x_2 \quad (\text{sin signos})$$

$$\pi r(2r\pi) = 2a(a \cdot \cos 37^\circ) \Rightarrow a = r/2 \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow BC = r \sqrt{5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \quad \therefore \quad \boxed{BC = 5 \text{ m}}$$



13.13. Dividiendo el triángulo original en otros dos se obtiene la siguiente tabla de datos:

i	1	2
A_i	$1/2 ah$	$1/2 (b - a)h$
x_i	$2/3 a$	$1/3 (2a + b)$

(*) Estos datos se han conseguido utilizando el cuadro (13.2) y el Teorema de Tales. Ahora, empleando la relación (13.5) tenemos:

a) $X = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2}$

$$X = \frac{2/3 a (1/2 ah) + 1/3 (2a + b) \cdot 1/2 (b - a) h}{1/2 ah + 1/2 (b - a) h}$$

$\Rightarrow X = 1/3 (a + b) \quad \therefore \boxed{X = 5 \text{ m}}$

b) $Y = h/3 \quad \therefore \boxed{Y = 2 \text{ m}}$

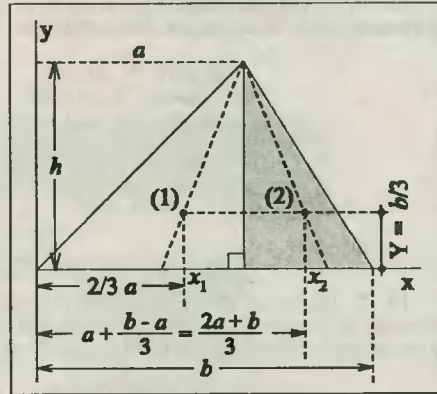


Fig. Solución Prob. 13.13

Observación.- El resultado obtenido para X concuerda con el del cuadro (13.2).

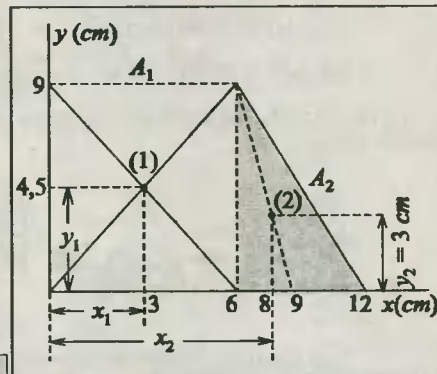
13.14. Al dividir el trapecio en un rectángulo y un triángulo, vemos que sus centroides quedan definidos por el cuadro (13.2). En base al esquema adjunto podemos elaborar el siguiente cuadro de datos.

A continuación, empleamos las relaciones (13.5).

i	1	2
$A_i \text{ (cm}^2\text{)}$	54	27
$x_i \text{ (cm)}$	3	8
$y_i \text{ (cm)}$	4,5	3

a) $X = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{3 \cdot 54 + 8 \cdot 27}{54 + 27} \quad \therefore \boxed{X = 4,67 \text{ cm}}$

b) $Y = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{4,5 \cdot 54 + 3 \cdot 27}{81} \quad \therefore \boxed{Y = 4 \text{ cm}}$



Observación.- Al utilizar la fórmula de Y para un trapecio, del cuadro (13.2) se obtiene el mismo resultado.

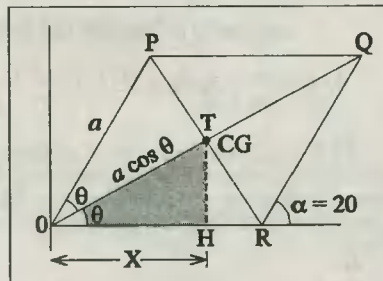
13.15. Trazando las diagonales del rombo, éstas se convierten en bisectrices interiores, de modo que en base al triángulo OHT se verifican las siguientes relaciones:

$X = OT \cdot \cos \theta = a \cdot \cos \theta \cdot \cos \theta \Rightarrow X = a \cdot \cos^2 \theta \dots (1)$

Y por condición del problema: $X = 3/4 a \dots (2)$

Igualando (1) y (2): $\cos^2 \theta = 3/4 \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{3}/2$

$\Rightarrow \theta = 30^\circ \quad \therefore \boxed{\alpha = 2\theta = 60^\circ}$



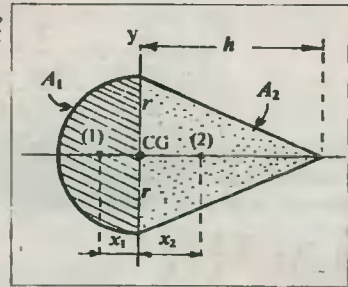
13.16. Trabajando en relación al eje Y, el cual contiene al CG, emplearemos la observación del problema 13.4, de modo que:

$$\begin{matrix} \Sigma(x.A) & = & \Sigma(x.A) \\ \text{a la izquierda} & & \text{a la derecha} \\ \text{de Y} & & \text{de Y} \end{matrix}$$

$$x_1 \cdot A_1 = x_2 \cdot A_2 \quad (\text{sin signos})$$

$$4r/3\pi (\frac{1}{2} \pi r^2) = h/3 (\frac{1}{2} \cdot 2rh) \Rightarrow h = \sqrt{2} r$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \therefore \boxed{h = 2m}$$



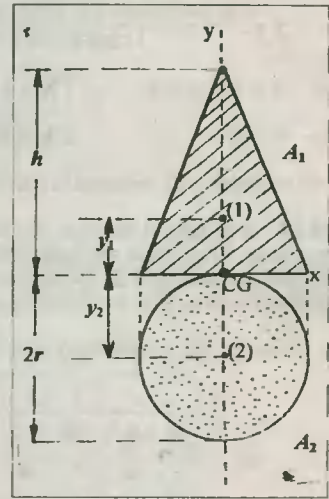
13.17. Tracemos un eje horizontal (X) que pase por el CG del sistema. A continuación, procederemos del mismo modo que en el problema anterior, pero esta vez respecto al eje X. Así entonces:

$$\begin{matrix} \Sigma(y.A) & = & \Sigma(y.A) \\ \text{por encima} & & \text{por debajo} \\ \text{de X} & & \text{de X} \end{matrix}$$

$$y_1 \cdot A_1 = y_2 \cdot A_2 \quad (\text{sin signos})$$

$$\Rightarrow h/3 (\frac{1}{2} \cdot 2rh) = r(\pi r^2) \Rightarrow h = \sqrt{3\pi} r$$

$$\text{Por dato: } h = \sqrt{3\pi} \cdot \sqrt{3/\pi} \therefore \boxed{h = 3m}$$



13.18. Consideremos que el sistema equivalente es el que se muestra abajo.



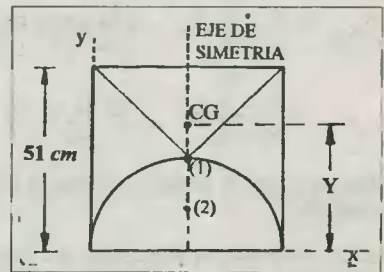
Fig. Solución Prob. 13.17

Esto significa que el área del semicírculo debe considerarse con signo negativo. En base al esquema adjunto se obtienen los siguientes datos:

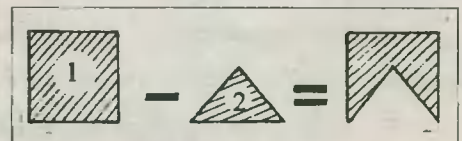
Cuadrado (1)	Semicírculo (2)
$A_1 = L^2$	$A_2 = -1/2 \pi (L/2)^2 = -1/8\pi L^2$
$y_1 = L/2$	$y_2 = 4/3\pi (L/2)$

Utilizando la relación (13.5) tenemos:

$$Y = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{L/2 (L^2) + 2L/3\pi \cdot (-1/8 \pi L^2)}{L^2 - 1/8 \pi L^2} \Rightarrow Y = \frac{10L}{3(8 - \pi)} \therefore \boxed{Y = 35 \text{ cm}}$$



13.19. Considerando que el sistema equivalente es el que se muestra, diremos que el área del triángulo debe considerarse con signo negativo. En base a la figura de la página siguiente conseguimos los siguientes datos:



Cuadrado (1) Triángulo (2)

$$A_1 = L^2 \qquad A_2 = -\frac{1}{2} Lh$$

$$y_1 = L/2 \qquad y_2 = h/3$$

Utilizando la relación (13.5) y la condición del problema tendremos:

$$Y = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} \Rightarrow h \frac{L/2 (L^2) + h/3 (-\frac{1}{2} Lh)}{L^2 - \frac{1}{2} Lh}$$

$$\Rightarrow 2h^2 - 6Lh + 3L^2 = 0$$

Resolviendo obtenemos: $h = L/4 (3 - \sqrt{3}) \dots (h < L)$

Y del dato: $h = 2/4 \cdot (3 + \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3}) \therefore \boxed{h = 3 \text{ m}}$

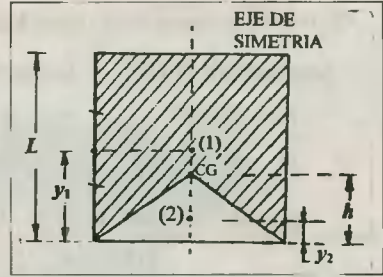


Fig. Solución Prob. 13.19

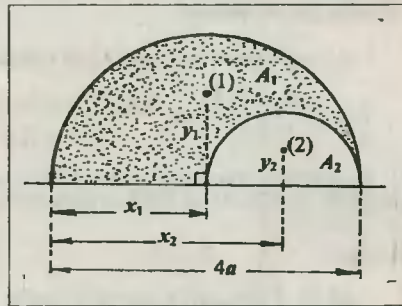
13.20. Procediendo del mismo modo que en los problemas anteriores, en base al esquema adjunto encontramos el siguiente cuadro de datos:

i	1	2
A_i	$2\pi a^2$	$-\frac{1}{2} \pi a^2$
x_i	$2a$	$3a$
y_i	$8a/3\pi$	$4a/3\pi$

Nota:

$$4a = 396$$

$$\Rightarrow a = 99 \text{ cm}$$



Luego:

a) $X = \frac{2a(2\pi a^2) + 3a(-\frac{1}{2} \pi a^2)}{2\pi a^2 - \frac{1}{2} \pi a^2} \Rightarrow X = 5/3 a \therefore \boxed{X = 165 \text{ cm}}$

b) $Y = \frac{8a/3\pi (2\pi a^2) + 4a/3\pi (-\frac{1}{2} \pi a^2)}{3/2 \pi a^2} \Rightarrow Y = \frac{28a}{9\pi} \therefore \boxed{Y = 98 \text{ cm}}$

13.21. En base al esquema mostrado deducimos que:

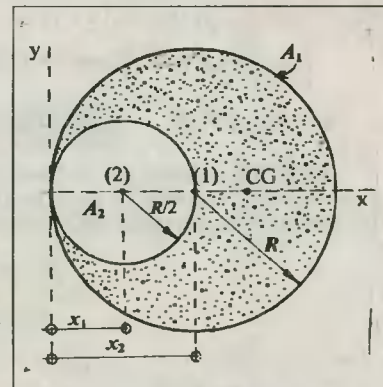
Círculo mayor Círculo menor

$$A_1 = \pi R^2 \qquad A_2 = -\frac{1}{4} \pi R^2$$

$$x_1 = R \qquad x_2 = R/2$$

Luego: $X = \frac{R(\pi R^2) + R/2 (-\frac{1}{4} \pi R^2)}{\pi R^2 - \frac{1}{4} \pi R^2} \Rightarrow X = 7/6 R$

$$\therefore \boxed{X = 70 \text{ cm}}$$



13.22. El sistema dado es equivalente al que se muestra abajo.



Utilizando los datos de la figura adjunta encontramos:

Cuadrante de círculo Triángulo

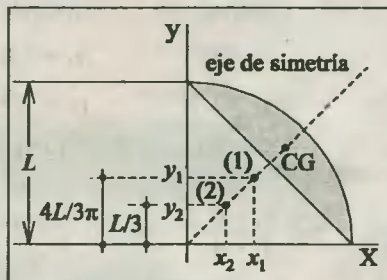
$$A_1 = 1/4 \pi L^2 \qquad A_2 = - L^2/2$$

$$y_1 = 4L/3\pi \qquad y_2 = L/3$$

$$\text{Luego: } Y = \frac{4L/3\pi(1/4\pi L^2) + L/3(-L^2/2)}{1/4L^2 - L^2} = \frac{2L}{3(\pi-2)}$$

∴ **Y = 7 cm**

Finalmente, aprovechando el eje de simetría: **X = 7 cm**



13.23. De acuerdo a los datos originales y al esquema dado en el enunciado del problema, podemos elaborar el cuadro que se muestra.

i	CUBO (1)	ESFERA (2)
V _i	L ³	π/6 L ³
y _i	L/2	3/2 L

Utilizando las relaciones (13.4) tenemos:

$$Y = \frac{y_1 \cdot V_1 + y_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = \frac{L/2 \cdot L^3 + 3/2 L \cdot \pi/6 L^3}{L^3 + \pi/6 L^3} \Rightarrow Y = \frac{3}{2} \left(\frac{2 + \pi}{6 + \pi} \right) L \quad \therefore \text{Y} = 27 \text{ cm}$$

Respecto a la abscisa, podemos afirmar que ésta se ubica en el eje de simetría de los sólidos (línea vertical).

Luego: **X = L/2** ∴ **X = 16 cm**

13.24. Trazando un eje horizontal X, y considerando que el volumen del hemisferio es negativo, procederemos del mismo modo como se hizo en el problema 13.16.

$$\begin{matrix} \Sigma(y \cdot V) & = & \Sigma(y \cdot V) \\ \text{por encima} & & \text{por debajo} \\ \text{de X} & & \text{de X} \end{matrix}$$

$$y_1 \cdot V_1 = y_2 \cdot V_2 + y_3 \cdot V_3$$

$$h/4 (1/3 \pi R^2 h) = R(2\pi R^3) + 13/8 R(-2/3 \pi R^3)$$

⇒ **h = √11 R** ∴ **h = 11 m**

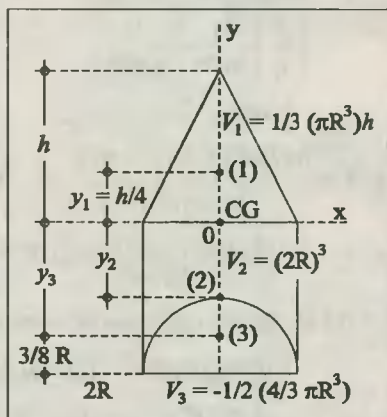


Fig. Solución Prob. 13.24

13.25. Recordemos que la masa de un cuerpo viene dada por: $m = dV$, siendo d su densidad y V su volumen. Trazando un eje X horizontal por el punto de contacto de modo que contenga al CG del sistema aplicaremos la regla vista en el problema anterior.

$$\begin{matrix} \Sigma(y \cdot m) & = & \Sigma(y \cdot m) \\ \text{por encima} & & \text{por encima} \\ \text{de X} & & \text{de X} \end{matrix}$$

$$y_1 \cdot m_1 = y_2 \cdot m_2 \Rightarrow R \cdot d_1 \cdot V_1 = h/4 \cdot d_2 \cdot V_2 \dots (*)$$

Por dato, $d_1 = 2d_2$. Entonces, en (*): $R \cdot 2d_2 \cdot 4/3 \pi R^3 = h/4 \cdot d_2 \cdot 1/3 \pi R^2 h \Rightarrow h = 4 \sqrt{2} R$

⇒ **h = 4 √2 · √2** ∴ **h = 8 m**

13.26. Del esquema adjunto podemos deducir los siguientes datos:

<u>Cilindro (1)</u>	<u>Cono (2)</u>
$V_1 = BH$	$V_2 = - 1/3 BH$
$y_1 = H/2$	$y_2 = H/4$

Luego, utilizando las relación (13.4) y la condición del problema, tenemos:

$$Y = \frac{H/2 \cdot BH + h/4(-1/3BH)}{BH - 1/3BH} = h \Rightarrow h^2 - 4Hh + 2H^2 = 0 \Rightarrow h = H(2 - \sqrt{2}) \dots (h < H)$$

$$\Rightarrow h = 100(2 - 1.41) \therefore h = 59 \text{ cm}$$

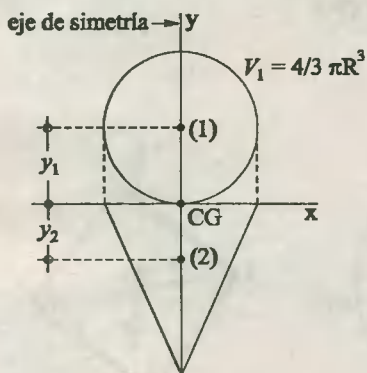


Fig. Solución Prob. 13.25

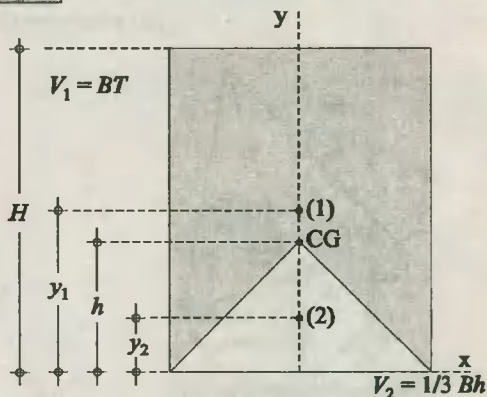


Fig. Solución Prob. 13.26

13.27. A partir del esquema mostrado podemos reconocer los siguientes datos:

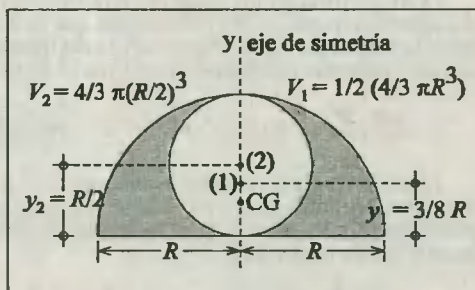
<u>Hemisferio (1)</u>	<u>Esfera (2)</u>
$V_1 = 2/3 \pi R^3$	$V_2 = - \pi R^3/6$
$y_1 = 3/8 R$	$y_2 = R/2$

Luego, la ordenada del CG del sólido mostrado viene dado por:

$$Y = \frac{3/8 R(2/3 \pi R^3) + R/2(-\pi R^3/6)}{2/3 \pi R^3 - \pi R^3/6}$$

$$\Rightarrow Y = R/3$$

Con $R = 24 \text{ cm}$ encontramos: $Y = 8 \text{ cm}$



13.28. Provocando una inclinación θ respecto a la vertical, observamos que el sólido se ve afectado de dos momentos M_1 y M_2 , debido al peso del hemisferio y del cono respectivamente. Para garantizar el retorno a la posición vertical se debe cumplir lo siguiente:

$$M_1 \geq M_2 \Rightarrow P_1 \cdot y_1 \cdot \text{sen} \alpha \geq P_2 \cdot y_2 \cdot \text{sen} \alpha \dots (*)$$

Recordemos que el peso se puede expresar por $P = \rho V$, siendo ρ = peso específico, y V = volumen. Luego, en (*):

$$\rho V_1 y_1 \geq \rho V_2 y_2 \Rightarrow \frac{1}{2} (4/3 \pi r^3) \cdot 3/8 r \geq (\pi r^2 h) \cdot h/4 \Rightarrow r^2 \geq h^2/3 \Rightarrow r \geq h/\sqrt{3}$$

Con el dato obtenemos: $r \geq 1 \text{ m}$

13.29. En el equilibrio, el CG del alambre quedará en la misma vertical que pasa por el punto de suspensión A. Luego, utilizando el cuadro (13.1) y el triángulo AHC, tendremos:

$$\text{tg} \theta = \frac{Y}{R} = \frac{2R/\pi}{R} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \theta = \text{arc tg} (2/\pi)$$

13.30. En el esquema se indica la posición que tiene el CG del cuadrado con respecto a la vertical que pasa por el punto de sustentación O, y como en el problema anterior, nos referiremos al triángulo OHG.

$$\text{tg} \theta = 40/30 = 4/3 \therefore \theta = 53^\circ$$

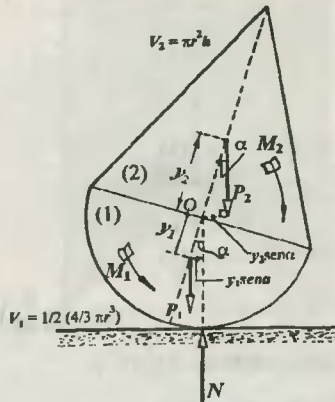


Fig. Solución Prob. 13.28

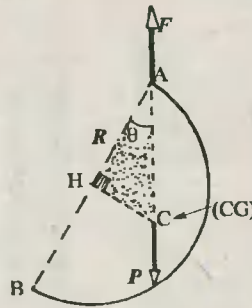


Fig. Solución Prob. 13.29

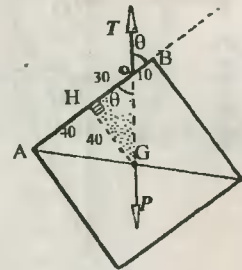


Fig. Solución Prob. 13.30

13.31. Utilizando los datos del problema elaboramos el esquema adjunto, en el cual notamos que la distancia x buscada concuerda con la abscisa del CG del triángulo. Utilizando entonces el resultado del problema 13.13 tendremos:

$$x = 1/3 (a + b) = 1/3 (27 + 36) \therefore x = 21 \text{ cm}$$

13.32. En la figura adjunta se muestra el esquema del problema. Trazando un eje vertical (Y) que pase por el CG del sistema aplicaremos la observación del problema 13.4. De este modo tendremos:

$$\sum (x \cdot L) = \sum (x \cdot L) \Rightarrow x_1 \cdot L_1 = x_2 \cdot L_2$$

a la izquierda de Y a la derecha de Y

$$a \cdot \cos \theta \cdot L_1 = b \cdot \text{sen} \theta \cdot L_2 \dots (a = L_1/2; b = L_2/2)$$

$$\Rightarrow \cos \theta \cdot L_1^2/2 = \text{sen} \theta \cdot L_2^2/2 \Rightarrow \text{tg} \theta = (L_1/L_2)^2 = (\sqrt{3}/2)^2 = 3/4 \therefore \theta = 53^\circ$$

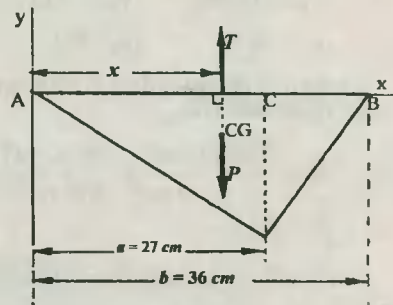


Fig. Solución Prob. 13.31

13.33. Utilizando el esquema de la figura y el mismo fundamento del problema anterior, tendremos:

$$\Sigma(x.m) = \Sigma(x.m) \Rightarrow x_1.m_1 = x_2.m_2$$

a la izquierda a la derecha
de Y de Y

$$\Rightarrow r \cos \theta . m_1 = r . \text{sen} \theta . m_2 \Rightarrow \text{tg} \theta = m_1 / m_2 = 8 / 6 \therefore \theta = 53^\circ$$

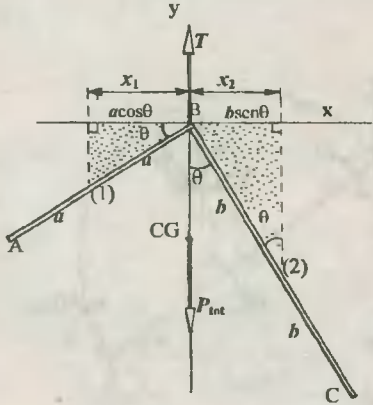


Fig. Solución Prob. 13.32

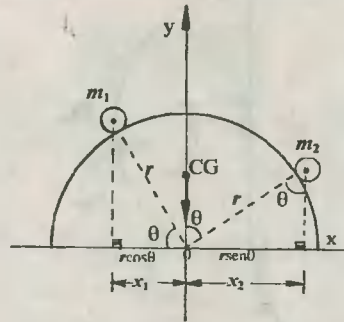


Fig. Solución Prob. 13.33

13.34. A partir del esquema diremos que cuando el sistema adquiere su estado de equilibrio, su CG se ubicará verticalmente debajo del punto de sustentación C; esto nos permite trazar un eje Y (vertical) y utilizar el mismo procedimiento del problema anterior.

$$\Sigma(x.m) = \Sigma(x.m) \Rightarrow x_A . m_A = x_B . m_B$$

a la izquierda a la derecha
de Y de Y

$$\Rightarrow (20 \text{ cm}) . m_A = (16 \text{ cm}) . 15 \text{ kg} \therefore m_A = 12 \text{ kg}$$

13.35. Haciendo el DCL del semicilindro, observamos que está afectado por tres fuerzas. Tomando momentos respecto al punto A, y aplicando la segunda condición de equilibrio tenemos:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_{R_B} = M_P$$

$$\Rightarrow r . R_B = \left(\frac{4r}{3\pi}\right) P \Rightarrow R_B = \frac{4}{3 \cdot 22/7} . 33$$

$$\therefore R_B = 14 \text{ N}$$

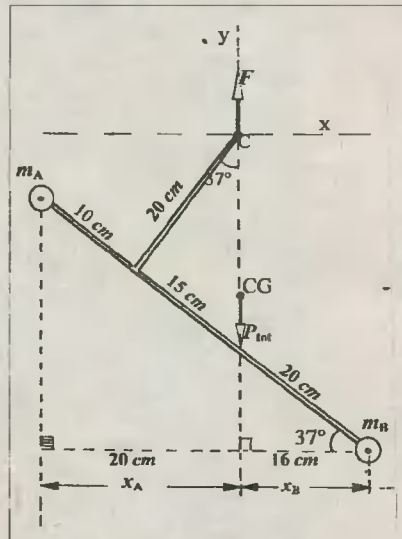


Fig. Solución Prob. 13.34

13.36. A partir del DCL elaborado, tomamos momentos respecto al punto de apoyo B, de modo que al aplicar la segunda condición de equilibrio se tendrá:

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_T + M_{P \text{sen} \theta} = M_{P \text{cos} \theta}$$

$$\Rightarrow T . 2R \text{cos} \theta + P . \text{sen} \theta . Y = P \text{cos} \theta . R \dots (Y = 4R/3\pi)$$

Reemplazando datos para P y T tenemos:

$$19.2\cos\theta + 66.(4/3\pi).\text{sen}\theta = 66\cos\theta \dots (\pi \approx 22/7)$$

$$\Rightarrow 28\text{sen}\theta = 66\cos\theta - 38\cos\theta \Rightarrow \text{tg}\theta = 1 \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

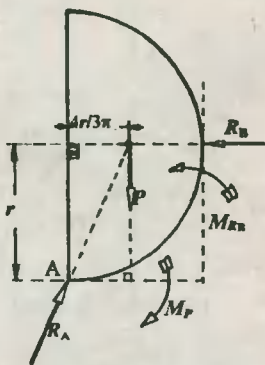


Fig. Solución Prob. 13.35

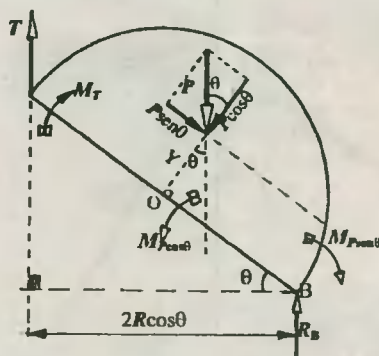
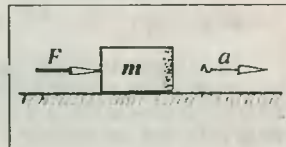


Fig. Solución Prob. 13.36

CAP 14 DINAMICA LINEAL

14.1.a. Cálculo de la aceleración (a).- Recordando la 2^{da} ley de Newton tenemos:

$$a = F/m \Rightarrow a = 80 \text{ N}/40 \text{ kg} \therefore a = 2 \text{ m/s}^2$$

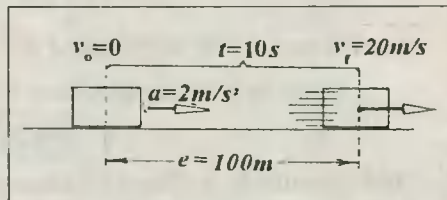


Nota.- Por condición del problema, la fuerza aplicada F es constante. Luego, la aceleración producida será también constante.

14.1.b. Cálculo de la velocidad final (v_f).- Por tratarse de un MRUV ($a = \text{cte}$), recurrimos a la relación (4.4).

$$v_f = v_o + at \Rightarrow v_f = 0 + (2 \text{ m/s}^2)(10 \text{ s})$$

$$\therefore v_f = 20 \text{ m/s}$$



14.1.c. Cálculo del espacio recorrido (e).- Utilizando la relación (4.6) del MRUV:

$$e = v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \dots (v_o = 0)$$

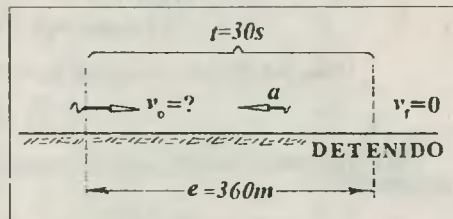
$$\Rightarrow e = \frac{1}{2} (2 \text{ m/s}^2)(10 \text{ s})^2 \therefore e = 100 \text{ m}$$

14.2.a. Cálculo de la velocidad inicial (v_o).- Observemos el esquema adjunto, en donde indicamos los datos del problema.

Considerando que se trata de un MRUV, usaremos la relación (4.7):

$$\frac{v_o + v_f}{2} = \frac{e}{t} \Rightarrow \frac{v_o + 0}{2} = \frac{360 \text{ m}}{30 \text{ s}}$$

$$\therefore v_o = 24 \text{ m/s}$$



Asimismo, calcularemos la aceleración del automóvil para usarlo como dato en el paso (b).

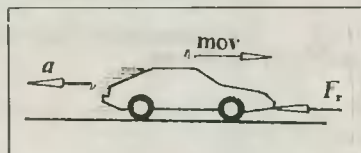
$$a = \frac{v_f - v_o}{t} \Rightarrow a = \frac{0 \text{ m/s} - 24 \text{ m/s}}{30 \text{ s}} \Rightarrow a = -0,8 \text{ m/s}^2 \dots (\text{Aceleración retardatriz})$$

14.2.b. Cálculo de la fuerza de frenado.- Calculemos la masa del auto a partir de: $m = P/g$.

$$\Rightarrow m = 10^4 \text{ N}/10 \text{ m/s}^2 \Rightarrow m = 1000 \text{ kg}$$

Luego, de la 2^{da} ley de Newton: $F_R = ma$

$$\Rightarrow F_R = (1000 \text{ kg})(0,8 \text{ m/s}^2) \therefore F_R = 800 \text{ N}$$

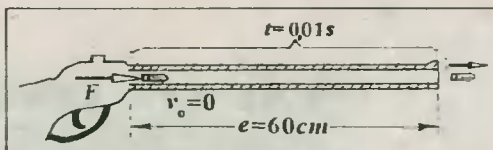


14.3. Haciendo un esquema del fenómeno, deducimos que es necesario calcular primero la aceleración de la bala, y luego la fuerza media que la impulsó.

$$\text{De: } e = \frac{1}{2} a t^2 \dots (v_0 = 0)$$

$$\Rightarrow 0,6 \text{ m} = \frac{1}{2} a (10^{-2} \text{ s})^2 \Rightarrow a = 1,2 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Luego: } F_T = ma \Rightarrow F = (0,2 \text{ kg})(1,2 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2) \therefore \boxed{F = 2\,400 \text{ N}}$$



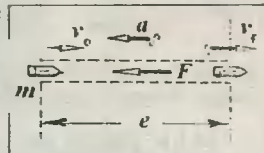
14.4. Según la condición del problema, la fuerza de rozamiento que ofrece el tablón a la bala se considera constante. Luego, la aceleración retardatriz producida será también constante. Por tanto, el movimiento de la bala será del tipo MRUV, y utilizando la relación (4.5) tendremos:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2ae$$

$$\Rightarrow (200 \text{ m/s})^2 = (300 \text{ m/s})^2 + 2a(0,1 \text{ m}) \Rightarrow a = -2,5 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Luego, de la 2}^{\text{da}} \text{ Ley de Newton: } F = ma \Rightarrow F = (0,3 \text{ kg})(2,5 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2)$$

$$\therefore \boxed{F = 75\,000 \text{ N}} \text{ (MODULO)}$$



14.5. Recordando la relación fundamental para el peso de un cuerpo, tenemos:

$$\text{a) En la Tierra: } P_T = mg_T \dots (1)$$

$$\text{b) En la Luna: } P_L = mg_L \dots (2)$$

Luego, dividiendo miembro a miembro (2) ÷ (1) tenemos:

$$P_L/P_T = mg_L/mg_T \Rightarrow P_L = P_T \cdot g_L/g_T \dots (*)$$

Pero, por dato del problema, $g_L = 1/6 g_T$. Y reemplazando en (*): $P_L = 600 \text{ N} \cdot 1/6$

$$\therefore \boxed{P_L = 100 \text{ N}}$$

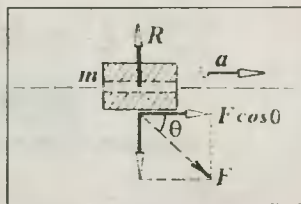
14.6. Del gráfico dado se puede encontrar la longitud del resorte deformado:

$$l = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ cm}$$

$$\text{Luego, la deformación } x \text{ será: } x = l_T - l_0 = 25 - 15 \Rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

Y por la ley de Hooke encontramos la fuerza de restitución F del resorte que afecta a la argolla.

$$F = kx = 80 \cdot 10 \Rightarrow F = 800 \text{ N}$$



Seguidamente, del DCL calcularemos la aceleración que experimenta la argolla, aplicando la 2^{da} Ley de Newton.

$$F_R = \Sigma F \Rightarrow ma = F \cos \theta \Rightarrow a = \frac{800 \cdot 4/5}{10} \therefore \boxed{a = 64 \text{ m/s}^2}$$

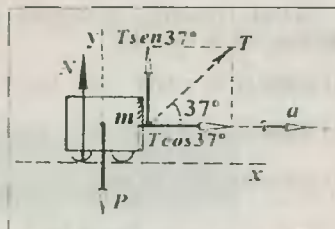
Nota. - Del gráfico original puedes deducir que $\theta = 37^\circ$.

14.7. Indiquemos por T a la lectura del dinamómetro. Ello ha de significar que el gancho es jalado

con una fuerza T , y por reacción, la cuerda soporta la misma fuerza T , según indicamos a continuación en el DCL del coche.

Puesto que la aceleración a se encuentra en el eje X , haremos uso de la 2^{da} ley de Newton en base a la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= F_R \\ T \cos 37^\circ &= ma \\ \Rightarrow -T &= \frac{20.5}{4/5} \quad \therefore \quad \boxed{T = 125 \text{ N}} \end{aligned}$$

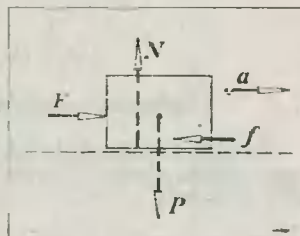


Nota. - En el eje Y existe equilibrio.

14.8. Haciendo un DCL del bloque, y aplicando la 2^{da} ley de Newton (caso especial) tendremos el esquema mostrado.

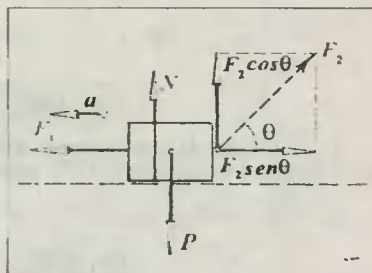
Como la aceleración es horizontal, sólo tendremos en cuenta a las fuerzas ubicadas en dicha dirección al momento de aplicar la 2^{da} Ley de Newton.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= F_t \\ F - f &= ma \\ 350 - f &= 50.6 \quad \therefore \quad \boxed{f = 50 \text{ N}} \end{aligned}$$



14.9.a. Cálculo de la fuerza F_1 .- Considerando que el bloque sólo presenta una aceleración horizontal y hacia la izquierda, aplicaremos la 2da ley de Newton teniendo en cuenta las fuerzas en dicha dirección.

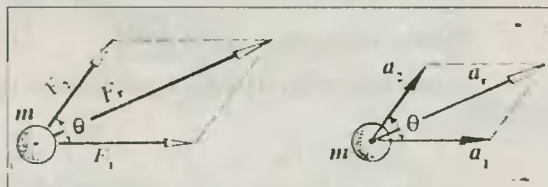
$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= F_R \\ F_1 - F_2 \cos \theta &= ma \quad \Rightarrow \quad F_1 - 30(4/5) = 5.5 \\ \therefore \quad \boxed{F_1 = 49 \text{ N}} \end{aligned}$$



14.9.b. Cálculo de la reacción N del piso.- Puesto que existe equilibrio en el eje vertical, aplicaremos la 1^{ra} condición de equilibrio.

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow N + F_2 \cdot \text{sen} \theta - P = 0 \quad \dots \quad (P = mg) \\ N = P - F_2 \cdot \text{sen} \theta &\Rightarrow N = 5.10 - 30(3/5) \quad \therefore \quad \boxed{N = 32 \text{ N}} \end{aligned}$$

14.10. Utilizando el principio de superposición, podemos decir que cada fuerza produce su propia aceleración de manera independiente. Sin embargo, la fuerza resultante F_R ($F_R = F_1 + F_2$) producirá una aceleración a_r , que será la resultante de las aceleraciones producidas independientemente. Así: $a_R = a_1 + a_2$.



Y de la ley del paralelogramo:

$$\begin{aligned} a_R &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \theta} \\ a_R &= \sqrt{7^2 + 15^2 + 2 \cdot 7 \cdot 15 \cdot \cos 53^\circ} \quad \therefore \quad \boxed{a_r = 20 \text{ m/s}^2} \end{aligned}$$

14.11. Primero presentaremos el cálculo de las aceleraciones a_1 y a_2 producidas por la fuerza F .

a) Sobre m : $a_1 = F/m \Rightarrow 1/a_1 = m/F \dots (1)$

b) Sobre M : $a_2 = F/M \Rightarrow 1/a_2 = M/F \dots (2)$

c) Sobre los dos a la vez:

$$a_3 = \frac{F}{m+M} = \frac{1}{\frac{m}{F} + \frac{M}{F}} = \frac{1}{\frac{m}{F} + \frac{M}{F}} \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$a_3 = \frac{1}{1/a_1 + 1/a_2} \Rightarrow a_3 = \frac{a_1 \cdot a_2}{a_1 + a_2}$$

Finalmente, reemplazamos datos: $a_3 = 2,4 \text{ m/s}^2$

14.12.a. Cálculo de la aceleración (a). - Considerando como sistema a los dos bloques, indicamos a continuación el DCL de aquel.

$$F_R = \Sigma F$$

$$m_{\text{sist.}} \cdot a = F - f \Rightarrow a = \frac{F - f}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore a = 4 \text{ m/s}^2$$

14.12.b. Cálculo de la fuerza de contacto (C). - Analizando el bloque 1 tendremos el DCL adjunto.

$$F_R = \Sigma F \Rightarrow m_1 \cdot a = F - C \Rightarrow 15,4 = 100 - C$$

$$\therefore C = 40 \text{ N}$$

14.13. Considerando a los dos bloques como nuestro sistema físico, aplicaremos la relación (14.3) para calcular su aceleración.

$$F_R = \Sigma \text{Fuerzas a favor de } a - \Sigma \text{Fuerzas en contra de } a$$

$$m_{\text{sist.}} \cdot a = Q - (P_1 + P_2) \Rightarrow a = \frac{Q - (m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2}$$

$$\text{Reemplazando datos: } a = 6 \text{ m/s}^2$$

Ahora, analizando al bloque 2, calcularemos la tensión de la cuerda.

$$\Sigma F = F_R \Rightarrow T - P_2 = m_2 \cdot a$$

$$T - 9 \cdot 10 = 9,6 \Rightarrow \therefore T = 144 \text{ N}$$

14.14. Como la soga es uniforme y homogénea, podemos asegurar que al seccionarla, las masas de las partes estarán en proporción directa con sus correspondientes longitudes.



Fig. Solución Prob 14.11.a

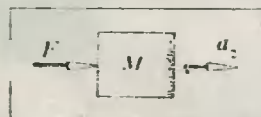


Fig. Solución Prob. 14.11.b

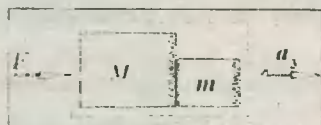


Fig. Solución Prob. 14.11.c

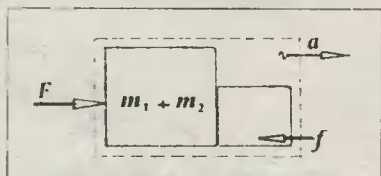


Fig. Solución Prob. 14.12.a

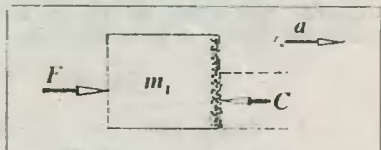


Fig. Solución Prob. 14.12.b

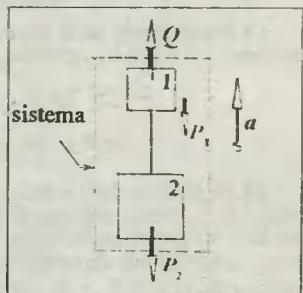


Fig. Solución Prob. 14.13.a

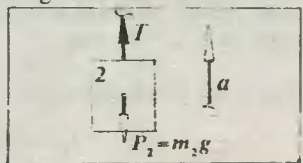


Fig. Solución Prob. 14.13.b

De (1): $F_R = \Sigma F$
 $Ma = R - Mg \Rightarrow a = R/M - g$

$\therefore a = 5 \text{ m/s}^2 \dots (\alpha)$

De (2): $m/x = M/L \Rightarrow m = (x/L)M \dots (\beta)$

Del gráfico (3): $\Sigma F = F_r$
 $T - mg = ma \Rightarrow T = m(g + a) \dots (\gamma)$

Finalmente, de (α) y (β) en (γ):

$T = 2/5 \cdot 20(10 + 5) \therefore T = 120 \text{ N}$

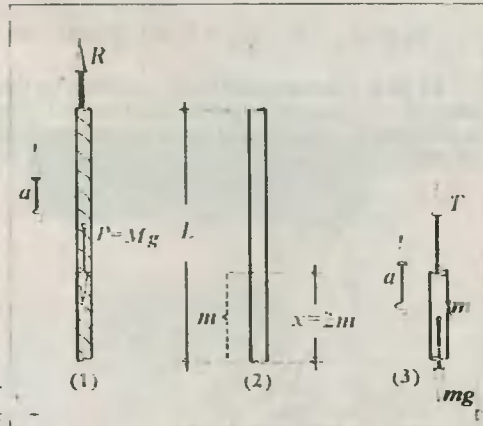


Fig. Solución Prob. 14.14

14.15.a. Cálculo de la aceleración (a).- Observamos por los datos, que la fuerza de resistencia F_r del aire atmosférico es mayor que el peso del paracaidista, por tanto, la aceleración se orientará verticalmente y hacia arriba. Luego, si el movimiento es hacia abajo, éste será uniformemente desacelerado.

$F_R = \Sigma F \Rightarrow ma = F_R - P \Rightarrow a = F_R/m - g$

Reemplazando datos: $a = 0,56 \text{ m/s}^2$

14.15.b. Cálculo de la velocidad final (v_f).- Dado que la aceleración a es constante, aplicaremos la relación (4.5).

$v_f^2 = v_o^2 + 2ae \dots (a = -0,56 \text{ m/s}^2)$

Reemplazando datos: $v_f = 2 \text{ m/s}$

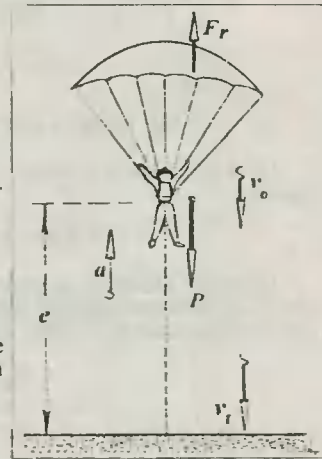


Fig. Solución Prob. 14.15

14.16.a. Cálculo de la aceleración (a).- En el DCL del bloque hemos descompuesto el peso P en dos componentes: Una paralela al plano inclinado y otra perpendicular a ella.

$F_R = \Sigma F_x$

$ma = P \text{sen} \theta \Rightarrow ma = mg \text{sen} \theta$

$\Rightarrow a = g \text{sen} \theta \therefore a = 6 \text{ m/s}^2$

14.16.b. Cálculo de la reacción normal (N).- Puesto que en el eje Y no se presenta ninguna aceleración, diremos que existe equilibrio entre las fuerzas ubicadas en dicho eje.

$N = P \text{cos} \theta = mg \text{cos} \theta \therefore N = 320 \text{ N}$

Nota.- Te recomiendo recordar la descomposición del peso sobre el plano inclinado, pues será común recurrir a ella en los siguientes ejercicios.

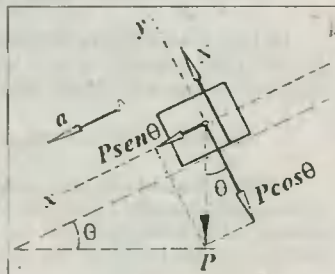


Fig. Solución Prob. 14.16

14.17. A continuación presentamos la descomposición de la fuerza F y el peso P en el DCL del bloque. Además, suponemos la aceleración dirigida hacia arriba. Si luego de resolver el problema el valor de ésta es negativo, deberá repetir el proceso considerando la dirección opuesta.

$$F_R = \Sigma F_x \Rightarrow ma = F \cos \theta - P \sin \theta \Rightarrow a = (F/m) \cos \theta - g \sin \theta \quad \therefore \boxed{a = 4 \text{ m/s}^2}$$

14.18.a. Considerando como sistema a los dos bloques, y representando a las fuerzas que actúan sobre él, verificaremos que la componente $P_1 \cos \theta$ se equilibra con la normal N_1 , y el peso P_2 con la reacción N_2 . Así pues, la única fuerza desequilibrada que actúa sobre el sistema y en la dirección del movimiento es $P_1 \sin \theta$.

$$F_R = \Sigma F_{\text{deseq.}} \Rightarrow m_{\text{sist.}} \cdot a = P_1 \sin \theta \Rightarrow a = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) g \sin \theta \quad \therefore \boxed{a = 4 \text{ m/s}^2}$$

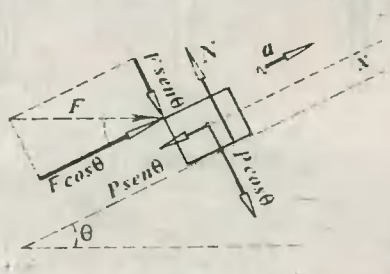


Fig. Solución Prob. 14.17

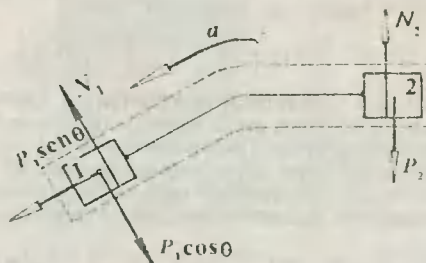


Fig (a). Solución Prob. 14.18

14.18.b. Ahora, analizando el bloque 2 calcularemos la tensión de la cuerda.

$$T = m_2 a = 20.4 \quad \therefore \boxed{T = 80 \text{ N}}$$

14.19.a. Cálculo de la aceleración (a).- Procederemos como lo hicimos en el problema anterior, para lo cual ya no será necesario indicar las reacciones normales del piso. Veamos:

$$F_R = \Sigma F_{\text{deseq.}}$$

$$m_{\text{sist.}} \cdot a = m_B g \Rightarrow a = \left(\frac{m_B}{m_A + m_B + m_C} \right) g$$

$$\therefore \boxed{a = 5 \text{ m/s}^2}$$

14.19.b. Cálculo de la fuerza de contacto (C).-Analizando el DCL del pequeño coche, y teniendo en cuenta sólo a las fuerzas ubicadas en el eje horizontal, obtendremos C. Veamos:

$$\Sigma F_x = F_R \Rightarrow C = m_A a \quad \therefore \boxed{C = 50 \text{ N}}$$

14.20.a. Cálculo de la aceleración (a).- Inicialmente, el sistema se encuentra en equilibrio, pero al cortar la cuerda inferior, el sistema presenta dos fuerzas en desequilibrio, siendo éstas los pesos de los bloques. Veamos:

$$F_R = \Sigma F_{\text{deseq.}}$$

$$m_{\text{sist.}} \cdot a = P_2 - P_1 \Rightarrow a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g \quad \therefore \boxed{a = 2 \text{ m/s}^2}$$

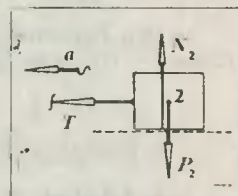


Fig. Solución Prob. 14.18.b

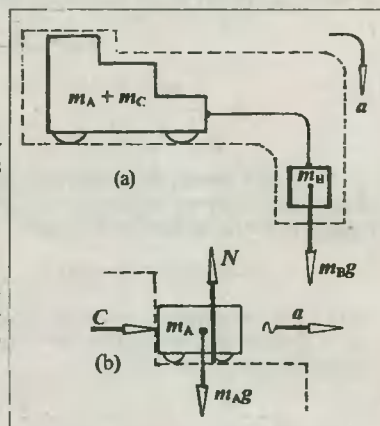


Fig. Solución Prob. 14.19

14.20.b. Cálculo del tiempo (t).- Sabiendo que la aceleración con que el bloque 2 desciende es constante, entonces aplicaremos la relación (4.5).

$$e = \frac{1}{2} at^2 \dots (v_0 = 0) \Rightarrow 9 = \frac{1}{2} \cdot 2t^2 \quad \therefore \boxed{t = 3 \text{ s}}$$

14.21. Cálculo de la aceleración (a).- Si deseamos impulsar el sistema sin que el coche resbale ni hacia arriba ni hacia abajo, éste deberá poseer un movimiento horizontal visto desde la Tierra. Así pues, el DCL del coche será el que se muestra.

(*) Observa que la fuerza resultante F_R es horizontal, al igual que la aceleración a que produce.

$$\text{Del } \Delta \text{ rectángulo sombreado: } \operatorname{tg}\theta = F_R/P = m \operatorname{al} / mg \Rightarrow a = g \cdot \operatorname{tg}\theta \dots (\text{Propiedad})$$

$$\text{Reemplazando datos: } a = 7,5 \text{ m/s}^2$$

Cálculo de la fuerza F .- Considerando a la cuña y bloque como un único cuerpo, tendremos:

$$\Sigma F_x = F_R \Rightarrow F = m_{\text{sist}} \cdot a \Rightarrow F = (M + m)a \quad \therefore \boxed{F = 750 \text{ N}}$$

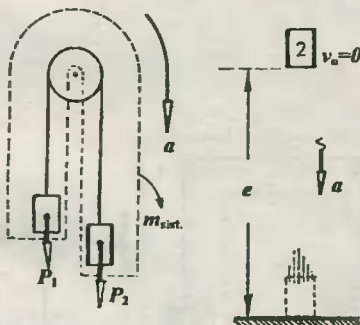


Fig. Solución Prob. 14.20

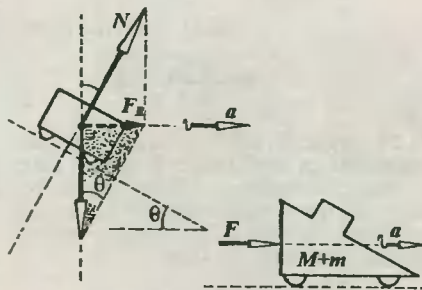


Fig. Solución Prob. 14.21

14.22.a. Cálculo de la aceleración (a).- Considerando el coche y péndulo como nuestro sistema, tendremos:

$$F_R = \Sigma F_x$$

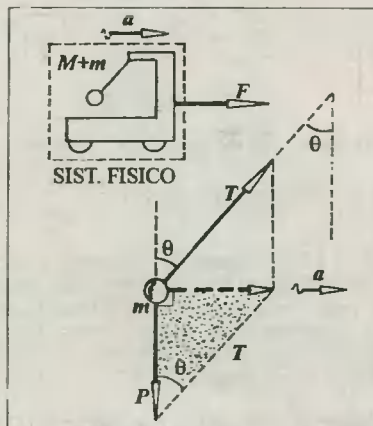
$$m_{\text{sist}} \cdot a = F \Rightarrow a = \frac{F}{M + m}$$

$$\therefore \boxed{a = 35/12 \text{ m/s}^2}$$

14.22.b. Cálculo del ángulo θ .- Considerando la masa pendular, observamos de su DCL una situación similar a la descrita en el problema anterior. Así pues:

$$\operatorname{tg}\theta = F_R/P = m \operatorname{al} / mg \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = a/g \dots (\text{Propiedad})$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{35/12}{10} = \frac{7}{24} \Rightarrow \boxed{\theta = 16^\circ}$$



14.22.c. Cálculo de la tensión (T).- Del Δ rectángulo sombreado: $T = P \operatorname{sec}\theta$

$$\therefore \boxed{T = 31,25 \text{ N}}$$

14.23. 1) Cuando el aerostato acelera hacia abajo.- Sea E el empuje que ejerce la atmósfera sobre el aerostato. Así, aplicando la 2^{da} ley de Newton tendremos:

$$F_R = \Sigma F \Rightarrow Ma = P - E \dots (1)$$

2) Cuando el aerostato acelera hacia arriba.- Sea m la masa que se tira por la borda. Entonces, el aerostato habrá perdido peso, y experimentando el mismo empuje E , aquel acelera hacia arriba con la misma aceleración a .

$$F_R = \Sigma F$$

$$(M - m)a = E - P' \dots (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) + (2):

$$Ma + (M - m)a = P - P'$$

donde : Peso del lastre = mg

$$\therefore m = \frac{2a}{g+a} M$$

14.24. La lectura del dinamómetro cuando el sistema está en equilibrio es $L = 30$ N. Este valor concuerda también con la tensión de las cuerdas, valor que se mantendrá (por condición del problema) cuando el sistema se acelera, evento que mostramos a continuación.

De la fig. (2) $F_R = \Sigma F_v$

$$(m - m_2)a = T - (P - P_2)$$

$$\Rightarrow a = \left[\frac{T - (P - P_2)}{P - P_2} \right] g$$

$$\Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$$

De la fig. (1): $\Sigma F_{\text{deseq}} = F_R = m_{\text{total}} a$

$$(P + P_1) - (P - P_2) = \left(\frac{2P + P_1 - P_2}{g} \right) a \Rightarrow P_1 + 10 = \left(\frac{60 + P_1 - 10}{g} \right) 5 \quad \therefore P_1 = 30 \text{ N}$$

14.25. Colocando un observador dentro del cohete, éste dirá que el bloque suspendido experimenta tres fuerzas: T , mg y ma , siendo esta última la fuerza de inercia de D'Alembert. Estas fuerzas se equilibran entre sí respecto al observador indicado. Por tanto, lo expresado se muestra en los DCL del bloque, y utilizando la relación (14.5) tenemos:

donde: $F_1 = m(-a) \dots$ (Fuerza de inercia)

$$F_1 = ma \dots$$
 (Módulo)

Y del "equilibrio" del bloque: $\Sigma F_v = 0$

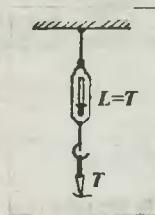
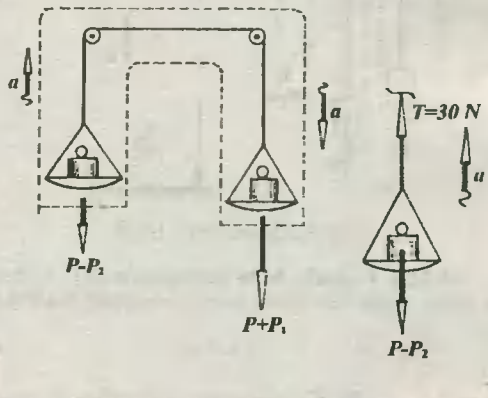
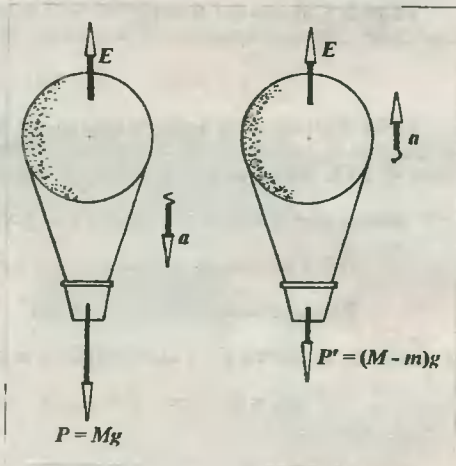


Fig. (1). Solución Prob. 14.25

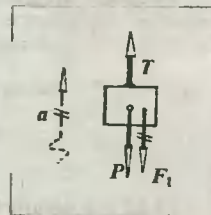


Fig. (2) Solución Prob. 14.25

$$T = P + F_i = m(g + a) \dots (*)$$

$$\therefore T = 140 \text{ N}$$

Observación.- En la expresión (*) el factor $(g + a)$ es nuestra conocida "gravedad efectiva" (g_{ef}), la que ahora se explica según se muestra en las figuras (3) y (4).

En la Fig. (4) se observa que, de acuerdo con el ítem 14.6 sobre gravedad efectiva, la aceleración a hacia arriba visto desde Tierra funciona con igual intensidad, pero hacia abajo, dentro de la nave, de modo que :

$$g_{ef} = g + a$$

14.26.a. Cuando el ascensor acelera hacia arriba.- Utilizando el criterio descrito para la gravedad efectiva g_{ef} en el problema anterior, para este primer caso tendremos:

$$g_{ef} = g + a = 16 \text{ m/s}^2$$

Luego, la balanza marcará el peso aparente del hombre, el que a su vez dependerá de g_{ef} .

$$P_{apar.} = m \cdot g_{ef} = 60 \cdot 16 \quad \therefore P_{apar.} = 960 \text{ N}$$

14.26.b. Cuando el ascensor acelera hacia abajo.- En este caso, la gravedad efectiva se consigue del siguiente modo:

$$g_{ef} = g - a = 4 \text{ m/s}^2$$

lo cual se explica por el el ítem 14.6, y que explicamos en las figuras (2) y (3).

En la figura (3) la balanza marcará el peso aparente del hombre, el que a su vez se calculará de la siguiente relación:

$$P_{apar.} = m \cdot g_{ef} = 60 \cdot 4 \quad \therefore P_{apar.} = 240 \text{ N}$$

14.27. Utilizando el peso aparente del bloque: $P_{apar.} = m \cdot g_{ef}$, siendo en este caso: $g_{ef} = g + a$.

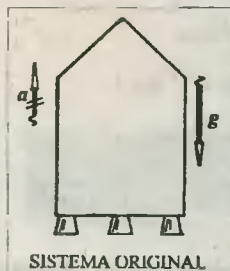
Luego, aprovechando el procedimiento utilizado en el problema 14.16, tendremos el esquema mostrado para el observador ubicado sobre el plano inclinado.

$$F_R = \Sigma F$$

$$m a' = P_{apar.} \cdot \text{sen} \theta = m(g + a) \text{sen} \theta$$

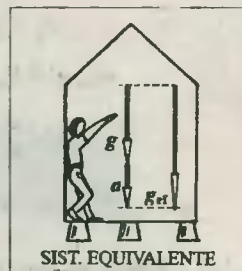
$$\Rightarrow a' = (g + a) \text{sen} \theta \quad \therefore a' = 7 \text{ m/s}^2$$

14.28. Coloquemos un observador dentro del ascensor, éste observará el movimiento de los bloques con sus pesos aparentes, siendo $g_{ef} = g - a$. Luego, calcularemos la aceleración a' del sistema.



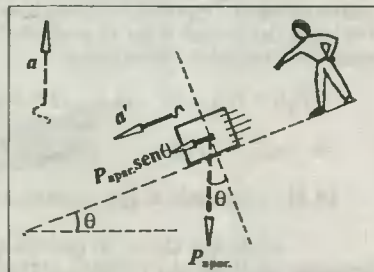
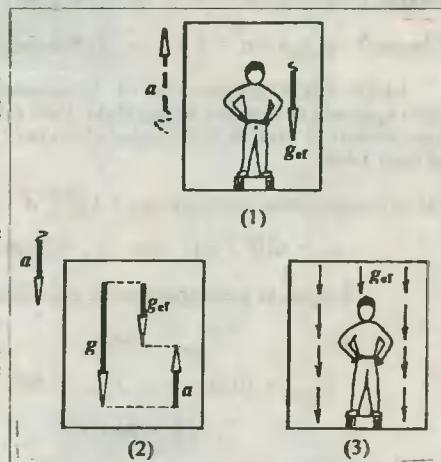
SISTEMA ORIGINAL

Fig. (3) Solución Prob. 14.25



SIST. EQUIVALENTE

Fig. (4) Solución Prob. 14.25



$$F_R = \Sigma F_{deseq.}$$

$$m_{sist} \cdot a' = P_{apar. 2} - P_{apar. 1}$$

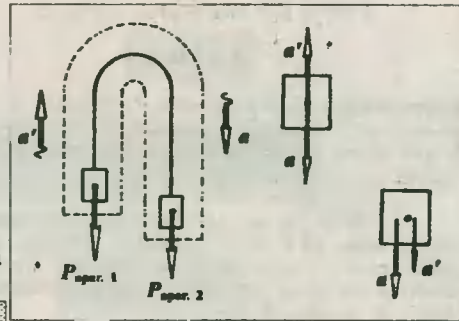
$$a' = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g_{ef}$$

$$a' = \left(\frac{8 - 4}{4 + 8} \right) (10 - 4) \quad \therefore \quad a' = 2 \text{ m/s}^2$$

Luego, un observador en Tierra apreciará a cada bloque según como se muestra en las figuras.

Bloque 1: $a_1 = a - a' = 4 - 2 \Rightarrow a_1 = 2 \text{ m/s}^2 \quad (\downarrow)$

Bloque 2: $a_2 = a + a' = 4 + 2 \Rightarrow a_2 = 6 \text{ m/s}^2 \quad (\downarrow)$



14.29. Observaremos que el dinamómetro marca el peso aparente del bloque suspendido. Para ello determinemos primero el valor de la gravedad efectiva (g_{ef}), utilizando el ítem 14.6.

De la composición vectorial: $g_{ef} = \sqrt{g^2 + a^2}$

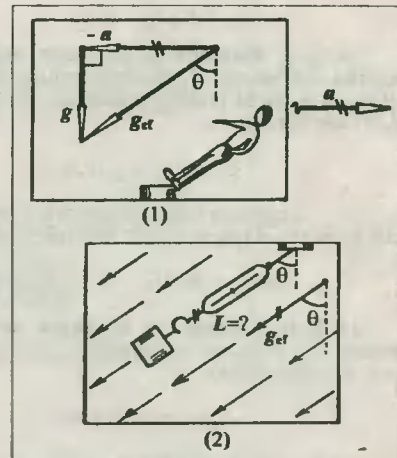
$$g_{ef} = \sqrt{10^2 + 24^2} \Rightarrow g_{ef} = 26 \text{ m/s}^2$$

Luego, el peso aparente se calculará así:

$$P_{apar.} = m g_{ef}$$

$$P_{apar.} = 10 \cdot 26 \Rightarrow P_{apar.} = 260 \text{ N}$$

$$\therefore \quad L = 260 \text{ N}$$

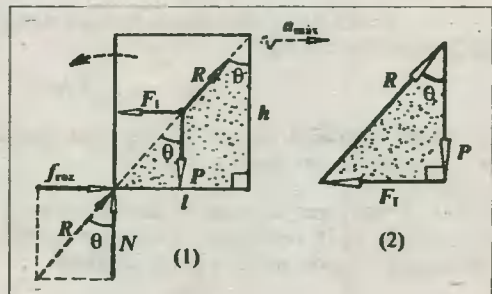


14.30. Consideremos el instante en que el paralelepípedo está a punto de volcar, y además utilicemos a un observador colocado sobre la plataforma. Así, el DCL de aquel será el que se muestra.

Para nuestro observador, el bloque se apoya sobre la esquina inferior izquierda, pero aún en estado de "equilibrio" (pseudo-equilibrio). Por tanto, del gráfico anterior tendremos la semejanza de triángulos sombreados.

$$F_1 / l = P / h \Rightarrow m \cdot a_{\max} / l = m g h$$

$$\Rightarrow a_{\max} = (l/h) g \quad \therefore \quad a_{\max} = 6 \text{ m/s}^2$$



14.31. Utilizando el procedimiento del problema anterior, tendremos los esquemas mostrados.

Dado que existe un pseudo-equilibrio, las tres fuerzas que actúan sobre el CG de la barra formarán un triángulo vectorial cerrado. Del gráfico (b):

$$\text{ctg} \theta = F_1 / P = m a / m g \Rightarrow a = g \text{ctg} \theta \quad \therefore \quad a = 7,5 \text{ m/s}^2$$

14.32. 1) Cálculo de la aceleración a del coche.- Del esquema mostrado deducimos que:

$$a = \frac{F}{M+m} \Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$$

2) **Cálculo de la aceleración a' del bloque respecto del plano inclinado.**- Utilizando un observador sobre el plano inclinado, y recurriendo por tanto al principio de D'Alembert, tendremos:

$$\overline{F}_I = \text{Fuerza inercial} = m(-\bar{a}) \Rightarrow F_I = ma \dots (\text{módulo})$$

$$F_R = \Sigma F$$

$$ma' = F_I \cos\theta + P \sin\theta = ma \cos\theta + mg \sin\theta \Rightarrow a' = a \cos\theta + g \sin\theta \therefore a' = 10 \text{ m/s}^2$$

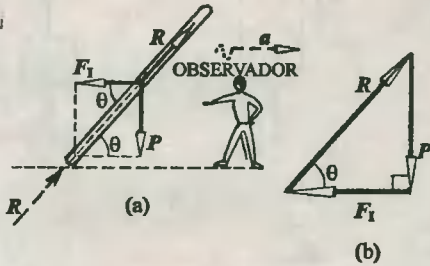


Fig. Solución Prob. 14.31

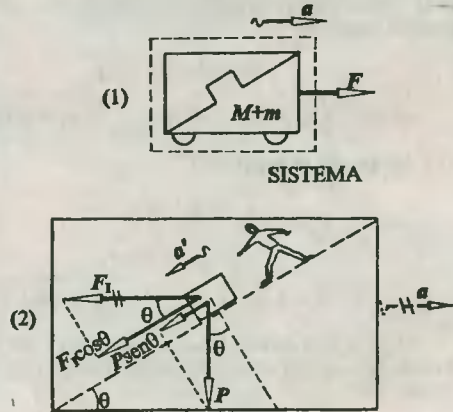


Fig. Solución Prob. 14.32

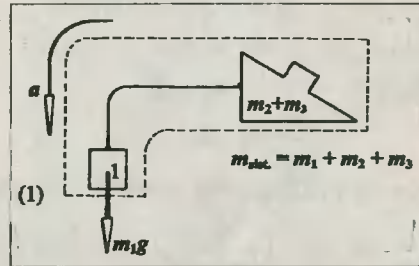
14.33. 1) **Cálculo de la aceleración del sistema.**- A partir del DCL mostrado calcularemos a .

$$F_R = \Sigma F_{\text{deseq.}}$$

$$m_{\text{sist.}} \cdot a = m_1 g$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \right) g$$

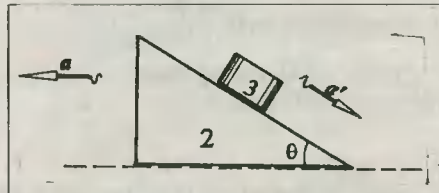
$$\therefore a = 2 \text{ m/s}^2$$



2) **Cálculo de la aceleración a' del bloque 3.**- En vista que entre la cuña 2 y el bloque 3 existe una disposición muy semejante al analizado en el problema anterior, usaremos la relación allí obtenida.

$$a' = a \cos\theta + g \sin\theta$$

$$\therefore a' = 7,6 \text{ m/s}^2$$



14.34. Considerando un sistema de referencia no inercial ubicado dentro del coche, emplearemos el Principio de D'Alembert, y con él las fuerzas F_{I1} y F_{I2} aplicadas a las barras AB y CD respectivamente, y del modo que se indica en la figura.

De acuerdo con el principio mencionado, diremos que la estructura se encuentra en equilibrio, y así aplicaremos la 2^{da} condición de equilibrio.

$$\Sigma M_A = 0$$

$$M_1 + M_2 = M_P$$

$$F_{11} \cdot L + F_{12} \cdot L = P \cdot L/2$$

$$2ma + ma = m/2 \cdot g \quad \therefore \quad a = g/6$$

14.35. 1) Cálculo de la aceleración a_3 .- Del movimiento de la polea, podemos deducir a_3 empleando para ello la siguiente relación:

$$\bar{a}_3 = \frac{1}{2} (\bar{a}_1 + \bar{a}_2)$$

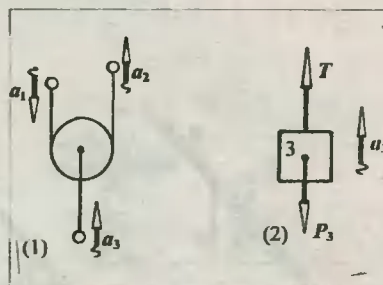
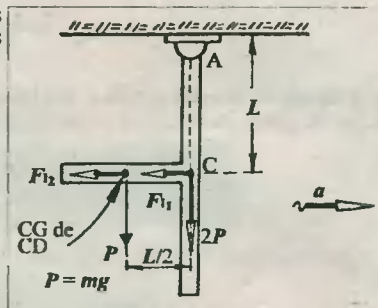
$$\Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} [(-3) + (+5)] \quad \therefore \quad a_3 = 1 \text{ m/s}^2 \quad (1)$$

2) Cálculo de la tensión T .-

$$\Sigma F_y = F_R$$

$$T - P_3 = m_3 \cdot a_3$$

$$T = 4.1 + 4.10 \quad \therefore \quad T = 44 \text{ N}$$



14.36.a. Cálculo de las aceleraciones.- Analizando cada bloque por separado, tendremos los esquemas mostrados.

De (1): $T = m_1 \cdot a_1 \dots (\alpha)$

De (2): $\bar{a}_2 = \frac{1}{2} (\bar{a}_1 + \bar{a}_3) = \frac{1}{2} (\bar{a}_1 + \bar{0})$

$$\Rightarrow a_1 = 2a_2 \dots (\beta)$$

De (3): $F_R = \Sigma F_y$

$$m_2 \cdot a_2 = m_2 g - 2T \dots (\gamma)$$

De (α) y (β) en (γ) : $m_2 \cdot a_2 = m_2 g - 2[m_1(2a_2)]$

$$\Rightarrow a_2 = \left[\frac{m_2}{4m_1 + m_2} \right] g \quad \therefore \quad a_2 = 2 \text{ m/s}^2$$

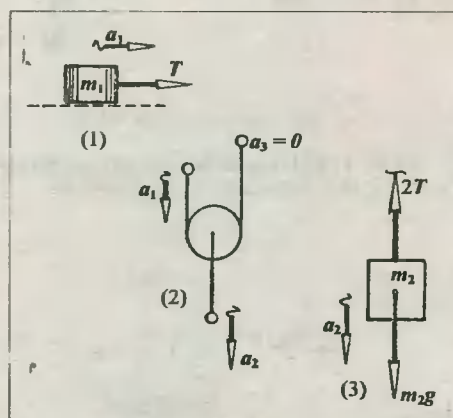
Y reemplazando en (β) : $a_1 = 4 \text{ m/s}^2$

14.36.b. Cálculo del tiempo.- Debido a que m_2 parte del reposo ($v_0 = 0$) con MRUV, emplearemos la siguiente relación:

$$e = \frac{1}{2} a_2 t^2 \Rightarrow 16 = \frac{1}{2} \cdot 2 t^2 \quad \therefore \quad t = 4 \text{ s}$$

14.37. 1) Cálculo de la aceleración del bloque 2.- De los DCI. de cada bloque, deducimos que la tensión en la cuerda es igual al peso P_1 . Luego, del DCL de 2 encontramos la aceleración a_2 .

De (a): $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = P_1 = m_1 \cdot g$



De (b): $F_R = \Sigma F_y \Rightarrow m_2 a_2 = T - P_2$

$\Rightarrow a_2 = (m_1/m_2 - 1)g \therefore a_2 = 6 \text{ m/s}^2$

2) **Cálculo de la fuerza F.**- Analizando el diagrama de aceleraciones de la polea deducimos a_p , y seguidamente analizaremos el DCL de la polea para calcular F .

De (c): $a_p = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{1}{2}(0 + 6) \Rightarrow a_p = 3 \text{ m/s}^2$

De (d):

$\Sigma F = F_R$

$F - 2T - P_p = m_p a_p \therefore F = 372 \text{ N}$

14.38. Para empezar, presentamos los diagramas que se muestran.

Observamos que el bloque 1, por tener un peso mayor que el de la polea y el bloque 2 en conjunto, 1 acelera hacia abajo con a_1 , mientras que la polea y 2 aceleran hacia arriba con a_2 .

De (a): $m_1 g - T = m_1 a_1 \dots (\alpha)$

De (b): $\frac{1}{2}(a_1 + 0) = a_2 \Rightarrow a_1 = 2a_2 \dots (\beta)$

De (c) en (α): $m_1 g - T = 2m_1 a_2 \dots (*)$

Luego, de (c):

$2T - (m_p + m_2)g = (m_p + m_2)a_2 \dots (**)$

Finalmente, de (*) en (**):

$a_2 = \left[\frac{2m_1 - (m_p + m_2)}{4m_1 + m_2 + m_p} \right] g$

$\therefore a_2 = 2 \text{ m/s}^2$

Y en (β): $a_1 = 4 \text{ m/s}^2$

14.39. Observando el DCL adjunto, deducimos que sobre el hombre actúan tres fuerzas: F (sobre sus manos), $2F$ (tensión en la cuerda) y P (peso propio).

$F_R = \Sigma F_y$

$ma = F + 2F - P \Rightarrow (P/g)a = 3F - P$

$\Rightarrow a = (3F/P - 1)g \therefore a = 1 \text{ m/s}^2$

14.40. En base a los esquemas mostrados diremos lo siguiente:

1º) Ya que el cuerpo M no se mueve, entonces la tensión en la cuerda es igual a su peso: $T = Mg$.

2º) La fuerza F con que el mono jala la cuerda hacia abajo es del mismo valor que T . Así, por reacción, el mono recibe la misma fuerza, pero hacia arriba.

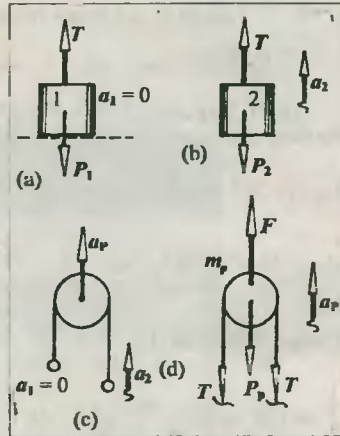


Fig. Solución Prob. 14.37

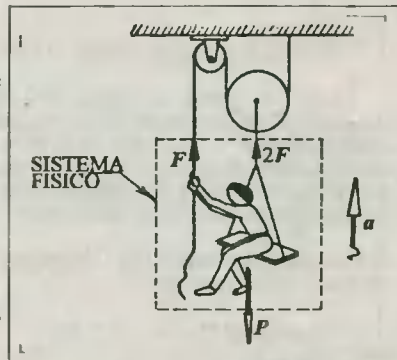
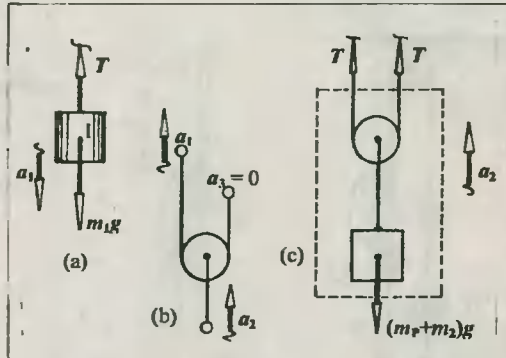


Fig. Solución Prob. 14.39

Del DCL del mono tendremos:

$$F_R = \Sigma F \Rightarrow ma = T - mg = Mg - mg \Rightarrow a = (M/m - 1)g \quad \therefore \quad a = 2,5 \text{ m/s}^2$$

14.41. Hagamos el DCL de cada bloque, y observemos los desplazamientos horizontales experimentados por cada uno hasta el preciso instante que A toca el piso.

De (1): $N_x^A = N_x^B \Rightarrow m_B \cdot a_B = m_A \cdot a_A \Rightarrow \frac{a_B}{a_A} = \frac{m_A}{m_B} \dots (\alpha)$

Però: $\frac{e_B}{e_A} = \frac{\frac{1}{2} a_B \cdot t^2}{\frac{1}{2} a_A \cdot t^2} \Rightarrow \frac{e_B}{e_A} = \frac{a_B}{a_A} \dots (\beta)$

Luego, de (α) en (β) : $\frac{e_B}{e_A} = \frac{m_A}{m_B} \Rightarrow \frac{e_B}{e_B + e_A} = \frac{m_A}{m_A + m_B}$

Y de (2): $e_B = \left[\frac{m_A}{m_A + m_B} \right] (b - a) \quad \therefore \quad e_B = 1 \text{ cm}$

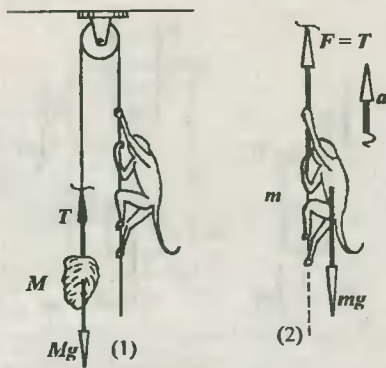


Fig. Solución Prob. 14.40

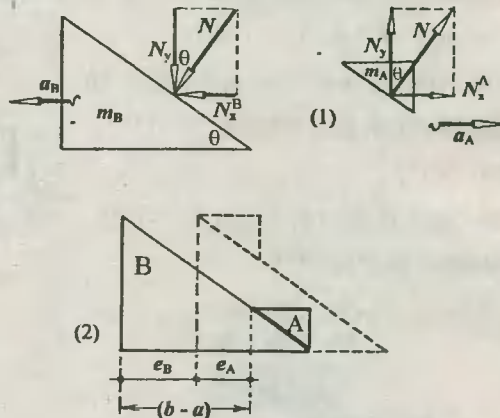


Fig. Solución Prob. 14.41

14.42. Al cortar la cuerda del lado izquierdo, inmediatamente después actuará sobre el bloque "A" la fuerza de tensión de la cuerda del lado derecho, que a su vez producirá una aceleración instantánea a , que se determinará por la 2^{da} Ley de Newton.

1) Cálculo de la tensión (T).- Del triángulo vectorial deducimos que:

$$T = P_B \text{ctg} 37^\circ \Rightarrow T = 80 \text{ N}$$

2) Cálculo de la aceleración (a).-

$$F_R = \Sigma F$$

$$m_A \cdot a_A = T \Rightarrow a_A = T/m_A = 80/16 \quad \therefore \quad a_A = 5 \text{ m/s}^2$$

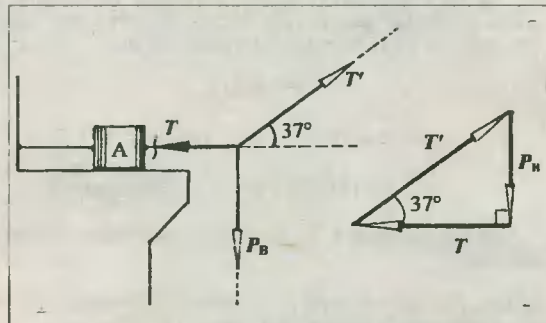


Fig. (1). Solución Prob. 14.42

14.43. Considerando el sistema inicialmente en equilibrio encontraremos la fuerza de contacto C entre los cuerpos móviles. Inmediatamente después de que se pierda el equilibrio, esta fuerza C actuará sobre el coche produciendo la aceleración instantánea pedida en el problema.



1º) Cálculo de C .- Aplicando la 2ª condición de equilibrio sobre el semicilindro, tenemos:

$$\Sigma(M_F)_O = 0$$

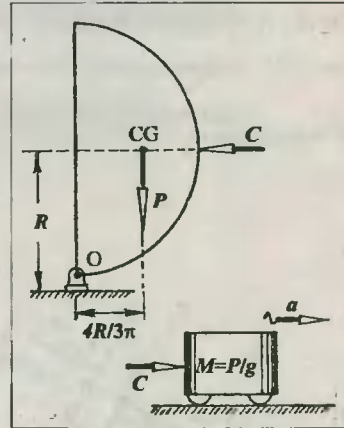
$$+ C.R - P.4R/3\pi = 0 \Rightarrow C = (4/3\pi)P \dots (*)$$

Fig. (2). Solución Prob. 14.42

2º) Cálculo de la aceleración instantánea.-

$$F_R = \Sigma F \Rightarrow Ma = C$$

Y de (*): $(P/g)a = (4/3\pi)P \therefore a = (4/3\pi)g$



14.44. Analicemos todo el conjunto como un único sistema. Entonces, diremos que:

$$\Sigma F = F_R \Rightarrow F = m_{sist}.a$$

$$\Rightarrow F = (M + m_1 + m_2)a \dots (*)$$

Fig. Solución Prob. 14.43

Ahora, calculemos la aceleración a a partir de los esquemas mostrados.

De (2): $T = m_1.a$

De (3): $T^2 = F_R^2 + P_2^2 \dots$ (Teorema de Pitágoras)

$$\Rightarrow (m_1 a)^2 = (m_2 a)^2 + (m_2 g)^2 \Rightarrow a = \left(\frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}} \right) g \dots (**)$$

Finalmente, reemplazamos (**) en (*): $F = \left[\frac{M + m_1 + m_2}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}} \right] m_2 g \therefore F = 300 \text{ N}$

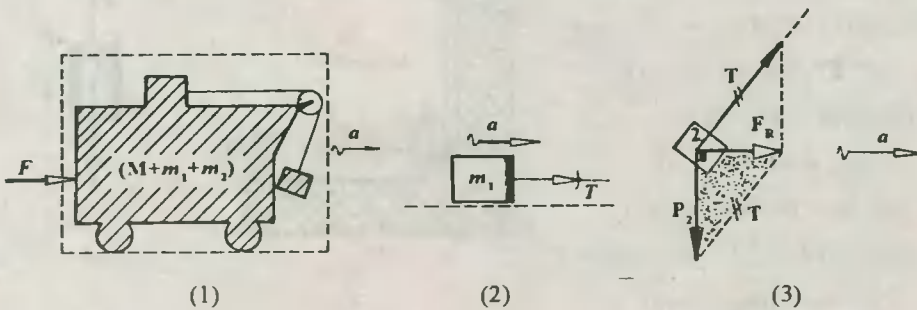


Fig. Solución Prob. 14.44

14.45. Aprovechando la solución del problema 7.20, diremos que la aceleración relativa del cubo m ($a_{2/1}$) es de igual módulo que la cuña M (a_2). Seguidamente, presentamos los DCL de ambos cuerpos, usando un S.R. no I. para el primero y un S.R.I. para el segundo.

De (a): $1^\circ \Sigma F_x = F_R \quad mgsen\alpha + ma_2\cos\alpha - T = ma_2 \dots (1)$

$2^\circ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + ma_2sen\alpha = mg\cos\alpha \dots (2)$

De (b): $\Sigma F_x = F_R \Rightarrow T - T\cos\alpha + Nsen\alpha = Ma_2 \dots (3)$

Ahora, resolvamos del siguiente modo:

De (2): $N = mg\cos\alpha - ma_2sen\alpha \dots (*)$

De (1): $T = mgsen\alpha + ma_2\cos\alpha - ma_2 \dots (**)$

Finalmente, reemplazamos (*) y (**) en (3), y luego de hacer operaciones, despejamos a_2 , y obtendremos:

$$a_2 = \frac{mgsen\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}$$

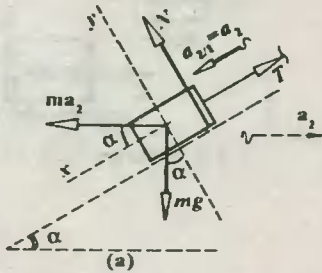


Fig. (a). Solución Prob. 14.45

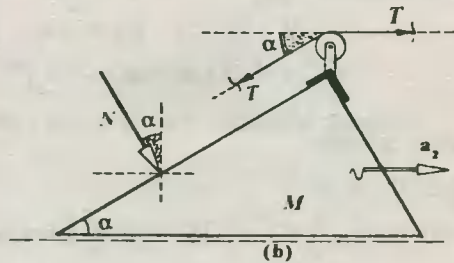


Fig. (b). Solución Prob. 14.45

14.46. Eligiendo como sistema de referencia inercial al piso, presentamos los DCL de cada cuerpo.

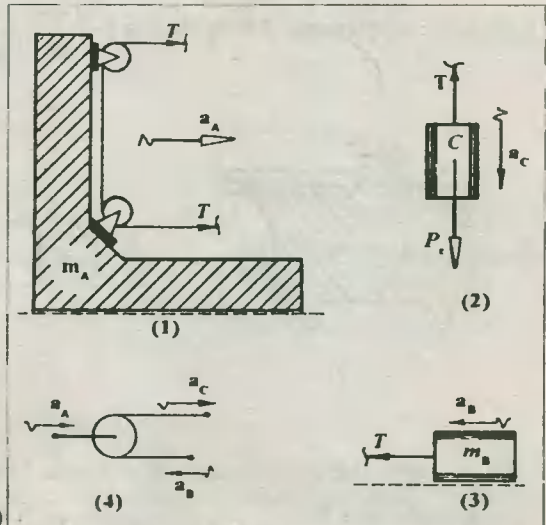
De la figura (1): $\Sigma F = F_R \Rightarrow 2T = m_A a_A$
 $\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_A a_A \dots (1)$

De la figura (2): $F_R = \Sigma F$
 $\Rightarrow m_C a_C = m_C g - T$
 $\Rightarrow a_C = g - T/m_C \dots (2)$

De la figura (3): $F_R = \Sigma F \Rightarrow m_B a_B = T$
 $\Rightarrow a_B = T/m_B \dots (3)$

Y considerando al bloque A como una gran polea móvil, similar a la que señalamos en la figura (4), tendremos:

$\bar{a}_A = \frac{1}{2}(\bar{a}_C + \bar{a}_B) \Rightarrow 2a_A = a_C - a_B \dots (4)$



Finalmente, reemplazamos (1), (2) y (3) en (4), y despejando a_A obtendremos:

$$a_A = \frac{g}{\frac{m_A}{2m_C} + \frac{m_A}{2m_B} + 2} \quad \therefore \quad a_A = 2 \text{ m/s}^2$$

14.47. Haciendo un esquema de las fuerzas y aceleraciones que afectan a cada uno de los cuerpos tendremos:

Del movimiento en la polea móvil diremos que: $a_2 = 2a_1 \dots (1)$

De la esfera 1: $\Sigma F = F_R \Rightarrow 2T - m_1g = m_1a_1 \dots (2)$

De la barra 2: $P_2 - T = m_2a_2 \dots (3)$

Luego, multiplicamos la ecuación (3) por 2, y el resultado lo sumamos miembro a miembro con (2), y así tendremos:

$$(2m_2 - m_1)g = 2m_2a_2 + m_1a_1 \dots (*)$$

Y si reemplazamos (1) en (*) y despejamos a_1 , obtendremos:

$$a_1 = \left(\frac{2m_2 - m_1}{4m_2 + m_1}\right)g \Rightarrow a_1 = \left(\frac{2 - n}{4 + n}\right)g \dots (**)$$

Ahora, analizando los desplazamientos hasta cumplir con la condición del problema, tendremos:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2} a_1 t^2 \\ e_2 &= \frac{1}{2} a_2 t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow l = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) t^2$$

Luego, recordando (1) y despejando t tenemos:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{3a_1}}$$

Pero, de (**): $t = \sqrt{\frac{2(4+n)l}{3(2-n)g}} \quad \therefore \quad t \approx 1,4s$

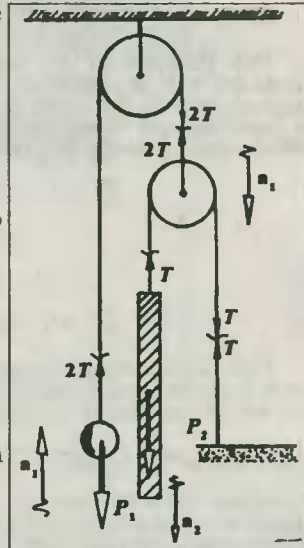


Fig. (1). Solución Prob. 14.47

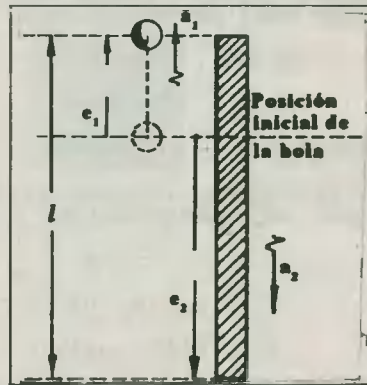


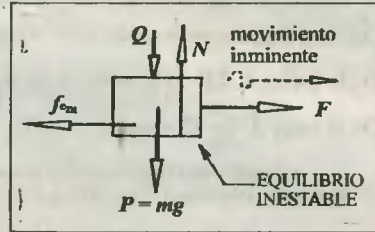
Fig. (2). Solución Prob. 14.47

CAP 15 ROZAMIENTO

15.1. Haciendo un DCL del ladrillo percibimos que el efecto de F es el de jalar al ladrillo hacia la derecha. Por consiguiente, existirá una fuerza de rozamiento estático f_e hacia la izquierda, que tomará su máximo valor f_{em} cuando el ladrillo esté a punto de salir del reposo.

$$\begin{aligned} 1) \quad \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow N = P + Q \\ &\Rightarrow N = 10 \cdot 10 \text{ N} + 400 \text{ N} \\ &\Rightarrow N = 500 \text{ N} \end{aligned}$$

$$2) \quad \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = f_{em} \Rightarrow F = \mu_e N = 0,8 \cdot 500 \text{ N} \quad \therefore \boxed{F = 400 \text{ N}}$$

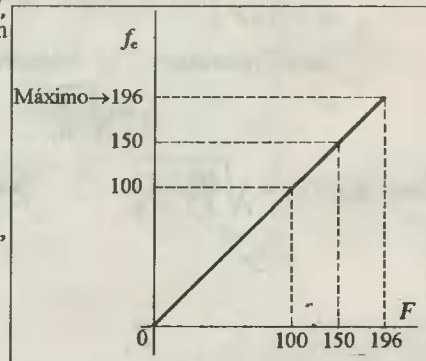
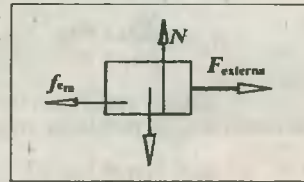


15.2. El presente caso sugiere determinar, en primer lugar, el valor de la fuerza de rozamiento estático máximo (f_{em}), lo cual se consigue del DCL mostrado, en donde:

$$f_{em} = \mu_e N = \mu_e P = 0,5 \cdot 392 \text{ N} \Rightarrow f_{em} = 196 \text{ N}$$

Ahora, debes recordar que esta fuerza sólo aparece cuando el agente externo aplica una fuerza externa F del mismo valor, provocando que el cuerpo se encuentre en movimiento inminente. Si F fuese menor a 196 N , entonces la fuerza de fricción f_e sería estática y también menor. Luego, para los datos dados:

- a) $F = 100 \text{ N} \quad \therefore \boxed{f_e = 100 \text{ N}}$
 b) $F = 150 \text{ N} \quad \therefore \boxed{f_e = 150 \text{ N}}$
 c) $F = 196 \text{ N} \quad \therefore \boxed{f_{em} = 196 \text{ N}}$



Observación del Prob. 15.2

15.3. Primero, averigüemos si el bloque se mueve, para lo cual se debe verificar que:

$$\begin{aligned} F &> f_{em} \\ 75 \text{ N} &> \mu_e N \quad (\mu_e = 0,8 \wedge N = P = 100 \text{ N}) \\ 75 \text{ N} &> 80 \text{ N} \dots \text{ (Falso)} \end{aligned}$$

Luego, $F = 75 \text{ N}$ no es suficiente para mover al bloque, y éste se mantiene en reposo gracias a una fuerza de fricción estática $f_e = 75 \text{ N}$, la cual es una componente de la reacción total R , según se muestra en el esquema de la siguiente página.

$$\text{tg } \phi = f_e / N = 75 \text{ N} / 100 \text{ N} = 3/4 \quad \therefore \boxed{\phi = 37^\circ}$$

15.4. Procediendo del mismo modo que en el problema anterior, tendremos el DCL mostrado.

Puesto que en ambos casos el bloque no se mueve, se verificará que:

$$f_e = F \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = f_e/N$$

a) $\operatorname{tg}\theta_1 = 90\text{ N}/120\text{ N} = 3/4 \Rightarrow \theta_1 = 37^\circ$

Luego, la reacción total del piso vendrá dada por: $R_1 = N \operatorname{sec}\theta_1 = 120\text{ N} \cdot 5/4$

$$\therefore R_1 = 150\text{ N}$$

b) $\operatorname{tg}\theta_2 = 160\text{ N}/120\text{ N} = 4/3 \Rightarrow \theta_2 = 53^\circ$

Finalmente, la reacción total del piso vendrá dada por: $R_2 = N \operatorname{sec}\theta_2 = 120 \cdot 5/3$

$$\therefore R_2 = 200\text{ N}$$

Observación. - En el caso (b), el valor 4/3 coincide con el del coeficiente de fricción estático (μ_e), y θ_2 coincide con el ángulo máximo de rozamiento estático (θ_e).

15.5. Hagamos el DCL de la caja cuando ésta se encuentra a punto de resbalar, encontraremos que el rozamiento es estático y máximo para la condición dada en el problema.

1) $\sum F_y = 0 \Rightarrow N = P \Rightarrow N = 98\text{ N}$

2) $\sum F_x = 0 \Rightarrow kx = f_{e,m} \Rightarrow x = \mu_e N/k \therefore x = 1\text{ cm}$

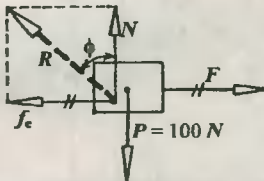


Fig. Solución Prob. 15.3

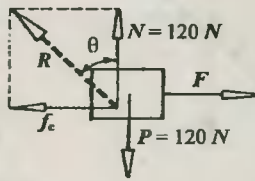


Fig. Solución Prob. 15.4

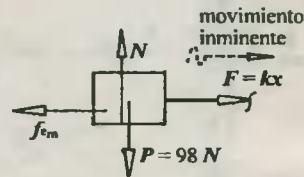


Fig. Solución Prob. 15.5

14.6. Hagamos el DCL del cajón, y con él apliquemos las condiciones de equilibrio dadas en el problema.

Se verifica que: $R = P$; y $f_{e,m} = R \operatorname{sen}\theta$

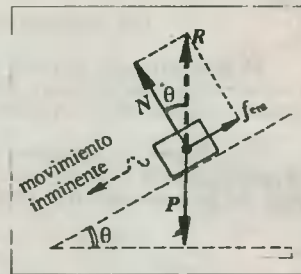
$$\Rightarrow f_{e,m} = P \operatorname{sen}\theta \dots (*)$$

a) $f_{e,m} = 500 \operatorname{sen}53^\circ \therefore f_{e,m} = 300\text{ N}$

b) Recordando que: $\mu_e = f_{e,m}/N$

$$\Rightarrow \mu_e = R \operatorname{sen}\theta / R \operatorname{cos}\theta \Rightarrow \mu_e = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}53^\circ \therefore \mu_e = 4/3$$

c) De (*): $f_e = P \operatorname{sen}16^\circ = 500 \cdot 7/25 \therefore f_e = 140\text{ N}$ (Fricción estática)



14.7. Primero, encontramos la tensión en la cuerda que une al bloque A con el resto del sistema, y a continuación calcularemos su peso.

De (b), por el equilibrio de O diremos que: $T = P_B \cdot \operatorname{ctg}37^\circ \dots (1)$

De (a), diremos que, cuando el peso de A sea el mínimo que solicita el problema, éste tratará de deslizar hacia la derecha, encontrándose en movimiento inminente, de tal modo que:

$$N = P_A, \text{ y } f_{em} = T \Rightarrow \mu_c N = T \Rightarrow P_A = T/\mu_c \dots (2)$$

$$\text{Y de (1) en (2): } P_A = \frac{P_B \cdot \text{ctg} 37^\circ}{\mu_c} = \frac{300 \cdot 4/3}{0.8} \therefore P_A = 500 \text{ N}$$

15.8. Haciendo el DCL del bloque, y considerando que el mínimo valor buscado para F es el que hace que el bloque se encuentre a punto de resbalar (movimiento inminente), aplicaremos la 1ª condición de equilibrio.

Y construyendo un polígono vectorial cerrado, se verificará las siguientes relaciones:

$$1) \text{tg} \theta_c = f_{em}/N = \mu_c \quad 2) AB = F \text{sen} \theta \quad 3) EB = F \text{cos} \theta \quad 4) BC = EB \text{ctg} \theta_c = F \text{cos} \theta / \mu_c$$

$$\text{Luego: } AB + BC = P \Rightarrow F \text{sen} \theta + F \text{cos} \theta / \mu_c = mg$$

$$\Rightarrow F = \frac{\mu_c mg}{\mu_c \text{sen} \theta + \text{cos} \theta} \therefore F = 50 \text{ N}$$

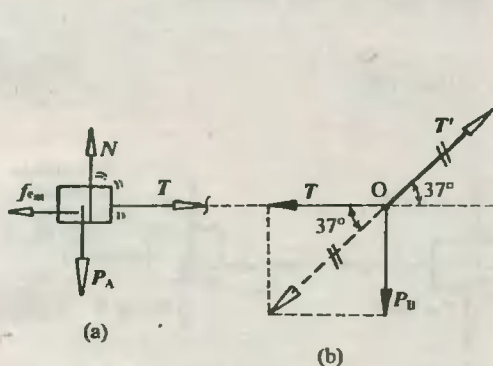


Fig. Solución Prob. 15.7

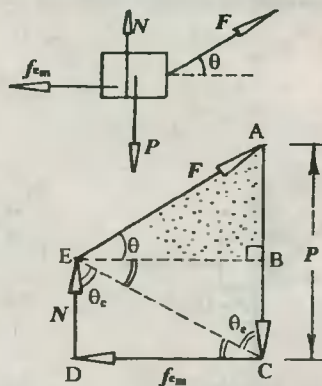


Fig. Solución Prob. 15.8

15.9. Analizando primero al bloque B, notarás que éste sólo experimenta dos fuerzas verticales: Su peso y la reacción R_B del bloque A sobre él. Entonces: $R_B = P_B$.

Ahora, presentamos el DCL del bloque A. En él aplicaremos la 1ª condición de equilibrio, y procederemos del mismo modo que en el problema anterior.

$$AB + BC = P_A + P_B$$

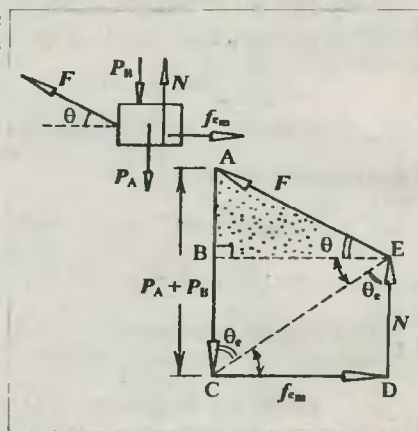
$$F \text{sen} \theta + F \text{cos} \theta \cdot \text{ctg} \theta_c = P_A + P_B$$

$$\text{Siendo: } \text{ctg} \theta_c = 1/\text{tg} \theta_c = 1/\mu_c$$

$$\Rightarrow F = \frac{\mu_c (P_A + P_B)}{\mu_c \text{sen} \theta + \text{cos} \theta} \therefore F = 150 \text{ N}$$

15.10. De los dos valores dados para μ , podemos reconocer que: $\mu_c = 1/3$, y $\mu_e = 1/5$.

a) **Cálculo del valor máximo de F .** - En este caso el bloque se encontrará a punto de resbalar hacia arriba y el suceso se indica en la Fig (a) de la siguiente página.



Del Δ rectángulo sombreado: $N = F \text{sen} \theta \Rightarrow f_{e_m} = \mu_e \cdot N = F \cdot \mu_e \cdot \text{sen} \theta$

Además: $F \cos \theta - f_{e_m} = P \Rightarrow F \cos \theta - F \cdot \mu_e \cdot \text{sen} \theta = P$

$$\Rightarrow F = \frac{P}{\cos \theta - \mu_e \cdot \text{sen} \theta} \Rightarrow F_{\text{máx}} = 50 \text{ N} \dots (\alpha)$$

b) **Cálculo del valor mínimo de F.** - En este caso el bloque se encontrará a punto de resbalar hacia abajo y el suceso se representa en la Fig.(b).

$AB + BC = P \Rightarrow F \cos \theta + F \text{sen} \theta \cdot \text{tg} \theta_e = P$

$$\Rightarrow F = \frac{P}{\cos \theta + \mu_e \cdot \text{sen} \theta} \Rightarrow F_{\text{mín}} = 30 \text{ N} \dots (\beta)$$

Finalmente, de (α) y (β) diremos que, para que el bloque no resbale se debe cumplir que:

$$30 \text{ N} < F < 50 \text{ N}$$

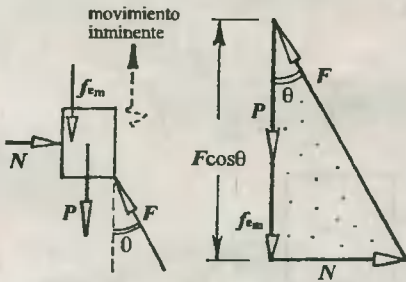


Fig. (a). Solución Prob. 15.10

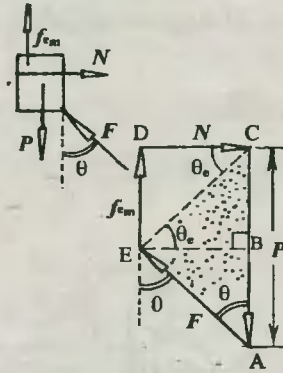


Fig. (b) Solución Prob. 15.10

15.11. a) Analicemos a la esfera suspendida según su DCL, del cual deducimos que:

$$R = P \text{tg} \theta \dots (1)$$

b) Ahora analicemos el bloque B, de cuyo DCL deducimos que: $N = R$.

$$\Rightarrow f_{e_m} = \mu_e \cdot R, \text{ y } Q = f_{e_m} = \mu_e \cdot R \dots (2)$$

Luego, de (1) en (2): $Q = \mu_e \cdot P \cdot \text{tg} \theta$

$$\therefore Q = 60 \text{ N}$$

15.12. Considerando como sistema físico a los dos cuerpos dados, tendremos el DCL de la figura (a) en la siguiente página.

Aplicando la 1ª condición de equilibrio:

$$1) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = P + 2P \Rightarrow N = 3P$$

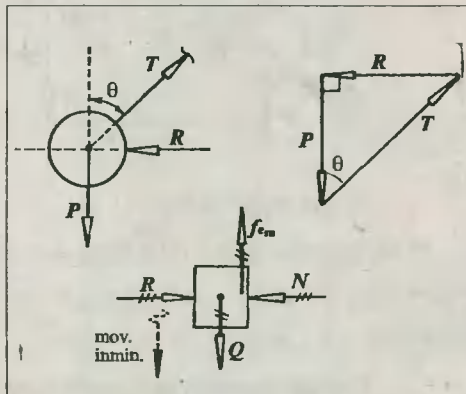


Fig. Solución Prob. 15.11

$$2) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R = f_{em} = \mu_e \cdot N \Rightarrow R = 3\mu_e \cdot P \dots (1)$$

Analicemos ahora el DCL del cilindro. Del triángulo vectorial (equilibrio del cilindro) tendremos que el ángulo α buscado será determinado por: $\operatorname{tg} \alpha = 2P/R \dots (2)$

$$\text{Finalmente, de (1) en (2): } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2P}{3\mu_e P} = \frac{2}{3 \cdot 1/2} = \frac{4}{3} \therefore \alpha = 53^\circ$$

15.13. En casos como el indicado se verifica que debajo del bloque se da una distribución de fuerzas variable, como causa del "balanceo" hacia el sentido horario, vale decir, el bloque se apoya más firmemente sobre la esquina derecha, perdiendo compresión con el piso por el lado izquierdo. En la figura (b), N representa la resultante de las fuerzas variables de compresión que existen en (a) (La inclinación del bloque es una "exageración didáctica" nuestra).

Ahora, averiguemos si el bloque está a punto de deslizar. Ello lo determinaremos si: $F = f_{em}$.

$$\text{Recordando que: } f_{em} = \mu_e \cdot N = \mu_e \cdot P \Rightarrow f_{em} = 20 \text{ N}$$

Luego, verificamos que: $F = 18 \text{ N} < f_{em}$.

\Rightarrow El bloque no está a punto de deslizar, y el rozamiento es sólo estático (f_e), y vale:

$$f_e = F = 18 \text{ N}$$

Por existir equilibrio de rotación: $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow N \cdot x + F \cdot h = P \cdot L/2$

Reemplazando datos y despejando: $x = 3,52 \text{ cm}$

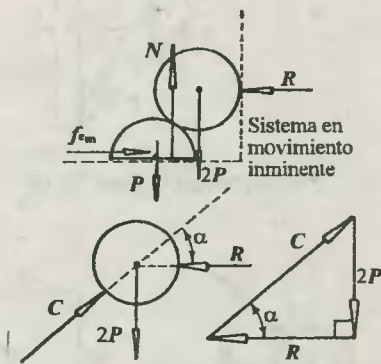


Fig. Solución Prob. 15.12

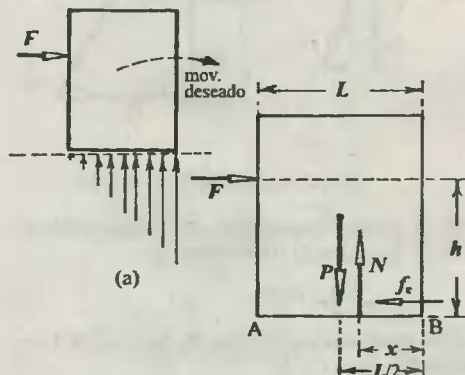


Fig. Solución Prob. 15.13

15.14. Hagamos el DCL de la barra en el instante del movimiento inminente.

$$1) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = P \Rightarrow f_{em} = \mu_e \cdot P$$

$$2) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R = f_{em} \Rightarrow R = \mu_e \cdot P \dots (1)$$

Y tomando momentos respecto al apoyo A tendremos:

$$\Sigma M_A = 0 \dots (\text{Equilibrio})$$

$$M_p = M_R \Rightarrow P \cdot n/2 = R \cdot m \Rightarrow P/2R = m/n = \operatorname{tg} \theta \dots (2)$$

Reemplazando la ecuación (1) en (2) conseguimos:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{P}{2(\mu_e P)} = \frac{1}{2(0,375)} = \frac{4}{3} \quad \therefore \theta = 53^\circ$$

15.15. En primer lugar encontraremos una relación entre el peso P y la normal N de la pared en C, utilizando para ello el DCL del sistema compuesto por las dos barras. Luego, analizando el DCL de la barra BC encontraremos una relación trigonométrica para el ángulo θ buscado. Veamos:

1) Sistema físico: Barra (AB) + Barra (BC)

Tomando momentos respecto de A: $\Sigma M_A = 0$

$$2M_P = M_N \Rightarrow 2P \cdot l/2 \cos(\theta/2) = N \cdot 2l \cdot \operatorname{sen}(\theta/2) \Rightarrow P = 2N \operatorname{tg}(\theta/2) \dots (1)$$

2) Sistema físico: Barra (BC)

Tomando momentos respecto a B: $\Sigma M_B = 0$

$$M_P + M_N = M_{f_{cm}} \Rightarrow P \cdot l/2 \cdot \cos(\theta/2) + N \cdot l \operatorname{sen}(\theta/2) = f_{cm} \cdot l \cos(\theta/2) \dots (2)$$

Y de (1) en (2): $2N \operatorname{tg}(\theta/2) \cdot \frac{1}{2} \cos(\theta/2) + N \operatorname{sen}(\theta/2) = \mu_e \cdot N \cos(\theta/2)$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\theta/2) = \frac{1}{2} \mu_e = 7/24 = \operatorname{tg}16^\circ \Rightarrow \theta/2 = 16^\circ \quad \therefore \theta = 32^\circ$$

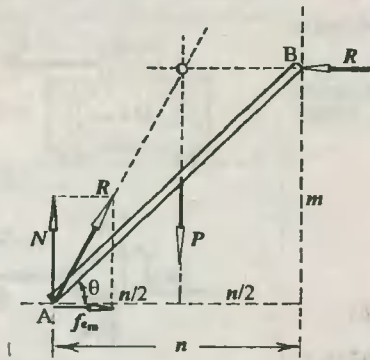


Fig. Solución Prob. 15.14

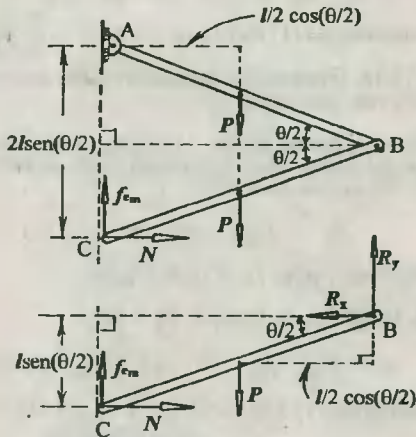


Fig. Solución Prob. 15.15

15.16. Analicemos primero el sistema físico "coche-bloque", y de su DCL encontraremos una expresión para F .

De la 2^{da} Ley de Newton: $F_{\min} = (M + m)a \dots (1)$

Y analizando el DCL del bloque en la condición establecida por el problema y que aparece en la siguiente página:

$$f_{cm} = P \Rightarrow \mu_e N = P \Rightarrow N = P/\mu_e \dots (2)$$

De la 2^{da} Ley de Newton: $F_T = \Sigma F_x \Rightarrow ma = N \dots (3)$

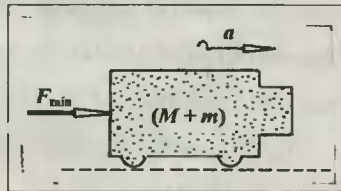


Fig. (1). Solución Prob. 15.16

$$\text{De (3) en (2): } (P/g)a = P/\mu_c \Rightarrow a = g/\mu_c \dots (4)$$

$$\text{Reemplazando (4) en (1): } F_{\min} = (M + m)g/\mu_c$$

$$\therefore F_{\min} = 1\,500\text{ N}$$

15.17. Si suponemos que μ presenta su mínimo valor en el fenómeno, se apreciará que el cajón se encontrará a punto de resbalar, y por inercia quedarse en el camino y ser adelantado por el coche. Así pues, en tal condición de movimiento inminente respecto de aquel, tendremos los esquemas mostrados.

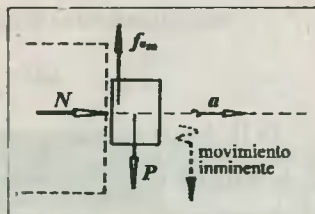


Fig. (2). Solución Prob. 15.16

1) Sistema coche-cajón.- De la 2^{da} Ley de Newton:

$$a = \frac{F}{M + m} \Rightarrow a = 8\text{ m/s}^2 \dots (1)$$

2) Sistema cajón.- El cajón experimenta una fuerza de rozamiento estático máximo cuando se encuentra en la condición dada en el problema.

$$N = P = mg, \text{ y } f_{cm} = \mu_c N = \mu_c mg$$

$$\text{Y de la 2}^{\text{da}} \text{ Ley de Newton: } \Sigma F_x = F_R \Rightarrow f_{cm} = ma$$

$$\Rightarrow \mu_c mg = ma \Rightarrow \mu_c = a/g \dots (2)$$

$$\text{Finalmente, de (1) en (2): } \mu_c = 8/10 \therefore \mu_c = 0,8$$

15.18. Procediendo del mismo modo que en los problemas anteriores, tendremos:

1) Sistema coche-cajón.- Dado que el cajón no debe desprenderse del coche, ellos se moverán como un solo cuerpo. Luego, de la 2^{da} Ley de Newton:

$$F_{\max} = (M + m)a \dots (1)$$

2) Sistema cajón: $f_{cm} = \mu_c N = \mu_c mg$

$$\text{Y de la 2}^{\text{da}} \text{ Ley de Newton: } F_R = \Sigma F_x$$

$$ma = F_{\max} - f_{cm} \Rightarrow ma = F_{\max} - \mu_c mg \dots (2)$$

$$\text{Resolviendo (1) y (2) tendremos: } F_{\max} = (M + m)(m/M)\mu_c g$$

$$\therefore F_{\max} = 24\text{ N}$$

15.19. Hagamos el DCL de cada bloque según los esquemas mostrados.

Del polígono vectorial del bloque A, diremos:

$$N_{A/B} \cos \theta = f_{A/B} \sin \theta + (P_A + Q) + f_A \dots (1)$$

$$N_A = N_{A/B} \sin \theta + f_{A/B} \cos \theta \dots (2)$$

$$\text{Y: } f_A = \mu N_A \dots (3)$$

Luego, de (2) y (3) en (1) despejamos la reacción entre bloques.

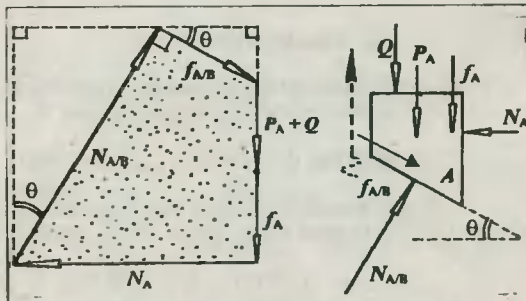


Fig. (1). Solución Prob. 15.19

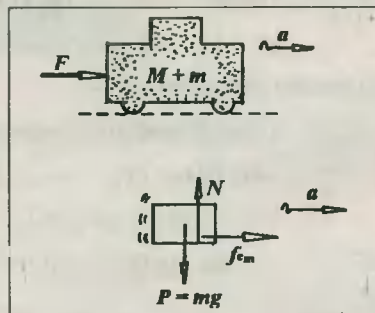
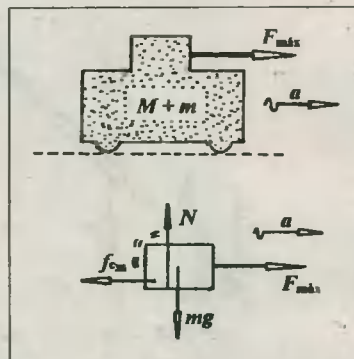


Fig. Solución Prob. 15.17



$$N_{A/B} = \frac{Q + PA}{\cos \theta (1 - \mu^2) - 2\mu \cdot \text{sen} \theta}$$

$$\Rightarrow N_{A/B} = 900 \text{ N}$$

Seguidamente, veamos el DCL del bloque B.

Del polígono vectorial se verifica que:

$$F = N_{A/B} \text{sen} \theta + f_{A/B} \text{cos} \theta = N_{A/B} (\text{sen} \theta + \mu \cdot \text{cos} \theta)$$

$$\therefore \boxed{F = 780 \text{ N}}$$

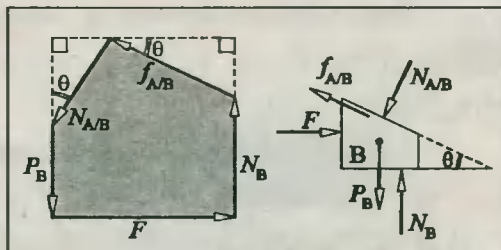
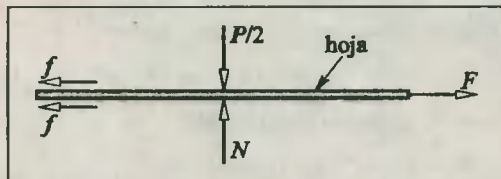


Fig. (2). Solución Prob. 15.19

15.20. Si analizamos una hoja central, veremos que sobre su superficie superior actúa la mitad del peso (P) del libro verticalmente hacia abajo, y al otro lado de la hoja la reacción N, que será igual a la mitad del peso del libro si despreciamos el peso de la hoja. Asimismo, se aprecia que existen dos fuerzas de fricción f (arriba y abajo); Una en cada cara de la hoja.



$$\text{Luego: } f = \mu N = \mu P/2$$

$$\text{Y del eje horizontal: } \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = 2f = 2(\mu P/2) \Rightarrow F = \mu P \dots P = mg$$

$$\text{Reemplazando datos: } F = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 10 \therefore \boxed{F = 1,6 \text{ N}}$$

15.21. Aplicando la 2da condición de equilibrio, siendo O el centro de momentos, tendremos:

En la barra: $\Sigma M_O = 0$

$$\Rightarrow M_N = M_F \Rightarrow N \cdot 30 = F \cdot 70$$

$$\Rightarrow N = 7/3 F \dots (1)$$

En el tambor:

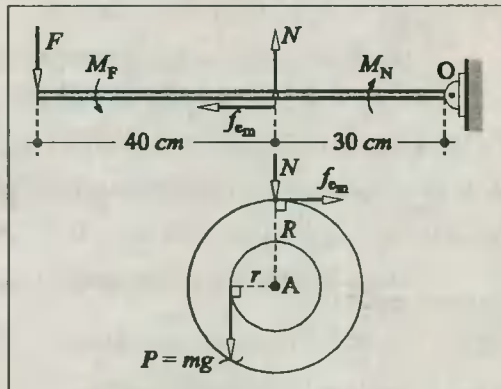
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow f_{em} \cdot R = Pr$$

$$\Rightarrow \mu_c N \cdot R = mg \cdot r \dots (2)$$

De (1) en (2): $\mu_c \cdot 7/3 FR = mgr$

$$\Rightarrow F = \frac{3r}{7R} \cdot \frac{mg}{\mu_3}$$

$$\text{Y reemplazando valores: } \boxed{F_{\text{mín}} = 75 \text{ N}}$$



15.22. Hagamos el DCL del cilindro en el preciso instante que éste se encuentra en movimiento de rotación inminente.

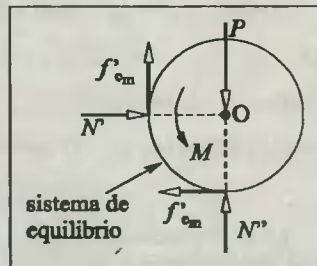
De la 1ª condición de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N' = f'_{em} = \mu_c N'' \dots (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P = N'' + f'_{em}$$

$$\Rightarrow P = N'' + \mu_c N'' \dots (2)$$

$$\text{De (1) en (2): } P = N''(1 + \mu_c^2) \Rightarrow N'' = 160 \text{ N}$$



Luego, calculamos los valores de las fuerzas de fricción.

$$*) f_{cm}' = \mu_e N' = \mu_e^2 N'' \Rightarrow f_{cm}' = 10 \text{ N}$$

$$**) f_{cm}'' = \mu_e N'' \Rightarrow f_{cm}'' = 40 \text{ N}$$

Finalmente, por la 2^{da} condición de equilibrio diremos que:

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M = f_{cm}' R + f_{cm}'' R \quad \therefore \quad \boxed{M = 25 \text{ N.m}}$$

15.23. En la figura se muestra el DCL de la esfera.

Del Δ rectángulo sombreado: $\text{tg}\theta = OA/AB = 10/17.3 = 1/\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \theta = 30^\circ$$

De la 2^{da} condición de equilibrio: $\Sigma M_O = 0$

$$\Rightarrow f_{cm} R = TR \Rightarrow f_{cm} = T \quad \dots (1)$$

De la 1^{ra} condición de equilibrio:

$$1) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = T \cdot \text{sen}2\theta \quad \dots (2)$$

$$\text{Luego: } \mu_e = f_{cm}/N = T/T \cdot \text{sen}60^\circ \Rightarrow \boxed{\mu_e = 1,15}$$

$$2) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow f_{cm} + T \cos 60^\circ = P \quad \dots (3)$$

De (1) en (3) despejamos T, y encontramos:

$$T = 20\sqrt{7} \text{ N} \quad \dots (4)$$

Luego, la reacción total en el punto de contacto vendrá dada por: $R = \sqrt{f_{cm}^2 + N^2}$

$$R = T \sqrt{1 + \text{sen}^2 60^\circ} \quad \therefore \quad \boxed{R = 70 \text{ N}}$$

15.24. Adjunto se muestra el DCL de cada disco.

De la 2^{da} condición de equilibrio encontraremos que:

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow f_{cm} R = P \cdot 2R \Rightarrow f_{cm} = 2P \quad \dots (1)$$

Ahora, de la 1^{ra} condición de equilibrio encontramos el ángulo θ .

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f_{cm} = 3P \text{sen}\theta + P \text{sen}\theta = 4P \text{sen}\theta \quad \dots (2)$$

De (1) en (2) encontramos $\text{sen}\theta$.

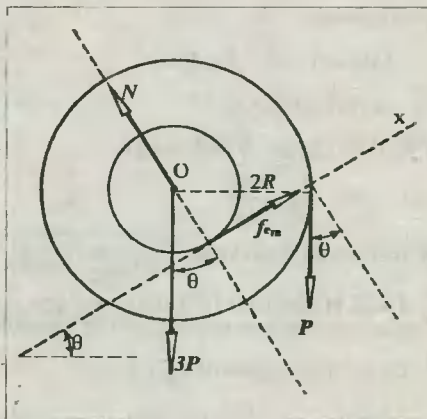
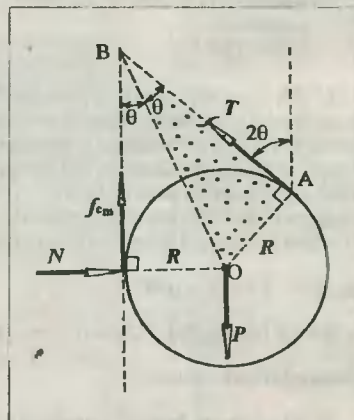
$$4P \text{sen}\theta = 2P \Rightarrow \text{sen}\theta = 1/2 \quad \therefore \quad \boxed{\theta = 30^\circ}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = 3P \cos\theta + P \cos\theta = 4P \cos\theta \quad \dots (3)$$

Finalmente, deducimos $\mu_e = f_{cm}/N \quad \dots (4)$

De (2) y (3) en (4): $\mu_e = 4P \text{sen}\theta / 4P \cos\theta = \text{tg}30^\circ$

$$\therefore \quad \boxed{\mu_e = 0,577}$$



15.25. Utilicemos un plano X-Y paralelo al plano inclinado, y observaremos que el eje Z perpendicular a este plano se encontrará desviado de la vertical un ángulo θ . Asimismo, fijate que la fuerza

de rozamiento f_{em} equilibra a la resultante de las fuerzas F y $P \text{sen} \theta$ (componente del peso en el eje X).

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow N = P \cos \theta \Rightarrow f_{em} = \mu_e N = \mu_e P \cos \theta$$

$$\text{Asimismo: } f_{em} = P \Rightarrow \mu_e P \cos \theta = \sqrt{F^2 + (P \text{sen} \theta)^2} \Rightarrow F = P \sqrt{\mu_e^2 \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta}$$

$$\text{Reemplazando datos: } F = \sqrt{5} \cdot 10 \sqrt{(\sqrt{3/5} \cdot \sqrt{3/2})^2 - (1/2)^2} \therefore \boxed{F = 10 \text{ N}}$$

15.26. Cuando el automóvil experimenta una aceleración a , las fuerzas de reacción sobre las ruedas (R_1 y R_2) se distribuyen en valores que dependen de aquella, las que a su vez son distintas de las que se obtienen cuando el automóvil está en equilibrio estático, ello debido a la presencia de una fuerza de inercia (ma).

$$\text{Del DCL de la figura deducimos: } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 = mg \dots (1)$$

$$\text{Tomando momentos respecto de A: } \Sigma M_A = 0 \Rightarrow R_2(b+c) + ma \cdot h = mg \cdot b$$

$$\Rightarrow R_2 = mg \left(\frac{b}{b+c} \right) - ma \left(\frac{h}{b+c} \right) \dots (2)$$

$$\text{Y reemplazando (2) en (1) obtendremos } R_1: R_1 = mg \left(\frac{c}{b+c} \right) + ma \left(\frac{h}{b+c} \right) \dots (3)$$

Ya que la fuerza de tracción impulsora depende principalmente de la reacción del piso, concluimos que la fuerza de tracción posterior (f_{em}) es mayor y mejor, dado que observando las expresiones para R_1 y R_2 notamos que $R_1 > R_2$. Ahora, analizando las fuerzas horizontales desde el vehículo, notamos que: $f_{em} = ma = \mu_e R_1 \dots (4)$

$$\text{Luego, de (3) en (4) despejamos } a: \boxed{a = \mu_e g \left(\frac{c}{b+c} - \mu_e h \right)}$$

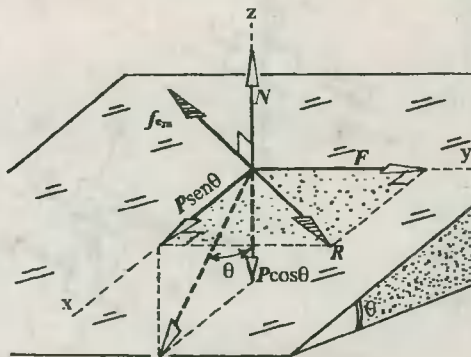


Fig. Solución Prob. 15.25

15.27. Elegiremos un S.R. no I. que viaje junto con la plataforma. De este modo podemos establecer el DCL de la figura.

Aplicando la 2da condición de equilibrio respecto a O, procederemos del mismo modo que en el problema 15.13.

1) En el movimiento inminente: $\Sigma F_y = 0$

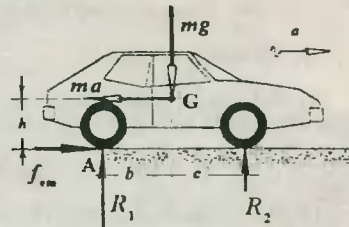
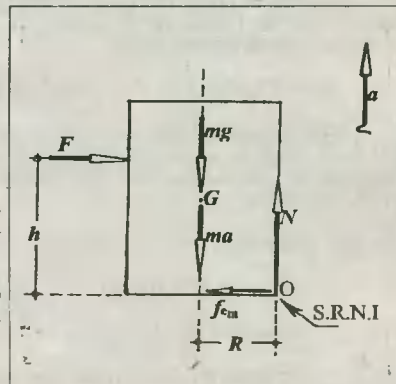


Fig. Solución Prob. 15.26



$$\Rightarrow N = m(g + a) \Rightarrow f_{cm} = \mu N = \mu m(g + a)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = f_{cm} \Rightarrow F = \mu m(g + a) \dots (*)$$

2) En la volcadura inminente: $\Sigma M_O = 0$

$$\Rightarrow M_F = M_{mg} + M_{ma} \Rightarrow F \cdot h = mg \cdot R + ma \cdot R \Rightarrow h = \left[\frac{m(g+a)}{F} \right] R \dots (**)$$

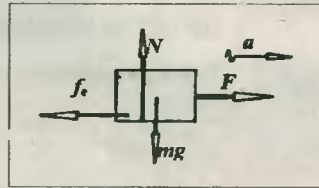
De (*) en (**): $h = \frac{m(g+a)}{\mu m(g+a)} R \therefore h = R/\mu$

15.28.a. Hagamos el DCL del bloque e indiquemos en él las fuerzas que lo afectan, así como la aceleración a que ellos le imprimen

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg \Rightarrow f_c = \mu_c N = \mu_c mg \dots (1)$$

$$F_R = \Sigma F_x \Rightarrow ma = F - f_c \dots (2)$$

De (1) en (2) despejamos a : $a = F/m - \mu_c g \therefore a = 5 \text{ m/s}^2$



15.28.b. Utilizando la ecuación (4.5) tendremos que la velocidad alcanzada se determina así:

$$v_f^2 = v_o^2 + 2ae = 0^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10 \therefore v_f = 10 \text{ m/s}$$

15.29.a. En este caso el bloque se encuentra en equilibrio dinámico. De modo que, utilizando el DCL correspondiente encontraremos la fuerza de fricción (f_c) pedida.

Del esquema adjunto deducimos que:

$$f_c = P \text{sen} \theta = 80 \cdot \text{sen} 37^\circ \therefore f_c = 48 \text{ N}$$

15.29.b. Recordando que el coeficiente de fricción viene dado por: $\mu_c = f_c/N = P \text{sen} \theta / P \text{cos} \theta$.

$$\Rightarrow \mu_c = \text{tg} \theta \therefore \mu_c = 0,75$$

15.29.c. Cuando el ángulo de inclinación θ aumenta por encima de 37° , notaremos que el ladrillo pierde su equilibrio debido a que la componente del peso paralela al plano inclinado ($P \text{sen} \theta$) resulta ser mayor que la fuerza de fricción (f_c), que sigue manteniendo el mismo valor.

$$ma = P \text{sen} \alpha - f_c \therefore a = 2,66 \text{ m/s}^2$$

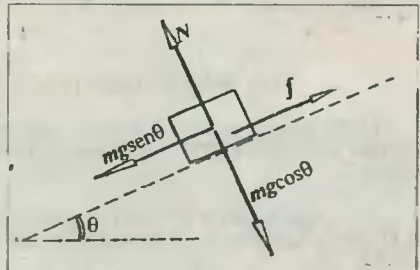
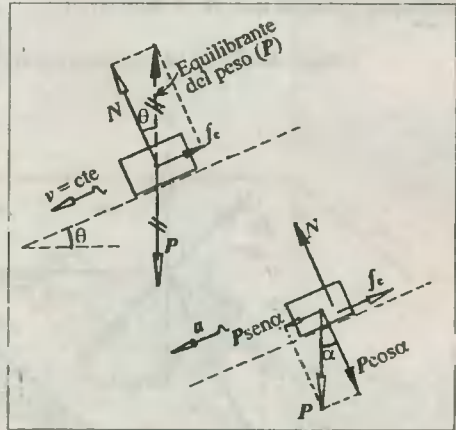
15.30. En primer lugar, averigüemos si la componente del peso paralela al plano inclinado logra vencer a la fuerza de fricción estática máxima. Para ello utilizaremos el DCL adjunto.

De aquí deducimos que: $N = mg \text{cos} \theta = 40 \text{ N}$

$$\Rightarrow f_{cm} = \mu_c \cdot N = 0,640 \therefore f_{cm} = 24 \text{ N}$$

Pero: $mg \text{sen} \theta = 30 \text{ N} > f_{cm}$

De acuerdo a este resultado aseguramos que el bloque desciende por el plano inclinado,



con una aceleración que se calculará aplicando la 2^{da} ley de Newton.

$$F_R = \Sigma F_x \Rightarrow ma = mg \text{sen}\theta - f_c = mg \text{sen}\theta - \mu_c mg \text{cos}\theta$$

$$\Rightarrow a = g(\text{sen}\theta - \mu_c \text{cos}\theta) \text{ (Fórmula general)}$$

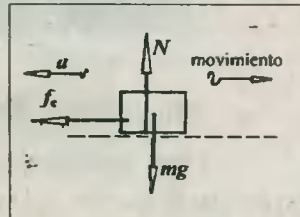
Y reemplazando datos: $a = 2 \text{ m/s}^2$ (Bajando por el plano inclinado)

15.31. En primer lugar determinaremos la desaceleración que experimenta el borrador durante su movimiento.

Del DCL adjunto encontramos que:

$$F_R = \Sigma F_x \Rightarrow ma = f_c = \mu_c N = \mu_c mg$$

$$\Rightarrow a = \mu_c g \Rightarrow a = 6 \text{ m/s}^2$$



15.31.a. Calcularemos el tiempo que dura el movimiento como si éste fuese un MRU desacelerado con velocidad final cero.

$$v_f = v_o + at \Rightarrow 0 = 30 + (-6)t \therefore t = 5 \text{ s}$$

15.31.b. Y para calcular la máxima distancia recorrida emplearemos:

$$v_f^2 = v_o^2 + 2ae \Rightarrow 0^2 = 30^2 + 2(-6)e \therefore e = 75 \text{ m}$$

15.32. Hagamos el DCL del sistema constituido por los bloques, según se muestra.

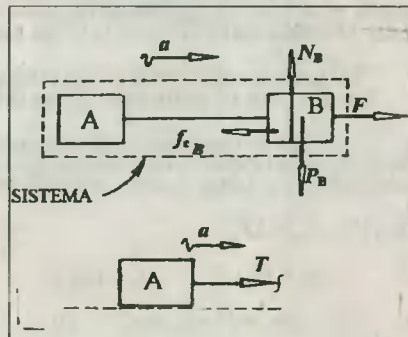
$$F_r = \Sigma F_{\text{a favor de } a} - \Sigma F_{\text{en contra de } a}$$

$$\Rightarrow m_{\text{sist.}} a = F - f_{cB} = F - \mu_c N_B$$

$$a = \frac{F - \mu_c m_B g}{m_A + m_B} \Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2$$

A continuación, para el cálculo de la tensión en la cuerda que une a los bloques, analizaremos únicamente al bloque A.

$$\Sigma F = F_R \Rightarrow T = m_A a = 12.3 \therefore T = 36 \text{ N}$$



15.33. Analicemos el DCL de los bloques por separado, y tengamos en cuenta que ellos poseen aceleraciones, que de acuerdo al capítulo 7, se verificará que: $a_A = 2a_B = 4 \text{ m/s}^2$.

De (2) encontremos el valor de T.

$$\Sigma F_y = F_R \Rightarrow m_B g - 2T = m_B a_B$$

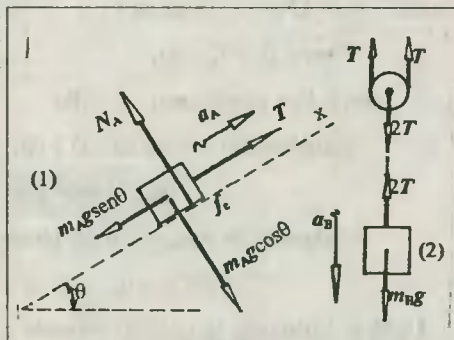
$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_B (g - a_B) \Rightarrow T = 96 \text{ N}$$

De la figura (1) calcularemos la masa del bloque A empleando la 2^{da} Ley de Newton.

$$\Sigma F_x = F_R$$

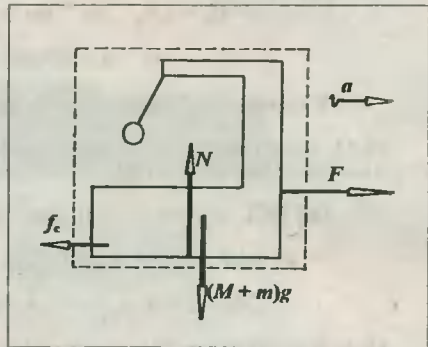
$$T - m_A g \text{sen}\theta - f_c = m_A a_A \dots (f_c = \mu_c N_A)$$

$$\Rightarrow T - m_A g \text{sen}\theta - \mu_c m_A g \text{cos}\theta = m_A a_A$$



Despejando m_A y reemplazando los datos correspondientes, tendremos: $m_A = 8 \text{ kg}$

15.34. Recordando la propiedad vista en Dinámica, se sabe que para un péndulo acelerado: $a = g \operatorname{tg} \theta$. Luego, haciendo el DCL del sistema como un todo, tendremos el esquema adjunto.



De la 2^{da} Ley de Newton tendremos:

$$\Sigma F_h = m_{\text{sist.}} a$$

$$F - f_c = (M + m)a$$

$$\Rightarrow F - \mu_c(M + m)g = (M + m)g \operatorname{tg} \theta \dots (*)$$

Luego, reemplazando datos tendremos:

(a) $F = 600 \text{ N}$, $\theta = 37^\circ$, en (*):

$$600 - \mu_c(58 + 2) \cdot 10 + (58 + 2) \cdot 10 \cdot 3/4 \therefore \mu_c = 1/4$$

(b) Cuando $F = 950 \text{ N}$, en (*):

$$950 - 1/4(58 + 2) \cdot 10 = (58 + 2) \cdot 10 \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 4/3 \therefore \theta = 53^\circ$$

15.35. El presente problema da lugar a un raciocinio especial, sobre todo de los movimientos que se presentan. El análisis de los valores dados para las fuerzas, masas y coeficiente de fricción entre el bloque (m) y el coche (M) nos conduce a la siguiente afirmación:

"El coche avanza hacia la derecha con aceleración a_1 , experimentando una fuerza de fricción f en su contra por parte del bloque".

Para la descripción del movimiento del bloque asumimos un S.R. no I. ligado al coche, desde el cual él experimenta una aceleración relativa a_2 , tal como se indica. El cálculo de su aceleración respecto a Tierra se obtendrá mediante la suma vectorial de a_1 y a_2 . Veamos.

De (1): $F_R = \Sigma F_x$

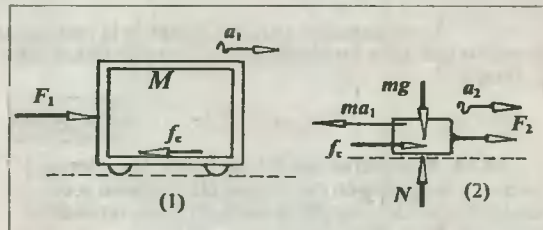
$$Ma_1 = F_1 - f_c \dots (f_c = \mu_c N)$$

$$\Rightarrow Ma_1 = F_1 - \mu_c mg \dots (\alpha)$$

De (2): $F_R = \Sigma F_x \dots$ (S.R. no I.)

$$ma_2 = F_2 + f_c - ma_1$$

$$\Rightarrow ma_2 = F_2 + \mu_c mg - ma_1 \dots (\beta)$$



Reemplazando valores en (α) y (β) encontramos:

$$a_1 = 4 \text{ m/s}^2 (\rightarrow) \text{ y } a_2 = 1 \text{ m/s}^2 (\leftarrow)$$

Finalmente, la aceleración del bloque respecto a Tierra (S.R.I.) estará dado por:

$$\bar{a}'_2 = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \Rightarrow a'_2 = 4 - 1 \therefore a'_2 = 3 \text{ m/s}^2$$

15.36.a. Utilizando la relación obtenida en la solución del problema 15.30, diremos que el bloque desciende con MRUV, y su aceleración viene dada por: $a = g(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cdot \operatorname{cos} \alpha) \dots (1)$

Del gráfico notarás que: $e = l \operatorname{sec} \alpha \dots (2)$

Utilizando la ecuación (4.6) para el MRUV: $e = \frac{1}{2} at^2 \dots (3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3): $l \cdot \sec\alpha = \frac{1}{2} g(\sec\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)t^2$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2l}{g \cdot \cos\alpha(\sec\alpha - \mu \cos\alpha)} \dots (*)$$

De esta expresión deducimos que el tiempo t será mínimo si la expresión $\cos\alpha(\sec\alpha - \mu \cos\alpha)$ es máxima. Luego, si:

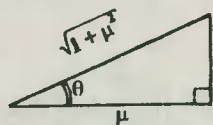
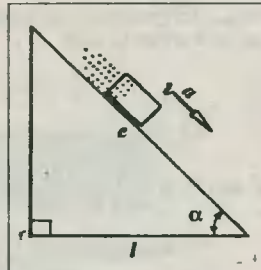
$$E = \cos\alpha(\sec\alpha - \mu \cos\alpha) = \sec\alpha \cdot \cos\alpha - \mu \cdot \cos^2\alpha$$

convertiremos todo al ángulo doble 2α .

$$E = \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \mu(1 + \cos 2\alpha) \dots (**)$$

Construyendo el siguiente triángulo tendremos:

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} ; \cos\theta = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$



Nota.- θ es el complemento del ángulo de rozamiento.

Multiplicando (**) miembro a miembro por $\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ tenemos:

$$\Rightarrow \frac{E}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \sin 2\alpha - \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \cos\alpha - \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{E}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \frac{1}{2} \left[\sin\theta \cdot \sin 2\alpha - \cos\theta \cdot \cos 2\alpha - \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right] \therefore E = \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{2} \left[-\cos(\theta + 2\alpha) \right] - \frac{\mu}{2}$$

De donde deducimos que E será máximo si y solo si la expresión $\cos(\theta + 2\alpha)$ tome su mínimo valor: -1 , lo cual se obtiene siempre que $\theta + 2\alpha = \pi$ (suplementarios). Entonces:

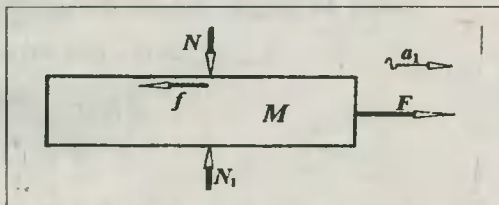
$$\text{tg} 2\alpha = -\text{tg} \theta \Rightarrow \text{tg} 2\alpha = -1/\mu$$

Reemplazando valores: $\text{tg} 2\alpha = -4/3 \Rightarrow 2\alpha = 127^\circ \therefore \alpha = 63,5^\circ$

15.36. b. Al reemplazar $\alpha = 63,5^\circ$ en (**) obtenemos: $E = 1/4$. Finalmente, al reemplazar valores en (*) obtenemos que el tiempo mínimo de deslizamiento del bloque es:

$$t_{\text{mín}} = 2 \text{ s}$$

15.37. Calculemos la aceleración a_1 de la viga, utilizando para ello el DCL adjunto, en donde hemos supuesto que el bloque m se retrasa en su movimiento respecto a la viga, y por tanto ejerce una fuerza de fricción hacia la izquierda.



$$F_r = \Sigma F_a \text{ favor de } a_1 - \Sigma F_{\text{en contra de } a_1}$$

$$M a_1 = F - f \dots (f = \mu N)$$

$$M a_1 = F - \mu m g \Rightarrow a_1 = F/M - \mu(m/M)g \dots (*)$$

Ahora, elegimos un sistema de referencia ubicado sobre la viga para encontrar la acelera-

ción a del bloque m con la cual éste recorre la distancia l sobre la viga.

$$F_R = ma_1 - f$$

$$ma = ma_1 - \mu mg \Rightarrow a = a_1 - \mu g$$

Y de (*): $a = \frac{F}{M} - \mu \left(\frac{m}{M} + 1 \right) g$

Reemplazando datos: $a = 2 \text{ m/s}^2$

Luego, del MRUV encontraremos el tiempo de recorrido usando la siguiente ecuación:

$$e = \frac{1}{2} at^2 \dots (v_0 = 0)$$

$$9 = \frac{1}{2} \cdot 2t^2 \quad \therefore \quad t = 3 \text{ s}$$

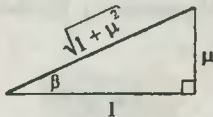
15.38. Haciendo el DCL del bloque construimos el polígono vectorial, siendo θ el ángulo de fricción que forman la normal N y la reacción total R , tal que $\text{tg}\theta = \mu$.

Se verifica que T es mínimo cuando su vector representativo es perpendicular a la dirección de R . Del gráfico dado se comprueba lo siguiente:

$$\alpha + \beta = \theta + \alpha \Rightarrow \beta = \theta$$

$$\therefore \beta = \text{arc tg}(\mu)$$

Llevando a un triángulo este resultado:

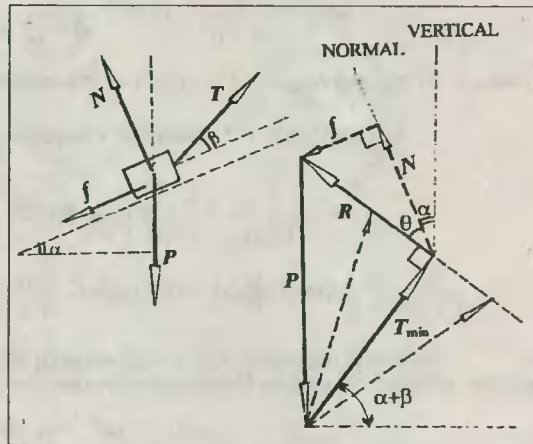
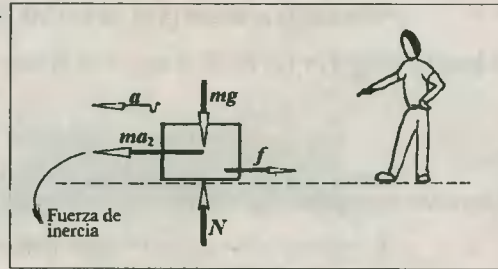


$$\text{sen}\beta = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}; \quad \text{cos}\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

Luego, del polígono vectorial conseguimos la tensión mínima T_{min} .

$$T_{\text{min}} = P \text{sen}(\alpha + \beta) = mg(\text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\beta + \text{sen}\beta \cdot \text{cos}\alpha)$$

$$\therefore T_{\text{min}} = \frac{mg(\text{sen}\alpha + \mu \text{cos}\alpha)}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$



CAP 16 DINAMICA CIRCULAR

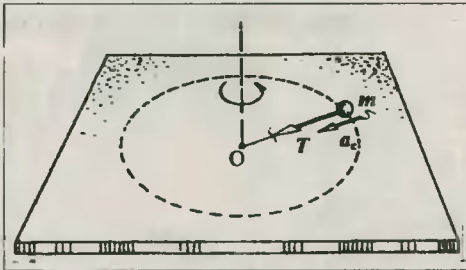
16.1. Por tratarse de un MCU, recordamos que la aceleración centrípeta viene dada por:

$$a_c = 4\pi^2 R^2 / T^2 \dots (1)$$

Luego, utilizando el esquema adjunto y la relación (16.3) encontramos que: $T = ma_c \dots (2)$

Reemplazando (1) en (2), y sustituyendo los datos, encontramos que:

$$T = 24 \text{ N}$$



16.2. Calcularemos en primer lugar la velocidad tangencial (v_{t_f}) que experimenta la bola en el instante señalado. Seguidamente determinaremos el valor de la aceleración tangencial (a_t) constante, y finalmente el tiempo transcurrido lo hallaremos considerando el movimiento como un MCUV.

De la relación (16.2) encontramos v_{t_f} .

$$F_c = m \cdot v_{t_f}^2 / R \Rightarrow 12 = 4 \cdot v_{t_f}^2 / 3 \Rightarrow v_{t_f} = 3 \text{ m/s}$$

Seguidamente, de la relación (16.6) despejamos a_t .

$$a_t = F_t / m = 2/4 \Rightarrow a_t = 0,5 \text{ m/s}^2$$

Finalmente, determinaremos el tiempo transcurrido por la relación (10.13) ($v_o = 0$)

$$v_{t_f} = v_o + a_t \cdot t \Rightarrow 3 = 0,5t \therefore t = 6 \text{ s}$$

16.3. A partir del DCL de la bolita aplicaremos la relación (16.4).

$$T - 36 = 6 \cdot 5^2 / 2 \therefore T = 111 \text{ N}$$

16.4. Hacemos la descomposición del peso de la partícula $P = 50 \text{ N}$ utilizando los ejes radial (E.R) y tangencial (E.T).

a) De la relación (16.4) encontraremos la fuerza de tensión (T).

$$T + 30 = mv^2/R \Rightarrow T = 5 \cdot 8^2/4 - 30 \therefore T = 50 \text{ N}$$

b) Empleando la descomposición de fuerzas y la relación (16.6) encontraremos la aceleración tangencial.

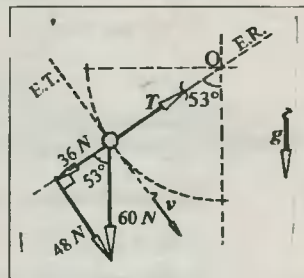


Fig. Solución Prob. 16.4

$$ma_t = F_t \Rightarrow a_t = 40/5 \Rightarrow a_t = 8 \text{ m/s}^2$$

Finalmente, para el cálculo de la aceleración angular α empleamos la relación (10.5).

$$a_t = \alpha r \Rightarrow \alpha = a_t / r = 8/4 \therefore \alpha = 2 \text{ rad/s}^2$$

16.5. a) El primer análisis lo haremos con el puente convexo, Fig (a); haciendo para ello el DCL del co-che, para el cual aplicaremos la relación (16.4).

$$mg - N_1 = mv^2/r \Rightarrow N_1 = m(g - v^2/r) \dots (1)$$

b) Haciendo ahora el análisis para el caso del puente cóncavo, Fig (b), y procediendo del mismo modo que en el paso anterior, tendremos:

$$N_2 - mg = mv^2/r \Rightarrow N_2 = m(g + v^2/r) \dots (2)$$

Luego, dividiendo (1) ÷ (2) miembro a miembro encontramos:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g - v^2/r}{g + v^2/r} \therefore \boxed{\frac{N_1}{N_2} = \frac{3}{7}}$$

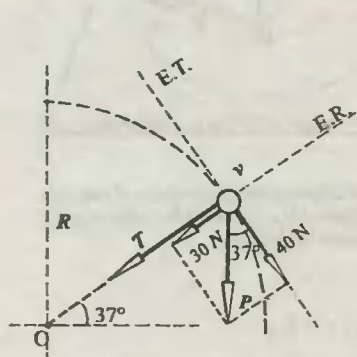


Fig. Solución Prob. 16.4

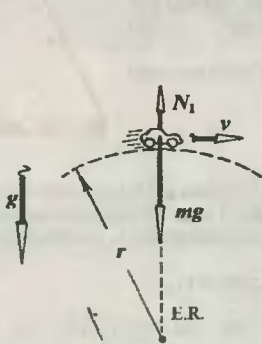


Fig. (a). Solución Prob. 16.5

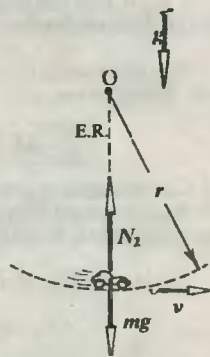


Fig. (b). Solución Prob. 16.5

16.6. El gráfico adjunto muestra al piloto en el instante que pasa por el punto más bajo, siendo N la reacción del asiento, que por condición del problema es $N = 5mg$.

Utilizando la relación (16.4) tenemos:

$$N - mg = mv^2/r \Rightarrow 4g = v^2/r$$

$$\therefore \boxed{r = 250 \text{ m}}$$

16.7. Hagamos un DCL del cuerpo en la posición señalada, y tendremos el esquema adjunto.

Aplicando la relación (16.4):

$$mg + T = mv^2/r \Rightarrow T = m(v^2/r - g)$$

De esta expresión deducimos que en el instante que la tensión T adquiera su mínimo valor, la velocidad v también lo estará haciendo. Luego, haciendo $T = 0$ tendremos que:

$$v^2/r - g = 0 \therefore \boxed{v_{\min} = \sqrt{gr}}$$

16.8. En el gráfico representamos el DCL de la masa de agua cuando el cubo pasa por la parte más alta, siendo N la fuerza de reacción del cubo sobre la agua.

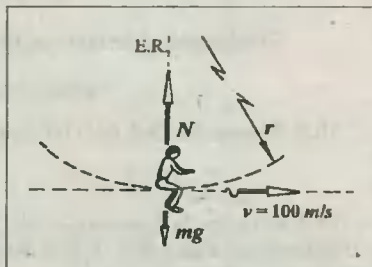


Fig. Solución Prob. 16.6

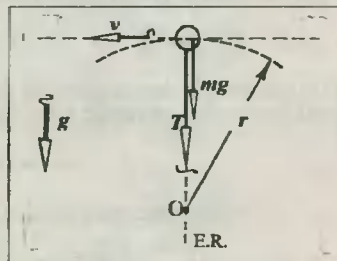


Fig. Solución Prob. 16.7

De la relación (16.4) tendremos:

$$mg + N = m\omega^2 r \dots (*)$$

Observamos que cuando ω disminuye, la reacción N también lo hace, de modo que cuando este último sea nulo, la velocidad ω será mínima. Luego, en (*):

$$mg = m\omega_{\min}^2 \cdot r \Rightarrow \omega_{\min} = \sqrt{gr}$$

$$\therefore \omega_{\min} = 2 \text{ rad/s}$$

16.9. a) Hagamos el DCL de la cuerda horizontal, y así aplicaremos la 1ª condición de equilibrio, de lo cual se consigue que $mg = T_1 \cos 30^\circ \dots (1)$

b) Ahora, haciendo el análisis de las fuerzas un instante inmediatamente después de que la cuerda horizontal se quema ($v_0 = 0$), tendremos el esquema de la figura (b).

De la relación (16.4):

$$T_2 - mg \cos 30^\circ = mv_0^2/r$$

$$\Rightarrow T_2 = mg \cos 30^\circ \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) obtenemos:

$$T_2/T_1 = 3/4$$

16.10. Hagamos el DCL de las partículas, y sobre cada una aplicaremos la relación (16.4).

$$T_2 = m\omega^2(2a) \dots (1)$$

$$T_1 - T_2 = m\omega^2(a) \dots (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2): $T_1 = 3m\omega^2 a$

16.11. Reconociendo que la fuerza recuperadora F_r (interna) del resorte es la única fuerza radial que actúa sobre el bloque, aplicaremos la relación (16.4) para conseguir la deformación x del resorte, el que a su vez está dado por: $x = r - r_0 \Rightarrow r = r_0 + x$

$$F_r = m\omega^2 r \Rightarrow kx = m\omega^2(r_0 + x) \Rightarrow x = \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2} r_0 \therefore x = 50 \text{ cm}$$

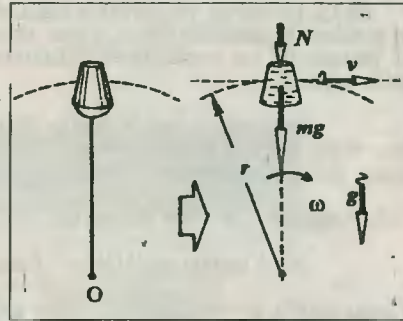


Fig. Solución Prob. 16.8

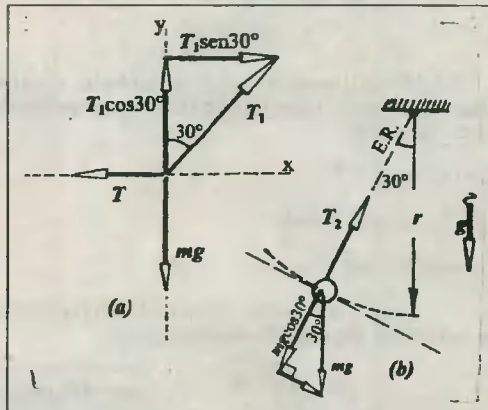


Fig. Solución Prob. 16.9

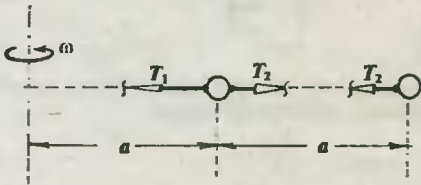


Fig. Solución Prob. 16.10

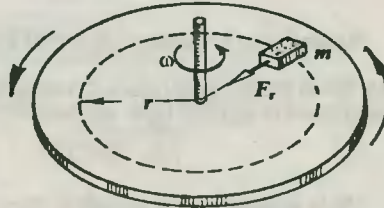


Fig. Solución Prob. 16.11

16.12. El sistema propuesto es conocido con el nombre de péndulo cónico, y para encontrar el periodo de las oscilaciones utilizaremos el DCL adjunto.

Observamos que la fuerza resultante que actúa sobre la partícula es centrípeta. Por tanto, del mismo esquema obtenemos que:

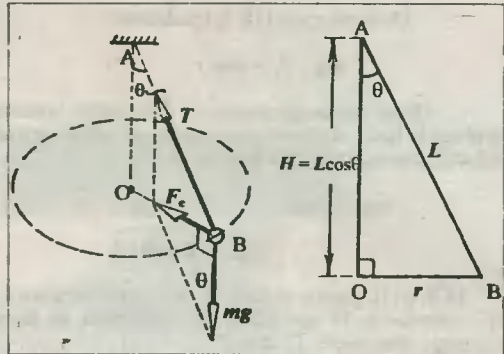
$$F_c = mg \cdot \text{tg} \theta \Rightarrow m \omega^2 r = mg \cdot \text{tg} \theta \dots (*)$$

$$\text{Del } \Delta \text{ rectángulo } AOB: r = L \text{sen} \theta$$

$$\text{Luego, en } (*): \omega = \sqrt{g/L \cos \theta} \dots (\omega = 2\pi/T)$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{L \cos \theta / g}, \text{ o } T = 2\pi \sqrt{H/g}$$

$$\therefore T = 4 \text{ s}$$



16.13. Utilizando los DCL de las bolas mostrados encontraremos, por condiciones de equilibrio en el eje vertical, la relación entre las masas.

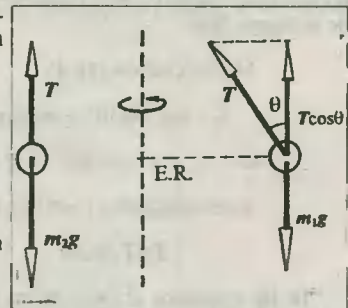
$$\text{De (a): } m_2 g = T$$

$$\text{De (b): } m_1 g = T \cdot \cos \theta$$

$$\text{De donde: } \cos \theta = m_1 / m_2 \dots (*)$$

Luego, utilizando el resultado del problema anterior para la velocidad angular, tendremos que:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_2}{m_1}} \therefore \omega = 2/3 \text{ rad/s}$$



16.14. Analizando en especial a la masa pendular inferior, tendremos el DCL mostrado.

De la relación (16.4):

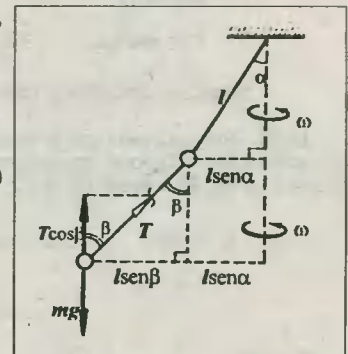
$$T \cdot \text{sen} \beta = m \omega^2 (l \cdot \text{sen} \alpha + l \cdot \text{sen} \beta) \dots (1)$$

$$\text{Del equilibrio en el eje vertical: } T \cdot \cos \beta = mg \dots (2)$$

Dividiendo (1) ÷ (2), y despejando ω , encontramos que:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \text{tg} \beta}{l(\text{sen} \alpha + \text{sen} \beta)}}$$

$$\text{Reemplazando valores: } \omega = 50/11 \text{ rad/s}$$



16.15. En el gráfico mostramos al vagón saliendo de la hoja, en cuyo interior hemos señalado la gravedad efectiva (g_e), el DCL del bloque y el diagrama vectorial de fuerzas.

$$F_c = \sqrt{T^2 - P_r^2} \dots (T = P_{\text{aparente}}) \dots (1)$$

$$\text{De la relación (16.2) encontraremos } F_c: F_c = mv^2/r \dots (2)$$

Luego, igualando (1) y (2) despejamos el radio de curvatura r .

$$r = \frac{P_r \cdot v^2}{g \sqrt{P_a^2 - P_r^2}} \quad \therefore \quad r = 420 \text{ m}$$

16.16. En el gráfico presentamos el DCL de la partícula, donde $r = R \text{ sen } \theta$.

Del diagrama vectorial obtenemos:

$$\text{tg } \theta = \frac{F_c}{mg} = \frac{m\omega^2 r}{mg} \Rightarrow \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{\omega^2 R \text{sen } \theta}{g} \quad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R \text{cos } \theta}}$$

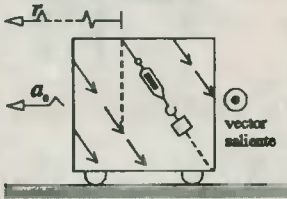


Fig. Solución Prob. 16.15

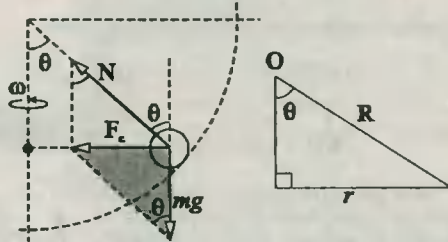
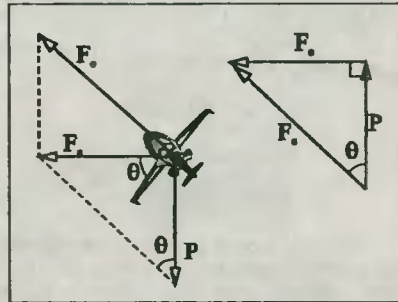


Fig. Solución Prob. 16.16

16.17. Debemos reconocer que para que un avión dé vueltas en un plano horizontal, este deberá estar afectado de una fuerza centrípeta (F_c) también horizontal que sea la resultante del peso del avión (P) y de la fuerza de sustentación (F_s) de parte del aire, la que actúa perpendicularmente a sus alas, y cuya resultante la ubicaremos en el centro del avión.

$$\Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{F_c}{P} = \frac{mv^2/r}{mg} \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{v^2}{gr}$$

$$\text{tg } \theta = 3/4 \quad \therefore \quad \theta = 37^\circ$$



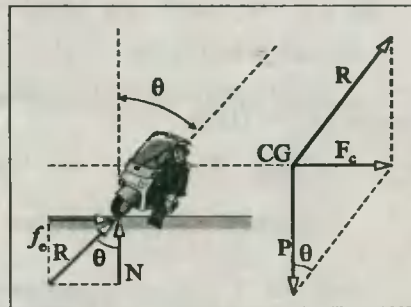
16.18. Del esquema notamos que la reacción R del piso es la resultante de N y f_c . Esta debe pasar por el CG del sistema; de otro modo, actuaría sobre él un momento de fuerza que haría volcar al motociclista. Luego, en el CG del motociclista actúan dos fuerzas P y R , siendo P el peso, tal que: $F_c = P + R$, siendo F_c la fuerza centrípeta que permite girar al sistema.

De los esquemas vectoriales:

$$\text{tg } \theta = \frac{F_c}{P} = \frac{f_c}{N} \Rightarrow \frac{mv^2/r}{mg} = \frac{\mu N}{N}$$

$$\Rightarrow v_{\text{mín}} = \sqrt{\mu gr} \quad \therefore \quad v_{\text{mín}} = 15 \text{ m/s}$$

Del mismo modo: $\text{tg } \theta = \mu \quad \therefore \quad \theta = 37^\circ$



16.19. Debemos reconocer que el móvil experimenta dos aceleraciones durante todo el recorrido. Una tangencial (a_t) y otra centrípeta (a_c).

Obsérvese que la fuerza resultante sobre el coche es la fuerza de rozamiento f , que en este caso no es radial. Luego:

$$a = f/m = \mu mg/m \Rightarrow a = \mu g$$

$$a_c = v^2/r, \text{ y } a_t = v^2/2s = v^2/2\theta r$$

Y del diagrama vectorial de aceleraciones:

$$a_t^2 + a_c^2 = a^2$$

Reemplazando aquí las relaciones anteriores:

$$(v^2/2\theta r)^2 + (v^2/r)^2 = (\mu g)^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{\mu gr}{[1 + (1/2\theta)^2]^{1/2}}} \therefore v_{\max} = 15 \text{ m/s}$$

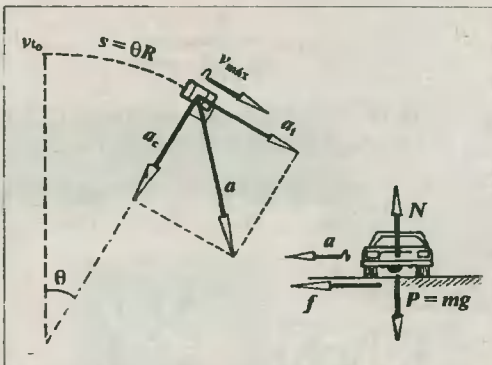


Fig. Solución Prob. 16.19

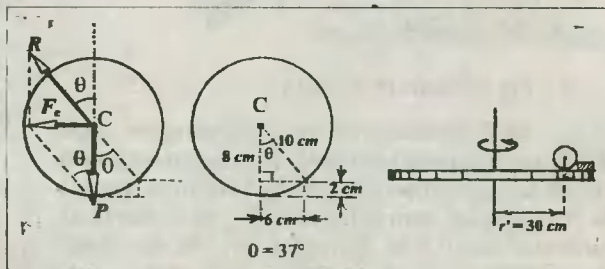
16.20. En el instante que el cilindro pretende subir por el ladrillo, la fuerza de contacto entre el cilindro y la plataforma es nula. Luego, el DCL del cilindro será el que se muestra en la figura.

$$\text{tg}\theta = F_c/P = m\omega^2 r'/mg$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{g \cdot \text{tg}\theta / r'}$$

Reemplazando datos:

$$\omega = 5 \text{ rad/s}$$



16.21. Cuando el automóvil desarrolle su velocidad máxima, la fuerza de fricción será estática y máxima, y hacia abajo del plano inclinado.

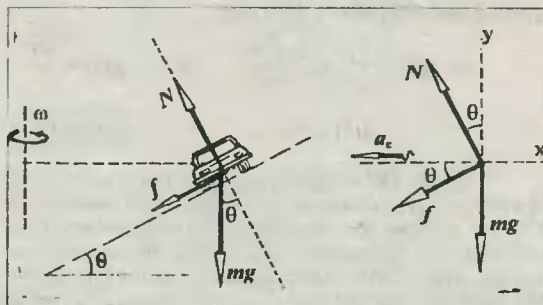
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N \cos\theta = mg + f \text{sen}\theta$$

$$N(\cos\theta - \mu \text{sen}\theta) = mg \dots (1)$$

Y en el eje horizontal (radial) aplicamos la relación (16.4)

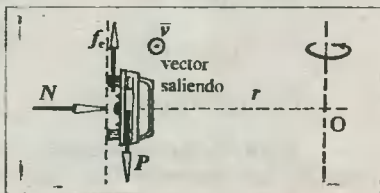
$$N \text{sen}\theta + f \cos\theta = ma_c \Rightarrow N(\text{sen}\theta + \mu \cos\theta) = mv^2/r \dots (2)$$

$$\text{Dividiendo (2) } \div (1) \text{ despejamos } v: v = \sqrt{\left(\frac{\mu + \text{tg}\theta}{1 - \mu \text{tg}\theta}\right) gr} \therefore v_{\max} = 30 \text{ m/s}$$



16.22. Del DCL del auto observamos que cuando éste desarrolle la velocidad mínima, la fuerza de fricción estática es máxima y hacia arriba, equilibrando la acción del peso P . La reacción normal N es la fuerza radial que cambia de dirección al movimiento.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow f_c = P \Rightarrow N = mg/\mu \dots (1)$$



Utilizando la relación (16.4): $N = mv^2/r \dots (2)$

Igualando (1) y (2) despejamos v : $v = \sqrt{gr/\mu} \therefore v_{\min} = 20 \text{ m/s}$

16.23. El DCL adjunto muestra a la caja en el instante que está a punto de salir disparado.

Del eje vertical: $N = P_{\text{apar}} = m(g + a)$

$$\Rightarrow f_c = \mu m(g + a) \dots (1)$$

Aplicando la relación (16.4): $f_c = m\omega_f^2 r \dots (2)$

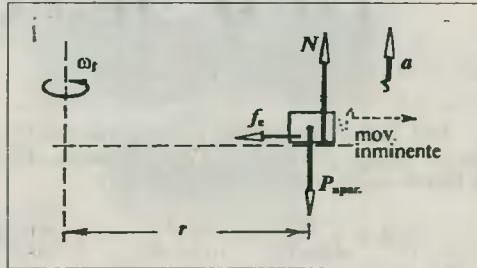
Luego, de (1) y (2) despejamos la velocidad angular ω_f .

$$\omega_f^2 = \frac{\mu(g + a)}{r} \dots (*)$$

Finalmente, del MCUV de la caja aplicamos la relación (9.9): $\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$ ($\omega_0 = 0$).

Reemplazando (*) en esta expresión despejamos θ .

$$\theta = \frac{\mu(g + a)}{2\alpha r} \therefore \theta = 12\pi \text{ rad} \Leftrightarrow 6 \text{ rev}$$



16.24. En primer lugar, debemos reconocer que la gravedad efectiva dentro del ascensor está dada por: $g_{\text{ef}} = g - a$.

Y utilizando el resultado del problema 16.12, despejamos $\cos\theta$. Veamos.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos\theta}{g_{\text{ef}}}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{(g - a)T^2}{4\pi^2 L} \Rightarrow \cos\theta = 1/2 \therefore \theta = 60^\circ$$

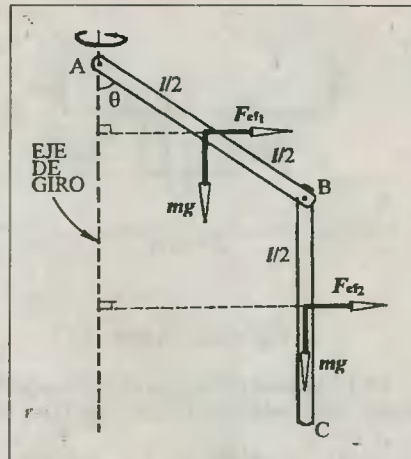
16.25. Hagamos el DCL del sistema: AB + BC, e indiquemos sobre cada uno de sus CG las fuerzas que lo afectan, incluyendo las fuerzas centrífugas F_{cf} . Aplicaremos la 2^a condición de equilibrio, tomando como centro de momentos el punto de suspensión A, considerando al eje vertical como el S.R. no l.

$$F_{cf1} \cdot l/2 \cos\theta + F_{cf2}(l \cos\theta + l/2) = mg \cdot l/2 \sin\theta + mg \cdot l \sin\theta \dots (1)$$

Donde: $F_{cf1} = m\omega^2 l/2 \sin\theta$, y $F_{cf2} = m\omega^2 l \sin\theta \dots (2)$

Reemplazando (2) en (1) despejamos $\cos\theta$.

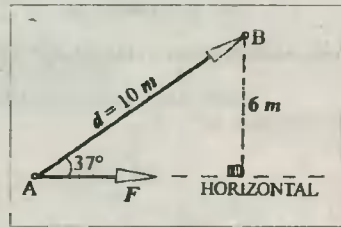
$$\cos\theta = \frac{2}{5} \left(\frac{3g}{\omega^2 l} - 1 \right) \Rightarrow \cos\theta = 4/5 \therefore \theta = 37^\circ$$



CAP 17 TRABAJO Y POTENCIA

17.1. Del gráfico adjunto podemos rescatar los siguientes datos: $|d| = |AB| = 10 \text{ m}$; $\theta = 37^\circ$. Y de la relación (17.1) despejamos la fuerza de modo que:

$$F = \frac{W}{d \cdot \cos 37^\circ} = \frac{96 \text{ J}}{10 \text{ m} \cdot 4/5} \quad \therefore \quad \boxed{F = 12 \text{ N}}$$



17.2. El trabajo neto se determinará en base a la relación (17.4), para lo cual hallaremos la fuerza resultante F_R por medio de la descomposición rectangular de las fuerzas participantes.

$$F_R = \Sigma F_x = 80 + 24 - 20 \Rightarrow F_R = 84 \text{ N}$$

$$\text{Luego: } W_{F_R} = F_R d = 84 \text{ N} \cdot 60 \text{ m} \quad \therefore \quad \boxed{W_{F_R} = 5040 \text{ J}}$$

17.3. Haciendo el DCL del bloque, reconocemos a la fuerza resultante en base a las componentes paralelas al plano inclinado: $F_R = F - P \sin \theta$

$$\text{Y con la relación (17.4) utilizaremos el dato del trabajo neto: } F_R \cdot d = W_n$$

$$\Rightarrow (F - P \sin \theta) \operatorname{asec} \theta = W_n$$

$$\text{Reemplazando datos, encontramos que: } \boxed{\theta = 53^\circ}$$

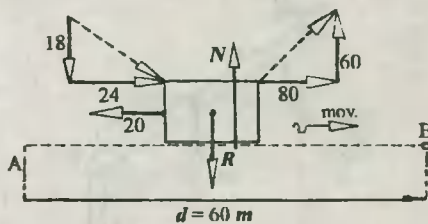


Fig. Solución Prob. 17.2

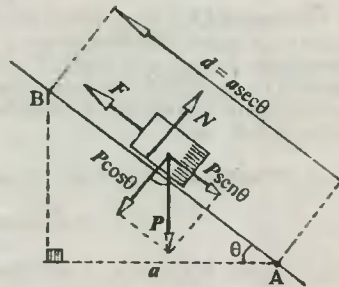


Fig. Solución Prob. 17.3

17.4. Haciendo el diagrama de vectores fuerza (P) y desplazamiento (d), reconocemos que ellos forman un ángulo θ obtuso, el cual tiene como suplemento a α , de modo que: $\cos \theta = -\cos \alpha$.

$$W = P \cdot d \cos \theta = -P \cdot d \cos \alpha \Rightarrow W = -Ph \quad \therefore \quad \boxed{W = -5600 \text{ J}}$$

17.5. Ya que el movimiento es uniforme, podemos considerar al bloque en equilibrio, y gracias a esta condición encontraremos la fuerza F , y luego el trabajo que ella desarrolla.

Se observa que: $N = 8 \text{ N}$, y $f = \mu N \Rightarrow f = 4 \text{ N}$

Luego, analizando el equilibrio de las fuerzas paralelas al plano inclinado:

$$F = f + 6 \Rightarrow F = 10 \text{ N}$$

Además, del gráfico: $d = AB = 20 \text{ m}$. Finalmente, utilizamos la relación (17.1) para el cálculo del trabajo.

$$W = F \cdot d \quad \therefore \quad \boxed{W = 200 \text{ J}}$$

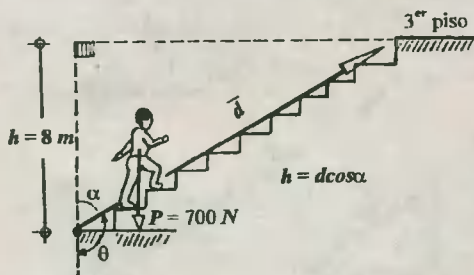


Fig. Solución Prob. 17.4

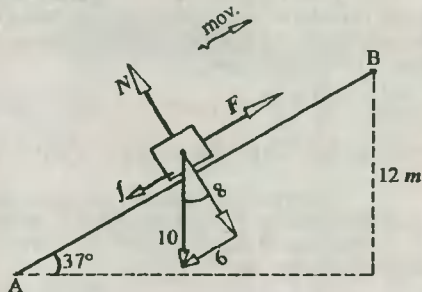


Fig. Solución Prob. 17.5

17.6. El trabajo que realiza el hombre está dado por la relación (17.1) en donde la fuerza que aplica éste es siempre de la misma dirección que el desplazamiento. El punto de aplicación de esta fuerza se desplaza una distancia d igual a la longitud del cable que jala el hombre y que concuerda así mismo con el espacio recorrido (e) por el bloque durante el tiempo $t = 6 \text{ s}$.

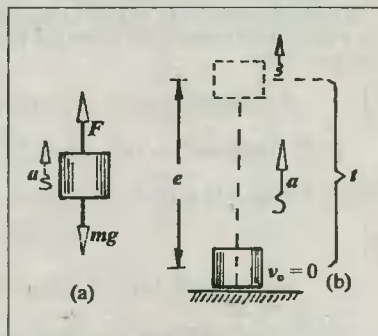
Utilizando el gráfico (a) aplicamos la 2^{da} Ley de Newton.

$$a = F/m - g \Rightarrow a = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Y considerando que el movimiento es MRUV utilizamos:

$$e = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow e = 45 \text{ m}$$

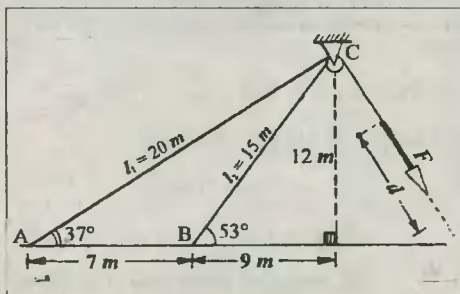
Finalmente, el trabajo del hombre será: $W = F \cdot e \quad \therefore \quad \boxed{W = 22,5 \text{ kJ}}$



17.7. Utilizamos un procedimiento similar al problema anterior, para lo cual suponemos una polea en C, y el cálculo del desplazamiento d se hará por una diferencia entre las longitudes AC y BC. Completando los valores para los lados de los triángulos pitagóricos, tendremos: $d = l_1 - l_2 = 5 \text{ m}$.

Luego, utilizando la relación (17.1) despejamos la fuerza F : $F = W/d$.

$$\therefore \quad \boxed{F = 8 \text{ N}}$$



17.8. Haciendo un esquema vectorial notamos que la fuerza F que debe aplicar el agente externo deberá ser opuesto al peso P . También se notará que el desplazamiento $AB = d$ forma con F el ángulo $\theta = 53^\circ$.

Debido a que la velocidad es prácticamente nula, diremos que las fuerzas deberían estar en equilibrio.

$$W = F \cdot d \cos 53^\circ \quad \therefore \quad W = 360 \text{ J}$$

17.9. Determinando el valor y dirección de la gravedad efectiva (g_{ef}) en el interior del vagón, calcularemos el peso (P) del bloque en dicho sistema, y a continuación aplicaremos una fuerza externa (F) igual y opuesta a aquel.

$$g_{ef} = \sqrt{g^2 + a^2} = 26 \text{ m/s}^2, \text{ y } d = AC = 5,2 \text{ m.}$$

También: $\text{tg} \theta = a/g = 2,4$, y $\text{tg} \alpha = BC/AB = 2,4$

Este resultado permite asegurar que $\theta = \alpha$, y ello significa que F y P están sobre la misma recta AC. Asimismo, el desplazamiento $d = AC$ es de la misma dirección que F . Luego:

$$W = F \cdot d = mg_{ef} \cdot d \quad \therefore \quad W = 676 \text{ J}$$

17.10. Reconocemos que sólo la componente tangencial F_t de la fuerza aplicada es la que hace trabajo durante el movimiento, tal que: $F_t = F \cos \theta$. Luego, utilizando la relación (17.2) para el cálculo del trabajo para una fuerza tangencial constante: $W_t = +(F \cos \theta)e$, donde $e = \pi r$.

Finalmente, luego de sustituir valores, encontramos: $W_t = 880 \text{ J}$

17.11. Utilizando la relación (17.2) tendremos: $W_t = F_t \cdot e = m a_t \cdot e \dots (1)$

donde: $e = e_s = \frac{1}{2} a_t (2.5 - 1) = 9/2 a_t \dots (2)$

y: $a_t = \alpha R \dots (3)$

Reemplazando (2) y (3) en (1): $W_t = 9/2 m (\alpha R)^2 \quad \therefore \quad \alpha = 4 \text{ rad/s}^2$

17.12. Supondremos que tanto el cuerpo como el observador partieron del mismo punto; De ese modo podemos determinar el desplazamiento relativo de aquel respecto del observador, y así medir el trabajo realizado por la fuerza dada.

Del observador: $e_1 = vt \Rightarrow e_1 = 30 \text{ m}$

Del bloque: $e_2 = \frac{1}{2} at^2 = (F/m)t^2$

$$\Rightarrow e_2 = 20 \text{ m}$$

Luego, del gráfico: $d = e_2 - e_1 \Rightarrow d = 10 \text{ m}$

Así, para el observador O el bloque se desplaza hacia atrás, mientras que la fuerza está hacia

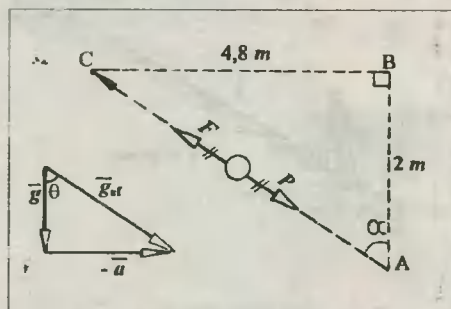
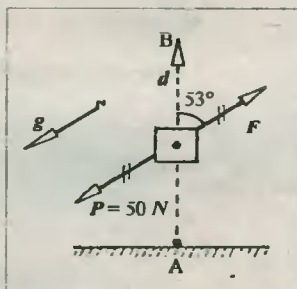
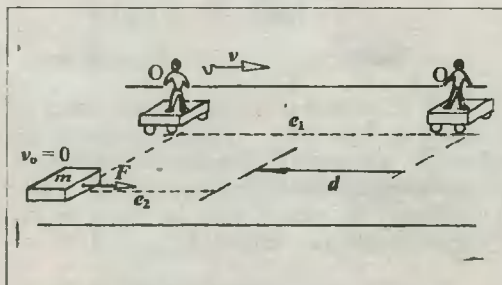


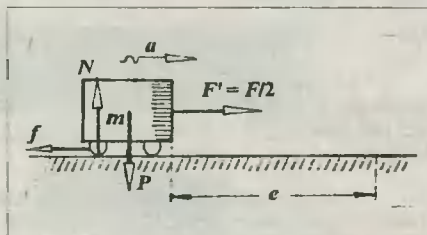
Fig. Solución Prob. 17.9



adelante. Luego, el trabajo realizado por ésta respecto de O será:

$$W = Fd \cdot \cos 180^\circ \quad \therefore \quad W = -200 \text{ J}$$

17.13. De las condiciones del problema y del esquema mostrado, podemos asegurar que el trabajo realizado por F sobre el sistema lo absorbe íntegramente el bloque. De este modo concentramos nuestra atención en el trabajo que realiza únicamente el cable sobre él.



$$W = F'e \dots (*)$$

De la 2^{da} Ley de Newton tendremos:

$$F' - f = ma \Rightarrow F' = (\mu g + a)m$$

$$\Rightarrow F' = 84 \text{ N}$$

Luego, reemplazando en (*): $W = 480 \text{ J}$

17.14. Utilizando la propiedad enunciada en (17.4), bastará con encontrar el área bajo la curva dada, que en este caso es una recta, y la figura un triángulo. Así pues:

$$W = bh/2 \quad \therefore \quad W = 40 \text{ J}$$

17.15. La fuerza F que aplica el hombre es siempre opuesta al peso del saco de arena, pero dicha fuerza es máxima ($F_0 = mg = 500 \text{ N}$) en el punto de partida ($x_0 = 0$) y mínima ($F = 0$) en la posición final ($x = 6 \text{ m}$). Luego, graficando la variación de la fuerza con la posición tendremos el gráfico adjunto.

Y como en el problema anterior, diremos que: $W = \text{AREA}$

$$\therefore \quad W = 1500 \text{ J}$$

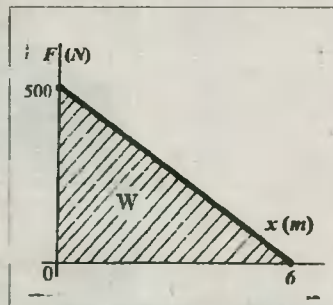


Fig. Solución Prob. 17.15

17.16. Considerando que la fuerza externa F que deforma al resorte es siempre igual y opuesta a la fuerza recuperadora F_r del resorte, diremos, por la ley de Robert Hooke, que $F = kx$. Graficando la dependencia F -vs- x para las condiciones dadas, tendremos la figura adjunta.

Así como en los ejercicios anteriores, el trabajo realizado por F estará dado por el área bajo la curva:

$$W = \frac{(2 + 3) \cdot 0,1}{2} \Rightarrow W = 0,25 \text{ J}$$

17.17. Sabiendo que el área comprendida entre $x = 0$ y $x = 10 \text{ m}$ es el trabajo $W = 96 \text{ J}$, calcularemos entonces el valor de la fuerza F_0 en $x = 10 \text{ m}$.

$$A_{\text{triángulo}} + A_{\text{trapecio}} = W$$

$$6 \cdot 12/2 + \frac{1}{2} (12 + F_0) 4 = 96 \Rightarrow F_0 = 30 \text{ N}$$

Y en base al esquema de la figura 17.17 calcularemos F en $x = 14 \text{ m}$, en donde notamos que F_0 es mediana del trapecio. Luego:

$$F = \frac{1}{2} (12 + F_0) \quad \therefore \quad F = 48 \text{ N}$$

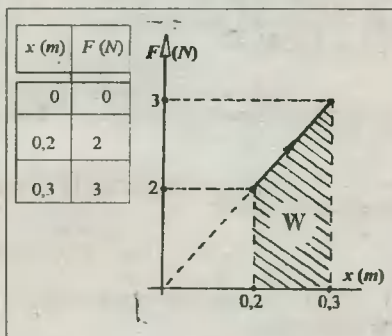


Fig. Solución Prob. 17.16

17.18. Haciendo una tabulación primero, y luego una gráfica F -vs- x , el trabajo realizado lo conseguiremos por el área bajo la curva obtenida, que por la forma de la ecuación, inferimos que es una recta.

$$W = (1/2)(10 + 20)0,2 \quad \therefore \quad \boxed{W = 3 \text{ J}}$$

17.19. De acuerdo con el esquema mostrado, podemos reconocer por el triángulo pitagórico (5-12-13) que la longitud final del resorte es $l_f = 1,3 \text{ m}$. Luego, su deformación será: $x = l_f - l_0 = 0,26 \text{ m}$.

Con este dato determinamos la fuerza recuperadora del resorte usando la Ley de Hooke $F = kx$. Y por medio de la relación (17.7) encontramos la potencia.

$$Pot = kxv \cdot \cos\theta, \text{ siendo } \cos\theta = 5/13$$

$$\therefore \quad \boxed{Pot = 3,6 \text{ kW}}$$

$x \text{ (m)}$	$F \text{ (N)}$
0	10
0,2	20

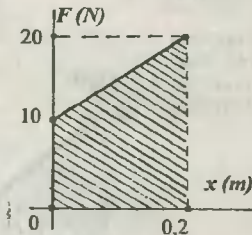


Fig. Solución Prob. 17.18

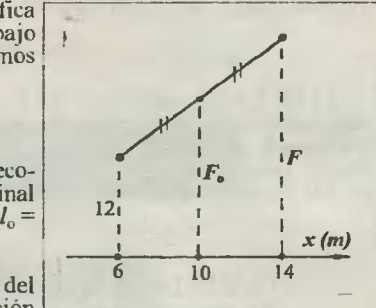


Fig. Solución Prob. 17.17

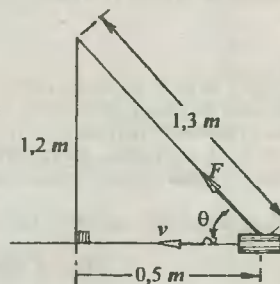


Fig. Solución Prob. 17.19

17.20. La fuerza que ejercen los engranajes del vehículo sobre las ruedas y éstas sobre el pavimento se generan gracias al motor. Es entonces aquí, donde por razones didácticas, concentraremos la resultante F_m de dichas fuerzas.

Utilizando la primera condición de equilibrio en el eje horizontal ($v = \text{constante}$), tendremos que: $F_m = f = 7/100 P$.

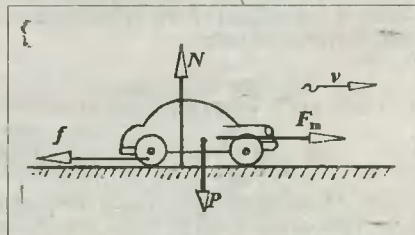
Luego, por la relación (17.7) encontraremos la potencia del motor.

$$Pot = F_m v \cos 0^\circ = 7/100 mgv \quad \therefore \quad \boxed{Pot = 7 \text{ kW}}$$

17.21. Considerando que la potencia del motor de un automóvil es constante, entonces podemos establecer que:

$$F_1 v_1 = F_2 v_2 = \text{constante} \Rightarrow v_2 = (F_1/F_2)v_1 = (800/500) \cdot 25 \quad \therefore \quad \boxed{v_2 = 40 \text{ m/s}}$$

Nota.- Acompañamos a esta solución el gráfico fuerza-vs-velocidad.



17.22. a) Cuando el camión asciende.- Hacemos el DCL del camión, y señalamos como F_M la fuerza que desarrolla el motor del camión, cuyo valor lo determinaremos del mismo diagrama.

$$\text{Pendiente} = \text{tg}\theta = 1/60$$

$$\text{Como } \theta \text{ es pequeño } \Rightarrow \text{sen}\theta \approx \text{tg}\theta \Rightarrow \text{sen}\theta \approx 1/60$$

Como $v_1 = \text{cte.}$, entonces el camión se encontrará en equilibrio. Luego: $F_m = P\text{sen}\theta + f$.

Así pues, la potencia que desarrolla el motor del camión será:

$$Pot = F_m v_1 = (P\text{sen}\theta + f)v_1 \dots (1)$$

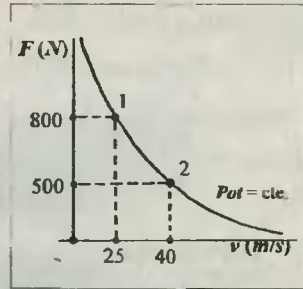
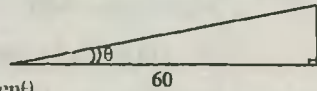


Gráfico: Solución Prob. 17.21

b) Cuando el camión desciende.- El DCL nos muestra que el camión al bajar recibe la misma reacción normal que cuando subió por la misma pendiente. Luego, la fuerza de fricción sobre los neumáticos será la misma: $f = 1/40$ Peso.

Y como $v_2 = \text{cte.}$ entonces existe equilibrio.

$$F'_m - P\text{sen}\theta = f \Rightarrow F'_m = f + P\text{sen}\theta$$



$$\text{Luego, como la potencia es la misma: } Pot = F'_m v_2 = (f + P\text{sen}\theta)v_2 \dots (2)$$

$$\text{Igualando (1) y (2): } v_2 = \left(\frac{f + P\text{sen}\theta}{f - P\text{sen}\theta} \right) v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{P(1/40 + 1/60)}{P(1/40 - 1/60)} 12 \therefore v_2 = 60 \text{ km/h}$$

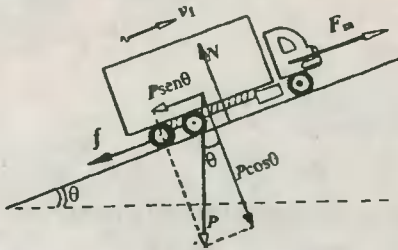


Fig. (a). Solución Prob. 17.22

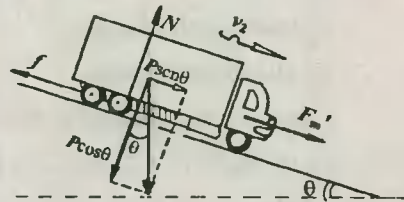


Fig. (b). Solución Prob. 17.22

17.23. De los datos deducimos que la potencia neta es igual a la potencia que se pierde por rozamiento, verificándose las siguientes relaciones:

$$|Pot_{\text{netal}}| = |Pot_{\text{roz}}| \Rightarrow |W_n/t| = |W_{\text{roz}}/t| \Rightarrow |F_R \cdot d| = |f \cdot d| \Rightarrow F_R = f$$

En donde reemplazamos la fuerza resultante (F_R) y la fuerza de fricción (f) por:

$$ma = \mu mg \Rightarrow \mu = a/g \therefore \mu = 0,05$$

17.24. Para la solución de este ejercicio planteamos el esquema de la figura.

a) Para el cálculo de la potencia media emplearemos la relación (17.5), teniendo en cuenta que el desplazamiento es $d = AB$.

$$Pot = W/t = P \cos 90^\circ / t \therefore Pot = 0$$

b) Para el cálculo de la potencia instantánea utilizaremos la relación (17.7), teniendo en cuenta que

en el gráfico: $\cos\theta = -\cos\beta$.

$$Pot = Pvcos\theta = -Pvcos\beta \dots (*)$$

donde: $v\cos\alpha = v_x$ y $v_y = v_{0y} - gt$

Luego, en (*): $Pot = -P(v_{0y} - gt) = -mg(v_0 \text{sen}\alpha - gt)$

$$\therefore \boxed{Pot = -240 \text{ W}}$$

17.25. Investigaremos el problema desde la fuente de energía hasta la carga. De este modo obtendríamos la potencia útil de la grúa, y así la velocidad con que se levanta la carga.

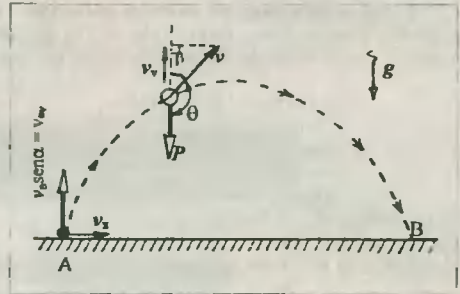


Fig. Solución Prob. 17.24

Del motor: P_e : Potencia entregada al motor, que proviene de la fuente de energía.

P_m : Potencia útil del motor.

η_m : Eficiencia del motor.

Luego, la potencia útil del motor será: $P_m = \eta_m \cdot P_e \dots (1)$

De la grúa.- La grúa recibe energía del motor a través de la faja de transmisión. Despreciando las pérdidas en ella, diremos que la potencia suministrada a la grúa es exactamente la potencia útil que el motor puede entregar.

P_m : Potencia suministrada a la grúa.

P_g : Potencia útil de la grúa.

η_g : Eficiencia de la grúa.

Luego, la potencia útil de la grúa será: $P_g = \eta_g \cdot P_m \dots (2)$

De (1) en (2): $P_g = \eta_m \cdot \eta_g \cdot P_e \dots (*)$

Además, por ser P_g una potencia mecánica, se determinará también a partir de:

$$P_g = Fv \cdot \cos 0^\circ \dots (**)$$

Luego, de (**) y (*): $Fv = \eta_m \cdot \eta_g \cdot P_e \Rightarrow v = \frac{0,75 \cdot 0,5 \cdot 16 \text{ HP} \cdot 745 \text{ W/1 HP}}{1000 \text{ kg} \cdot 10}$

$$\therefore \boxed{v = 0,149 \text{ m/s}}$$

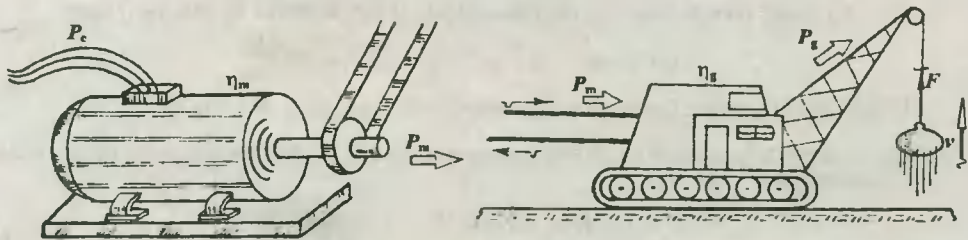


Fig. Solucion Prob. 17.25

17.26. Con los datos cinemáticos encontraremos una expresión para la aceleración.

$$v_f^2 = v_o^2 + 2ae \Rightarrow a = \frac{v_f^2 - v_o^2}{2e} \dots (1)$$

Calcularemos ahora el trabajo (W_m) que realiza el motor del vehículo, utilizando para ello las relaciones (17.3) y (17.4) para el trabajo neto.

$$W_m + W_{roz} = mae \text{ . donde: } W_{roz} = -1/10 mge \Rightarrow W_m = m(a + g/10)e \dots (2)$$

Sustituyendo (1) en (2), y reemplazando los valores dados para cada magnitud, obtendremos:

$$W_m = 1,04 \cdot 10^7 J \dots (*)$$

Pues bien, reconociendo que W_m es el trabajo útil que se extrae del motor, ahora encontraremos W_{gas} que es la energía suministrada al motor por la gasolina, la que obtendremos utilizando la relación (17.9) para la eficiencia.

$$\eta_o = W_m / W_{gas} \cdot 100 \Rightarrow W_{gas} = 4 \cdot 10^7 J$$

Finalmente, diremos que esta energía fue cedida por una masa m de gasolina, que la obtendremos por una regla de tres simple.

$$1 \text{ kg} \frac{5 \cdot 10^7 J}{m \cdot 4 \cdot 10^7 J} \Rightarrow m = \frac{1 \text{ kg} \cdot 4 \cdot 10^7 J}{5 \cdot 10^7 J} \therefore \boxed{m = 0,8 \text{ kg}}$$

CAP 18 ENERGIA

18.1. Reconocemos que F es la fuerza resultante sobre el bloque. Luego, ésta adquiere una aceleración: $a = F/m$. Seguidamente, podemos averiguar la velocidad final v de dicho cuerpo al cabo del tiempo t bajo el supuesto de que se trata de un MRUV: $v = at = (F/m)t$.

Finalmente, la energía cinética se determinará por medio de la ecuación (18.1).

$$E_c = \frac{1}{2} m[(F/m)t]^2 = F^2 t^2 / 2m \quad \therefore \quad E_c = 900 \text{ J}$$

18.2. Haciendo el DCL del bloque observamos que sobre él actúan dos fuerzas: F y P .

Reconocemos que los esquemas mostrados corresponden al problema (17.6). Luego, aprovechando el resultado obtenido allí, tendremos que la aceleración, velocidad y espacio recorrido vienen dados por:

$$a = F/m - g : v = at : e = \frac{1}{2} at^2$$

Luego, utilizando las relaciones (18.1) y (18.2) encontramos que:

$$\frac{E_c}{E_{pg}} = \frac{\frac{1}{2} mv^2}{mge} = \frac{\frac{1}{2} (at)^2}{g \cdot \frac{1}{2} at^2} = \frac{a}{g}$$

$$\Rightarrow E_c/E_{pg} = F/mg - 1 \quad \therefore \quad E_c/E_{pg} = 2/3$$

Nota. - Observa que esta relación de energías es independiente del tiempo transcurrido.

18.3. Reconociendo que el movimiento del cuerpo es una caída libre vertical, tendremos que tanto la velocidad (v) y la altura (h) respecto al piso están dados por: $v = gt$; $h = H - \frac{1}{2} gt^2$.

Luego, utilizando las ecuaciones (18.1) y (18.2) tendremos que:

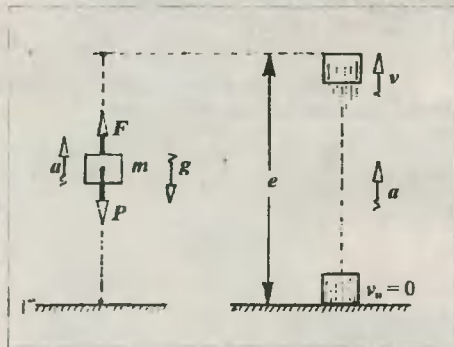
$$\frac{E_{pg}}{E_c} = \frac{mgh}{\frac{1}{2} mv^2} = \frac{g(H - \frac{1}{2} gt^2)}{\frac{1}{2} (gt)^2} \Rightarrow \frac{E_{pg}}{E_c} = \frac{2H}{gt^2} - 1 \quad \therefore \quad \frac{E_{pg}}{E_c} = 2$$

18.4. El trabajo neto se podrá encontrar utilizando la relación (18.5), independientemente de la trayectoria seguida por el cuerpo.

$$W_n = E_c^F - E_c^1 = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_o^2) \quad \therefore \quad W_n = 210 \text{ J}$$

18.5. Reconociendo que el peso es una fuerza conservativa, utilizaremos la relación (18.6) para el cálculo del trabajo.

$$W = -(E_{pg}^B - E_{pg}^A) = mg(h_A - h_B) \quad \therefore \quad W = 500 \text{ J}$$



18.6. Utilizando la relación (18.5) y considerando que la fuerza F dada es la resultante externa sobre el cuerpo, tendremos:

$$W_n = E_{cf} - E_{ci} = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_o^2) \dots (1)$$

Ahora, el trabajo W_n lo conseguiremos por medio del área bajo la curva dada en el gráfico F -vs- x .

$$W_n = \text{AREA DEL TRIANGULO} = 20.16/2 \Rightarrow W_n = 160 \text{ J} \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1), y sustituyendo los datos numéricos tenemos:

$$160 = \frac{1}{2} \cdot 5(v_f^2 - 6^2) \Rightarrow v_f = 10 \text{ m/s}$$

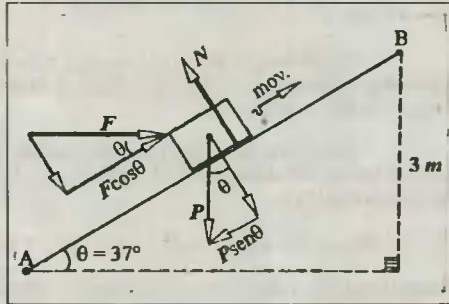
18.7. Haciendo la descomposición rectangular de las fuerzas F y P , diremos que la fuerza resultante sobre el bloque es: $F_R = F \cos \theta - P \sin \theta$. También reconocemos que el desplazamiento es $d = AB = 5 \text{ m}$.

Finalmente utilizamos la relación (17.4) para el trabajo neto, y la relación (18.5), de lo cual tendremos:

$$(F \cos \theta - P \sin \theta) d = \frac{1}{2} m v^2$$

Reemplazando datos y despejando F encontramos:

$$F = 95 \text{ N}$$



18.8. Procediendo a descomponer las fuerzas según se hizo en el problema anterior, encontramos que la fuerza de fricción está dada por:

$$f = \mu N = 0,2 \cdot 40 = 8 \text{ N}$$

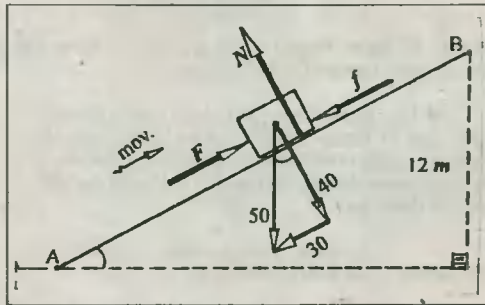
Luego, la fuerza resultante paralela al plano inclinado estará dada por:

$$F_R = F - 30 - f \Rightarrow F_R = F - 38 \dots (1)$$

Reconociendo que el desplazamiento es $d = AB = 20 \text{ m}$, y utilizando la relación (18.5), tenemos:

$$F_R \cdot d = E_{cf} - E_{ci} \dots (2)$$

Luego, reemplazamos (1) en (2): $(F - 38)d = \frac{1}{2} m(v_B^2 - v_A^2) \therefore F = 54 \text{ N}$



18.9. Hagamos un esquema donde se indique el nivel de referencia horizontal pasando por el CG de la varilla en su posición vertical. En tal forma, las posiciones del CG de la varilla son: $h_A = 0 \text{ m}$, y $h_B = 2 \text{ m}$.

Considerando que el movimiento de rotación es muy lento, entonces la velocidad, y por consiguiente la energía cinética, son despreciables. De este modo, la energía mecánica dada por la relación (18.4) estará expresada por: $E_{mec} = mgh$. Luego, utilizando la relación (18.7), el trabajo realizado será:

$$W_{ext} = E_{mec}^F - E_{mec}^I = mg(h_B - h_A) \therefore W_{ext} = 120 \text{ J}$$

18.10. Construyamos un esquema donde indiquemos la posición del CG de la cortina.

Reconociendo que este sistema corresponde al mismo del problema anterior, encontramos que la posición del CG al inicio y al final del proceso será: $h_o = 0$; $h_f = L/2$.

Seguidamente, utilizamos la misma relación deducida en el problema anterior.

$$W_{\text{ext}} = mg(h_f - h_o) = \frac{1}{2} mgL$$

$$\therefore W_{\text{ext}} = 10 \text{ J}$$

18.11. Del esquema mostrado podemos decir que: $h_o = 20 \text{ m}$, $v_o = 0 \text{ m/s}$; $h_f = 0 \text{ m}$, $v_f = 15 \text{ m/s}$.

En vista que aquí hay altura y velocidad en cada posición, entonces, la energía mecánica vendrá dada por: $E_{\text{mec}} = \frac{1}{2} mv^2 + mgh$.

Luego, recurriendo a la relación (18.7) encontraremos el trabajo realizado por el rozamiento (fuerza externa no conservativa).

$$W_{\text{roz}} = [\frac{1}{2} mv_f^2 + mgh_f] - [\frac{1}{2} mv_o^2 + mgh_o]$$

Reemplazando valores en cada término, obtenemos:

$$W_{\text{roz}} = -350 \text{ J}$$

Nota.- El signo negativo del trabajo se debe a la pérdida de energía mecánica del bloque.

18.12. Haciendo el DCL de la caja encontramos que la fuerza resultante es la fricción (f), que por estar orientada en dirección opuesta al desplazamiento (d), el trabajo realizado por ella estará dado por: $W_{\text{roz}} = -fd$.

Asimismo, este trabajo coincide con el trabajo neto sobre el bloque.

$$\Rightarrow W_{\text{roz}} = -\mu Nd = -\mu mgd \dots (1)$$

$$\text{Y utilizando la relación (18.5): } W_{\text{roz}} = E_{c_f} - E_{c_i} \dots (2)$$

$$\text{Reemplazando (2) en (1): } -\mu mgd = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_o^2)$$

$$\text{De donde despejamos la velocidad final } v_f: v_f = \sqrt{v_o^2 - 2\mu gd} \therefore v_f = 1 \text{ m/s}$$

18.13. En vista que la aspereza no es la misma a lo largo del recorrido AB, encontraremos el trabajo neto sobre el bloque utilizando la relación obtenida en el problema anterior, pero aplicada para cada placa.

$$W_{\text{neto}} = W_{\text{roz}(1)} + W_{\text{roz}(2)} = -2\mu_1 mgl - 2\mu_2 mgl \dots (1)$$

$$\text{Luego, aplicando la relación (18.5) tendremos: } W_n = E_c^B - E_c^A \dots (2)$$

$$\text{Reemplazando (1) en (2): } -2mgl(\mu_1 + \mu_2) = \frac{1}{2} m(v_B^2 - v_A^2)$$

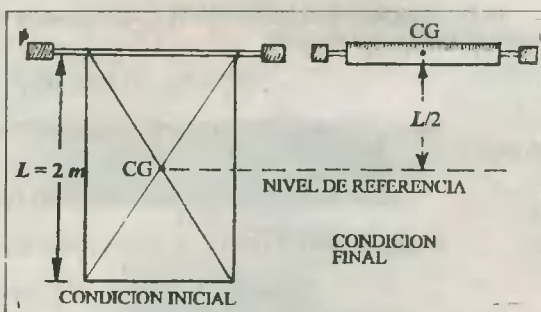
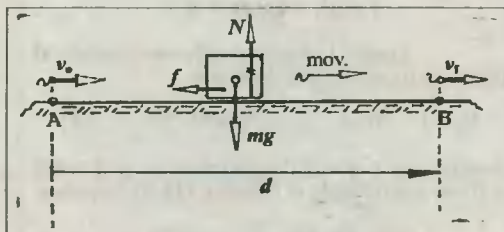
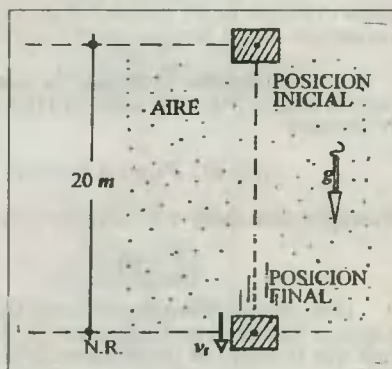


Fig. Solución Prob. 18.10



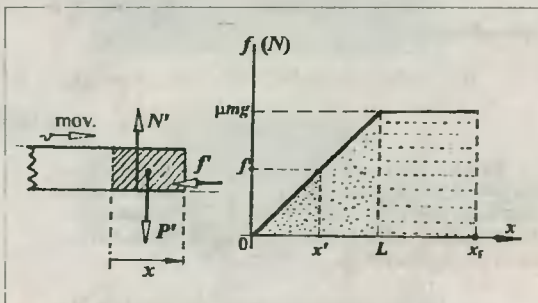
Sustituyendo datos obtenemos: $\mu_1 + \mu_2 = 9/8 \dots (*)$

Finalmente, utilizando el dato del problema: $\mu_1 - \mu_2 = 5/8 \dots (**)$

Y resolviendo obtenemos: $\mu_1 = 7/8 ; \mu_2 = 1/4$

18.14. En primer lugar debemos reconocer que la fuerza de fricción pasa por dos etapas: En un primer momento varía con el desplazamiento x . para luego mantenerse constante. Esto lo graficamos en el plano F -vs- x .

Observese que a medida que el desplazamiento x aumenta, simultáneamente aumentan el peso (P') de la porción de la barra sobre el piso, la reacción normal (N') y la fuerza de fricción (f'). Cuando el tablón ya está íntegramente sobre el piso, la fuerza de fricción toma el máximo valor: $f = \mu mg$.



Utilizando la relación (18.5), considerando que la velocidad final es nula, y que el área bajo la curva en el gráfico F -vs- x nos da el trabajo neto, tendremos:

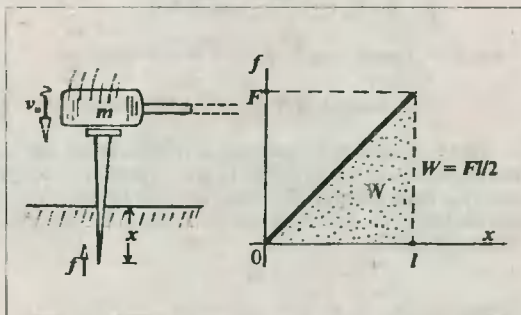
$$\frac{1}{2} [(x_f - L) + x_f] \cdot \mu mg = \frac{1}{2} mv_0^2 \quad \therefore \quad x_f = 3,5 \text{ m}$$

18.15. Al introducir el clavo se observa que la fuerza de fricción va en aumento con la profundidad x . De este modo, si la máxima fuerza de rozamiento es F , deberemos aplicar como mínimo una fuerza igual para extraer el clavo.

Y considerando que toda la energía cinética del martillo se invierte en trabajo contra el rozamiento, tenemos:

$$W = 6E_c \Rightarrow \frac{1}{2} Fl = 6(\frac{1}{2} mv_0^2)$$

$$\Rightarrow F = 6mv_0^2/l \quad \therefore \quad F = 150 \text{ N}$$

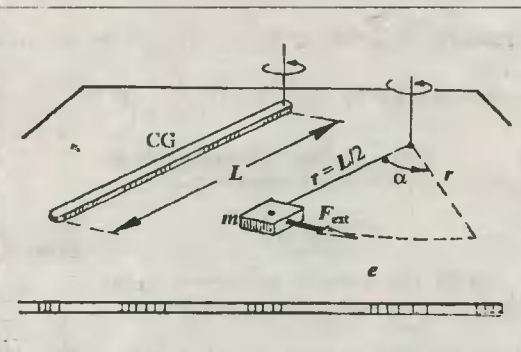


18.16. En primer lugar, debemos reconocer que el trabajo a realizar deberá ser igual, pero de signo opuesto al que realiza el rozamiento. Tendremos que: $W = |W_{roz}|$.

Ahora, para el cálculo de W_{roz} supondremos que toda la fuerza de fricción se concentra en el CG de la barra. Entonces, se verificará que:

$$W_{roz} = -fe, \text{ donde: } f = \mu mg; e = \alpha r = \alpha L/2$$

Finalmente: $W = \frac{1}{2} \mu mgL$



18.17. Al analizar el tramo desde A hasta B encontramos que la energía mecánica se mantiene constante en virtud que no existe trabajo por parte de las fuerzas externas distintas al peso del objeto. Luego, toda la energía potencial en A se convierte íntegramente en cinética en B. Entonces:

$$E_p^A = E_c^B \Rightarrow E_c^B = mgh$$

Seguidamente, suponemos que el objeto se detiene a la distancia x del punto **B**, y utilizando las deducciones obtenidas en el problema 18.12 tendremos que el trabajo del rozamiento está dado por: $W_{roz} = -fx = -\mu mgx$.

Finalmente, utilizamos la relación (18.5), y considerando que la velocidad final es nula, obtendremos:

$$W_{roz} = E_c^F - E_c^B \quad (E_c^F = 0) \Rightarrow -\mu mgx = -E_c^B \Rightarrow \mu mgx = mgh \Rightarrow x = h/\mu$$

$$\therefore x = 40 \text{ m}$$

18.18. Utilizando el mismo criterio del problema anterior, diremos que la energía cinética en **B** está dada por: $E_c^B = mgR = 10mR$. Para el recorrido BC utilizaremos la misma metodología descrita en el problema 18.8.

Luego, la fuerza resultante paralela al plano inclinado será: $F_R = f + 6m = 8m$.

Reconociendo que el desplazamiento $d = BC$ es opuesto a la fuerza resultante F_R , utilizamos la relación (18.5).

$$-F_R \cdot d = E_c^C - E_c^B \dots (E_c^C = 0)$$

$$-8m \cdot d = -10mR \Rightarrow d = 5/4 R = 10 \text{ metros}$$

Finalmente, del triángulo pitagórico BHC: $h = 6 \text{ m}$

18.19. Desde el momento que reconocemos que la fuerza de rozamiento en el tramo BC es la única fuerza externa distinta del peso que hace trabajo, utilizaremos para la descripción de dicho movimiento el Teorema del Trabajo y la Energía Mecánica (Relación (18.7)).

Tramo AB: $E_{mec}^B = E_{mec}^A = mg(h + x) \dots (W_{ext} = 0)$

Tramo BC: $W_{roz} = E_{mec}^C - E_{mec}^B \dots (E_{mec}^C = 0)$

$$-fx = -mg(h + x) \Rightarrow x = \left(\frac{1}{f/mg - 1}\right)h$$

Como $f = 3mg$, reemplazando en la expresión obtenida hallamos que:

$$x = 2 \text{ m}$$

18.20. Del esquema mostrado y de los datos del problema reconocemos que:

Posición inicial: $x_0 = -0,3 \text{ m}$, y $h_0 = 0 \text{ m}$

Posición final: $x_f = +0,1 \text{ m}$, y $h_f = 0,15 \text{ m}$

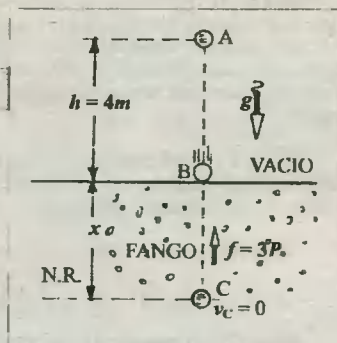
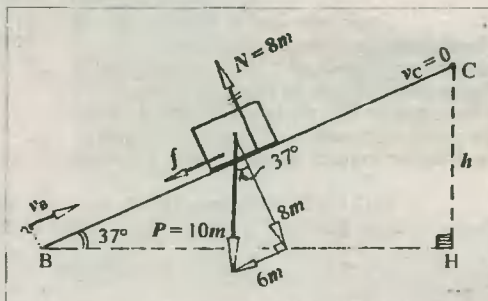
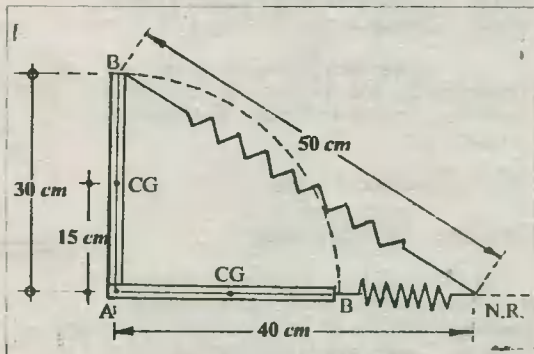


Fig. Solución Prob. 18.19



Utilizando la relación (18.6) tendremos: $W = -(\Delta E_{pg} + \Delta E_{p2})$

$$\Rightarrow W = -[mg(h_f - h_o) + \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_o^2)]$$

Reemplazando datos: $W = 10 \text{ J}$

18.21. En vista que no hay fuerzas disipativas, diremos que la energía mecánica se conserva. Luego, en el trayecto desde A hasta B se verifica que:

$$E_c^B = E_{pg}^A \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgR$$

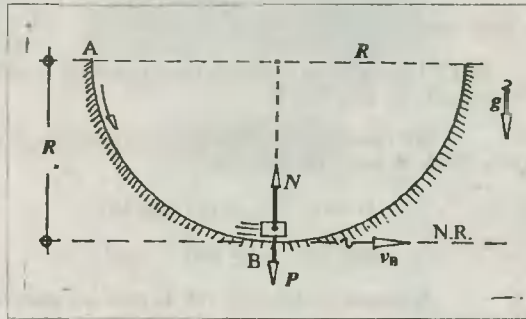
$$\Rightarrow v_B^2 = 2gR \dots (1)$$

Y aplicando la relación (16.4) para la fuerza centripeta en B, tendremos:

$$N - P = mv_B^2/R \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) despejamos N.

$$N = 3P \quad \therefore N = 15 \text{ N}$$



18.22. Eligiendo un N.R. que pase por el punto B tendremos el esquema que se muestra.

Por conservación de la energía mecánica en A-B:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgR\cos\theta \Rightarrow v_B^2 = 2gR\cos\theta \dots (1)$$

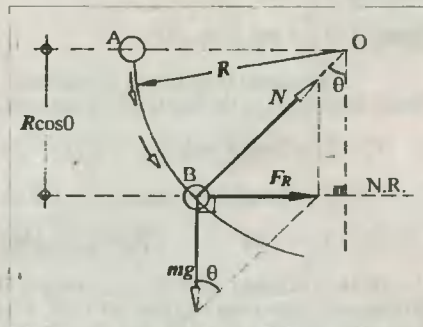
Del diagrama de fuerzas: $N = mg/\cos\theta \dots (2)$

Aplicando la relación (16.4) en B, tendremos:

$$N - mg\cos\theta = mv_B^2/R \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3) encontramos que

$$mg/\cos\theta - mg\cos\theta = 2mgR\cos\theta/R \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{3}/3 \quad \therefore \theta = \arccos(\sqrt{3}/3)$$



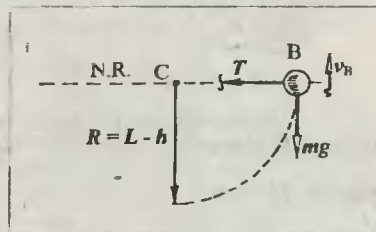
18.23. Eligiendo un nivel de referencia que pase por B y C encontramos que toda la energía potencial gravitatoria en A se ha convertido en energía cinética en B.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 2gh \dots (1)$$

Del DCL en B, aplicaremos la relación (16.4).

$$T = m \frac{v_B^2}{R} = m \frac{v_B^2}{L-h} \dots (2)$$

$$\text{Reemplazando (1) en (2): } T = 2mg\left[\frac{h}{L-h}\right] \quad \therefore T = 160 \text{ N}$$



18.24. Tomando como nivel de referencia la línea horizontal que pasa por B, observamos que en el Δ sombreado $\text{sen}\theta = h/R$.

$$\text{Por conservación de la energía: } \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \Rightarrow v_B^2 = 2gh \dots (1)$$

Aplicando la relación (16.4):

$$T - mg \sin \theta = mv_B^2/R \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2), y el dato adicional del problema respecto a la tensión, tendremos:

$$2mg - mg \cdot h/R = 2mg \cdot h/R \Rightarrow h = 2/3 R \quad \therefore \quad \boxed{h = 4 \text{ m}}$$

18.25. Del esquema mostrado elegimos como nivel de referencia el que pasa por B.

Por conservación de la energía mecánica en el trayecto desde A hasta B, tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv_B^2 &= \frac{1}{2} mv_A^2 + mg(2R) \\ \Rightarrow v_B^2 - v_A^2 &= 4gR \dots (1) \end{aligned}$$

Aplicando la relación (16.4) para los puntos A y B, tenemos:

Punto B: $T_B - mg = mv_B^2/R$

Punto A: $T_A + mg = mv_A^2/R$

Restando miembro a miembro, y despejando la diferencia de tensiones, tendremos:

$$T_B - T_A = 2mg + m/R \cdot (v_B^2 - v_A^2) \dots (2)$$

Finalmente, reemplazamos (1) en (2):

$$T_B - T_A = 6mg \quad \therefore \quad \boxed{T_B - T_A = 240 \text{ N}}$$

18.26. Trazando un N.R. que pase por B, comprobaremos que para el trayecto A-B, la energía mecánica se conserva. Así, la velocidad de salida por B (v) se determinará así:

$$\begin{aligned} E_{mec}^B &= E_{mec}^A \Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 = mgR/2 \\ \Rightarrow v^2 &= gR \dots (*) \end{aligned}$$

Del movimiento parabólico que se inicia en B, tenemos: $H = v^2 \cdot \sin^2 60^\circ / 2g$.

Y de (*): $H = 3/8 R$

Finalmente: $h = H + R/2 \Rightarrow h = 7/8 R$

$$\therefore \quad \boxed{h = 7 \text{ m}}$$

18.27. Llamemos A al punto de partida donde $v_0 = 0$, y B al punto de desprendimiento. elegimos un N.R. que pase por B, y tendremos el esquema mostrado.

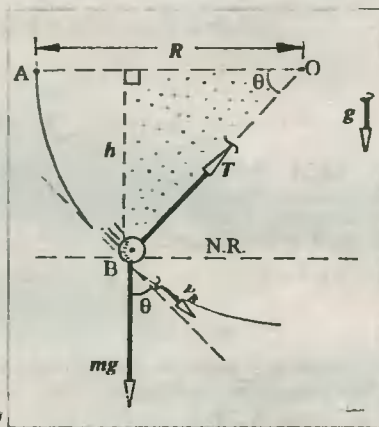


Fig. Solución Prob. 18.24

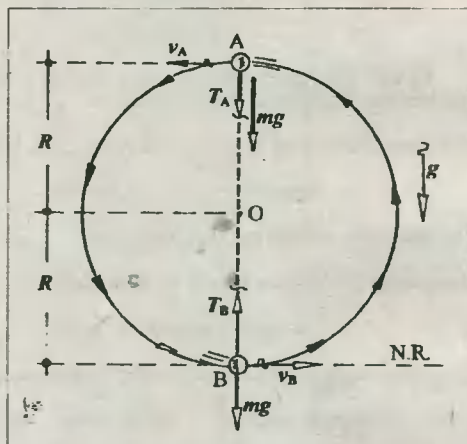


Fig. Solución Prob. 18.25

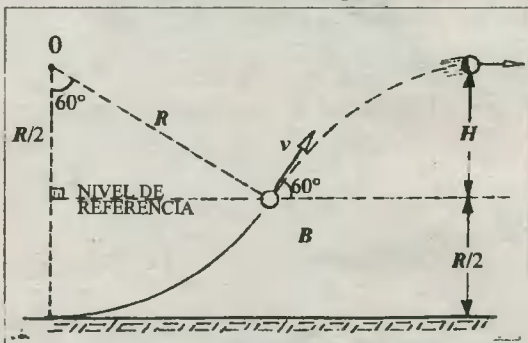


Fig. Solución Prob. 18.26

Por conservación de la energía mecánica:

$$E_c^B = E_{pg}^A \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gR(1 - \cos\theta) \dots (1)$$

Si N es la reacción de la superficie hemisférica, aplicaremos la relación (16.4) en el punto B.

$$mg \cdot \cos\theta - N = mv^2/R \dots (2)$$

Cuando se produzca el desprendimiento, N se anula. Luego, reemplazando (1) en (2):

$$mg \cdot \cos\theta = 2mgR(1 - \cos\theta)/R \Rightarrow \cos\theta = 2/3$$

$$\therefore \theta = \arccos(2/3)$$

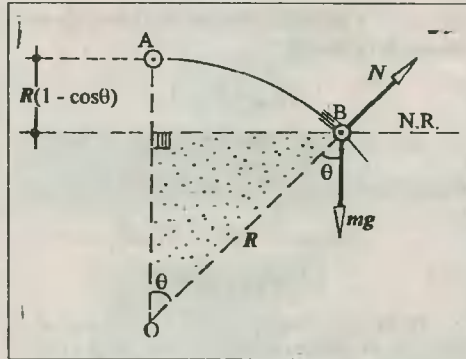


Fig. Solución Prob. 18.27

18.28.a. Aplicando la conservación de la energía mecánica desde A hasta el final de la rampa, diremos que la velocidad v de salida estará dada por: $v = \sqrt{2g(H - h)} \dots (1)$

Seguidamente, del movimiento parabólico diremos que el tiempo de caída libre estará dado por: $t = \sqrt{2h/g} \dots (2)$

Luego, la distancia x la obtenemos de: $x = vt \dots (3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3): $x = 2\sqrt{h(H - h)}$

18.28.b. Ahora, para que x sea máxima, analizaremos la cantidad subradical: $h(H - h)$, la cual, para ser máxima deberá verificar que los factores sean iguales. Así:

$$h = H - h \quad \therefore \quad h = H/2$$

18.29. Haciendo uso del esquema adjunto aplicaremos las ecuaciones correspondientes.

Por el movimiento de rotación se debe verificar que:

$$\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow v_1/l_1 = v_2/l_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \cdot l_2/l_1 \dots (1)$$

Y por conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2g(l_1 + l_2) = (m_1 + m_2)gl_1 \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) despejamos v_1 .

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(m_1l_1 - m_2l_2)g}{m_1 + m_2(l_2/l_1)^2}} \quad \therefore \quad v_1 = 4 \text{ m/s}$$

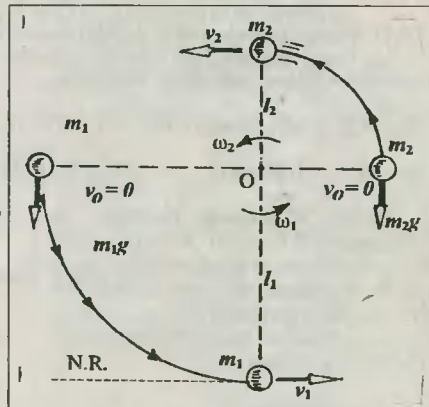


Fig. Solución Prob. 18.29

18.30. Reconocemos que el sistema tiene su CG a la distancia X del punto de suspensión O . Asimismo, la energía cinética del conjunto será máxima cuando su CG ocupe la posición más baja de su trayectoria circular, de modo pues que el N.R. lo trazaremos en dicha posición.

Por la fórmula del CG tendremos: $X = \frac{m_1(-l_1) + m_2l_2}{m_1 + m_2} \dots (1)$

Y por conservación de la energía mecánica del sistema:

$$E^F_{cin} = E^I_{pg}$$

$$\Rightarrow E_{cin. máx} = (m_1 + m_2)gX \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) obtenemos:

$$E_{cin. máx} = (m_2 l_2 - m_1 l_1)g$$

$$\therefore E_{cin. máx} = 100 \text{ J}$$

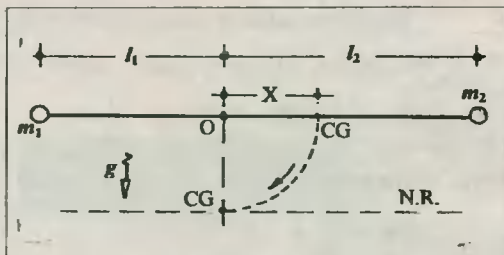


Fig. Solución Prob. 18.30

18.31. Reconociendo que los bloques al cruzarse presentan la misma velocidad v (en módulos) y la misma altura $h/2$ respecto al piso, trazaremos el N.R. por el punto de cruce, de modo que toda la energía potencial gravitatoria inicial se convierta en energía cinética.

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 = m_1 g (+h/2) + m_2 g (-h/2)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{gh \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} \therefore v = 5 \text{ m/s}$$

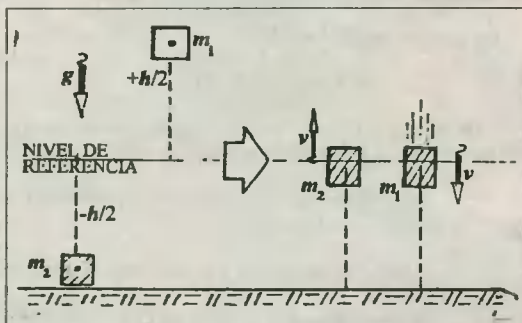


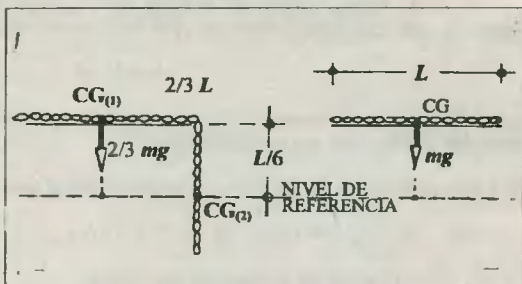
Fig. Solución Prob. 18.31

18.32. Haciendo el esquema correspondiente al estado inicial y final del sistema, convenimos en trazar el N.R. por el CG(2) de la porción que cuelga. También debemos reconocer que la masa de cualquier porción de cadena estará en proporción directa con su longitud.

Ahora, utilizando la relación (18.7), y considerando que el desplazamiento ha sido muy lento, de modo que la velocidad y energía cinética son nulas, tendremos:

$$W_{ext} = E^F_{pg} - E^I_{pg} = mg(L/6) - 2/3 mg(L/6)$$

$$\Rightarrow W_{ext} = 1/18 mgL \therefore W_{ext} = 10 \text{ J}$$



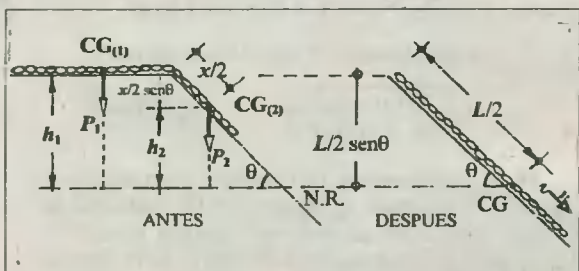
18.33. Del esquema mostrado, se ha trazado el N.R. por el CG de la cadena en el estado que el último eslabón pasa por B. De este modo, en esta posición toda la cadena tiene sólo energía cinética, que será igual a la energía potencial inicial de la misma.

Reconocemos que: $P_1 = mg \frac{L-x}{L}$

$$h_1 = L/2 \text{ sen}\theta$$

$$P_2 = mg(x/L)$$

$$h_2 = \frac{1}{2} (L-x) \text{ sen}\theta$$



Luego, por conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2} mv^2 = mg\left(\frac{L-x}{L}\right) \frac{L}{2} \text{sen}\theta + mg \frac{x}{L} \left(\frac{L-x}{2}\right) \text{sen}\theta \quad \therefore \quad v = \sqrt{g\left(\frac{L^2-x^2}{L}\right) \text{sen}\theta}$$

18.34. Procediendo de un modo similar al problema anterior tendremos los esquemas mostrados en la figura.

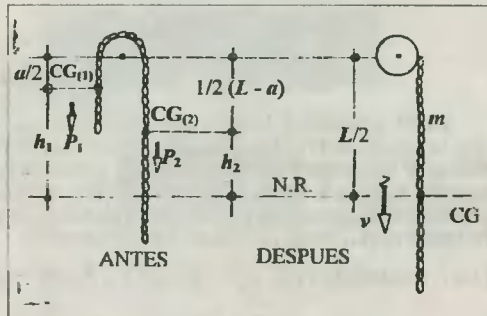
Reconocemos que: $P_1 = mg \cdot a/L$; $h_1 = \frac{1}{2}(L-a)$

$$P_2 = mg(L-a)/L; \quad h_2 = a/2$$

Aplicando el Teorema de Conservación de la Energía Mecánica (item 18.8):

$$\frac{1}{2} mv^2 = mg \frac{a}{L} \left(\frac{L-a}{2}\right) + mg\left(\frac{L-a}{L}\right) \cdot \frac{a}{2}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{2ga(1-a/L)}$$



18.35. En el sistema dado se verifica que en la posición inicial indicada, el resorte presenta una deformación $x = 0.2 \text{ m}$. Asimismo, cuando la argolla pasa por el punto B, el resorte adquiere su longitud natural, de modo que toda la energía potencial elástica que presentaba el sistema (en el resorte) se convierte íntegramente en energía cinética.

$$\frac{1}{2} mv_B^2 = \frac{1}{2} kx^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{k/m} x \quad \therefore \quad v_B = 2 \text{ m/s}$$

18.36. Debemos reconocer que el bloque se detiene en el instante que el resorte presenta su máxima deformación (x_m), y por consiguiente, su máxima fuerza de restitución. Sin embargo, por tratarse de fuerzas conservativas, diremos que el sistema conserva su energía mecánica.

Según el N.R. que hemos trazado, en la posición que el bloque se detiene, tendremos:

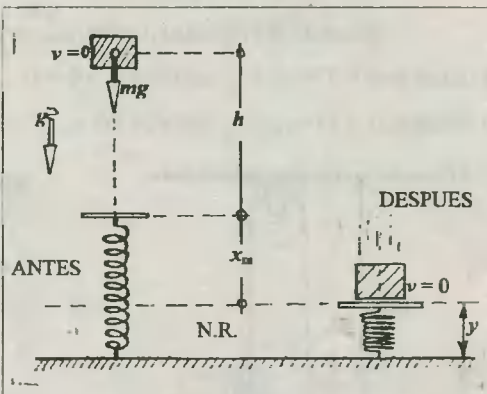
$$\frac{1}{2} kx_m^2 = mg(h + x_m)$$

Y resolviendo para x_m encontramos:

$$x_m = \frac{mg}{k} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}} \right]$$

Reemplazando valores: $x_m = 0,1 \text{ m}$

$$\text{Finalmente: } y = l - x_m \quad \therefore \quad y = 0,05 \text{ m}$$



18.37. Para el cálculo de la deformación máxima x_m emplearemos la relación obtenida en el problema anterior, haciendo $h = 0$. Entonces: $x_m = 2mg/k \dots (1)$

Ahora, analizando el sistema en el instante que deja de oscilar, señalamos las fuerzas P y F_r (fuerza recuperadora del resorte) aplicadas sobre el bloque en el equilibrio

$$\Rightarrow F_r = P \Rightarrow kx_o = mg \Rightarrow x_o = mg/k \dots (2)$$

Finalmente, de las relaciones (1) y (2): $x_m/x_o = 2$

18.38. El resorte alcanza su máxima deformación x_m en el instante que el bloque se detiene, observándose también que el desplazamiento de la polea es x_m hacia arriba, y el bloque descende $2x_m$, tal como se indica en la figura inferior. Ahora, considerando como sistema al bloque-polea-resorte:

$$E_{pc}^F = E_{pg}^I \Rightarrow \frac{1}{2} kx_m^2 = mg(2x_m)$$

$$\Rightarrow x_m = 4mg/k \quad \therefore \quad x_m = 0,1 \text{ m}$$

18.39. Cuando el sistema haya sido liberado, comprobamos que la tensión del cable no logra levantar a la esfera A desde que sale de P hasta que llega a Q al menos. Observamos además que cuando A llega a Q, B llega al piso (H). Verificamos esto al observar la resolución de los triángulos rectángulos y manteniendo la longitud (L) de la cuerda en forma constante.

Del Δ rectángulo PHC: $(L - 7)^2 = (7 + x)^2 + (7 + y)^2 \dots (1)$

$$\text{tg}37^\circ = \frac{HC}{PH} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{7 + y}{7 + x} \dots (2)$$

Del Δ rectángulo QHC: $[L - (7 + y)]^2 = x^2 + (7 + y)^2 \dots (3)$

Resolviendo (1), (2) y (3): $x = 9 \text{ m}$; $y = 5 \text{ m}$; $L = 27 \text{ m}$

Luego, del Δ rectángulo QHC: $\text{tg}\theta = \frac{7 + y}{x} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53^\circ$

Aplicando la propiedad demostrada en el problema 8.21 tenemos: $v_B = v_A \cdot \cos\alpha$.

- 1) Cuando $\alpha = 37^\circ$: $v_B = v_A \cdot \cos 37^\circ = 0,4/5 = 0$
- 2) Cuando $\alpha = 53^\circ$: $v_B = v_A \cdot \cos 53^\circ = 3/5 v_A \Rightarrow v_A = 5/3 v_B \dots (*)$

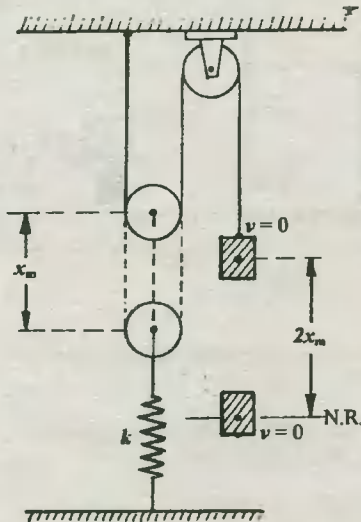


Fig. Solución Prob. 18.38

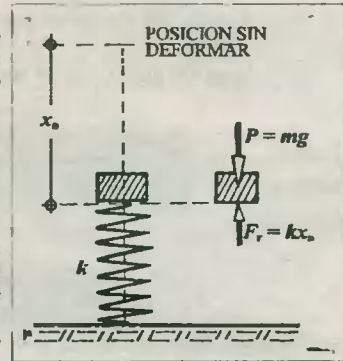


Fig. Solución Prob. 18.37

Aplicando la relación (18.8) tenemos: $E_{mec}^F = E_{mec}^I$

$$\frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_A v_A^2 = m_B g y$$

Y de (*): $m_B v_B^2 + m_A (5/3 v_B)^2 = 2m_B g y$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2m_B g y}{m_B + 25/9 m_A}} \quad \therefore \quad v_B = 3\sqrt{5} \text{ m/s}$$

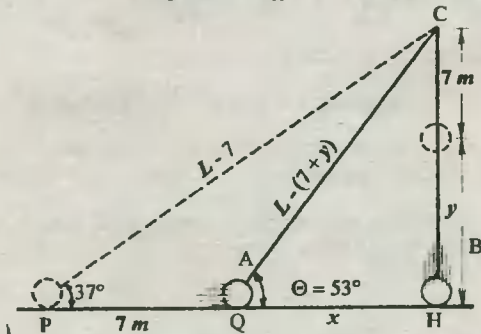


Fig. Solución Prob. 18.39

CAP 19 CANTIDAD DE MOVIMIENTO

19.1. Eligiendo una convención de signos apropiado para las velocidades, tendremos por los datos: $v_1 = -12 \text{ m/s}$ (\leftarrow) y $v_2 = +8 \text{ m/s}$ (\rightarrow).

a) Del teorema del impulso y la cantidad de movimiento (Relación (19.3)) tenemos:

$$J = mv_2 - mv_1 = 0,5[8 - (-12)] \quad \therefore \quad \boxed{J = +10 \text{ N}\cdot\text{s} \text{ (}\rightarrow\text{)}}$$

b) De la relación (19.2) para el impulso, tendremos:

$$F\Delta t = J \Rightarrow F = +10/0,05 \quad \therefore \quad \boxed{F = 200 \text{ N} \text{ (}\rightarrow\text{)}}$$

19.2. Teniendo en cuenta que la lectura de la balanza concuerda con la fuerza de reacción R , tendremos el esquema adjunto.

De la caída libre: $v_o = -\sqrt{2gh} = -10 \text{ m/s}$ (\downarrow)

Luego, de la relación (19.4): $R + P = \frac{m(v_f - v_o)}{\Delta t}$

$$\Rightarrow R - 20 \cdot 10 = \frac{20 [0 - (-10)]}{0,2} \quad \therefore \quad \boxed{R = 1200 \text{ N}}$$

19.3. Utilicemos el esquema vectorial adjunto para el cálculo del impulso.

Luego: $J = \sqrt{(mv_o)^2 + (mv_f)^2} = 0,2 \sqrt{12^2 + 5^2}$

$$\Rightarrow J = 2,6 \text{ N}\cdot\text{s}$$

Y de la relación (19.2): $F\Delta t = J \Rightarrow F = 26/0,01$

$$\therefore \quad \boxed{F = 2600 \text{ N}}$$

19.4. Utilizando el gráfico F -vs- t encontraremos el área bajo la curva propuesta, la que según indicación (19.4) del resumen, la igualaremos con ΔP . Veamos:

$$\text{Area} = m(v_f - v_o)$$

$$\frac{1}{2}(1+2) \cdot 8 = 0,2[v_f - (-20)] \quad \therefore \quad \boxed{v_f = +40 \text{ m/s} \text{ (}\rightarrow\text{)}}$$

Nota. - Si deseas saber el comportamiento de la velocidad a través del tiempo, te sugiero deducir la siguiente expresión: $v = -20 + 5t + 5/16 t^2$, que es la ecuación de una parábola.

19.5. Utilizando la relación (19.7) tendremos:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{sist}} \vec{a}_{\text{cm}} \Rightarrow \vec{a}_{\text{cm}} = \vec{F}_{\text{ext}} / m_{\text{sist}} \dots (1)$$

Donde: $m_{\text{sist}} = \Sigma m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \Rightarrow m_{\text{sist}} = 2 \text{ kg} \dots (2)$

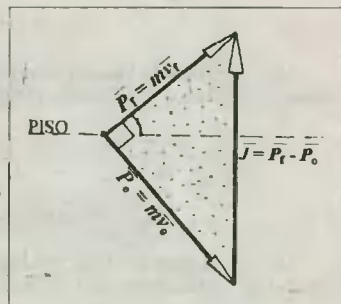
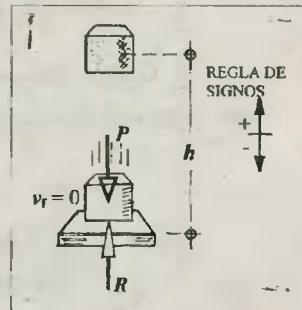


Fig. Solución Prob. 19.3

$$y: \vec{F}_{\text{ext}} = \Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \Rightarrow \vec{F}_{\text{ext}} = 9\vec{j} + (-4\vec{i}) + (-3\vec{j}) + 12\vec{i} \Rightarrow \vec{F}_{\text{ext}} = 8\vec{i} + 6\vec{j} \dots (3)$$

Finalmente, reemplazando (2) y (3) en (1) tenemos:

$$\vec{a}_{\text{cm}} = \frac{8\vec{i} + 6\vec{j}}{2} \Rightarrow \vec{a}_{\text{cm}} = 4\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow |\vec{a}_{\text{cm}}| = \sqrt{4^2 + 3^2} \therefore |\vec{a}_{\text{cm}}| = 5 \text{ m/s}^2$$

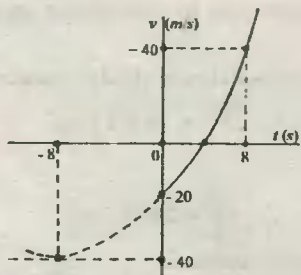


Gráfico. Solución Prob. 19.4

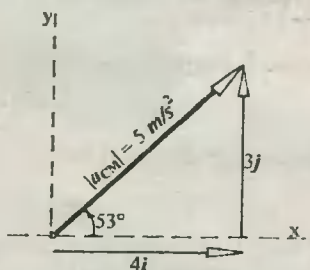


Fig. Solución Prob. 19.5

19.6. Aplicando la relación (19.6) para la velocidad del centro de masa, tendremos:

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \dots (*)$$

Por los datos y el gráfico, podemos reemplazar en (*):

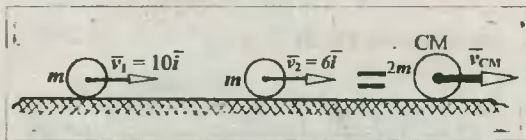
$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{4(5\vec{j}) + 6(-25\vec{j}) + 3(10\vec{i} + 10\vec{j})}{4 + 6 + 3} \Rightarrow \vec{v}_{\text{cm}} = 1/13 (-120\vec{i} + 50\vec{j})$$

$$|\vec{v}_{\text{cm}}| = 1/13 \sqrt{(-120)^2 + 50^2} \therefore |\vec{v}_{\text{cm}}| = 10 \text{ m/s}$$

19.7.a. Cuando van en la misma dirección.- Aplicamos la relación (19.6).

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2}{m + m} = \frac{10\vec{i} + 6\vec{i}}{2}$$

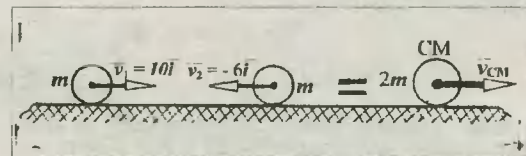
$$\therefore \vec{v}_{\text{cm}} = +8\vec{i} \text{ m/s}$$



19.7.b. Cuando van en direcciones opuestas.- Aplicamos la relación (19.6).

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{m(+10\vec{i}) + m(-6\vec{i})}{m + m}$$

$$\therefore \vec{v}_{\text{cm}} = +2\vec{i} \text{ m/s}$$



Observación.- Las velocidades que hemos encontrado en ambos casos se mantendrán iguales después del choque, cualquiera que fuera su tipo, ya que durante la colisión la fuerza externa neta es nula. Entonces, la cantidad de movimiento del sistema permanece constante, lo cual permite asegurar que el centro de masa mantiene una velocidad también constante.

19.8. Utilizando la relación (19.6) tendremos:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \dots (*)$$

donde: $\vec{v}_1 = 8\vec{i}$, $\vec{v}_2 = 6\vec{j}$, y $m_1 = m_2$.

Luego, reemplazamos estos datos en (*) y deducimos que:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{8\vec{i} + 6\vec{j}}{2} \Rightarrow \vec{v}_{cm} = 4\vec{i} + 3\vec{j} = 5 \text{ m/s } [37^\circ]$$

De acuerdo a las condiciones del problema, observamos que la cantidad de movimiento del sistema se conserva, y por lo tanto la velocidad del centro de masa se mantiene constante.

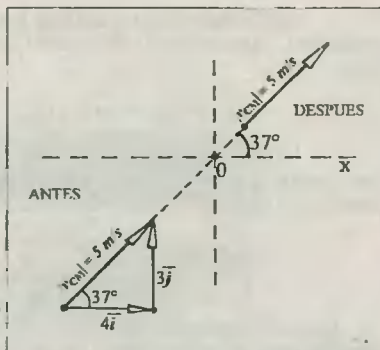


Fig. Solución Prob. 19.8

19.9. Reconocemos que la fuerza resultante externa sobre el sistema hombre - coche es nula, y por consiguiente podemos utilizar la relación (19.5).

$$\begin{aligned} \vec{P}_{antes} &= \vec{P}_{despues} \\ m_1 \vec{v}_1 + M \vec{v}_2 &= (m + M) \vec{v}_f \\ \Rightarrow \vec{v}_f &= \frac{m_1 \vec{v}_1 + M \vec{v}_2}{m + M} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{v}_f = 3,36 \text{ m/s}$$

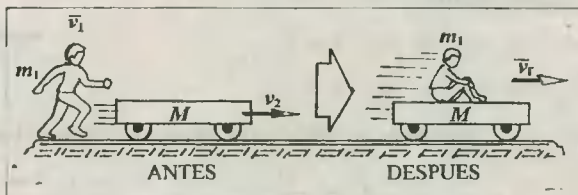


Fig. Solución Prob. 19.9

19.10. Analizando el sistema coche - hombre, diremos que su cantidad de movimiento total se conservará, debido a que la fuerza resultante externa es nula. Además, debemos indicar que las velocidades absolutas del hombre (v_h) y del coche (v_c) durante el fenómeno se relacionan así:

$$\vec{u} = \vec{v}_h - \vec{v}_c \Rightarrow \vec{v}_c = \vec{v}_h - \vec{u} \dots (*)$$

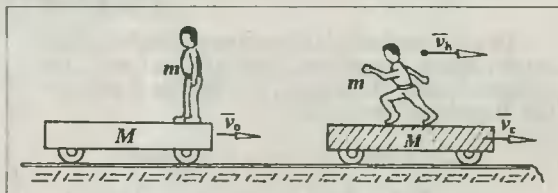
siendo v_c la velocidad del coche durante el movimiento del hombre, y $u = -10 \text{ m/s}$ (\leftarrow).

De la relación (19.5):

$$(m + M) \vec{v}_0 = M \vec{v}_c + m \vec{v}_h \dots (**)$$

Luego, reemplazando (*) en (**) despejaremos v_h .

$$\vec{v}_h = \vec{v}_0 + \left(\frac{M}{M+m}\right) \vec{u} \therefore \vec{v}_h = 19 \text{ m/s}$$



Observación. - Según el esquema gráfico adjunto, el hombre se mueve hacia la izquierda respecto al coche. Sin embargo, el resultado obtenido nos demuestra que él se mueve hacia la derecha respecto a tierra.

19.11. Utilicemos un procedimiento similar al del problema anterior, y tendremos el esquema de la figura (1) para el sistema hombre - coche, donde: $\vec{v}_h = \vec{u} + \vec{v}_{post}$

$$\text{Y de la relación (19.5): } (M + m) \vec{v}_0 = M \vec{v}_{post} + m \vec{v}_h$$

$$\text{Despejando } v_{post}: \vec{v}_{post} = \vec{v}_0 - \frac{m}{M+m} \vec{u}$$

Analizando ahora al sistema hombre - coche delantero, y procediendo del mismo modo, tendremos:

$$m\bar{v}_h + M\bar{v}_o = (m + M)\bar{v}_{del}$$

Utilizando la respuesta del problema anterior para v_h , despejaremos la velocidad del coche delantero (v_{del}).

$$\bar{v}_{del} = \bar{v}_o + \frac{Mm}{(m + M)^2} \bar{u}$$

19.12. En primer lugar, encontraremos una expresión para las velocidades absolutas de A y B en función de la velocidad de la lancha v_1 y de las velocidades relativas.

$$\begin{aligned} \bar{u}_A = \bar{v}_A - \bar{v}_1 &\Rightarrow \bar{v}_A = \bar{v}_1 + \bar{u}_A \\ \bar{u}_B = \bar{v}_B - \bar{v}_1 &\Rightarrow \bar{v}_B = \bar{v}_1 + \bar{u}_B \end{aligned} \quad (*)$$

Aplicando la relación (19.5) para el sistema "Lancha + A + B" tenemos:

$$\bar{P}_{antes} = \bar{P}_{despues} \Rightarrow 0 = m_A\bar{v}_A + m_B\bar{v}_B + m_l\bar{v}_1 \dots (**)$$

Reemplazando (*) en (**) despejaremos \bar{v}_1 : $\bar{v}_1 = \frac{m_A\bar{u}_A + m_B\bar{u}_B}{m_A + m_B + m_l}$

Considerando que $u_A = +5 \text{ m/s} (\rightarrow)$, $u_B = -4 \text{ m/s} (\leftarrow)$, reemplazamos todos los datos y obtenemos:

$$v_1 = -0,42 \text{ m/s} (\leftarrow)$$

19.13. Considerando el sistema hombre-plataforma de la figura, encontramos que la fuerza externa resultante es nula. Por lo tanto, en virtud de la relación (19.7) podemos decir que:

$$\Delta v_{cm} / \Delta t = 0 \Rightarrow v_{CM} = \text{constante}$$

Ahora, por la inamovilidad inicial del sistema, diremos que la posición del centro de masa (CM) permanece invariable. Luego, se verificará que:

$$X_{CM_{antes}} = X_{CM_{despues}}$$

$$\Rightarrow \frac{M.L/2 + m.L}{M + m} = \frac{M(x + L/2) + m.x}{M + m}$$

Luego, resolviendo encontramos que: $x = \left(\frac{m}{M + m}\right)L \Rightarrow x = 3 \text{ metros}$

Finalmente: $d = 8 \text{ m}$

19.14. Observando el diagrama de la figura, comprobaremos que: $e_s + e_t = L \dots (*)$

Dado que el sistema sapo-tablón no experimenta fuerza externa alguna, entonces podemos

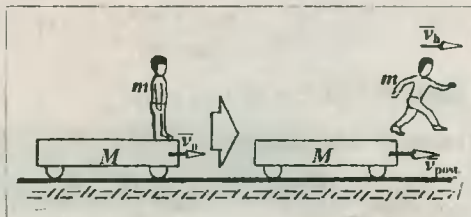


Fig. (1). Solución Prob. 19.11

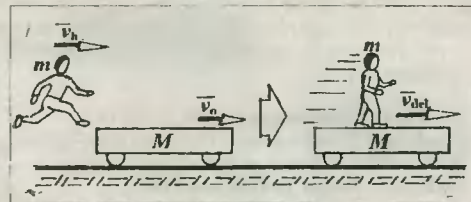
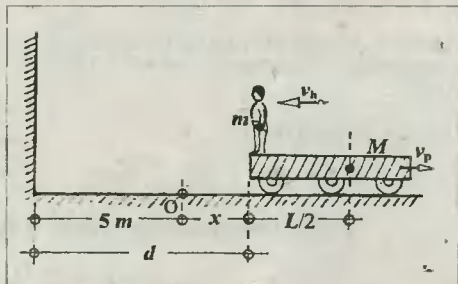


Fig. (2). Solución Prob. 19.11



aplicar la relacion (19.5)

$$P_{\text{antes}} = P_{\text{despues}} \Rightarrow 0 = M(-v_1) + m(+v_2)$$

$$\Rightarrow Mv_1 = mv_2 \Rightarrow M(e_1/t) = m(e_2/t)$$

$$\Rightarrow \frac{e_2}{e_1} = \frac{M}{m} \quad (**)$$

Luego, de (*) y (**) encontramos:

$$e_2 = \left(\frac{M}{M+m} \right) L \quad (***)$$

Pero, observando el movimiento parabólico del sapo, recordamos que e_2 = alcance horizontal. Luego, en (***)

$$v_0^2 \sin^2(2\theta) = \left(\frac{M}{M+m} \right) L \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{gL}{(1+m/M)\sin 2\theta}} \quad \therefore v_0 = 25/6 \text{ m/s}$$

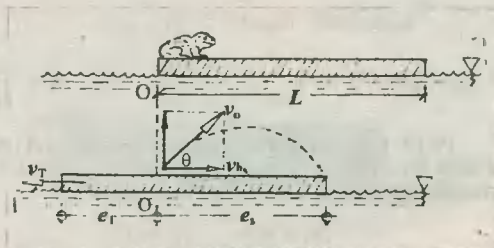


Fig. Solución Prob. 19.14

19.15. Considerando una descomposición vectorial de las cantidades de movimiento, y además, utilizando el Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento sobre cada eje cartesiano, tendremos:

1) $\Sigma(mv_x)_{\text{despues}} = \Sigma(mv_x)_{\text{antes}}$

$$m/4 \cdot v_1 \cos 37^\circ + m/3 \cdot v_2 \cos 53^\circ + 5/12 mv_0 = mv_0 \quad (*)$$

Pero, por dato: $v_0 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$. Reemplazando en (*) tendremos:

$$v_1 + v_2 = 120/49 v_0 \Rightarrow v_1 + v_2 = 120 \dots (1)$$

2) $\Sigma(mv_y)_{\text{despues}} = \Sigma(mv_y)_{\text{antes}}$

$$(+m/4 \cdot v_1 \sin 37^\circ) + (-m/3 \cdot v_2 \sin 53^\circ) = 0$$

$$\Rightarrow v_1/v_2 = 16/9 \quad (2)$$

De (1) y (2): $v_1 = 76.8 \text{ m/s}$; $v_2 = 43.2 \text{ m/s}$

Finalmente:

$$v_3 = 60 \text{ m/s}$$

19.16. 1) Cálculo de la velocidad con que empieza a moverse el cañón inmediatamente después del disparo.- Analizando la conservación de la cantidad de movimiento en el eje X tendremos:

$$\Sigma(mv_x)_{\text{antes}} = \Sigma(mv_x)_{\text{despues}}$$

$$0 = -mv_0 \sin 30^\circ + Mv \Rightarrow v = (m/2M)v_0 \dots (*)$$

2) Cálculo de la altura h ascendida por el cañón.- Por el Teorema del Trabajo y la Energía Mecánica (según la relación (18.7), tendremos:

$$W_{\text{roz}} = E_{\text{mec}}^F - E_{\text{mec}}^I \Rightarrow f d \cos 180^\circ = Mgh - \frac{1}{2} Mv^2$$

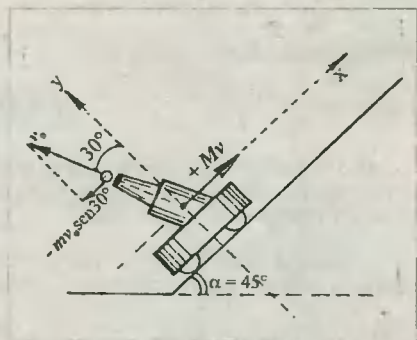
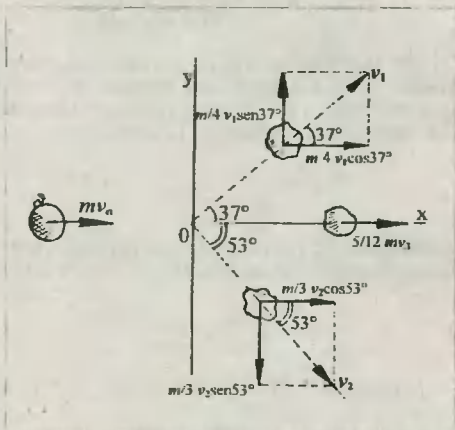


Fig. (1). Solución Prob. 19.16

$$\mu Mg \cos 45^\circ \operatorname{hesc} 45^\circ (-1) = Mgh - \frac{1}{2} Mv^2$$

Luego, con (*): $h = \frac{v_0^2}{8g(1+\mu)} - \left(\frac{m}{M}\right)^2 \therefore h = \frac{v_0^2}{12g} \left(\frac{m}{M}\right)^2$

19.17. Cálculo de la velocidad después del impacto.- Por el Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento tenemos

$$(M+m)v_1 = mv_0 + M(0)$$

$$\Rightarrow v_1 = \left(\frac{m}{M+m}\right)v_0 \dots (1)$$

Cálculo de la altura máxima.- Por tratarse de un "lanzamiento" vertical de caída libre, diremos que:

$$h_{\max} = v_1^2 / 2g \dots (2)$$

De (1) en (2): $h_{\max} = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g}$

19.18. Analicemos el sistema bala-pendulo (ver figura) antes y después del impacto, y encontraremos que responde a las mismas características del problema anterior. Así entonces, tenemos

$$v = \left(\frac{m}{M+m}\right)v_0 \dots (*)$$

Analicemos el movimiento del pendulo luego del impacto encontramos que $W_{\text{ext}} = 0$, por ello:

$$E_{\text{mec}}^{\text{fin}} = E_{\text{mec}}^{\text{inc}}$$

$$(M+m)gh = \frac{1}{2} (M+m)v^2 \Rightarrow h = v^2 / 2g$$

Y de (*): $h = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g}$

Reemplazando datos: $h = 0.2 \text{ m}$

Luego: $\cos \theta = \frac{L-h}{L} = \frac{0.3}{0.5} \therefore \theta = 53^\circ$

19.19. Se sabe que la mínima velocidad que debe tener un cuerpo para dar una vuelta completa en un rizo vertical es: $v_{\min} = \sqrt{5gL} \dots (1)$

Pues bien, cuando el proyectil impacte contra la esfera y quede adherida a él, tendremos:

$$P_{\text{tot}}^{\text{después}} = P_{\text{tot}}^{\text{antes}} \Rightarrow (M+m)v_{\min} = mv_0 \dots (2)$$

De (1) en (2): $v_0 = \left(\frac{M+m}{m}\right)\sqrt{5gL}$

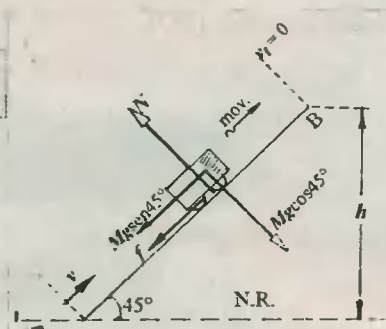


Fig. (2) Solución Prob. 19.16

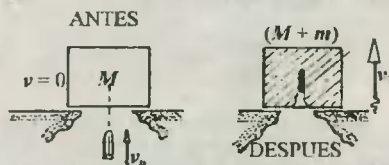


Fig. Solución Prob. 19.17

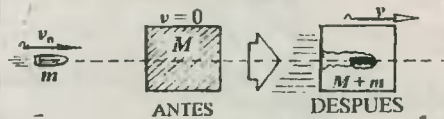


Fig. (1). Solución Prob. 19.18

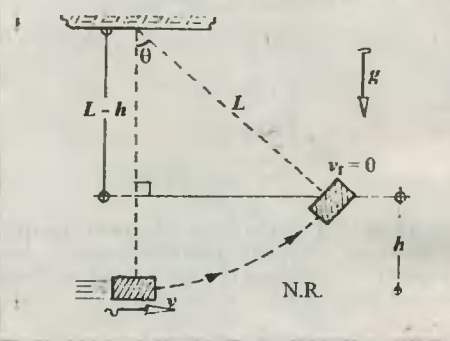


Fig. (2). Solución Prob. 19.18

19.20. Sean v_1 y v_2 las velocidades tanto del carrito como del péndulo cuando éste pasa por su posición más baja. Así, del Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento tenemos:

$$P_{tot\text{antes}} = P_{tot\text{después}}$$

$$0 = M(-v_1) + m(+v_2)$$

$$\Rightarrow v_2 = (M/m)v_1 \dots (1)$$

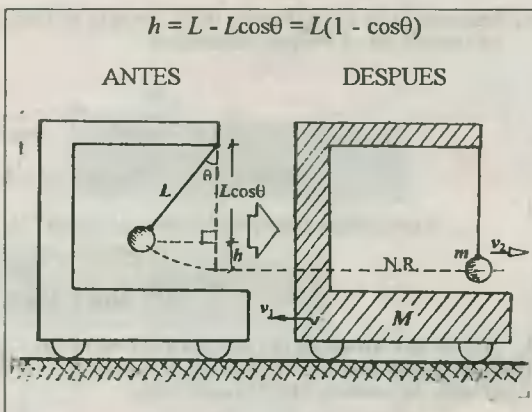
Del Teorema del Trabajo y la Energía Mecánica tenemos que $W_{ext} = 0$, luego:

$$E_{mec}^{inicial} = E_{mec}^{final}$$

$$mgh = \frac{1}{2} Mv_1^2 + \frac{1}{2} mv_2^2 \dots (2)$$

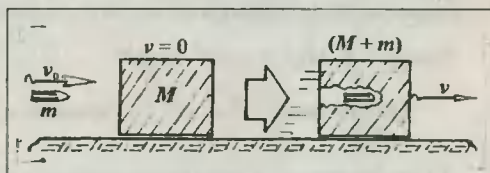
De (1) en (2): $Mv_1^2 + m[(M/m)v_1]^2 = 2mgh \dots (h=L-L\cos\theta)$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2gL(1 - \cos\theta)}{M/m(1 + M/m)}} \therefore v_1 = \sqrt{2/6} \text{ m/s}$$



19.21. Utilizando el resultado del problema 19.18 tenemos: $v = (\frac{m}{M+m})v_0 \dots (1)$

Es con esta velocidad que el conjunto inicia su movimiento y avanza horizontalmente hasta detenerse por completo. Observamos además que a medida que el conjunto avanza va perdiendo su energía cinética en trabajo contra la aspereza del piso, tal que:



$$W_{roz} = E_c^f - E_c^i \dots (E_c^f = 0)$$

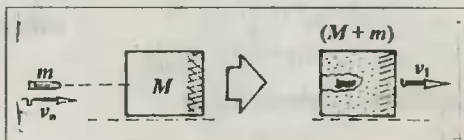
$$-\mu mgd = -\frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow d = v^2/2\mu g \dots (2)$$

Sustituyendo (1) en (2): $d = (\frac{m}{M+m})^2 \cdot \frac{v_0^2}{2\mu g}$

Reemplazando valores tendremos: $d = 50 \text{ m}$

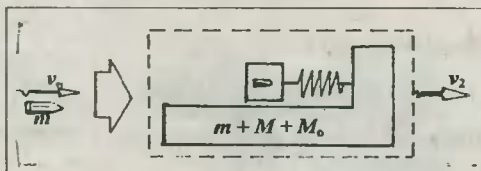
19.22. a) Analizando el sistema **bala + bloque** tendremos que:

$$v_1 = (\frac{m}{M+m})v_0 \dots (1)$$



b) Analizando el sistema **bala + bloque + coche**, tendremos que en el instante en que el resorte presente su máxima deformación, los tres cuerpos manifestarán la misma velocidad.

$$v_2 = (\frac{m}{m+M+M_0})v_0 \dots (2)$$



c) Analizando la conservación de la energía mecánica a partir del instante en que la bala queda incrustada en el bloque, tendremos:

$$E_{mec}^{inic.} = E_{cin}^{fin} + E_{p.e}^{fin}$$

(bala + bloque) (bala + bloque + coche) (resorte)

$$\frac{1}{2} (m + M)v_1^2 = \frac{1}{2} (m + M + M_o)v_2^2 + \frac{1}{2} kx^2 \dots (3)$$

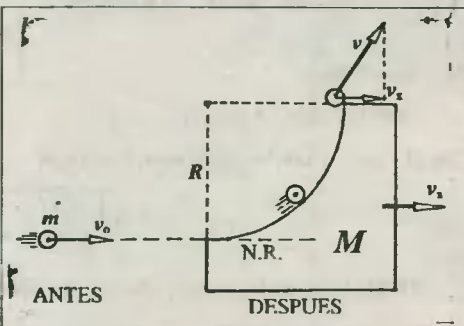
Finalmente, reemplazamos (1) y (2) en (3), y despejamos x .

$$x = m \sqrt{\frac{M_o}{k(m+M)(m+M+M_o)}} v_o$$

19.23. a) Cálculo de la velocidad del coche inmediatamente después del ingreso de la esfera.- Aplicando la relación (19.5) tendremos:

$$mv_o = (M + m)v_x \Rightarrow v_x = \left(\frac{m}{M + m}\right)v_o \dots (1)$$

Debemos notar que el coche mantiene constante la velocidad v_x , y la esfera, que tiene dos velocidades (v_x y v_y), mantiene igualmente constante a la primera, mientras que la segunda va en aumento.



b) Cálculo de la velocidad v con que la esfera abandona el coche.- Utilizando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica tendremos:

$$\frac{1}{2} mv_o^2 = \frac{1}{2} Mv_x^2 + \frac{1}{2} mv^2 + mgR \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2), y despejando v , obtenemos:

$$v = \sqrt{v_o^2 \left[1 - \frac{Mm}{(M+m)^2}\right] - 2gR}$$

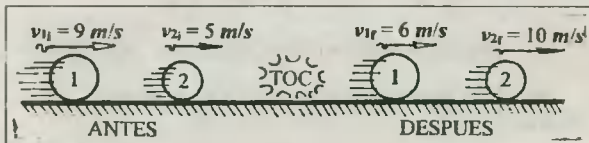
19.24. Por tratarse de un choque elástico ($e = 1$), utilizaremos la relación (19.8) para encontrar una relación entre las velocidades después del choque.

$$e = \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{1i} - v_{2i}} = 1 \Rightarrow v_{2f} - v_{1f} = v_{1i} - v_{2i} \dots (*)$$

a) Cuando las bolas van en la misma dirección, en (*) tendremos:

$$v_{2f} - v_{1f} = (+9) - (+5)$$

$$\Rightarrow v_{2f} - v_{1f} = +4 \dots (1)$$



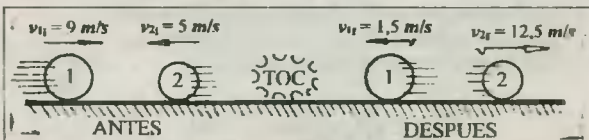
Aplicando la relación (19.5):

$$m_1 \cdot v_{1f} + m_2 \cdot v_{2f} = m_1 \cdot v_{1i} + m_2 \cdot v_{2i} \Rightarrow 5v_{1f} + 3v_{2f} = +60 \dots (2)$$

Resolviendo (1) y (2):

$$v_{1f} = +6 \text{ m/s} ; v_{2f} = +10 \text{ m/s}$$

b) Cuando las bolas van en direcciones opuestas, en (*) tendremos:



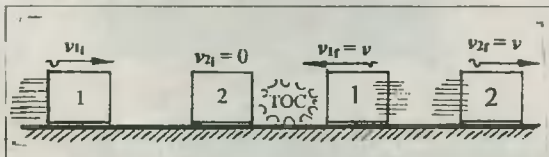
$$v_{2f} - v_{1f} = + 14 \dots (3)$$

Aplicando la relación (19.5) para esta situación, obtenemos: $5v_{1f} + 3v_{2f} = + 30 \dots (4)$

Resolviendo (3) y (4): $v_{1f} = - 1,5 \text{ m/s} ; v_{2f} = + 12,5 \text{ m/s}$

19.25. Resolveremos el problema apoyándonos en el diagrama de bloques y velocidades de la figura.

Utilizando la relación (19.8) para el coeficiente de restitución e , desarrollada para el choque elástico, tal como se hizo en el problema anterior, tendremos:



$$v_{2f} - v_{1f} = v_1 - v_{2i} \Rightarrow (+v) - (-v) = v_1 - 0 \Rightarrow v_1 = 2v \dots (1)$$

Aplicando la relación (19.5) tenemos: $m_1 \cdot v_{1i} + m_2(0) = m_1(-v) + m_2(+v) \dots (2)$

Finalmente, reemplazamos (1) en (2): $3m_1 = m_2 \therefore m_1/m_2 = 1/3$

19.26. Por tratarse de un choque elástico, se deberá cumplir el Principio de Conservación de la Energía Cinética. Entonces:

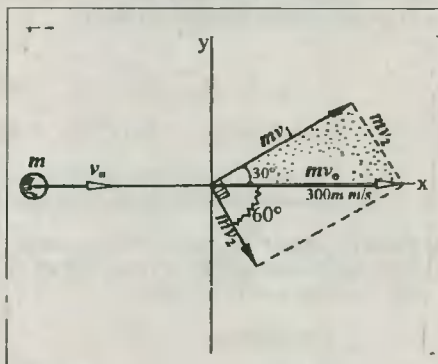
$$\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$\Rightarrow v_o^2 = v_1^2 + v_2^2 \dots (1)$$

Por el Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento tendremos:

$$m \vec{v}_o = m \vec{v}_1 + m \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_o = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \dots (2)$$

De (1) y (2) deducimos que este choque elástico y oblicuo genera movimientos de direcciones ortogonales, según se indica en la figura.



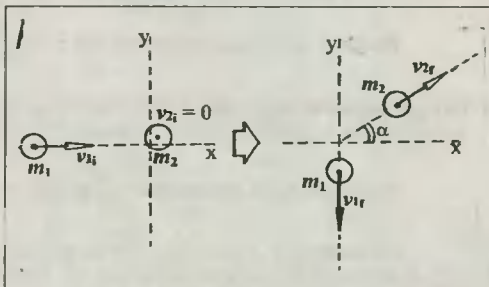
Del gráfico obtenemos: $v_1 = 150\sqrt{3} \text{ m/s}$ y $v_2 = 150 \text{ m/s}$

19.27. Llamemos r a la fracción de energía perdida por la partícula m_1 , de modo que:

$$r = \frac{\Delta E_c}{E_c} = \frac{\frac{1}{2} m_1 (v_{1f}^2 - v_{1i}^2)}{\frac{1}{2} m_1 \cdot v_{1i}^2}$$

$$\Rightarrow r = (v_{1f}/v_{1i})^2 - 1 \dots (*)$$

A continuación, analicemos el choque: Por ser el choque elástico, se deberá verificar que la energía cinética se conserva.



$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_{2f}^2 \dots (1)$$

Asimismo, tal como se hizo en el problema anterior, los vectores cantidad de movimiento deben verificar la siguiente relación (obtenida de su diagrama vectorial):

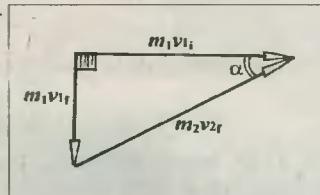
$$(m_2 v_{2f})^2 = (m_1 \cdot v_{1f})^2 + (m_1 \cdot v_{1i})^2 \dots (2)$$

Utilizando las ecuaciones (1) y (2) eliminamos v_{2f} y encontramos que:

$$\left(\frac{v_{1f}}{v_{1i}}\right)^2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \dots (**)$$

Finalmente, reemplazamos (**) en (*):

$$r = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$$

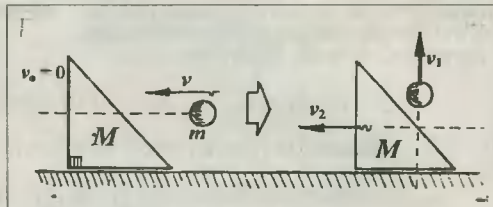


19.28. Analizando el Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento en el eje horizontal tendremos:

$$\Sigma(mv)_x \text{ antes} = \Sigma(mv)_x \text{ después}$$

$$-mv = -Mv_2 \Rightarrow v_2 = (m/M)v \dots (1)$$

Por tratarse de un choque elástico, aplicamos entonces el Principio de Conservación de la Energía Cinética (Relación (18.8)).



$$E_{\text{cin}}^{\text{in}} = E_{\text{cin}}^{\text{fin}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2): $mv^2 = mv_1^2 + M[(m/M)v]^2 \therefore v_1 = \sqrt{(1 - m/M)}v$

19.29. Utilizando un procedimiento similar al del problema anterior, tendremos que:

a) **Para el primer impacto.** - Por Conservación de la Cantidad de Movimiento en el eje X tenemos para la cuña:

$$v_1 = (m/M)v_2 \dots (1)$$

Y por conservación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}Mv_1^2 \dots (2)$$

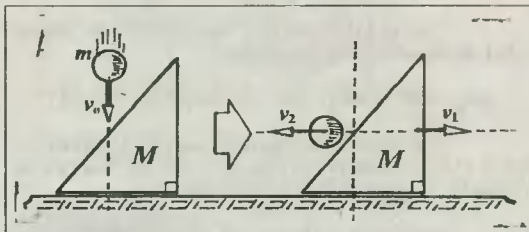
De (1) y (2) encontramos v_2^2 : $v_2^2 = \left(\frac{M}{M+m}\right)v_0^2 \dots (I)$

b) **Para el segundo impacto.** - Recurrimos a la relación encontrada en el problema anterior para la velocidad de la pelota: $v_3^2 = (1 - m/M)v_2^2 \dots (II)$

A continuación sustituimos (I) en (II): $v_3^2 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)v_0^2 \dots (*)$

De acuerdo a la caída libre de las pelotas, las velocidades en (*) podrán expresarse por las alturas de caída (H) y máxima alcanzada (h) después del último rebote.

$$2gh = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)2gH \therefore h = 14 \text{ m}$$



19.30. Reconocemos que la velocidad v_0 de la esfera en el instante anterior al choque es $\sqrt{2gh}$. A continuación, del análisis del choque encontramos que la velocidad del rebote v_1 de la esfera

forma 30° con la horizontal.

Utilizando el Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento (relación (19.5)) en el eje X tenemos:

$$0 = M(-v_2) + m(v_1 \cos 30^\circ)$$

$$\Rightarrow v_2 = (m/M)v_1 \cos 30^\circ \dots (1)$$

Aplicando ahora el Principio de Conservación de la Energía Cinética, por tratarse de un choque elástico, tenemos:

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) encontramos que la velocidad v_1 estará dada por:

$$v_1^2 = \frac{v_o^2}{(m/M)\cos^2 30^\circ + 1} \Rightarrow v_1^2 = 8/9 v_o^2 \dots (3)$$

Finalmente, del movimiento parabólico, tendremos que la altura máxima del movimiento parabólico viene dada por:

$$h_m = \frac{v_1^2 \cdot \sin^2 30^\circ}{2g} \dots (4)$$

Reemplazando la observación preliminar de v_o y la relación (3) en (4) obtendremos que: $h_m = 2/9 h_o$.

$$\therefore h_m = 4 \text{ m}$$

19.31. Reconocemos que las velocidades de llegada al piso v_{1i} y de rebote v_{1f} se determinan por la caída libre vertical que experimentan.

$$v_{1i} = \sqrt{2gh_o}; v_{1f} = \sqrt{2gh_f}$$

Asimismo, notamos que el piso horizontal mantiene en todo momento su estado de reposo. Tendremos por aplicación de la relación (19.8) para el coeficiente de restitución que la velocidad de rebote v_{1f} viene dado por:

$$e = \frac{(+v_{1f}) - v_{2f}}{v_{2i} - (-v_{1i})} \Rightarrow v_{1f} = e \cdot v_{1i} \dots (v_{2i} = v_{2f} = 0)$$

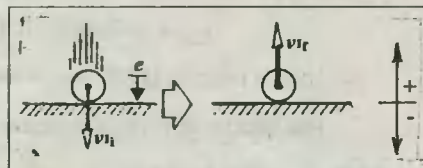
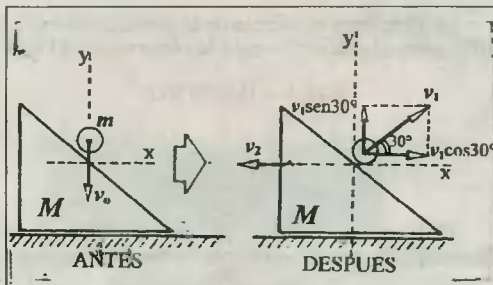
Luego: $e = \frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{\sqrt{2gh_f}}{\sqrt{2gh_o}} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{h_f}{h_o}} \therefore e = 2/3$

19.32. a. Para determinar la velocidad con que la pelota rebota utilizaremos la relación deducida en el problema anterior: $v_{rebote} = e \cdot v_{llegada}$

$$v_f = e v_o \therefore v_f = 10 \text{ m/s}$$

19.32. b. Para el cálculo del impulso utilizaremos la relación (19.3).

$$J = m(v_f - v_o) \Rightarrow J = m[e v_o - (-v_o)] \Rightarrow J = (1 + e) m v_o \therefore J = 9 \text{ N}\cdot\text{s}$$



19.32.c. Para el cálculo de la fuerza media (F_m) utilizamos el gráfico F -vs- t y la observación (19.4).

AREA = IMPULSO

$$\Rightarrow F_m \Delta t = J \Rightarrow F_m = (1 + e)mv_o / \Delta t$$

$$\therefore F_m = 180 \text{ N}$$

19.32.d. La cantidad de calor proviene de la disminución que experimenta la energía cinética.

$$Q = E_{ci} - E_{cf} = \frac{1}{2} m(v_o^2 - v_f^2)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} m v_o^2 (1 - e^2) \quad \therefore Q = 45 \text{ J}$$

19.33. Aplicando la relación (19.8) para el coeficiente de restitución e :

$$v_{2f} - v_{1f} = e(v_{1i} - v_{2i}) \dots (*)$$

a) Cuando las bolas van en la misma dirección.- Reemplazamos los datos en (*):

$$v_{2f} - v_{1f} = 0,8(22 - 12) \Rightarrow v_{2f} - v_{1f} = 8 \dots (1)$$

Y del Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento (Relación (19.5)):

$$m v_{1f} + m v_{2f} = m v_{1i} + m v_{2i} \Rightarrow v_{1f} + v_{2f} = 34 \dots (2)$$

Resolviendo (1) y (2): $v_{1f} = 13 \text{ m/s}; v_{2f} = 21 \text{ m/s}$

b) Cuando las bolas van en direcciones opuestas.- Reemplazamos los datos en (*):

$$v_{2f} - v_{1f} = 0,8[22 - (-12)] \Rightarrow v_{2f} - v_{1f} = 27,2 \dots (3)$$

Y de la relación (19.5): $m v_{1f} + m v_{2f} = m(+22) + m(-12) \Rightarrow v_{1f} + v_{2f} = 10 \dots (4)$

Finalmente, de (3) y (4) tenemos: $v_{1f} = -8,6 \text{ m/s}; v_{2f} = 18,6 \text{ m/s}$

19.34. Procediendo del mismo modo que en el problema anterior, aplicando la relación (19.8) tendremos:

$$v_{2f} - v_{1f} = e v \dots (1)$$

Ahora, aplicando la relación (19.5):

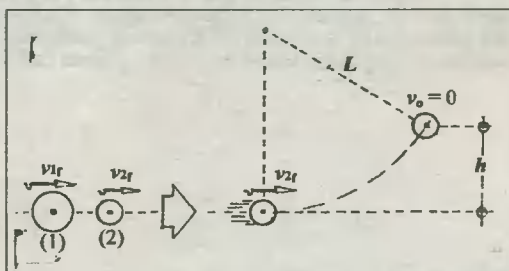
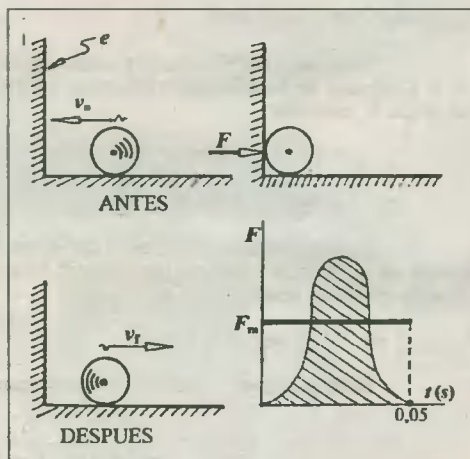
$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v \dots (2)$$

Resolviendo (1) y (2) encontramos que:

$$v_{2f} = \frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2} v \dots (3)$$

Finalmente, al utilizar el Principio de Conservación de la Energía Mecánica en el péndulo, tenemos: $m_2 g h = \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \dots (4)$

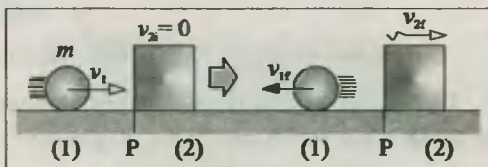
Reemplazando (3) en (4) conseguiremos la siguiente expresión:



$$h = (1 + e)^2 \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot \frac{v_0^2}{2g} \quad \therefore \quad \boxed{h = 5m}$$

19.35. Del movimiento descendente de la esfera tenemos:

$$\begin{aligned} E_{c\text{ fin}} &= E_{pg\text{ inic}} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 = mgR \\ \Rightarrow v_1 &= \sqrt{2gR} \dots (*) \end{aligned}$$



Analizamos el choque.-

Por la fórmula de Newton: $e = \frac{(+v_{2f}) - (-v_{1f})}{(+v_1) - (0)} \Rightarrow v_{2f} + v_{1f} = e v_1 \dots (1)$

Por el Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento tenemos:

$$M(+v_{2f}) + m(-v_{1f}) = M(0) + m(+v_1) \Rightarrow Mv_{2f} - mv_{1f} = mv_1 \dots (2)$$

De (1) y (2) despejamos v_{2f} : $v_{2f} = \left(\frac{m}{M+m}\right)(1+e)v_1 \dots (3)$

Una vez concluido el choque, el bloque M posee una energía cinética igual a $\frac{1}{2} M v_{2f}^2$, que irá disminuyendo debido a que el resorte se va comprimiendo, el cual va aumentando su energía potencial elástica, la cual será máxima cuando x sea máximo. Por otro lado, esto ocurrirá cuando el bloque quede en reposo (sin energía cinética).

$$\frac{1}{2} k x_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} M v_{2f}^2 \Rightarrow x_{\text{máx}} = \sqrt{M/k} v_{2f} \dots (4)$$

De (3) y (*) en (4): $x_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{M}{k}} \left(\frac{m}{M+m}\right)(1+e)\sqrt{2gR}$

19.36. Si el choque de la pelota con el piso es elástico, entonces se verifica que $e = 1$. Luego, aplicamos la relación (19.9).

$$\frac{\text{tg}53^\circ - \mu}{\text{tg}45^\circ + \mu} = 1 \quad \therefore \quad \boxed{\mu = 1/6}$$

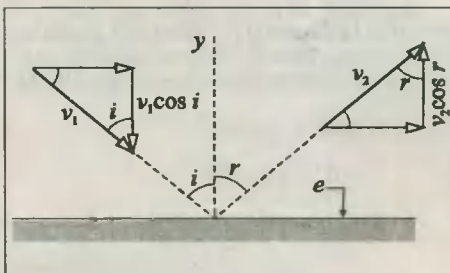
19.37. Utilizando la relación (19.9) encontraremos el valor del coeficiente e , con $i = 53^\circ$ y $r = 45^\circ$.

$$e = \frac{\text{tg}53^\circ - 3/4}{\text{tg}45^\circ + 3/4} \Rightarrow e = 1/3$$

A continuación, podemos averiguar la velocidad de rebote v_2 a partir de las componentes verticales, para las cuales aplicaremos la relación obtenida en el problema (19.31).

$$v_2 \cdot \cos r = e \cdot v_1 \cos i \Rightarrow v_2 = e(\cos i / \cos r) v_1$$

$$\therefore \quad \boxed{v_2 = 4 \text{ m/s}}$$



19.38. Trazando una línea normal al plano inclinado en el punto de contacto, observaremos que los ángulos de incidencia y reflexión son respectivamente: $i = 90^\circ - \theta$; $r = \theta$. Luego, aplicando la relación (19.9) tendremos:

$$e = \frac{\operatorname{tg}(90^\circ - \theta) - \mu}{\operatorname{tg}\theta + \mu} = \frac{\operatorname{ctg}\theta - \mu}{\operatorname{tg}\theta + \mu} \Rightarrow \frac{12}{13} = \frac{\operatorname{ctg}\theta - 1/3}{\operatorname{tg}\theta + 1/3} \Rightarrow 36\operatorname{tg}^2\theta + 25\operatorname{tg}\theta - 39 = 0$$

$$\Rightarrow (9\operatorname{tg}\theta + 13)(4\operatorname{tg}\theta - 3) = 0$$

De donde obtenemos un solo valor físicamente aceptable: $\operatorname{tg}\theta = 3/4 \therefore \theta = 37^\circ$

19.39. Calculemos los tiempos de movimiento por separado. En particular, la primera caída empleó un tiempo t_0 que vendrá dado por: $t_0 = \sqrt{2h_0/g}$ (*)

Analizando el primer rebote, y utilizando la relación para la velocidad de rebote tenemos:

$$v_1 = ev_0 = e\sqrt{2gh_0} \Rightarrow t_1 = 2v_1/g = 2e\sqrt{2gh_0}/g = 2e(\sqrt{2h_0/g}) \Rightarrow t_1 = 2et_0$$

Por inducción matemática diremos que los tiempos restantes serán:

$$t_2 = 2e^2t_0, \dots, t_n = 2e^nt_0$$

Finalmente, el tiempo total será: $t_T = t_0 + 2et_0 + 2e^2t_0 + \dots + 2e^nt_0$

$$t_T = t_0 + 2et_0(1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1})$$

Reconociendo que $e < 1$, entonces se verificará que:

$$1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1} = (1 - e)^{-1} \dots (n \rightarrow \infty)$$

Luego: $t_T = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)t_0 \dots (**)$

De (*) en (**): $t_T = \left(\frac{1+e}{1-e}\right) \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \therefore t_T = 9 \text{ s}$

19.40. Para el primer lanzamiento parabólico se verifica que el alcance horizontal está dada por:

$$L_0 = v_0^2 \operatorname{sen}2\alpha/g \dots (*)$$

Analizando el primer rebote aplicamos el principio (19.5) para el eje horizontal, y para las componentes verticales de la velocidad utilizamos la relación obtenida en el problema (19.31).

$$v_1 \cdot \operatorname{sen}\beta = v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

y: $v_1 \cdot \operatorname{sen}\beta = e \cdot v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha$

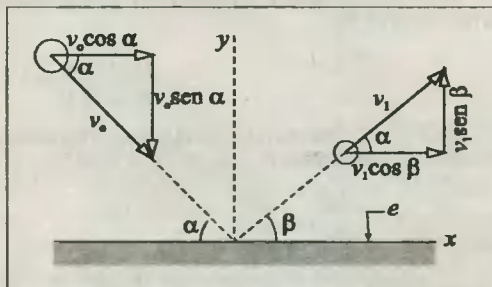
Multiplicando miembro a miembro tenemos: $v_1^2 \cdot \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\beta = e \cdot v_0^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha$

$$\Rightarrow v_1^2 \operatorname{sen}2\beta/g = e(v_0^2 \operatorname{sen}2\alpha/g) \Rightarrow L_1 = eL_0$$

Aplicando la inducción matemática, diremos que el alcance para los siguientes rebotes estarán dados por:

$$L_2 = e^2L_0, \dots, L_n = e^nL_0$$

Luego, la distancia total d estará dada por:



$$d = L_0 + eL_0 + e^2L_0 + \dots + e^nL_0 = L_0(1 + e + e^2 + \dots + e^n) = L_0(1 - e)^{-1} \dots (n \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow d = \frac{L_0}{1 - e} \dots (**)$$

Finalmente, de (*) en (**): $d = \frac{v_2^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g(1 - e)}$

19.41. Aplicando el Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento (relación (19.5)) tenemos:

Collares 1 y 2: $mu + m(0) = mv_1 + mv_2 \Rightarrow v_1 + v_2 = u \dots (1)$

Aplicamos ahora la relación (19.8): $\frac{v_2 - v_1}{u - 0} = e \Rightarrow v_2 - v_1 = eu \dots (2)$

De (1) y (2) obtenemos: $v_2 = \left(\frac{1+e}{2}\right)u \dots (*)$

Collares 2 y 3: Considerando que la velocidad v_2 del collar 2 permanece constante hasta antes de chocar con el collar 3, aplicamos la relación (19.5).

$$mv_2 + m(0) = mv'_2 + mv_3 \Rightarrow v'_2 + v_3 = v_2 \dots (3)$$

Aplicamos ahora la relación (19.8): $\frac{v_3 - v'_2}{v_2 - 0} = e \Rightarrow v_3 - v'_2 = ev_2 \dots (4)$

De (3), (4) y (*) obtenemos: $v_3 = \left(\frac{1+e}{2}\right)^2 \cdot u \dots (**)$

Comparando (*) y (**), deducimos por inducción que: $v_n = \left(\frac{1+e}{2}\right)^{n-1} \cdot u$

Reemplazando datos en esta expresión obtendremos el valor de n (número de collares).

$$65,61 = \left(\frac{1+0,8}{2}\right)^{n-1} \cdot 100 \Rightarrow 0,6561 = (0,9)^{n-1} = (0,9)^4 \quad \text{pero,} \quad 0,6561 = (0,9)^4$$

Luego, igualando exponentes: $n - 1 = 4 \quad \therefore \quad n = 5 \text{ collares}$

CAP 20 GRAVITACIÓN UNIVERSAL

20.1 Para el primer caso tenemos, por la relación (20.1): $F_1 = G \frac{m_1 m_2}{d^2} = 160 \text{ N} \dots (1)$

Para el segundo caso tenemos: $F_2 = G \frac{(3m_1) \cdot m_2}{(2d)^2} = 3/4 \text{sdg} \frac{m_1 m_2}{d^2} \dots (2)$

Y de (1) en (2): $F_2 = 3/4 \cdot 160$

$$F_2 = 120 \text{ V}$$

F_1

20.2. Sea m la masa que se quita de 1 y se entrega a 2. Entonces, sus nuevas masas serán $(m_1 - m)$ y $(m_2 + m)$ respectivamente. Luego, la fuerza de atracción entre ellas estará dada por la relación (20.1).

$$F = G \frac{(m_1 - m)(m_2 + m)}{d^2} \dots (*)$$

Ahora, por el principio matemático para un par de factores variables:

$$ab = \text{MÁXIMO} \Leftrightarrow a = b$$

Entonces, la fuerza F será máxima si y solo si los factores $(m_1 - m)$ y $(m_2 - m)$ son iguales entre si:

$$m_1 - m = m_2 + m \Rightarrow m = 1/2 (m_1 - m_2) \quad \therefore m = 5 \text{ kg}$$

20.3 Para el punto A.- Aquí la intensidad del campo sólo se debe a la atracción de la esfera M de radio a . Luego, por la relación (20.4) tendremos:

$$g_A = GM/a^2$$

Para el punto B.- Reconocemos que este punto se encuentra en el campo creado por la esfera M , sin experimentar ninguna influencia por parte del cascarón exterior. Por esta razón, usaremos la relación (20.3), considerando $h = a$.

$$g_B = GM/4a^2$$

Para el punto C.- Aquí la intensidad del campo se debe a la masa que en conjunto forman la esfera y el cascarón, ambos de masa M . Para efectos de cálculo se considerará que toda la masa se encuentra concentrada en el centro O de la esfera. Así por la relación (20.4), donde $R = 3a$, tenemos:

$$g_C = G \frac{2M}{9a^2}$$

20.4 Utilizando la relación (20.5), y considerando por condición del problema que $g_e = g_s/9$, tendremos:

$$\frac{g_s}{9} = g_s \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow (R-h)^2 = 9R^2$$

$$\Rightarrow h = 2R \quad \therefore \quad \boxed{h = 12\,800 \text{ km}}$$

20.5. Considerando como M_T y R_T a la masa y el radio terrestre respectivamente, entonces, por la relación (20.4) tendremos:

$$g_T = G \frac{M_T}{R_T^2} = 10 \text{ m/s}^2 \dots (1)$$

Designando por M_L y R_L a la masa y el radio de la Luna respectivamente, se verificará por condición del problema que $M_L = M_T/100$, y $R_L = R_T/6$. Luego, por la relación (20.4) tenemos:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} = G \cdot \frac{M_T/100}{(R_T/6)^2}$$

$$\Rightarrow g_L = 36/100 (GM_T/R_T^2) \dots (2)$$

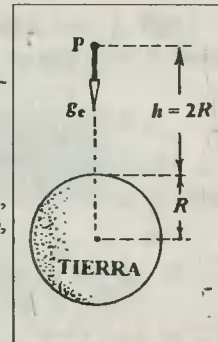


Fig. Solución Prob. 20.4

Finalmente, reemplazando (1) en (2): $g_L = 36/100 \cdot 10 \quad \therefore \quad \boxed{g_L = 3,6 \text{ m/s}^2}$

20.6. Utilizando la relación (20.5), y considerando que $g_e = 3,6 \text{ m/s}^2$, y $g_s = 10 \text{ m/s}^2$ (gravedad en la superficie terrestre), tendremos:

$$3,6 = 10 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow (R+h)^2 = 100/36 R^2 \Rightarrow R+h = 5/3 R \quad \therefore \quad \boxed{h = 2/3 R}$$

20.7. Atendiendo las condiciones del problema, tendremos que la gravedad fuera de la Tierra (g_e) y la gravedad dentro de ella (g_i) deben ser iguales: $g_e = g_i \dots (*)$

Considerando la altura $h = x$, y la distancia desde el centro al punto interior de la Tierra $r = R - x$, utilizaremos las relaciones (20.5) y (20.7) para ser sustituidas en (*).

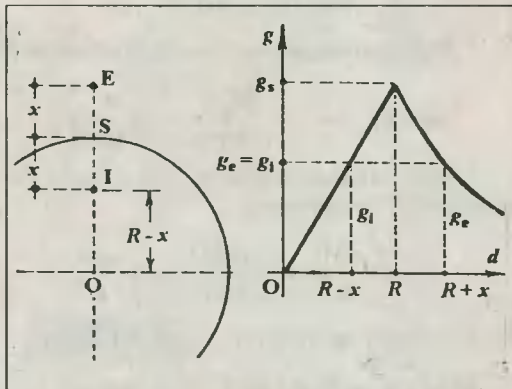
$$g_s \cdot \frac{R^2}{(R+x)^2} = g_s \cdot \frac{(R-x)}{R}$$

$$\Rightarrow R^3 = (R-x)(R+x)^2$$

Desarrollando los productos y reduciendo términos tendremos la siguiente ecuación:

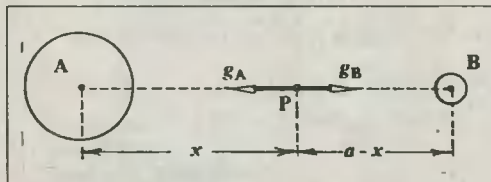
$$x^2 + Rx - R^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} (-R \pm R\sqrt{5})$$

Dado que x es una longitud positiva, tendremos: $\boxed{x = R/2 (\sqrt{5} - 1)}$



20.8. Denominando g_A y g_B a la intensidad de campo gravitatorio creado por los planetas A y B en el punto P respectivamente, diremos por condición del problema lo siguiente: $g_A = 2g_B \dots (*)$

Luego, utilizando la relación (20.2), tomando en cada caso como distancias las que aparecen en el gráfico, al sustituirlos en (*) tendremos:



$$G \frac{M_A}{x^2} = 2G \frac{M_B}{(a-x)^2} \Rightarrow \frac{18M_B}{x^2} = \frac{2M_B}{(a-x)^2} \Rightarrow 9(a-x)^2 = x^2 \quad \therefore \quad \boxed{x = 3/4 a}$$

20.9. A partir del gráfico mostrado notamos que la intensidad del campo gravitatorio total en el punto P viene dado por g_r , de modo que:

$$g_r = \sqrt{g_A^2 + g_B^2} \dots (1)$$

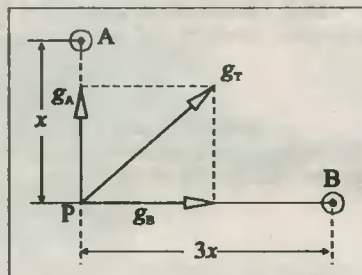
Ahora, utilizando la relación (20.2) para calcular la intensidad de campo creado por cada masa, tenemos:

$$a) \quad g_A = G \frac{m_A}{x^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{8 \cdot 10^{17}}{(10^3 \sqrt{6,67})^2}$$

$$\Rightarrow g_A = 8 \text{ m/s}^2 \dots (2)$$

$$b) \quad g_B = G \frac{m_B}{(3x)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{54 \cdot 10^{17}}{(3 \cdot 10^3 \sqrt{6,67})^2} \Rightarrow g_B = 6 \text{ m/s}^2 \dots (3)$$

Finalmente, reemplazando (2) y (3) en (1) obtendremos: $g_r = \sqrt{8^2 + 6^2} \therefore \boxed{g_r = 10 \text{ m/s}^2}$



20.10. Calculemos de peso de una persona a partir de una relación $P = mg$, siendo g la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta. Luego, en la Tierra el peso estará dado por:

$$P_1 = GmM/R^2 = 700 \text{ N} \dots (1)$$

Calculemos la masa del nuevo planeta a partir del dato de que la densidad en ambos casos es la misma.

$$d_2 = d_1 \Rightarrow \frac{M_2}{4/3\pi R_2^3} = \frac{M}{4/3\pi R^3} \Rightarrow \frac{M_2}{(2R)^3} = \frac{M}{R^3} \Rightarrow M_2 = 8M \dots (*)$$

Luego, aplicando la relación para el peso en el nuevo planeta, teniendo en consideración (*) conseguimos lo siguiente:

$$P_2 = G \frac{mM_2}{R_2^2} = G \frac{m \cdot 8M}{(2R)^2} = 2G \frac{mM}{R^2} \dots (2)$$

Finalmente, de (1) en (2): $\boxed{P_2 = 1400 \text{ N}}$

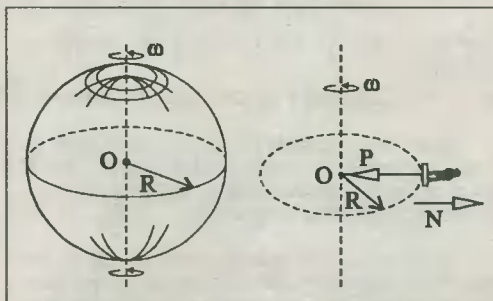
20.11. A partir del DCL de la persona, debemos reconocer que N es la reacción de la balanza sobre los pies del hombre, lo que como sabemos, la acción del hombre sobre ella es de igual valor que la reacción que él recibe.

Aplicando la relación (16.4) tendremos:

$$\Sigma F_{\text{rad van al centro}} - \Sigma F_{\text{rad del centro}} = ma_c$$

$$P - N = m\omega^2 R \Rightarrow N = P - m\omega^2 R$$

$$\therefore \boxed{N = m(g_g - \omega^2 R)}$$



Observación. - El término g_g es la aceleración de gravedad en la superficie de la tierra cuando ésta no experimenta su movimiento de rotación, y cuyo valor se determina por la relación (20.4).

20.12. Utilizando la relación obtenida al final del problema anterior para el valor de la reacción N de la balanza, diremos que ella se hace nula ($N=0$) cuando el período de rotación de la Tierra se hace más pequeña que el que tiene "normalmente". Así pues, tendremos:

$$m(g_s - \omega^2 R) = 0 \Rightarrow \omega^2 R = g_s \Rightarrow (2\pi/T)^2 R = g_s \therefore T = 2\pi \sqrt{R/g_s}$$

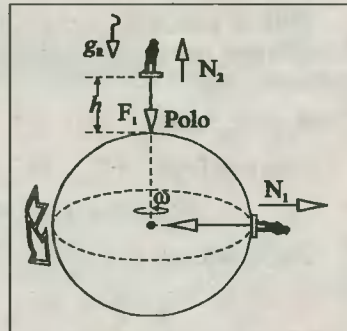
Observación.- Si consideramos que los valores aproximados para R y g , son 6 400 km y 10 m/s² respectivamente, tendremos que el periodo señalado sería:
 $T = 5\,024s = 1\text{ h } 44\text{ min}$

20.13. En el gráfico indicamos el suceso según como la plantea el problema. En el Ecuador se verifica que:

$$N_1 = m(g_s - \omega^2 R) \dots (1)$$

En el Polo el efecto de la rotación es nulo, por ello se verificará que la reacción N_2 de la balanza se equilibra con la fuerza de atracción gravitaria F_2 (peso).

$$N_2 = F_2 = mg_e \Rightarrow N_2 = mg_s \frac{R^2}{(R+h)^2} \dots (2)$$



A continuación, por condición del problema, tendremos lo siguiente igualaremos las relaciones (1) y (2):

$$N_1 = N_2 \Rightarrow m(g_s - \omega^2 R) = mg_s \frac{R^2}{(R+h)^2} \therefore h = R \left[\sqrt{\frac{1}{1 - \omega^2 R/g_s}} - 1 \right]$$

20.14. Cuando la esfera presenta a cavidad notamos que la fuerza disminuye en vista que la masa de la esfera hueca es menor que la original. Esta disminución obedece a que la cavidad (cuya masa ausente denominaremos M_x) ejerce una fuerza de repulsión F_x sobre la partícula m . De este modo, la fuerza resultante sobre ella estará dada por:

$$F_x = F_o - F_x \dots (1)$$

Donde: $F_o = G \frac{M \cdot m}{(2R)^2} = 49\text{ N} \dots (2)$

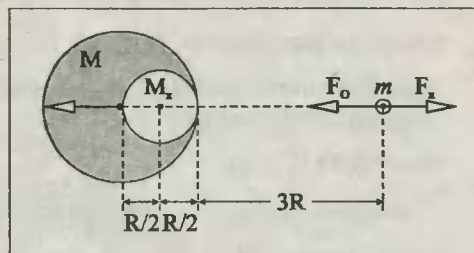
y: $F_x = G \frac{M_x \cdot m}{(3R + R/2)^2} \dots (a)$

Además:

$$\frac{M_x}{M} = \frac{4/3\pi(R/2)^3}{4/3\pi R^3} \Rightarrow M_x = M/8 \dots (b)$$

Luego, al reemplazar (b) en (a): $F_x = \frac{4}{49} G \frac{M/8 \cdot m}{R^2} = \frac{8}{49} \left[G \frac{Mm}{(2R)^2} \right]$

$$\Rightarrow F_x = 8/49 (49\text{ N}) \Rightarrow F_x = 8\text{ N} \dots (3)$$



Finalmente, reemplazamos (2) y (3) en (1):

$$F_r = 41 \text{ N}$$

20.15. Considerando que la energía potencial gravitacional se debe a la interacción de dos partículas, calcularemos dicha energía mediante la relación (20.8) para cada par de partículas, para luego sumar entre sí: Notamos asimismo que por los datos, las energías a calcular son iguales. Luego:

$$E_{TOT} = 3E \quad \therefore \quad E_{TOT} = -3Gm^2/a$$

20.16. El trabajo W_{ext} será calculado utilizando el Teorema del Trabajo y la Energía Mecánica. Considerando que el traslado se efectúa lentamente, entonces la energía mecánica será puramente potencial. Luego:

$$W_{ext} = E_{pg}^B - E_{pg}^A \dots (1)$$

Cálculo de E_{pg}^B : $E_{m,m1}^B \cdot E_{m,m2}^B$

$$\Rightarrow E_{pg}^B = -Gm_1 \cdot m/4a - Gm_2 \cdot m/5a \Rightarrow E_{pg}^B = -19/10 Gm^2/a \dots (2)$$

Cálculo de E_{pg}^A : $E_{m1,m}^A \cdot E_{m2,m}^A$

$$\Rightarrow E_{pg}^A = -Gm_1 \cdot m/3a - Gm_2 \cdot m/5a \Rightarrow E_{pg}^A = -5/2 Gm^2/a \dots (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$W_{ext} = 3/5 Gm^2/a$$

20.17. Debemos reconocer que la partícula parte del reposo en A ($v_o = 0$), y que sale de tal estado debido a las fuerzas gravitacionales, surgiendo en él una aceleración que gradualmente va en aumento. En vista que el movimiento no es uniformemente variado, nos vemos impedidos de utilizar las ecuaciones del MRUV. La alternativa será recurrir a la conservación de la energía mecánica, en vista que el trabajo de las fuerzas externas diferentes al peso es nula ($W_{ext} = 0$)

$$E_{mec}^B = E_{mec}^A \Rightarrow 1/2 mv_B^2 + E_{pg}^B = E_{pg}^A \dots (1)$$

donde: $E_{pg}^B = E_{m,C}^B + E_{m,D}^B = GmM/R \dots (2)$

y: $E_{pg}^A = E_{m,D}^A \Rightarrow E_{pg}^A = -GmM/R \dots (3)$

Finalmente, reemplazando (2) y (3) en (1): $v_B = \sqrt{GM/R}$

20.18. Encontramos una expresión para la velocidad del satélite a partir del esquema mostrado. Por Dinámica Circular tenemos:

$$\Sigma F_{rad} = F_c \Rightarrow F_g = ma_c$$

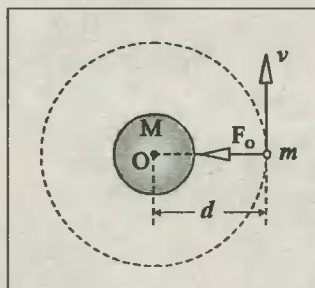
$$\Rightarrow GmM/d^2 = mv^2/d \quad \therefore \quad v = \sqrt{GM/d} \dots (*)$$

Vemos que esta relación concuerda con (20.9). Luego, la energía mecánica total del satélite estará dado por:

$$E_{mec} = E_c + E_{pg} = 1/2 mv^2 - GmM/d \dots (**)$$

Reemplazando (*) en (**) tendremos:

$$E_{mec} = -1/2 GmM/d$$



20.19. Calcularemos la distancia d a la cual se encuentra la órbita del satélite, y ello a partir de la relación (20.5), asumiendo que $R + h = d$.

$$g_s/4 = g_s R^2/d^2 \Rightarrow d = 2R \dots (1)$$

Luego, aplicando la relación (20.9), y teniendo en cuenta la expresión (1), la velocidad del satélite será: $v = \sqrt{GM/2R} = 1/\sqrt{2} (\sqrt{GM/R})$.

Primera velocidad cósmica

$$\Rightarrow v = \sqrt{2}/2 v_1 \therefore v \approx 4\sqrt{2} \text{ km/s}$$

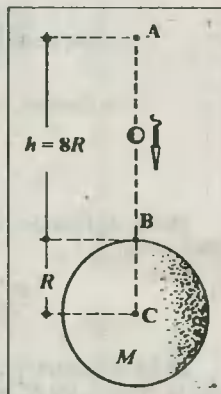
20.20. Utilizando la conservación de la energía mecánica por parte de la partícula m , y despreciando su influencia sobre la Tierra, consideraremos que ésta permanece siempre en reposo. Eligiendo un sistema de referencia ubicado en el centro de la Tierra (C) tendremos:

$$E_{mec}^B = E_{mec}^A$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + E_{pg}^B = \frac{1}{2} m v_A^2 + E_{pg}^A$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - G m M / R = - G m M / 9R \Rightarrow v_B = 4/3 (\sqrt{GM/R}) = v_1$$

$$\Rightarrow v_B = 4/3 v_1 \therefore v_B \approx 10,7 \text{ km/s}$$



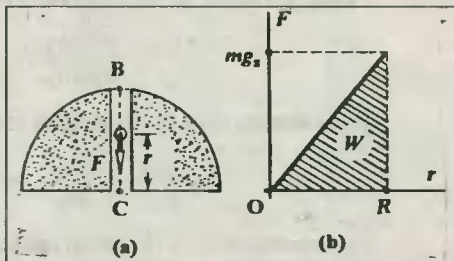
20.21. Cuando la partícula m hace su ingreso al túnel, experimenta una fuerza de atracción gravitatoria (F) variable, y cuyo valor en cualquier posición viene dado por $F = mg_r$, siendo g_r la aceleración de la gravedad en el interior de la Tierra, que viene dada por la relación (20.6).

$$\Rightarrow F = G \frac{mM}{R^3} \cdot r \dots (*)$$

Esta fuerza realiza un trabajo sobre la partícula, provocando en ella un cambio en su energía cinética. Luego, utilizando el Teorema del Trabajo y la Energía Cinética tendremos:

$$W = E_c^C - E_c^B \dots (1)$$

En base al gráfico (b) encontramos que el trabajo realizado por F desde $r=R$ hasta $r=0$ viene dado por el área bajo la curva.



$$W = \frac{1}{2} m g_r R = \frac{1}{2} m G M / R^2 \cdot R \Rightarrow W = \frac{1}{2} G m M / R \dots (2)$$

Luego, reemplazando (2) en (1), y teniendo en cuenta el resultado del problema anterior, para v_B , tendremos:

$$\frac{1}{2} G m M / R = \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_C = 5/3 v_1 \therefore v_C = 13,3 \text{ km/s}$$

20.22. Reconociendo que el sistema físico conformado por m y M está libre de agentes externos, diremos que la cantidad de movimiento se conserva.

$$P_{antes} = P_{después} \Rightarrow m(0) + M(0) = m v_1 + M(-v_2)$$

$$\Rightarrow v_1 = (M/m)v_2 \dots (1)$$

A continuación aplicaremos el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, dado que $W_{\text{ext}} = 0$. Luego:

$$E_{\text{mec}}^{\text{mic}} = E_{\text{mec}}^{\text{fm}} \Rightarrow \frac{(E_c^I + E_{\text{pg}}^I)}{\text{cero}} = E_c^F + E_{\text{pg}}^F$$

$$0 = (\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2) + (-GmMd) \Rightarrow mv_1^2 + Mv_2^2 = 2GmMd \dots (2)$$

Luego, resolviendo (1) y (2) encontramos que: $v_1 = \sqrt{\frac{2GM^2}{d(M+m)}}$; $v_2 = \sqrt{\frac{2Gm^2}{d(M+m)}}$

Finalmente, la velocidad relativa se encontrará a partir de la relación (7.7).

$$v_{1/2} = v_1 - (-v_2) \quad \therefore \quad v_{1/2} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}$$

20.23. Aplicando directamente la Tercera Ley de Kepler dada por medio de la relación (20.13) tendremos:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3} \Rightarrow \left(\frac{T_2}{200}\right)^2 = \left(\frac{4R_1}{R_1}\right)^3 \quad \therefore \quad T_2 = 1\,600 \text{ días}$$

20.24. Encontraremos la relación en que se encuentran los radios de giro r_1 y r_2 , utilizando para ello la Tercera ley de Kepler, tal como se hizo en el problema anterior.

$$(r_2/r_1)^3 = (T_2/T_1)^2 \Rightarrow r_2/r_1 = (T_2/T_1)^{2/3} \dots (1)$$

Ahora, aplicando la relación (20.9) para la velocidad de un satélite, tendremos:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{GM/r_1}}{\sqrt{GM/r_2}} \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{r_2}{r_1} \dots (2)$$

Relacionando entre sí las energías cinéticas tenemos:

$$\frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}mv_2^2} \Rightarrow \frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \dots (3)$$

Finalmente, de (1) y (2) en (3) tendremos lo siguiente:

$$E_{c1}/E_{c2} = (T_2/T_1)^{2/3} \quad \therefore \quad E_{c1}/E_{c2} = 4$$

20.25. A partir de los datos y del gráfico propuesto encontraremos los radios medios de giro.

Para Phobos: $r_p = \frac{1}{2}(a+b) \Rightarrow r_p = 2\,500 \text{ km}$

Para Deimos: $r_D = \frac{1}{2}(3\,000 + 6\,800) \Rightarrow r_D = 4\,900 \text{ km}$

Ahora, utilizando la Tercera Ley de Kepler tendremos: $(T_{\text{Phobos}}/T_{\text{Deimos}})^2 = (r_p/r_D)^3$

$$\Rightarrow T_p/T_D = (2\,500/4\,900)^{3/2} \Rightarrow T_p = 125/343 T_D \quad \therefore \quad T_p = 125 \text{ días}$$

20.26. A partir de los datos y del esquema mostrado podemos deducir que:

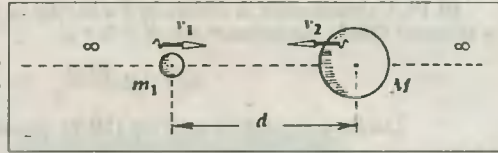


Fig. Solución Prob. 20.22

$$x + 6 \text{ meses} + T/2 = t_{\text{BAPF}} \dots (*)$$

donde: $T = 36 \text{ meses}$, y $t_{\text{BAPF}} = 30 \text{ meses}$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ meses} \dots (**)$$

A continuación, llamaremos S al área encerrada por la elipse, y utilizando la Segunda Ley de Kepler, dada por la relación (20.12) tendremos:

$$S_x/S = x/T \quad \therefore \quad S_x = 1/6 S$$

20.27. Asumiendo que t es el tiempo para ir desde C hasta D , entonces el tiempo para ir desde D hasta A será $5t$, y el periodo $T = 12t$. Luego, aprovechando el gráfico, diremos que el área en el tramo DA es $S_x + S/4$, siendo S el área de toda la elipse. Finalmente, aplicamos la Segunda Ley de Kepler.

$$\frac{S_x + S/4}{S} = \frac{5t}{T} \Rightarrow S_x + S/4 = 5/12 S$$

$$\therefore \quad S_x = S/6$$

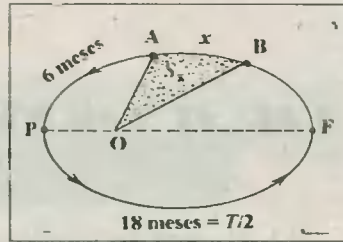
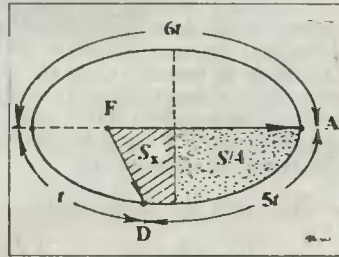


Fig. Solución Prob. 20.26



CAP 21 MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

21.1. Al construir el movimiento, y en él los tiempos empleados, logramos reconocer que el periodo es $T = 6 \text{ s}$. Luego, la frecuencia angular estará dada por $\omega = 2\pi/T = \pi/3 \text{ rad/s}$. Asimismo, logramos reconocer que los puntos Q y R de la trayectoria en el cual el móvil presenta la misma velocidad v equidistan de la posición de equilibrio (O). Luego, analizando el movimiento de P a Q utilizaremos la relación (21.3) para la posición (x).

$$x = A \cos(\omega t) \Rightarrow 10 \text{ cm} = A \cos(\pi/3 \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ s})$$

$$\Rightarrow 10 \text{ cm} = A \cdot 1/2 \quad \therefore \quad \boxed{A = 20 \text{ cm}}$$

21.2. Debemos reconocer que el movimiento que experimenta la proyección de la partícula es un MAS. Por esta razón emplearemos la relación (21.2), en vista que el movimiento no se inicia en el extremo.

a) $t = 0 \text{ s}$: $x_1 = A \cos(\omega \cdot 0 + \phi)$

$$\Rightarrow 4/5 R = R \cos \phi \Rightarrow \phi = 37^\circ$$

b) $t = 4 \text{ s}$: $x_2 = A \cos(\omega \cdot 4 + 37^\circ)$

$$\Rightarrow 3/5 R = R \cos(4\omega + 37^\circ)$$

$$\Rightarrow 4\omega + 37^\circ = 53^\circ \Rightarrow \omega = 4^\circ/\text{s}$$

$$\Rightarrow \omega = 4^\circ \cdot \pi/180^\circ \text{ rad/s} \Rightarrow \omega = \pi/45 \text{ rad/s}$$

Luego, el periodo T del movimiento viene dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/45} \Rightarrow \boxed{T = 90 \text{ s}}$$

Finalmente, la ecuación del movimiento viene dado por:

$$\boxed{x = 35 \cos(\pi/45 t + 37^\circ)}$$

21.3. Reconocemos que los datos son: $A = 25 \text{ cm}$, $x = 7 \text{ cm}$, $v = 48 \text{ cm/s}$, y $\phi = 0^\circ$. Utilizando la relación (21.5) encontraremos la frecuencia angular (ω).

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow 48 = \omega \sqrt{25^2 - 7^2} \Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s}$$

Seguidamente, el periodo (T) del movimiento viene dado por la siguiente relación:

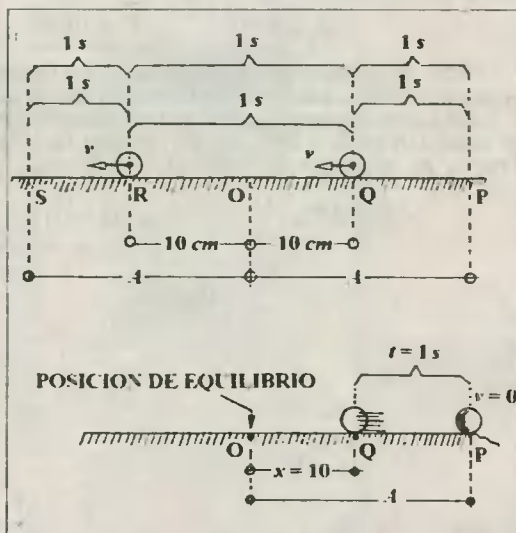


Fig. Solución Prob. 21.1

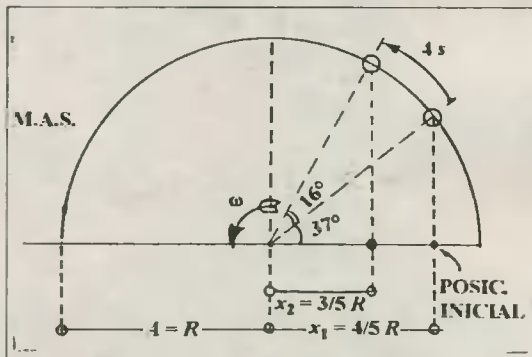


Fig. Solución Prob. 21.2

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/2 \quad \therefore \quad T = \pi \text{ s}$$

21.4. A partir del dato de la frecuencia obtendremos la frecuencia angular utilizando la siguiente relación:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(5 \text{ s}^{-1}) \Rightarrow \omega = 10\pi \text{ rad/s}$$

Y empleando la relación (21.10) para la aceleración en un extremo ($x = A$), que es también la aceleración máxima de todo el movimiento. Así tendremos:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A \Rightarrow 10\pi^2 \text{ (m/s}^2\text{)} = (10\pi \text{ rad/s})^2 A \quad \therefore \quad A = 0,1 \text{ m o } A = 10 \text{ cm}$$

21.5. De acuerdo con los datos, emplearemos las relaciones (21.5) y (21.6).

a) En la posición $x = 0 \text{ m}$.- La velocidad es máxima, y viene dada por:

$$\omega A = v_{\text{máx}} \Rightarrow \omega A = 15 \quad \dots (1)$$

b) En la posición $x = 9 \text{ m}$.- La velocidad viene dada por la relación:

$$\omega \sqrt{A^2 - x^2} = v \Rightarrow \omega \sqrt{A^2 - 9^2} = 12 \quad \dots (2)$$

Luego, dividiendo (1) ÷ (2) miembro a miembro tenemos:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 - 81}} = \frac{15}{12} \Rightarrow \frac{A^2}{A^2 - 81} = \frac{25}{16} \Rightarrow A = 15 \text{ m}$$

Al reemplazar en (1): $\omega = 1 \text{ rad/s}$

Finalmente, utilizando la relación (21.9) calcularemos la aceleración en la posición $x = 9 \text{ m}$.

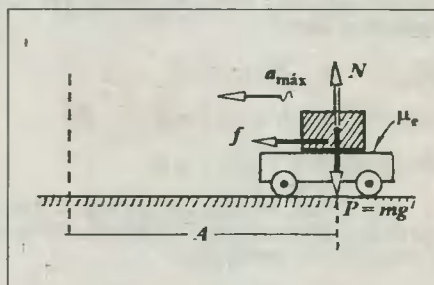
$$\Rightarrow a = \omega^2 x = 1^2 \cdot 9 \quad \therefore \quad a = 9 \text{ m/s}^2$$

21.6. Analizando el aspecto dinámico del movimiento en el punto extremo (derecho), que es el lugar en el cual el cuerpo intenta abandonar la plataforma por inercia, es ahí donde la velocidad instantánea es nula y la aceleración es máxima. Luego, a partir del DCL mostrado, y utilizando la Segunda Ley de Newton, tendremos:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow f_{\text{roz}} = ma_{\text{máx}} \Rightarrow \mu_e mg = m(\omega^2 A) \\ \Rightarrow \mu_e = \omega^2 A/g$$

donde: $\omega = 2\pi f \dots (f = 15 \text{ osc/min} = 0,25 \text{ osc/s})$

$$\Rightarrow \mu_e = 4\pi^2 f^2 \cdot A/g \Rightarrow \mu_e = 4\pi^2 (0,25)^2 \cdot 1,2/\pi^2 \quad \therefore \quad \mu_e = 0,3$$



21.7. Por tratarse de un oscilador mecánico, su frecuencia angular vendrá dada por la relación (21.13).

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_{\text{sist}}}} = \sqrt{\frac{k}{M + m}} \quad \dots (1)$$

Y utilizando el resultado del problema anterior, despejaremos la amplitud (A).

$$\mu = \omega^2 A/g \Rightarrow A = \mu g/\omega^2 \quad \dots (2)$$

Luego, de (1) en (2): $A = \frac{\mu g(M+m)}{k}$

21.8. En el mismo instante que la caja pierde contacto con el piso, su peso concuerda con la fuerza F que ejerce el resorte sobre él, tal como lo indica el diagrama adjunto. Luego, por equilibrio:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F = Mg \dots (1)$$

Pero ya que la fuerza en el resorte viene dada por la relación (21.12) (Ley de Hooke), siendo la deformación x por compresión la que se mide entre el nivel (1) sin deformar y el nivel (3) de máxima elongación, tendremos:

$$F = kx = k(A - x_0) \dots (2)$$

Igualando (1) y (2) despejamos A .

$$k(A - x_0) = Mg \Rightarrow A = Mg/k + x_0 \dots (3)$$

Y observando la posición (2) de equilibrio del MAS, deducimos por equilibrio que:

$$F_0 = mg \Rightarrow kx_0 = mg \Rightarrow x_0 = mg/k \dots (4)$$

Finalmente, reemplazamos (4) en (3):

$$A = \frac{(M+m)g}{k} \therefore A = 0,25 \text{ m}$$

21.9. Al analizar el DCL de la caja en el mismo instante que está a punto de resbalar, por equilibrio tendremos que:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = f_{roz} = \mu N \dots (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = (M+m)g \dots (2)$$

De (2) en (1): $F = \mu(M+m)g \dots (*)$

Y por la relación (21.12), la fuerza que ejerce el resorte en su posición de máxima elongación o amplitud (A), tendremos:

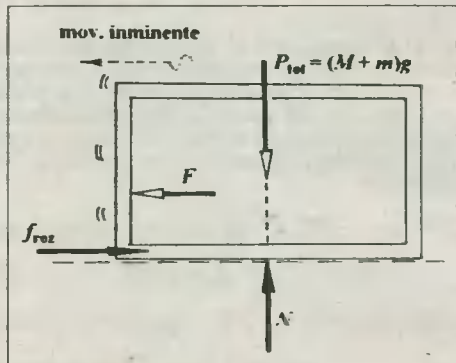
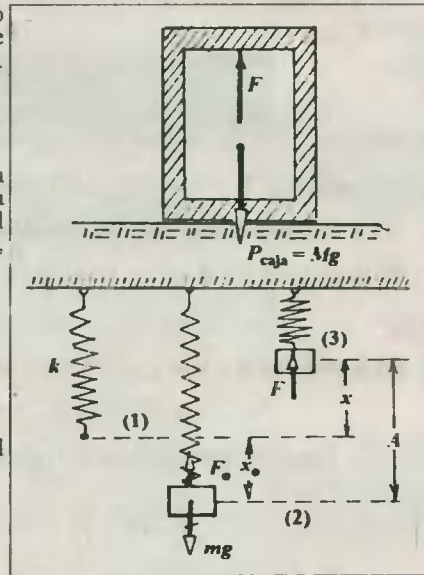
$$F = kA \dots (**)$$

Finalmente, al igualar (*) y (**) despejamos la amplitud.

$$A = \frac{\mu(M+m)g}{k}$$

21.10. Sea A la altura que se le ha hecho descender al bloque desde su posición de equilibrio, indicado en la figura por el nivel (2).

De la posición de equilibrio hallaremos la deformación inicial (x_0) del resorte.



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_o = mg \Rightarrow kx_o = mg$$

$$\Rightarrow x_o = mg/k \dots (1)$$

De la posición (3) de máxima deformación (x), el bloque inferior se encuentra en equilibrio y a punto de levantarse por causa de la fuerza F del resorte estirado.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F = mg \Rightarrow kx = mg$$

Pero, del esquema: $x = A - x_o$

$$\Rightarrow k(A - x_o) = mg \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) despejamos A :

$$A = 2mg/k$$

21.11. Suponemos que el resorte original está formado por dos resortes iguales de constante k' cada uno, y cuyo equivalente es k . Por la relación (21.20) tendremos, para el esquema (a):

$$1/k = 1/k' + 1/k' = 2/k' \therefore k' = 2k$$

Luego, para el esquema (b), el periodo de las nuevas oscilaciones vendrá dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{m/k'} \therefore T = 2\pi\sqrt{m/2k}$$

21.12. Analizando el DCL del bloque en su posición de equilibrio, tendremos:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg = F \Rightarrow mg = kx_o$$

$$\Rightarrow m/g = x_o/k \dots (*)$$

Luego, el periodo de las oscilaciones se conseguirá utilizando la relación (21.14) y (*).

$$T = 2\pi\sqrt{x_o/g} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{0,04/\pi^2}$$

$$\therefore T = 0,4 \text{ s}$$

21.13. De la posición (2) por equilibrio tendremos:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow kx_1 = m_1g \Rightarrow k = m_1g/x_1 \dots (1)$$

En el esquema, el nivel (3) representa la nueva posición de equilibrio (PE) de las oscilaciones, y A su respectiva amplitud.

Por conservación de la energía mecánica tendremos:

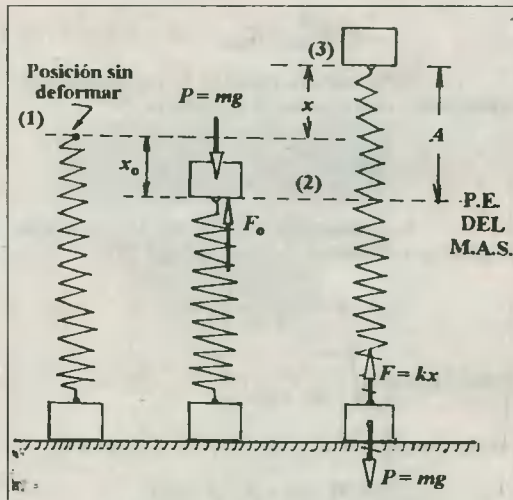


Fig. Solución Prob. 21.10

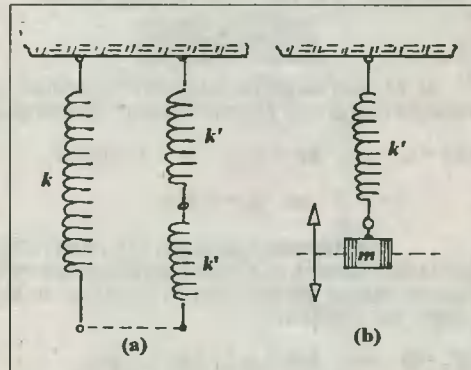


Fig. Solución Prob. 21.11

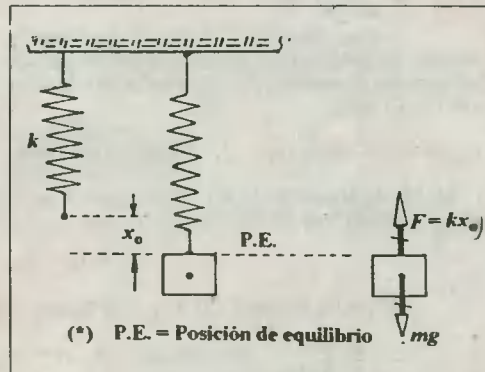


Fig. Solución Prob. 21.12

$$E_{\text{mec}}^B = E_{\text{mec}}^C \Rightarrow \frac{1}{2} kx_1^2 + (m_1 + m_2)g \cdot (2A) = \frac{1}{2} k(2A + x_1)^2$$

Utilizando la relación (1) y efectuando operaciones despejamos la amplitud (A).

$$A = \left(\frac{m_2}{m_1} \right) x_1 \dots (2)$$

A continuación, calculamos la frecuencia angular (ω) utilizando la relación (21.13).

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

Y de (1): $\omega = \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \frac{g}{x_1}} \dots (3)$

Reemplazando valores en (2) y (3) obtenemos:

$$A = 32 \text{ cm, y } \omega = 5 \text{ rad/s}$$

Finalmente, la ecuación del movimiento será:

$$x = 0,32 \cos(5t)$$

21.14. Del esquema mostrado analizamos la posición (2), el cual por equilibrio se cumple que:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow kx_1 = m_1g \Rightarrow k = m_1g/x_1 \\ &\Rightarrow k = 2 \text{ N/m} \end{aligned}$$

Analizando la posición (3), observamos que la deformación x_2 será la amplitud de las oscilaciones que se inician desde el abandono de m_2 . Luego, por equilibrio:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow k(x_1 + x_2) = (m_1 + m_2)g \\ \Rightarrow x_2 &= m_2g/k \Rightarrow x_2 = 0,4 \text{ m} \end{aligned}$$

Luego, cuando el bloque m_1 pase por la posición de equilibrio (PE) desarrollará su velocidad máxima de oscilación, que en virtud a la relación (21.6) será:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = \sqrt{k/m_1} \cdot x_2 \quad \therefore \quad v_{\text{máx}} = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$$

21.15. Analizando el DCL del bloque en la parte más alta de las oscilaciones, se encuentra que por la Segunda Ley de Newton se obtiene:

$$F_R = \Sigma F \Rightarrow F_R = m_A \cdot g$$

Y por la relación (21.12), esta fuerza también viene dada por la Ley de Hooke. Entonces:

$$kA = m_A \cdot g \Rightarrow A = m_A \cdot g/k \quad \therefore \quad A = 0,5 \text{ m}$$

21.16. Por condición del problema: $E_c/E_{pe} = 1/3 \Rightarrow E_c = 1/3 E_{pe}$

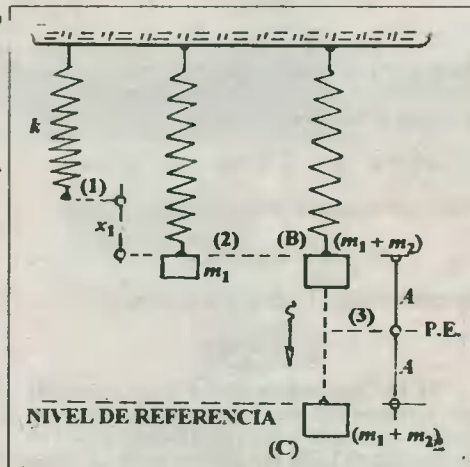


Fig. Solución Prob. 21.13

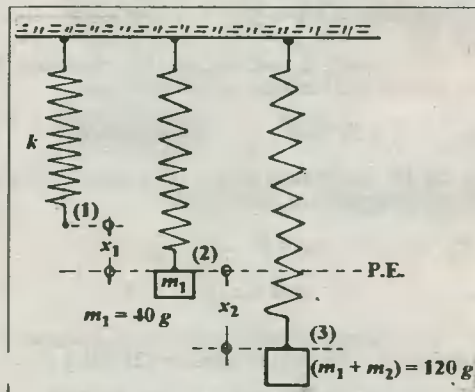


Fig. Solución Prob. 21.14

Y por las relaciones (21.16) y (21.17) encontramos que:

$$E_c + E_{pe} = E_{mec} \Rightarrow 4/3 E_{pe} = 1/2 kA^2 \Rightarrow 1/2 kx^2 = 3/8 kA^2 \therefore x = \sqrt{3/2} A$$

21.17. El periodo del movimiento viene dado por: $T = T_0/2 + 2t \dots (1)$

siendo $T = 2\pi \sqrt{m/k}$, y $t = T_0/4 - t_0 \dots (2)$

Al analizar el movimiento de P a Q, utilizando la relación (21.3) encontramos el tiempo t_0 que el oscilador deja de utilizar por causa del choque.

$$x = A \cos(\omega t_0) \Rightarrow A/2 = A \cos[(2\pi/T_0)t_0] \Rightarrow 2\pi t_0/T_0 = \pi/3 \Rightarrow t_0 = T_0/6 \dots (3)$$

Al reemplazar (3) en (2): $t = T_0/12 \dots (*)$

A continuación, haremos lo mismo con (*) en (1): $T = T_0/2 + T_0/6 = 2/3 T_0$

Finalmente, por la relación (21.14) tendremos que el nuevo periodo de las oscilaciones estará dado por:

$$T = 4\pi/3 \sqrt{m/k} \therefore T = 1 \text{ s}$$

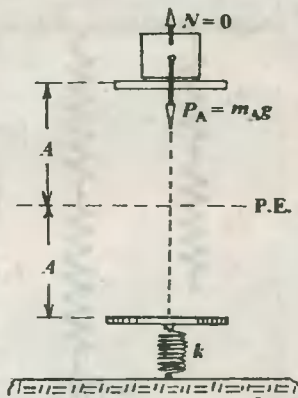


Fig. Solución Prob. 21.15

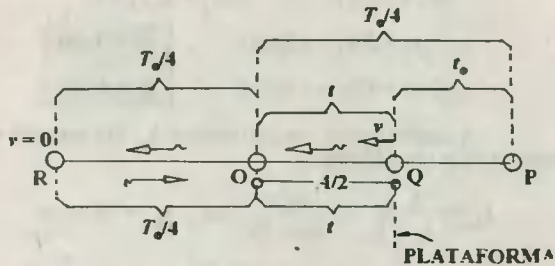


Fig. Solución Prob. 21.17

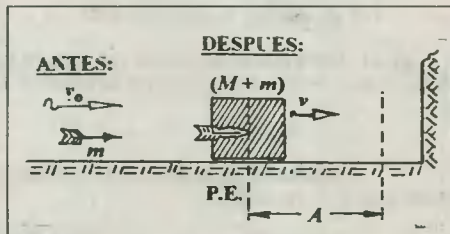
21.18. Analizando el choque plástico, utilizamos el Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento para encontrar la velocidad v del movimiento del oscilador.

$$mv_0 = (m + M)v \Rightarrow v = \left(\frac{m}{M + m}\right)v_0 \Rightarrow v = 10 \text{ m/s}$$

Reconocemos que la velocidad v se constituye en la velocidad máxima del oscilador, y el lugar del choque en la posición de equilibrio del MAS. Luego, por las relaciones (21.13) y (21.16) tendremos:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s, y } \omega A = v \Rightarrow A = 1 \text{ m}$$

Finalmente, la ecuación del movimiento viene dado por: $x = 1 \cdot \cos(10t)$



21.19. Analicemos la conservación de la cantidad de movimiento en el eje horizontal y en la zona de impacto.

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 \dots (*)$$

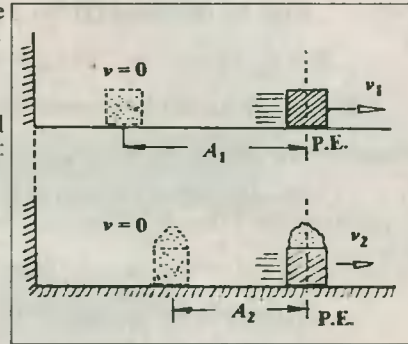
siendo v_1 y v_2 las velocidades máximas antes y después del impacto ($x=0$). Luego, utilizando la relación (21.6) en (*):

$$m_1 \omega_1 A_1 = (m_1 + m_2) \omega_2 A_2$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot \sqrt{\frac{k}{m_1}} A_1 = (m_1 + m_2) \cdot \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A_2$$

$$\Rightarrow A_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} A_1 \Rightarrow A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_1$$

$$A_1 = \sqrt{2}/2 \cdot 6 \text{ cm} \Rightarrow A_2 = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$



Finalmente, el nuevo periodo será: $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \therefore T_2 = \pi/5 \text{ s}$

21.20. Por tratarse de un acoplamiento en serie, emplearemos la relación (21.19).

$$F_1 = F_2 = P \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2 = P$$

$$\Rightarrow x_1 = P/k_1 = 180/60 \therefore x_1 = 3 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow x_2 = P/k_2 = 180/30 \therefore x_2 = 6 \text{ cm}$$

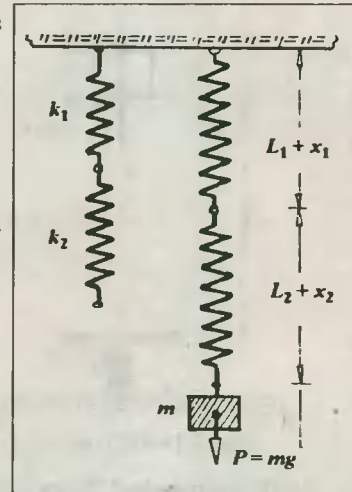
A continuación, encontraremos k_{eq} del sistema utilizando la relación (21.20).

$$k_{eq} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} = \frac{60 \cdot 30}{60 + 30} \Rightarrow k_{eq} = 20 \text{ N/cm}$$

$$k_{eq} = 2000 \text{ N/m}$$

Finalmente, empleando la relación (21.14) calculamos el periodo de las oscilaciones.

$$T = 2\pi \sqrt{m/k_{eq}} = 2\pi \sqrt{18/2000} \therefore T = 0,6 \text{ s}$$



21.21. Por tratarse de cuatro resortes en paralelo, encontraremos la constante equivalente (k_{eq}) del sistema, empleando para ello la relación (21.23).

$$k_{eq} = \Sigma k \Rightarrow k_{eq} = 4k$$

Finalmente, el periodo de las oscilaciones estará dado por: $T = 2\pi \sqrt{m/4k}$

$$T = 2\pi \sqrt{4/4 \cdot 100} \therefore T = \pi/5 \text{ s}$$

21.22. Por el esquema dado se puede apreciar que para un pequeño desplazamiento lateral los resortes experimentan deformaciones iguales.

$$x_1 = x_2 = x$$

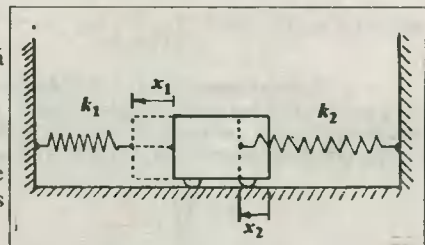


Fig. Solución Prob. 21.22

En base a la relación (21.21) reconocemos que los resortes están acoplados en paralelo; por ello, su periodo estará dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \quad \therefore \quad T = 2\pi/5 \text{ s}$$

21.23. Reconocemos que el bloque experimenta una fuerza resultante que viene dada por:

$$F = F_1 - F_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2 \dots (*)$$

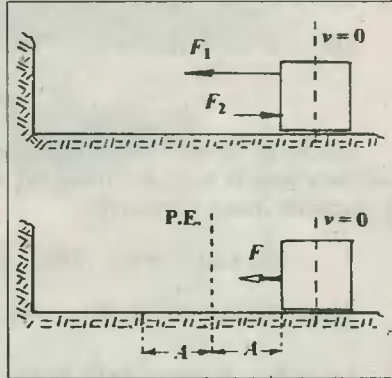
donde F será a su vez la fuerza deformadora máxima sobre el oscilador mecánico, dado que éste inicia su movimiento con ella, de modo que si A es la amplitud de las oscilaciones, por la ley de Hooke se tendrá en (*):

$$k_{eq} A = k_1 x_1 - k_2 x_2 \Rightarrow A = \frac{k_1 x_1 - k_2 x_2}{k_1 + k_2}$$

$$\therefore \quad A = 0,34 \text{ m}$$

Finalmente, el periodo de las oscilaciones vendrá dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \quad \therefore \quad T = \pi/5 \text{ s}$$



21.24. Para hallar la amplitud de las oscilaciones utilizaremos el Principio de Conservación de la Energía Mecánica.

$$E_{mec}^{fin} = E_{mec}^{inic}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k(2A)^2 = mg(2A \text{sen} 30^\circ)$$

$$\Rightarrow A = \frac{mg \text{sen} 30^\circ}{k} \Rightarrow A = 0,05 \text{ m}$$

Ahora, calculamos el periodo a partir de:

$$T = 2\pi \sqrt{m/k} = 2\pi \sqrt{2/200} \quad \therefore \quad T = \pi/5 \text{ s}$$

Luego, la frecuencia angular será: $\omega = 2\pi/T = 10 \text{ rad/s}$. Finalmente, la ecuación que define el movimiento será:

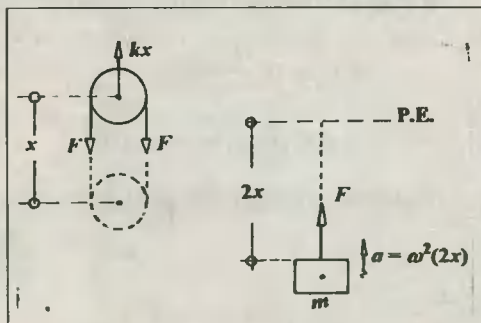
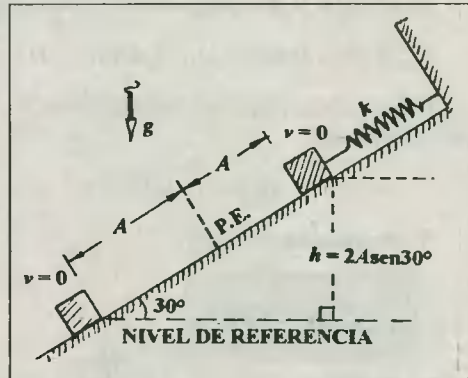
$$x = 0,05 \cos(10t)$$

21.25. De la polea se observa que:

$$2F = kx \Rightarrow F = kx/2 \dots (1)$$

Asimismo, cuando la polea desciende x , el bloque desciende $2x$. La fuerza resultante sobre el bloque está dada por:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F = m\omega^2(2x) \dots (2)$$



$$\text{De (1) y (2): } 2m\omega^2 x = kx/2 \Rightarrow \omega = 1/2 \sqrt{k/m}$$

$$\therefore \omega = 2 \text{ rad/s}$$

21.26.- Para una pequeña desviación de la barra respecto a la horizontal, aplicamos la segunda condición de equilibrio.

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$$

$$\Rightarrow kx_1 \cdot a = k_2 \cdot x_2 \cdot b \dots (1)$$

siendo k_2 la constante elástica del oscilador para la masa m . Ahora, por el Teorema de Tales, diremos que:

$$x_1/a = x_2/b \Rightarrow x_1 = (a/b)x_2 \dots (2)$$

$$\text{Luego, de (2) en (1): } k(a/b)x_2 \cdot a = k_2 \cdot x_2 \cdot b \Rightarrow k_2 = k(a/b)^2 \dots (*)$$

Finalmente, el periodo de las oscilaciones de m estará dado por: $T = 2\pi \sqrt{m/k_2}$

$$\text{Y de (*): } T = 2\pi(b/a) \sqrt{k/m} \therefore T = \pi/5 \text{ s}$$

21.27. a. De la descomposición de fuerzas encontramos que:

$$F_{\text{rec.}} = \Sigma F_y = 2F \sin \theta = 2k(l - l_0) \sin \theta \dots (1)$$

Considerando pequeños desplazamientos, encontramos que:

$$\sin \theta \approx \theta \approx x/l \dots (2)$$

Y reemplazando (2) en (1):

$$F_{\text{rec.}} = 2k \cdot \frac{(l - l_0)}{l} x$$

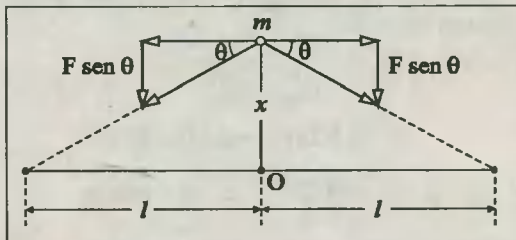
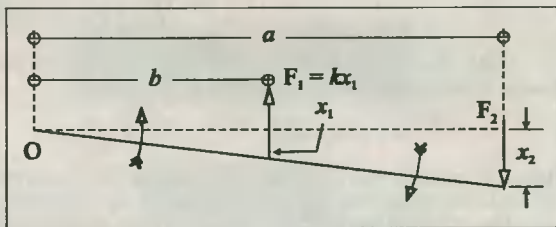
21.27.b. Del resultado anterior encontramos la frecuencia angular.

$$\Rightarrow k_{\text{eq}} = 2k \frac{(l - l_0)}{l} \Rightarrow k_{\text{eq}} = 100 \text{ N/m}$$

$$\omega = \sqrt{k_{\text{eq}}/m} = \sqrt{100/4} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

Finalmente, la ecuación del movimiento viene dado por: $x = A \cos(\omega t)$

$$\therefore x = 2 \cos(5t) \text{ (cm)}$$



CAP 22 PENDULO SIMPLE

22.1. Sean L_0 y T_0 la longitud y el periodo iniciales del péndulo, de modo que, según la ecuación (22.1) tendremos: $T_0 = 2\pi \sqrt{L_0/g} \dots (1)$

Y por condición del problema: $T_0 + 0,4 \text{ s} = 2\pi \sqrt{\frac{L_0 + 1 \text{ m}}{g}} \dots (2)$

Reemplazando T_0 de (1) en (2) considerando $g \approx \pi^2 \text{ m/s}^2$, tendremos:

$$2\pi \sqrt{\frac{L_0}{\pi^2}} + 0,4 = 2\pi \sqrt{\frac{L_0 + 1}{\pi^2}} \Rightarrow \sqrt{L_0} + 0,2 = \sqrt{L_0 + 1}$$

Elevando al cuadrado y despejando L_0 encontramos: $L_0 + 0,4 \sqrt{L_0} + 0,04 = L_0 + 1$

$$\Rightarrow \sqrt{L_0} = 2,4 \quad \therefore \boxed{L_0 = 5,76 \text{ m}}$$

22.2. Por condición del problema se tiene: Al inicio: $T_0 = 2\pi \sqrt{L_0/g} \dots (1)$

Al final: $T_f = 2\pi \sqrt{\frac{L_0 + (44/100)L_0}{g}} \dots (2)$

Dividiendo (2) ÷ (1) miembro a miembro tenemos: $\frac{T_f}{T_0} = \sqrt{\frac{1,44L_0}{L_0}}$

$$\Rightarrow T_f = 1,2T_0 = 1,2(5) \quad \therefore \boxed{T_f = 6 \text{ s}}$$

22.3. Utilizando la 4ª ley del péndulo simple: $T \propto 1/\sqrt{g}$.

Luego, aplicando esta ley con los datos del problema, tendremos:

$$\frac{T_{Luna}}{T_{Tierra}} = \sqrt{\frac{g_{Tierra}}{g_{Luna}}} = \sqrt{\frac{g_{Tierra}}{1/6 g_{Tierra}}} \Rightarrow T_{Luna} = T_{Tierra} \cdot \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow T_{Luna} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \text{ s} \quad \therefore \boxed{T_{Luna} = 6 \text{ s}}$$

22.4. Del esquema original podemos deducir que la longitud del péndulo viene dado por la diferencia de alturas H y h : $L = H - h$. A continuación, aplicaremos la relación (22.4) para la frecuencia del péndulo.

Al inicio: $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{H - h_1}} \dots (1)$

Al final: $f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{H - h_2}} \dots (2)$

Dividiendo (1) ÷ (2) tendremos: $\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{H - h_2}{H - h_1}} \Rightarrow \left(\frac{10}{15}\right)^2 = \frac{H - 1,2}{H - 0,2} \quad \therefore \boxed{H = 2 \text{ m}}$

22.5. Teniendo en cuenta que el movimiento pendular es un MAS, utilizaremos la relación (21.6) para la velocidad máxima, así como también la relación (22.5) para la frecuencia angular.

$$v = \omega A = \sqrt{g/L} A \Rightarrow \sqrt{g/L} = v/A \Rightarrow L = g(A/v)^2 \dots (*)$$

Reemplazando datos en (*) tendremos: $L = 10(2/1)^2 \therefore L = 40 \text{ m}$

22.6. De los datos podemos reconocer la amplitud $A = 0,05 \text{ m}$, la longitud pendular $L = 4 \text{ m}$, y la aceleración de la gravedad $g = \pi^2 \text{ m/s}^2$. entonces, utilizando la relación (22.5) encontraremos la frecuencia angular (ω).

$$\omega = \sqrt{g/L} = \sqrt{\pi^2/4} \Rightarrow \omega = \pi/2 \text{ rad/s}$$

Enseguida, emplearemos la relación (21.3) para la posición del móvil.

$$x = A \cos(\omega t) \therefore x = 0,05 \cos(\pi/2 t)$$

22.7. Dado que la longitud (L) del péndulo es bastante mayor que la amplitud (A) de las oscilaciones, el movimiento curvo de la masa pendular es prácticamente rectilíneo. Sin embargo, atendiendo ahora el aspecto curvilíneo del movimiento, diremos que en virtud a la Dinámica Circular, se tiene que:

$$\sum F_{\text{rad}} = m a_c \Rightarrow T - mg = mv^2/L \dots (1)$$

siendo v la velocidad máxima del MAS, de modo que su valor viene dado por:

$$v = \omega A = \sqrt{g/L} A \dots (2)$$

Ahora, reemplazando (2) en (1), y despejando la tensión (T), tenemos:

$$T = mg[1 + (A/L)^2] \therefore T = 52 \text{ N}$$

22.8. Utilizaremos la relación obtenida en el problema anterior para la tensión, así como el esquema dado, en el cual la amplitud A viene dada por $A = \theta L$ (suponemos θ muy pequeño).

$$\Rightarrow T = mg[1 + (\theta L/L)^2] \therefore T = mg(1 + \theta^2)$$

22.9. Calculemos los periodos de oscilación de cada péndulo utilizando la relación (22.1).

$$T_1 = 2\pi \sqrt{6,25/\pi^2} \Rightarrow T_1 = 5 \text{ s}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{2,25/\pi^2} \Rightarrow T_2 = 3 \text{ s}$$

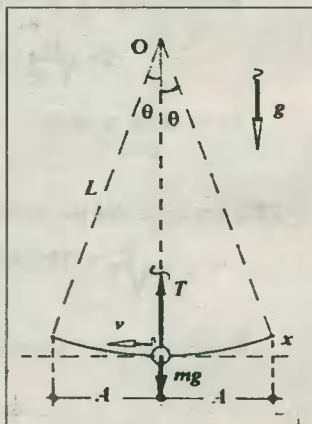
Con estos datos reconocemos que los péndulos 1 y 2 vuelven a sus posiciones iniciales luego de 5 s y 3 s respectivamente; de ello podemos afirmar que ambos volverán a estar en sus posiciones iniciales otra vez después de un tiempo mínimo T , cuyo valor será el mínimo común múltiplo (MCM) de T_1 y T_2 . Luego:

$$T = \text{MCM}(T_1; T_2) \therefore T = 15 \text{ s}$$

22.10. Utilizando el esquema de la figura y la 4ª ley del péndulo simple, los periodos T_s y T_h en la superficie terrestre y a la altura h que buscamos, estarán relacionadas del siguiente modo:

$$T_s/T_h = \sqrt{g_h/g_s} \dots (*)$$

Ahora, reemplazamos la gravedad g_h por la relación (20.5) en la ecuación (*), obteniéndose



una expresión para T_h en función de la altura h .

$$\frac{T_s}{T_h} = \sqrt{\frac{g_s \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2}}{g_s}} = \frac{R}{R+h}$$

$$\Rightarrow T_h = T_s(1 + h/R) \dots (**)$$

Y del dato: $2T_s = T_s(1 + h/R) \Rightarrow h = R$

$\therefore h = 6\,400 \text{ km}$

22.11. Según los datos del problema, el periodo original está dado por la relación:

$$T_o = 2\pi \sqrt{L_o/g_s} \dots (1)$$

Seguidamente, el nuevo periodo para las condiciones dadas será:

$$T_f = 2\pi \sqrt{2L_o/g_h} \dots (2)$$

Dividiendo (2) ÷ (1) y utilizando la relación (20.5) para determinar la gravedad g_h sabiendo que $h = R_T$, tendremos: $g_h = g_s/4$.
Luego:

$$\frac{T_f}{T_o} = \sqrt{\frac{2L_o}{g_s/4}} \Rightarrow T_f = 2\sqrt{2} T_o \therefore T_f = 4 s$$

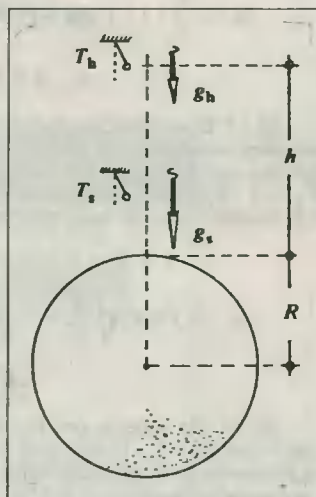


Fig. Solución Prob. 22.10

22.12.a. Sean T_1 y T_2 los periodos del péndulo en los lugares donde la aceleración de la gravedad es respectivamente g_1 y g_2 . Ya que $g_1 > g_2$, encontramos que $T_1 < T_2$, lo que nos permite afirmar que cuando el péndulo da una oscilación en la zona 2, demora un tiempo mayor, de modo que las horas que se marcan en el reloj están atrasadas respecto a las naturales. Así, en cada oscilación de tiempo natural (T_1) se experimenta un atraso $T_2 - T_1$. Luego, el atraso (Δt) acumulado en un día se obtendrá por una regla de tres simple directa.

<u>Tiempo natural</u>	<u>Atraso</u>
T_1	$T_2 - T_1$
1 día	Δt
	$\Delta t = \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) \cdot 1 \text{ día}$
	$\Rightarrow \Delta t = (T_2/T_1 - 1) \cdot 1 \text{ día} \dots (*)$

Ahora, utilizando la 4ª ley del péndulo, y reemplazando 1 día por 86 400 s, tendremos en (*):

$$\Delta t = (\sqrt{g_1/g_2} - 1) \cdot 86\,400 \text{ s} \therefore \Delta t = 221,26 \text{ s, ó } \Delta t = 3 \text{ min } 41,26 \text{ s}$$

22.12.b. En este caso reemplazamos el Δt obtenido y $T_1 = 2 \text{ s}$ en (*) y obtenemos: $T_2 = 2,005 \text{ s}$. Finalmente utilizamos la relación (22.1) y determinamos que la nueva longitud del péndulo debería ser:

$$L_2 = 0,998 \text{ m} = 99,80 \text{ cm}$$

22.13. Sean T_1 y T_2 los periodos del péndulo al nivel del mar y en la cima de la montaña respectivamente; entonces, emplearemos las fórmulas deducidas en los problemas 22.10 y 22.12 para los periodos.

$$\Delta t = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \cdot 1 \text{ dia} = \left[\frac{T_1(1+h/R)}{T_1} - 1\right] \cdot 1 \text{ dia} \Rightarrow \Delta t = \frac{h}{R} \cdot 1 \text{ dia} \Rightarrow h = \frac{\Delta t}{1 \text{ dia}} R$$

$$\Rightarrow h = 10,8 \text{ s} / 86\,400 \text{ s} \cdot 6\,400 \text{ km} \quad \therefore \quad \boxed{h = 800 \text{ m}}$$

22.14. El movimiento de la lenteja experimenta dos oscilaciones simples con periodos T_1 y T_2 diferentes, debido a las distintas longitudes que presentan los péndulos, y que son iguales a $L_1 = 4 \text{ m}$; $L_2 = (4 - h) \text{ m}$. El periodo de este movimiento se obtiene sumando los semiperiodos de cada péndulo participante.

$$T = T_1/2 + T_2/2 = \pi \sqrt{L_1/g} + \pi \sqrt{L_2/g}$$

$$\Rightarrow 3,5 = \pi \sqrt{\frac{4}{\pi^2}} + \pi \sqrt{\frac{4-h}{\pi^2}} \Rightarrow \sqrt{4-h} = 1,5$$

$$\therefore \quad \boxed{h = 1,75 \text{ m}}$$

22.15. De acuerdo con los datos de los periodos podemos deducir que $T_2 < T_1$, lo que será posible solo si $g_2 > g_1$, siendo g_2 la aceleración de la gravedad dentro del ascensor cuando acelera. Reconocemos así que: $g_1 = g$, y $g_2 = g + a$. Luego, utilizando la 4ª ley del péndulo simple, tendremos:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} = \sqrt{\frac{g+a}{g}} \Rightarrow \left(\frac{1,8}{1,5}\right)^2 = \frac{g+a}{g}$$

$$\Rightarrow a = 11/25 g \quad \therefore \quad \boxed{a = 4,4 \text{ m/s}^2}$$

22.16. Debemos reconocer que la posición de equilibrio de un péndulo simple es siempre paralela a la dirección de la gravedad local. Luego, la nueva posición de equilibrio indicada por ϕ cuando el coche acelera se obtiene a partir del esquema dado.

$$\text{tg} \phi = a/g = 7,5/10 = 3/4 \Rightarrow \phi = 37^\circ$$

Seguidamente calculamos el valor de la aceleración de la gravedad efectiva dentro del vagón.

$$g_{\text{ef}} = \sqrt{g^2 + a^2} = \sqrt{10^2 + 7,5^2} \Rightarrow g_{\text{ef}} = 12,5 \text{ m/s}^2$$

Finalmente, el nuevo periodo (T_f) está relacionado con el original (T_0) por medio de la 4ª ley del péndulo.

$$T_f/T_0 = \sqrt{g/g_{\text{ef}}} \Rightarrow T_f = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10/12,5} \quad \therefore \quad \boxed{T_f = 2 \text{ s}}$$

22.17. Cuando el sistema experimenta pequeñas oscilaciones, su movimiento es armónico simple. Por lo tanto, la masa m se verá afectada por una fuerza restauradora $F' = k'x$, siendo k' la constante de elasticidad del sistema, y x la deformación y/o desplazamiento. Del DCL diremos lo siguiente:

$$F' = \Sigma F \Rightarrow k'x = kx + mgsen\theta \dots (1)$$

Pero, dado que x es pequeño, entonces se verificará la siguiente aproximación:

$$\text{sen} \theta \approx \theta, \text{ donde: } \theta = x/L \dots (2)$$

Luego, reemplazando (2) en (1) encontramos:

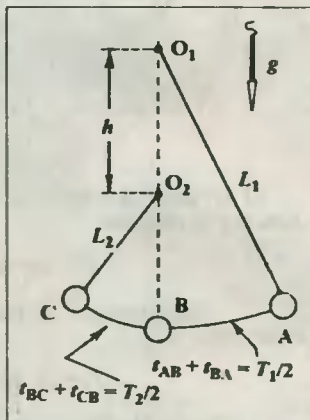
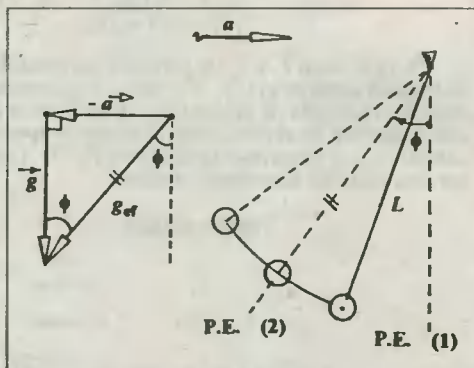


Fig. Solución Prob. 22.14



$$k'x = kx + mg(x/L) \Rightarrow k' = k + mg/L \dots (*)$$

Finalmente, encontraremos la fórmula de la frecuencia del oscilador mecánico de la siguiente expresión.

$$f = 1/2\pi \sqrt{k'/m} \dots (**)$$

Y reemplazando (*) en (**) obtenemos:

$$f = 1/2\pi \sqrt{k/m + g/L} \therefore \boxed{f = 2 \text{ osc/s}}$$

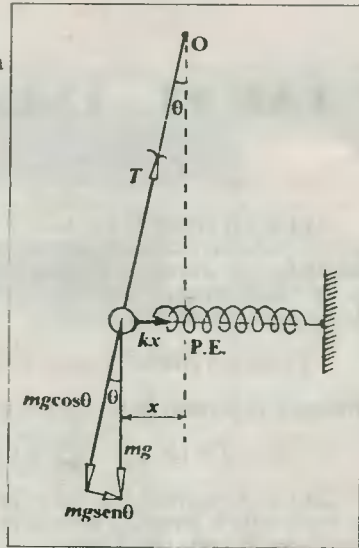


Fig. Solución Prob. 22.17

CAP 23 ONDAS MECANICAS - SONIDO

23.1.a. En virtud de los datos y del esquema adjunto podemos reconocer que el número de ondas completas que atraviesan el plano de observación es $N=3$ en el tiempo $t=6$ s. Luego, la frecuencia (f) de las mismas vendrá dada por:

$$f = N/t = 3 \text{ ciclos}/6 \text{ s} \Rightarrow f = 0,5 \text{ Hz}$$

Entonces, el periodo de las oscilaciones será:

$$T = 1/f \therefore T = 2 \text{ s}$$

23.1.b. A continuación, del esquema reconocemos que entre la primera y tercera cresta existen dos longitudes de onda (λ). Luego:

$$\lambda = d/2 = 12 \text{ m}/2 \therefore \lambda = 6 \text{ m}$$

23.1.c. Finalmente, la velocidad (v) de las ondas de obtendrá utilizando la relación (23.4).

$$v = \lambda f = (6 \text{ m})(0,5 \text{ Hz}) \therefore v = 3 \text{ m/s}$$

23.2. De acuerdo con los datos se reconoce que el bote y las moléculas de agua oscilan verticalmente de modo que al subir o bajar emplean 2 s. Luego, el periodo de las oscilaciones es $T=4$ s. Seguidamente, utilizamos la relación (23.4) para determinar la longitud de onda (λ).

$$\lambda = vT = (5 \text{ m/s})(4 \text{ s}) \therefore \lambda = 20 \text{ m}$$

23.3. De los datos reconocemos que $\lambda = 10$ m y $T = 2$ s. Luego, la velocidad de las ondas (olas) estarán dadas por la relación (23.4).

$$v_o = \lambda/T = 10 \text{ m}/2 \text{ s} \Rightarrow v_o = 5 \text{ m/s} \dots (*)$$

Además, la velocidad de la motonave (M) es:

$$v_m = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s} \dots (**)$$

Analizando el esquema (a) encontraremos que en relación a la motonave las ondas tienen una velocidad relativa: $v_1 = v_m + v_o$. Luego, la frecuencia f_1 con que las olas llegan a la motonave se encontrará por medio relación (23.4).

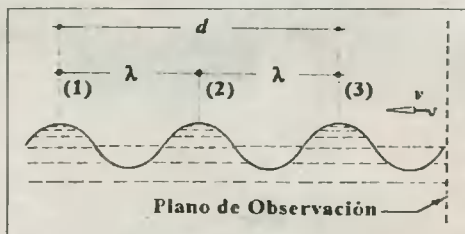


Fig. Solución Prob. 23.1

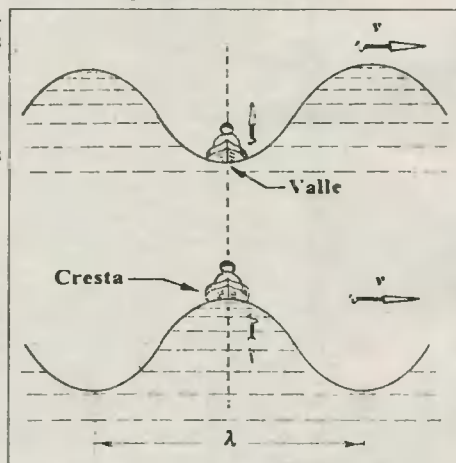


Fig. Solución Prob. 23.2

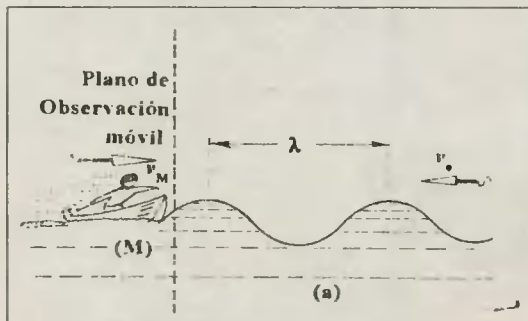


Fig. (a). Solución Prob. 23.3

$$f_1 = \frac{v_1}{\lambda} = \frac{v_m + v_o}{\lambda} = \frac{15 + 5}{10}$$

$$\therefore f_1 = 2 \text{ olas/s}$$

Y ahora, analizando el esquema (b) observamos que en relación a la motonave las olas tienen una velocidad relativa $v_2 = v_m - v_o$. Entonces, la frecuencia (f_2) con que son vistas las olas será:

$$f_2 = \frac{v_2}{\lambda} = \frac{v_m - v_o}{\lambda} = \frac{15 - 5}{10}$$

$$\therefore f_2 = 1 \text{ olas/s}$$

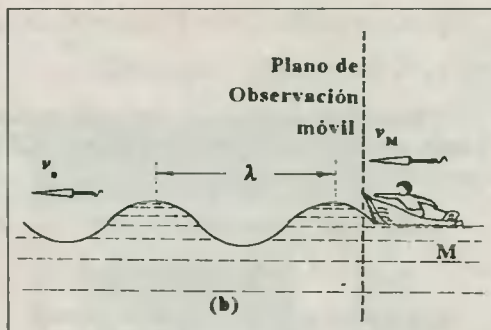


Fig. (b). Solución Prob. 23.3

23.4. De acuerdo con los datos reconocemos que $t = 1 \text{ s}$, $m = 0,2 \text{ kg}$, $T = 10 \text{ N}$. Luego, podemos decir que la distancia recorrida (L) por una onda se puede calcular por la relación cinemática:

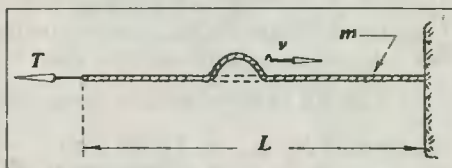
$$d = vt \Rightarrow L = vt \dots (1)$$

También, se debe señalar que la densidad lineal de masa (μ) de la cuerda viene dada por $\mu = m/L$. Luego, la velocidad (v) de propagación de las ondas podemos calcularla en base a la relación (23.9).

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{m/L}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{TL}{m}} \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos: $L = \sqrt{TL/m} \cdot t \Rightarrow L^2 = (TL/m)t^2$

$$\Rightarrow L = Tt^2/m = 10 \cdot 1^2 / 0,2 \therefore L = 50 \text{ m}$$



23.5. En primer lugar expresaremos la ecuación dada en la forma:

$$y = 12 \text{sen}[(2\pi/16)x - (2\pi/0,1)t] = A \text{sen}(kx - \omega t)$$

a) Por comparación de términos semejantes encontramos el número de onda (k) y la frecuencia angular (ω).

$$k = 2\pi/16 \therefore k = \pi/8 \text{ cm}^{-1} \quad \omega = 2\pi/0,1 \therefore \omega = 20\pi \text{ rad/s}$$

b) En base a las relaciones (23.3) y (23.2) encontraremos la longitud de onda (λ) y el periodo (T) respectivamente.

$$k = 2\pi/\lambda = \pi/8 \therefore \lambda = 16 \text{ cm} \quad \omega = 2\pi/T = 20\pi \therefore T = 0,1 \text{ s}$$

c) Para el cálculo de la velocidad de propagación podemos utilizar la relación (23.4).

$$v = \lambda/T = 0,16 \text{ m}/0,1 \text{ s} \therefore v = 1,6 \text{ m/s}$$

d) La tensión en la cuerda la encontraremos despejándola de la relación (2) encontrada en el problema anterior, obteniendo:

$$T = mv^2/L = 5 \cdot 1,6^2 / 0,8 \therefore T = 16 \text{ N}$$

e) Para el cálculo de y tenemos: $x = 24 \text{ cm}$, $y t = 2/15 \text{ s}$, y reemplazando en la ecuación general tendremos:

$$y = 12 \operatorname{sen} [(\pi/8)x - 20\pi] = 12 \operatorname{sen} [(\pi/8) \cdot 24 - (20\pi \cdot 2/15)]$$

$$y = 12 \operatorname{sen} (3\pi - 8/3\pi) = 12 \operatorname{sen} (\pi/3) \quad \therefore \quad \boxed{y = 6\sqrt{3} \text{ cm}}$$

f) Ya que transversalmente las partículas del medio (cuerda) experimentan un movimiento armónico simple, utilizaremos las relaciones (21.6) y (21.10) para el cálculo de la velocidad y aceleración transversales máximas.

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (20\pi \text{ rad/s})(12 \text{ cm}) \quad \therefore \quad \boxed{v_{\text{máx}} = 2,4 \pi \text{ m/s}}$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (20\pi \text{ rad/s})^2 (12 \text{ cm}) \quad \therefore \quad \boxed{a_{\text{máx}} = 48\pi^2 \text{ m/s}^2}$$

23.6. A partir del segundo esquema mostrado se pueden reconocer los puntos 1, 2 y 3, los cuales satisfacen las condiciones del problema, es decir, experimentan iguales desplazamientos y (en módulo). Asimismo, se puede reconocer que:

$$b + a + a = 15 + 5 \Rightarrow b = 2a = 20 \text{ cm} \dots (1)$$

$$Y: \lambda/2 = a + b + a \Rightarrow \lambda = 2(b + 2a) \dots (2)$$

$$\text{Luego, de (1) en (2):} \quad \boxed{\lambda = 40 \text{ cm}}$$

23.7. A partir del MAS del vibrador (foco) encontramos la amplitud (A) de las oscilaciones ondulatorias y la frecuencia (ω) de las mismas, utilizando para ello la siguiente relación:

$$y_0 = A \operatorname{sen} \omega t = 3 \operatorname{sen} (20\pi t) \quad \Rightarrow \quad A = 3 \text{ cm}; \quad \omega = 20\pi \text{ rad/s}$$

Ahora calcularemos el número de onda (k) despejándola de la relación (23.5).

$$k = \omega/v = 20\pi/200 \quad \Rightarrow \quad k = \pi/10 \text{ m}^{-1}$$

A continuación empleamos la relación (23.6) para encontrar la ecuación general de la onda.

$$y = A \operatorname{sen} (kx - \omega t) = 0,03 \operatorname{sen} (\pi x/10 - 20\pi t) \dots (*)$$

Finalmente encontraremos el desplazamiento (y) para un punto en $x = 5 \text{ m}$ y $t = 0,1 \text{ s}$.

$$\text{Reemplazando en (*):} \quad y = 0,03 \operatorname{sen} (\pi \cdot 5/10 - 20\pi \cdot 0,1) = 0,03 \operatorname{sen} (-3\pi/2)$$

$$\therefore \quad \boxed{y = 0,03 \text{ m}}$$

23.8. De acuerdo con los datos podemos calcular la frecuencia angular (ω) y el número de onda (k)

$$\omega = v_{\text{máx}}/A = 15/0,3 \Rightarrow \omega = 50 \text{ rad/s}$$

$$k = \omega/v = 50/10 \Rightarrow k = 5 \text{ m}^{-1}$$

A continuación encontraremos la ecuación general para el desplazamiento (y) y para la velocidad transversal (v_t), utilizando para ello las relaciones (23.6) y (21.4).

$$y = A \operatorname{sen} (kx - \omega t) = 0,3 \operatorname{sen} (5x - 50t) \dots (1)$$

$$v_t = \omega A \cos (kx - \omega t) = 15 \cos (5x - 50t) \dots (2)$$

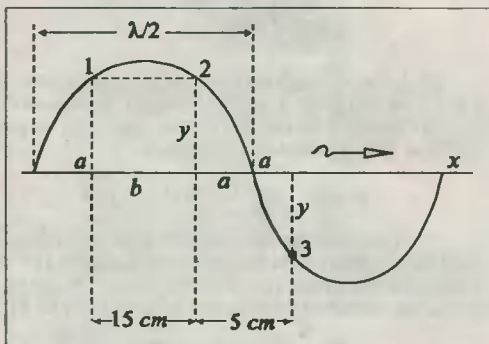


Fig. Solución Prob. 23.6

De acuerdo con los datos se tiene el punto x y el tiempo t , tales que:

$$x = \lambda/4 = (2\pi/k)/4 = \pi/2k = \pi/2k \quad \Rightarrow \quad x = \pi/10 \text{ m}$$

$$t = 3T/4 = 3/4(2\pi/\omega) = 3/4(2\pi/50) \quad \Rightarrow \quad t = 3\pi/100 \text{ s}$$

Finalmente, reemplazamos estos valores en (1) y (2) $y = 0 \text{ m}; v = -15 \text{ m/s}$

23.9. De acuerdo con los datos se reconoce que $A = 0,08 \text{ m}$, $L = 2 \text{ m}$, $m = 0,4 \text{ kg}$ y $\omega = 25 \text{ rev/s} = 50\pi \text{ rad/s}$. Además, del esquema original se puede apreciar que la tensión que experimenta la porción de cuerda horizontal concuerda con el peso del bloque y de la porción de cuerda vertical. Luego:

$$T = (M + \mu L)g = [1,92 \text{ kg} + (0,4 \text{ kg}/2 \text{ m}) \cdot 0,4 \text{ m}] \cdot 10 \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad T = 20 \text{ N}$$

A continuación calcularemos la velocidad (v) de propagación de las ondas en base a la relación (23.9).

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{20 \text{ N}}{0,4 \text{ kg}/0,2 \text{ m}}} \Rightarrow v = 10 \text{ m/s}$$

Seguidamente calcularemos el número de onda (k) despejándola de la relación (23.5)

$$k = \omega/v = 50\pi/10 \quad \Rightarrow \quad k = 5\pi \text{ m}^{-1}$$

a) Empleando los datos obtenidos encontramos la ecuación general de las ondas.

$$y = 0,08 \text{ sen}(5\pi x - 50\pi t)$$

b) Para determinar el número de ondas contenidas en la cuerda horizontal aplicaremos:

$$N = \frac{d}{\lambda} = \frac{L-L'}{2\pi/k} = \left(\frac{2-0,4}{2\pi}\right) 5\pi \quad \therefore \quad N = 4$$

23.10. A partir del esquema encontraremos una expresión general para la velocidad en función de la distancia x , para lo cual debemos señalar que la masa (m) de la cuerda indicada tendrá un valor $m' = (x/L)m$. Luego, por equilibrio del sistema se cumple:

$$T = m'g + Mg = (x/L)mg + Mg \Rightarrow T = [(x/L)m + M]g \dots (1)$$

Luego, la velocidad de las ondas en la cuerda estará dada por:

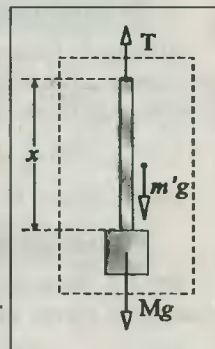
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{m/L}} \dots (2)$$

$$\text{Reemplazando (1) en (2): } v = \sqrt{(x + ML/m)g}$$

Y sustituyendo datos: $v = 20 \text{ m/s}$

Luego, la longitud de onda (λ) en dicho lugar estará dado por la relación (23.4).

$$v = \lambda f = 20 \cdot 0,05 \quad \therefore \quad \lambda = 1 \text{ m}$$



23.11. En el esquema se han señalado dos puntos 1 y 2, desfasados $\Delta\phi = 3\pi/2 \text{ rad} = 270^\circ$, y que por razones didácticas se han ubicado de manera que sea notorio el hecho de estar distanciados $3/4$ de onda, de manera que cada cuarto de onda representa un desfase de 90° . Ahora, utilizando la relación (23.8) encontraremos la velocidad (v) de propagación de las ondas.

$$\Delta\phi = \frac{\omega}{v}(x_2 - x_1) \Rightarrow v = \frac{\omega}{\Delta\phi}(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow v = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{x_2 - x_1}{\Delta\phi} \right) = \frac{2\pi}{10^{-2}} \left(\frac{14 - 11}{3\pi/2} \right)$$

$$\therefore \boxed{v = 400 \text{ m/s}}$$

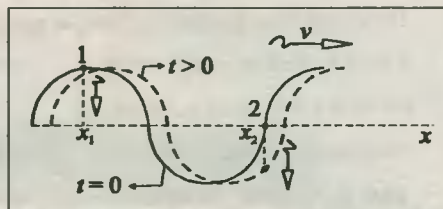


Fig. Solución Prob. 23.11

Observación: Por cada $\lambda/4$ de diferencia de posiciones, la diferencia de fase equivale a 90° . Luego: $1\lambda \diamond 360^\circ$.

23.12. Utilizando la relación (23.8) encontramos la diferencia de fase de las ondas.

$$\Delta\phi = \omega/v(x_2 - x_1) = k(x_2 - x_1) = 2\pi/\lambda(x_2 - x_1) \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi/4(10 - 8) = \pi \text{ rad} \quad \therefore \boxed{\Delta\phi = 180^\circ}$$

Otro método. Podemos determinar la diferencia de fase a partir de la diferencia del número de longitudes de onda (λ) en cada recorrido. Así pues, por los valores dados reconocemos que: $d_1 = 2\lambda$, y $d_2 = 2,5\lambda$. Luego:

$$\Delta d = d_2 - d_1 \Rightarrow \Delta d = 0,5\lambda$$

Y utilizando la observación planteada en el problema anterior tendremos la siguiente regla de tres:

$$\Delta d_1 = 1\lambda \rightarrow 360^\circ$$

$$\Delta d_2 = 0,5\lambda \rightarrow \Delta\phi \quad \therefore \boxed{\Delta\phi = 0,5\lambda}$$

23.13. a) Punto 1. Encontramos según el esquema que los desplazamientos x_{A1} y x_{B1} de las ondas emitidas por los focos en A y B respectivamente, tienen una diferencia tal que:

$$x_{A1} - x_{B1} = 25 \text{ m} - 7 \text{ m} = 18 \text{ m}; \text{ pero si } \lambda = 4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow x_{A1} - x_{B1} = 9 \left(\frac{\lambda}{2} \right) \text{ impar}$$

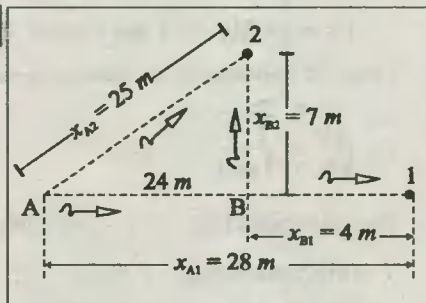
\therefore **La interferencia en el punto 1 es destructiva**

b) Punto 2. En base al esquema adjunto notamos que las ondas que salen de los focos A y B tienen una diferencia de caminos recorridos tal que:

$$x_{A2} - x_{B2} = 28 \text{ m} - 4 \text{ m} = 24 \text{ m},$$

$$\text{Luego: } 24 \text{ m} \diamond 6\lambda \Rightarrow x_{A2} - x_{B2} = 6\lambda$$

\therefore **La interfase en el punto 2 es constructiva**



23.14. Resolveremos nuestro problema utilizando la relación (23.12) por una simple comparación.

$$\text{Veamos: } y = 2A \sin kx \cdot \cos \omega t = 5 \sin(\pi x/3) \cdot \cos(40\pi t)$$

$$\text{de donde: } 2A = 5 \text{ cm}, k = \pi/3 \text{ cm}^{-1}, \omega = 40\pi \text{ rad/s}$$

a) Reconocemos que la amplitud es $\boxed{A = 2,5 \text{ cm}}$, y podemos decir que la velocidad de propagación de las ondas estará dada por:

pagación de las ondas estará dada por:

$$v = \omega/k = 40\pi/(\pi/3) \quad \therefore \quad v = 120 \text{ cm/s} = 1,2 \text{ m/s}$$

b) De acuerdo con el ítem 23.9, se sabe que la distancia entre dos nodos contiguos es igual a $\lambda/2$. Luego:

$$d = \lambda/2 = \frac{1}{2}(2\pi/k) = \pi/(\pi/3) \quad \therefore \quad d = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$$

c) Recordando que la velocidad de una partícula con MAS viene dada así:

$$y = (2A \text{ sen} kx) \cdot \text{cos} \omega t \Rightarrow v_y = (2A \text{ sen} kx) \cdot \omega \text{sen} \omega t = [2(2,5) \text{ sen}(\pi/3) \cdot 1] \cdot 40\pi \cdot \text{sen}(40\pi \cdot 9/8)$$

$$\therefore \quad v_y = 0 \text{ m/s}$$

23.15. Reconociendo que las ondas sonoras se desplazan con movimiento uniforme, y despreciando el tiempo empleado por la luz del fogueazo tendremos que la velocidad del sonido estará dada por:

$$v_s = d/t = 4 \text{ 800}/15 \quad \therefore \quad v_s = 320 \text{ m/s}$$

23.16. Empleando la relación (23.4) despejamos la longitud de onda (λ): $\lambda = v_s/f$

* Para $f_1 = 16 \text{ Hz} \Rightarrow \lambda_1 = 340/16 \quad \therefore \quad \lambda_1 = 21,25 \text{ m}$

** Para $f_2 = 20 \text{ 000 Hz} \Rightarrow \lambda_2 = 340/20 \text{ 000} \quad \therefore \quad \lambda_2 = 0,017 \text{ m}$

23.17. Teniendo en cuenta que el foco emisor de las ondas sonoras presenta una frecuencia (f) que se conserva inalterable en los dos medios: aire y agua, pues como se aprecia en el esquema, el número de ondas que llega del aire a la interfase es el mismo que sale de él hacia el agua. Luego, por la relación (23.4) tendremos:

$$f_{\text{aire}} = f_{\text{agua}} \Rightarrow v_{s_a}/\lambda_a = v_{s_l}/\lambda_l$$

$$\Rightarrow \lambda_l = (v_{s_l}/v_{s_a})\lambda_a = (1 \text{ 483}/340) \cdot 0,797$$

$$\therefore \quad \lambda_l \approx 3,48 \text{ m}$$

Observación. - Al pasar de un medio a otro más denso, el sonido aumenta su longitud de onda.

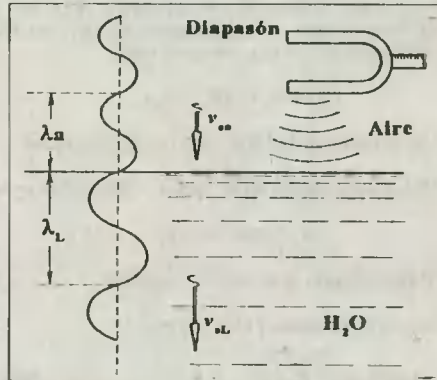


Fig. Solución Prob. 23.17

23.18. Sean A y B las posiciones de los dos barcos, siendo A el emisor y B el receptor. Indicando con H la profundidad de las aguas, tendremos que:

a) **El primer sonido.** - Llamamos así a aquel que viaja directamente en la dirección AB, de modo que el tiempo empleado será:

$$t_1 = e_1/v_s = 2H \text{tg} \alpha / v_s \Rightarrow \text{tg} \alpha = v_s \cdot t_1 / 2H \dots (1)$$

b) **El segundo sonido.** - Es aquel que viaja primero hacia el fondo y luego hacia arriba en una trayectoria señalada por A-C-B, de manera que por la reflexión del sonido el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión (α). Entonces, el tiempo empleado estará dado por:

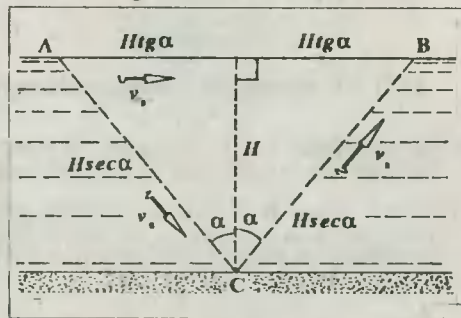


Fig. Solución Prob. 23.18

$$t_2 = e_2/v_s = 2H \sec \alpha / v_s \Rightarrow \sec \alpha = v_s t_2 / 2H \dots (2)$$

$$\text{Recordando la relación trigonométrica: } \sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1 \dots (3)$$

$$\text{Ahora de (1) y (2) en (3): } (t_2^2 - t_1^2)(v_s/2H)^2 = 1 \Rightarrow H = \frac{1}{2} v_s \sqrt{t_2^2 - t_1^2}$$

$$\therefore H = 4\,900 \text{ m}$$

23.19. Según el esquema se han señalado los desplazamientos del sonido y del avión en el tiempo t , siendo: $AB = v_s t = 340t$.

Del Δ rectángulo BAC: $BC = AB \cdot \sin 30^\circ = 170t$.

Del movimiento del avión: $BC = v_a t$

$$\Rightarrow v_a t = 170t \therefore v_a = 170 \text{ m/s}$$

23.20. A partir del esquema señalamos que P es la posición del oyente en tierra, A es la posición del avión (foco emisor) desde donde sale la primera onda de sonido que llega al hombre. Cuando esta onda de sonido llega al punto P, el avión se encuentra en C, y 6 s antes, este mismo estuvo en B. Se ha señalado que las ondas sonoras son esféricas y se van sucediendo progresivamente en la recta horizontal AC, teniendo una superficie que lo envuelve, la cual es un cono cuyo vértice se encuentra en el propio avión, que es el foco emisor. Considerando el trayecto BD del sonido, realizado en $t = 6$ s, se tiene que:

$$BD = v_s t; BC = v_a t$$

Del Δ rectángulo BDP: $\cos \theta = BD/h = v_s t/h \dots (1)$

Del Δ rectángulo BDC: $\sin \theta = BD/BC = v_s t/v_a t$

$$\Rightarrow \sin \theta = v_s/v_a \dots (2)$$

Y recordando que: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \dots (3)$

Reemplazaremos (1) y (2) en (3):

$$\left(\frac{v_s}{v_a}\right)^2 + \left(\frac{v_s t}{h}\right)^2 = 1 \Rightarrow v_a = \frac{v_s h}{\sqrt{h^2 - v_s^2 t^2}}$$

$$\therefore v_a = 425 \text{ m/s}$$

23.21. De acuerdo con el esquema diremos:

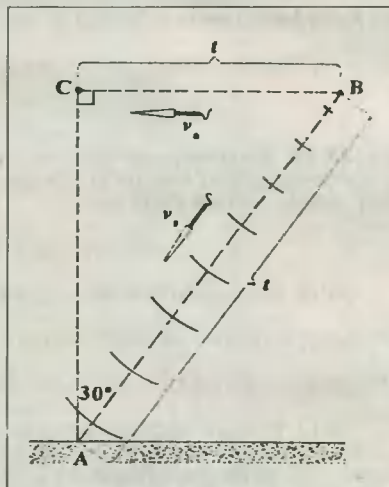


Fig. Solución Prob. 23.19

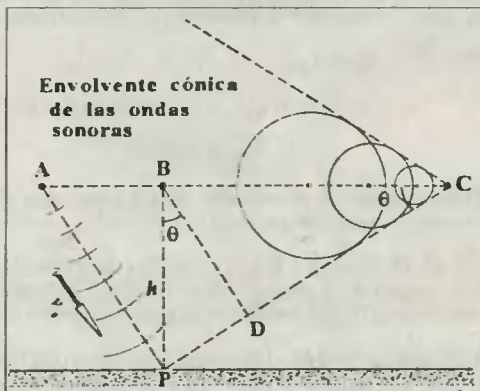


Fig. Solución Prob. 23.20

a) **Para el oyente A.**- El sonido para este oyente sólo depende del medio, vale decir, de su compresibilidad. Por lo tanto, para él el sonido tiene una velocidad $u = v_s = 340 \text{ m/s}$.

b) **Para el oyente B.**- Para este oyente el sonido tiene una velocidad relativa que dependerá de la dirección de su movimiento, esto es, la velocidad $u_{\min} = v_s - v_v$, y $u_{\max} = v_s + v_v$, los cuales se presentan cuando el oyente se mueve en la misma dirección y en dirección opuesta a la del viento respectivamente. Luego:

$$v_s - v_v \leq u \leq v_s + v_v \therefore 290 \text{ m/s} \leq u \leq 390 \text{ m/s}$$

23.22. Supongamos que el sonido que sale del foco emisor en C llega simultáneamente a los oyentes A y B en el tiempo t . Asimismo, consideremos que sean N las ondas emitidas por el foco emisor en dicho tiempo, las mismas que se emitieron cuando aquel se desplazó desde C hasta D. Luego, se verificará la que: $N = f_o t$, siendo f_o la frecuencia propia de las ondas sonoras.

a) Para el oyente B las ondas sonoras se encuentran distribuidas (comprendidas) en el segmento DB, las que llegarán a él con una longitud de onda aparente λ' . Luego:

$$\lambda' = \frac{DB}{N} = \frac{v_s t - v_f t}{f_o t} = \frac{v_s - v_f}{f_o}$$

$$\text{Pero: } f_o = v_s / \lambda_o \Rightarrow \lambda' = \left(\frac{v_s - v_f}{f_o} \right) \lambda_o$$

$$\therefore \lambda' = 14 \text{ m}$$

b) Para el oyente A, las N ondas emitidas se han distribuido en el segmento AD, las que llegarán a dicho observador con una longitud de onda λ'' , tal que:

$$\lambda'' = \frac{AD}{N} = \frac{v_s t + v_f t}{f_o t} = \frac{v_s + v_f}{f_o}$$

$$\Rightarrow \lambda'' = \left(\frac{v_s + v_f}{f_o} \right) \lambda_o \therefore \lambda'' = 20 \text{ m}$$

23.23. Cuando el oyente se desplaza en el medio fijo, las ondas que percibe presentan la misma longitud de onda que cuando él se encuentra en reposo. Sin embargo, el número de ondas (V) que lo alcanzan en el tiempo t es mayor.

De acuerdo con el esquema, podemos decir que si el oyente que percibe presentan la misma longitud de onda que cuando él se encuentra en reposo. Sin embargo, al avanzar en el mismo tiempo (t) habrá percibido también las ondas contenidas en el segmento $OA = v_o \cdot t$. Luego, el número total (N) de ondas percibidas será: $N = f' \cdot t$, pero también se verificará que:

$$N = \frac{OB + OA}{\lambda} \Rightarrow f' \cdot t = \frac{v_s \cdot t + v_o \cdot t}{\lambda}$$

$$\text{Pero: } \lambda = v_s / f_o \Rightarrow f' = \left(\frac{v_s + v_o}{v_s} \right) f_o \therefore f' = 17,5 \text{ kHz}$$

23.24. En el esquema se han señalado con T y O las posiciones iniciales del tren y del automóvil (oyente), respectivamente. Para un tiempo t el sonido habrá avanzado hasta A, el tren hasta B y el automóvil hasta D. En relación al desplazamiento del automóvil diremos que: $OD = v_o \cdot t$, la que en

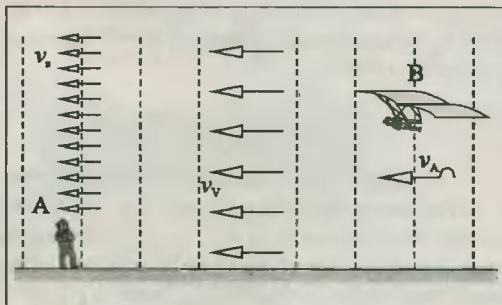


Fig. Solución Prob. 23.21

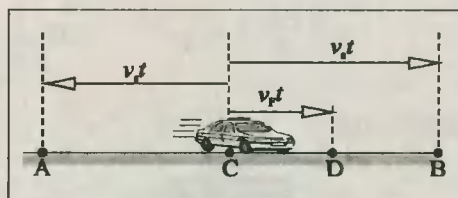


Fig. Solución Prob. 23.22

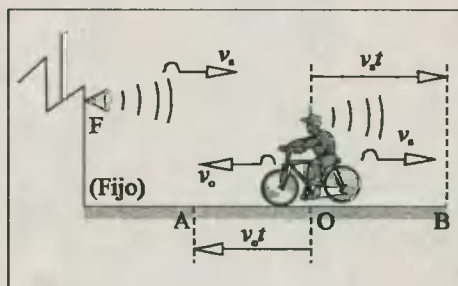


Fig. Solución Prob. 23.23

el esquema se ha trasladado al segmento TC. En el tiempo t el número N de ondas que percibe el oyente (tren) se encuentran apretadamente distribuidas en el segmento BA, en donde las ondas presentan una longitud λ' , tal que:

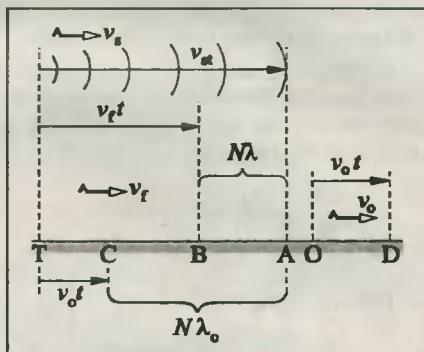
$$\lambda' = \frac{BA}{N} = \frac{v_s t - v_f t}{N} \dots (1)$$

En cuanto a las N ondas percibidas por el oyente, son las que se hubieran podido percibir de haberse encontrado en reposo ($v_o t$) y las que dejó de percibir por trasladarse. Luego, las ondas que percibe en estas condiciones serían la longitud λ_o , y estarían comprendidas en el segmento CA. Así pues, se cumplirá que:

$$N = \frac{CA}{\lambda_o} = \frac{v_s t - v_o t}{\lambda_o} \dots (2)$$

De (2) en (1):
$$\lambda' = \left(\frac{v_s - v_f}{v_s - v_o} \right)$$

$$\therefore \lambda' = 14 \text{ m}$$



CAP 24 FLUIDOS EN REPOSO

24.1. Analizando el sistema de la figura, elegimos dos puntos x e y y colocados en la misma masa de Hg, en el mismo plano horizontal; estos puntos soportan la misma presión total, en virtud a que la diferencia de profundidades es nula (de acuerdo con el Teorema Fundamental de la Hidrostática).

$$\begin{aligned}
 p_x &= p_y \\
 p_o + d_{\text{Hg}} \cdot g \cdot \Delta h + d_1 \cdot g h_1 &= p_o + d_2 \cdot g h_2 \\
 \Rightarrow \Delta h &= \frac{d_2 h_2 - d_1 h_1}{d_{\text{Hg}}} \quad \therefore \quad \Delta h = 10 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

24.2. A partir del esquema mostrado procedemos del mismo modo que en el problema anterior. Por estar al mismo nivel y en el mismo líquido:

$$\begin{aligned}
 p_y &= p_z \Rightarrow p_x + d_2 \cdot g h_2 = p_o + d_1 \cdot g h_1 \\
 \Rightarrow p_x &= p_o + g(d_1 h_1 - d_2 h_2)
 \end{aligned}$$

Reemplazando datos, y considerando que la presión atmosférica al nivel del mar es aproximadamente $p_o = 10^5 \text{ Pa}$, tenemos:

$$p_x = 10^5 + 10(2.10^3 \cdot 3 - 1.5 \cdot 10^3 \cdot 1) \quad \therefore \quad p_x = 1.45 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

24.3. Utilizando el Teorema Fundamental de la Hidrostática, dada por la relación (24.8), y en base al esquema original tendremos:

$$\text{Entre A y C: } p_A - p_C = d_o g h_1 \quad \dots (1)$$

$$\text{Entre C y D: } p_C - p_D = d_{\text{Hg}} g h_2 \quad \dots (2)$$

$$\text{Entre B y D: } p_B - p_D = d_o g (h_1 + h_2 + h_3) \quad \dots (3)$$

Efectuando la operación (1) + (2) - (3) miembro a miembro encontramos que:

$$p_A - p_B = [d_{\text{Hg}} h_2 - d_o (h_2 + h_3)] g \quad \therefore \quad p_A - p_B = 10.1 \text{ kPa}$$

24.4. Haciendo el DCL del recipiente encontramos que: $F + N = P$, donde para un valor determinado de la fuerza hidrostática F , la reacción del piso N se anula. Luego, tendremos: $F = P \dots (*)$

Despejando la fuerza de la relación (24.5) tendremos en (*):

$$\begin{aligned}
 p_h \cdot (A_1 - A_2) &= mg \Rightarrow d_o \cdot g h \pi (r_1^2 - r_2^2) = mg \\
 \Rightarrow h &= \frac{m}{\pi d_o (r_1^2 - r_2^2)} \quad \therefore \quad h = 14 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

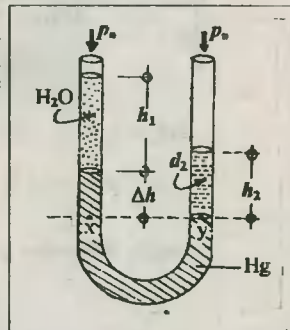


Fig. Solución Prob. 24.1

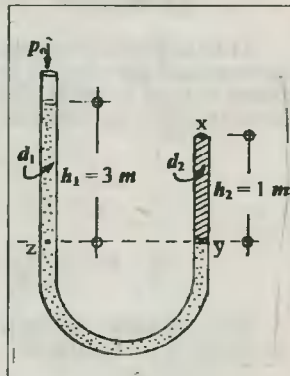
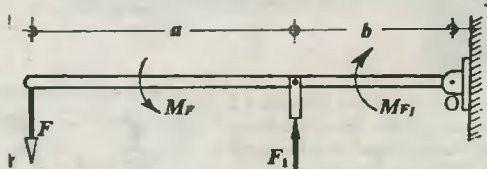


Fig. Solución Prob. 24.2

24.5. Calculamos la fuerza F_1 aplicada sobre el émbolo 1, usando para ello la segunda condición de equilibrio en la palanca.



$$\begin{aligned}\Sigma M_o = 0 &\Rightarrow M_{F_1} = M_F \Rightarrow F_1 \cdot b = F(a + b) \\ \Rightarrow F_1 &= \left(\frac{a+b}{b}\right)F \Rightarrow F_1 = 50 \text{ N} \dots (1)\end{aligned}$$

Luego, utilizando la relación (24.9) encontraremos la fuerza F_2 sobre el émbolo 2.

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot F_1 \dots (2)$$

Reemplazando datos y (1) en (2): $F_2 = 150 \text{ N}$

24.6. Haciendo un esquema correspondiente encontraremos que la presión que ejerce el peso del hombre sobre el émbolo grande es igual al que se produce en el punto B del líquido en la otra rama. Así entonces:

$$\begin{aligned}p_C &= p_B \\ p_o + P/A_1 &= p_o + d_o \cdot g \cdot x \\ \Rightarrow x &= \frac{m}{d_o \cdot A_1} \therefore x = 1,4 \text{ m}\end{aligned}$$

24.7. Aplicando la igualdad de presiones hidrostáticas en los puntos B y C tendremos:

$$p_B = p_C \Rightarrow P_1/A_1 + d_o \cdot g \cdot x = P_2/A_2$$

Reemplazando datos (todos en el SI):

$$0,1 \cdot 10 / 10 \cdot 10^{-4} + 10 \cdot 10^3 \cdot x = 0,8 \cdot 10 / 50 \cdot 10^{-4}$$

$$\therefore x = 0,06 \text{ m}, \text{ ó } x = 6 \text{ cm}$$

Nota. - Si el valor obtenido para x hubiera sido negativo, entonces la posición de los émbolos hubiera sido invertida, es decir, 1 abajo y 2 arriba; por ahora el valor obtenido de x es positivo.

24.8. a) Cálculo de la fuerza que soporta la cara lateral de lados 3 m y 4 m. - Ubicamos el centro geométrico de esta "placa" respecto al nivel libre del agua, y encontramos que es $h_1 = 1,5 \text{ m}$. Luego, utilizamos la relación (24.10).

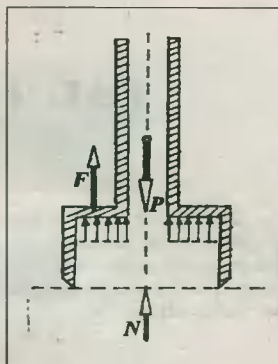


Fig. Solución Prob. 24.4

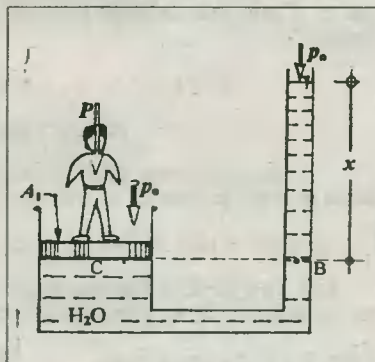


Fig. Solución Prob. 24.6

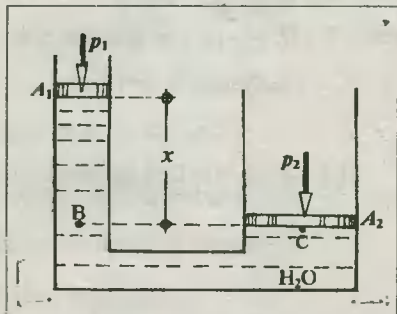


Fig. Solución Prob. 24.7

$$F_1 = d_0 \cdot g A_1 \cdot h_1 = 10^3 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1,5 \quad \therefore \quad F_1 = 1,8 \cdot 10^5 \text{ N}$$

b) Cálculo de la fuerza que soporta la cara lateral de lados 3 m y 2 m.- Ubicamos su centro geométrico y encontramos que $h_2 = 1,5 \text{ m}$. A continuación aplicamos la relación (24.10).

$$F_2 = d_0 \cdot g A_2 \cdot h_2 = 10^3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1,5 \quad \therefore \quad F_2 = 9 \cdot 10^4 \text{ N}$$

c) Cálculo de la fuerza que soporta el fondo del recipiente.- Este caso se resuelve encontrando primero la presión hidrostática en el fondo: $p_3 = d_0 \cdot g h_3$, donde h_3 es la profundidad a la cual se encuentra la placa y su centro geométrico respecto al nivel libre del agua. A continuación calculamos la fuerza utilizando la relación (24.4).

$$F_3 = p_3 A_3 = d_0 \cdot g h_3 \cdot A_3$$

Esta expresión concuerda con la relación (24.10). Reemplazando valores:

$$F_3 = 10^3 \cdot 10 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 4) \quad \therefore \quad F_3 = 2,4 \cdot 10^5 \text{ N}$$

24.9. a) Cuando el émbolo 1 está más abajo que 2, aplicamos el mismo procedimiento que el problema (24.7).

$$(m + M_1)g/A_1 = d_0 \cdot gh + M_2 \cdot g/A_2 \quad \dots (1)$$

siendo A_1 y A_2 las áreas desconocidas de los émbolos.

b) Cuando el émbolo 2 está más abajo que 1, aplicamos una relación similar a la anterior.

$$M_1 g/A_1 + d_0 gh = (M_2 + m)g/A_2$$

Reemplazando datos en (1) y (2) encontramos:

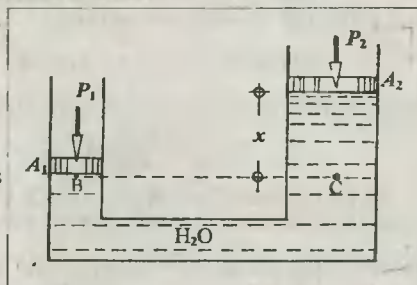
$$A_1 = 1/140 \text{ m}^2, \text{ y } A_2 = 1/100 \text{ m}^2$$

c) Cuando se retira la pesa m , los émbolos se equilibran del modo que se muestra en el esquema. Allí aplicaremos la igualdad de presiones en B y C.

$$p_B = p_C \Rightarrow P_1/A_1 = d_0 \cdot gx + P_2/A_2$$

Reemplazando datos encontramos: $x = -2 \text{ cm}$

Observación.- Este resultado significa que el émbolo 2 se encuentra debajo del émbolo 1.



24.10. Haciendo el diagrama de fuerzas ubicamos a $F_1 = kx = 900 \cdot 0,02 = 18 \text{ N}$.

$$F_2 = d_0 \cdot g h_{CG} \cdot A = 10^3 \cdot 10 \cdot h/2 \cdot h \cdot 0,2$$

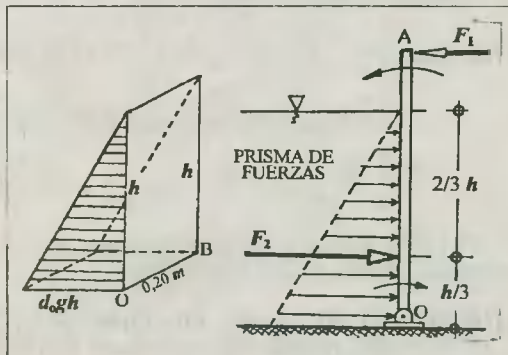
$$\Rightarrow F_2 = 10^3 h^2$$

Aplicando la segunda condición de equilibrio respecto a O tenemos:

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow F_2 \cdot h/3 = F_1 \cdot OA$$

$$10^3 \cdot h^2 \cdot h/3 = 18 \cdot 1/2 \Rightarrow h^3 = 27 \cdot 10^{-3}$$

$$\therefore h = 0,3 \text{ m} \text{ ó } h = 30 \text{ cm}$$



Observación. - Del prisma mostrado observamos que la base concuerda con la presión en el fondo: $d_0 \cdot gh$. La altura h coincide con el nivel libre del líquido. Si calculamos el volumen del prisma encontramos que:

$$\text{Volumen} = \text{Base} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{2} (d_0 \cdot gh \cdot h) \cdot OB = 10^3 h^2$$

que concuerda con la expresión de la fuerza F_2 .

24.11. A partir del diagrama mostrado encontramos que la fuerza hidrostática que soporta la compuerta está dada por la relación (24.10).

$$F = d_0 \cdot g \cdot A \cdot h/2, \text{ donde: } A = 5/4 h \cdot OB$$

$$F = 10^3 \cdot 10 \cdot 5/4 h \cdot 0,8 \cdot h/2 \Rightarrow F = 5 \cdot 10^3 h^2 \dots (1)$$

$$y: x = 1/3 (5/4 h) \Rightarrow x = 5/12 h \dots (2)$$

Tomando momentos en el instante previo al inminente giro horario de la compuerta tenemos:

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow F \cdot x = Mg \cdot OA \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3): $5 \cdot 10^3 h^2 \cdot 5/12 h = 36 \cdot 10 \cdot 1,25$

$$\therefore \boxed{h = 0,6 \text{ m}}$$

24.12. Utilizando las relaciones (24.2) y (24.3) podemos deducir una fórmula para el peso, según se señala en la relación (24.4): $P = \rho V \Rightarrow P = dgV \dots (*)$

de donde despejaremos el volumen V del cuerpo: $V = P/dg \dots (1)$

A continuación utilizamos las relaciones (24.12) y (24.14) del siguiente modo:

$$d_0 \cdot gV = P - P_a \dots (2)$$

$$Y \text{ de (1) en (2) despejamos } d: d_0 \cdot g \cdot \frac{P}{gd} = P - P_a \Rightarrow d = \left(\frac{P}{P - P_a} \right) d_0$$

$$\text{Reemplazando datos: } \boxed{d = 2\,500 \text{ kg/m}^3}$$

24.13. Designando por d_L , d_c y d_0 a las densidades del líquido desconocido, cuerpo y agua respectivamente, utilizaremos la relación deducida para d_c en el problema anterior, estableciéndose las siguientes ecuaciones:

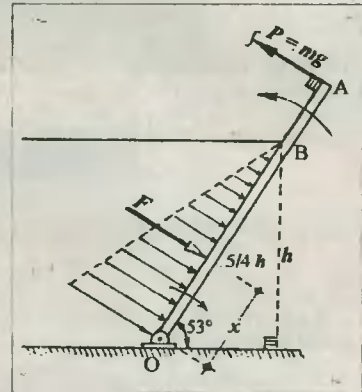
$$\text{a) En agua: } d_c = \left(\frac{P}{P - P_1} \right) d_0 \dots (1); \quad \text{b) En el líquido desconocido: } d_c = \left(\frac{P}{P - P_2} \right) d_L \dots (2)$$

Luego, igualando las ecuaciones (1) y (2) despejamos d_L de modo que:

$$d_L = \left(\frac{P - P_2}{P - P_1} \right) d_0 \Rightarrow \boxed{d_L = 1\,500 \text{ kg/m}^3}$$

24.14. Teniendo en cuenta que la densidad del agua de mar es $1,026 \text{ kg/l}$, estableceremos las siguientes relaciones para el submarino:

a) **Cuando está parcialmente sumergido.** - Se verifica que el peso del submarino es equilibrado por el empuje, para lo cual emplearemos la relación (24.12).



$$P = E_1 \Rightarrow P = d_a \cdot g \cdot (8/9 V) \dots (1)$$

donde: $V_s = 8/9 V$, y V = volumen del submarino.

b) Cuando está totalmente sumergido.- Se verifica que el peso del submarino y del agua introducida en él es equilibrada por el nuevo empuje.

$$P + P_{\text{agua}} = E_2 \Rightarrow P + d_a \cdot g \cdot V_{\text{agua}} = d_a \cdot g \cdot V \dots (2)$$

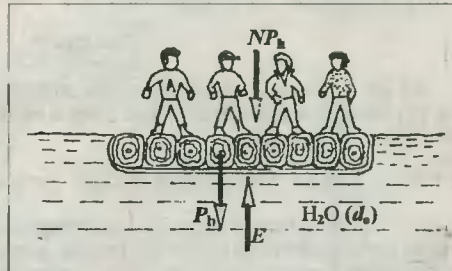
A continuación, dividamos (2) ÷ (1) miembro a miembro.

$$\frac{P + d_a V_a \cdot g}{P} \cdot \frac{9}{8} \Rightarrow P = 8 d_a V_{\text{agua}} \Rightarrow P = 8 \cdot 1,026 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^4 \therefore P \approx 4,1 \cdot 10^6 \text{ N}$$

24.15. A partir del esquema mostrado diremos:

$$E = P_b + NP_h \dots (*)$$

siendo P_b el peso de la balsa, P_h el peso promedio de un hombre, y E el empuje que ejerce el agua sobre la balsa, en el supuesto de que el número máximo de personas N así lo provoca. Luego, utilizando la relación (24.12) para E y la relación (24.4) para el peso de la balsa, tendremos en (*):



$$d_o \cdot g \cdot V = d_m \cdot g \cdot V + N \cdot m_h \cdot g \Rightarrow N = \left(\frac{d_o - d_m}{m_h} \right) V \dots (V = abc)$$

Finalmente, reemplazamos datos, y obtenemos: $N = 16 \text{ personas}$

24.16. a) Cuando la caja flota "libremente" en el agua, su peso es equilibrado por el empuje. En este caso el volumen sumergido viene dado por el producto de su base ($A = 40.20 \text{ cm}^2$) por la altura de su arista sumergida ($h_1 = 8 \text{ cm}$). Luego, tendremos:

$$P_c = E_1 \Rightarrow P_c = d_o \cdot g \cdot V_{s1} = d_o \cdot g \cdot A h_1$$

Reemplazando datos: $P_c = 64 \text{ N}$

b) Cuando la caja tiene adentro la carga m , se verifica entonces que $h_2 = h_1 + \Delta h$. Luego, por condición de equilibrio entre el peso total y el nuevo empuje tendremos:

$$mg + P_c = E_2 \Rightarrow mg + d_o \cdot g \cdot A h_1 = d_o \cdot g \cdot A (h_1 + \Delta h) \Rightarrow mg = d_o \cdot g \cdot A \Delta h \Rightarrow m = d_o \cdot A \Delta h$$

$$\therefore m = 4 \text{ kg}$$

24.17. Llamemos A al área de la base del cilindro. entonces, su volumen será: $V = AH$. A continuación, por condición de equilibrio tendremos que el peso P_c del cilindro será equilibrado por el empuje E del líquido. Luego, utilizando la relación (24.4) para el peso, y la relación (24.12) para el empuje tendremos:

$$P_c = E \Rightarrow d_c \cdot g \cdot A H = d_L \cdot g \cdot V_s \dots (*)$$

donde el volumen sumergido V_s viene dado, de acuerdo con la figura del problema, por la relación: $V_s = A(H - x)$. Reemplazando esta expresión en (*) despejaremos x .

$$x = H(1 - d_c/d_L) \therefore x = 20 \text{ cm}$$

24.18. De acuerdo al esquema mostrado: $E = P \Rightarrow d_o \cdot g \cdot V_s = d_h \cdot g \cdot V$

$$\Rightarrow V_s = (d_H/d_o)V \Rightarrow V_s = 9/10 V$$

Luego, el volumen V_e que el hielo emerge del agua será: $V_e = 1/10 V$

$$\therefore V_e = 10 \text{ cm}^3$$

24.19. Pasando los datos al SI tendremos: $V = 2 \cdot 10^4 \text{ cm}^3 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$,
y $m = 400 \text{ g} = 0,4 \text{ kg}$.

Ahora, por condiciones de equilibrio se establecerá que la fuerza exterior F y el peso P de la pelota son equilibradas por el empuje del agua.

$$F + P = E \Rightarrow F = d_o g V - mg \Rightarrow F = 10^3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-2} - 0,4 \cdot 10$$

$$\therefore F = 196 \text{ N}$$

24.20. Utilizando el resultado del problema 24.17 podemos determinar la altura x del cilindro que sobresale del agua.

$$x = H(1 - d_c/d_o) = 5(1 - 600/1000) \Rightarrow x = 2 \text{ m}$$

Ahora, bajo el supuesto que el desplazamiento del cilindro se ha hecho lentamente, entonces la fuerza F máxima necesaria para sumergirlo se encontrará a partir del equilibrio en el esquema (b).

$$F_m + P = E \Rightarrow F_m = (d_o - d_c)gAh$$

$$\therefore F_m = 200 \text{ N}$$

Graficando el comportamiento de la fuerza F versus el desplazamiento x obtendremos el trabajo realizado por medio del área bajo la curva.

$$W = \frac{1}{2} \cdot (200)(2) \therefore W = 200 \text{ J}$$

24.21. Es evidente que la mayor inmersión de la cubeta provoca un mayor desalojo de agua; de modo que para cualquier incremento de volumen sumergido ΔV de la cubeta corresponde un volumen igual de líquido desalojado, el cual, distribuido en un área A (igual al del fondo del estanque) produce un desnivel Δh en la superficie libre del agua. Luego:

$$\Delta h = \Delta V/A \dots (1)$$

Por condiciones de equilibrio, diremos que el incremento del volumen sumergido se debió al incremento del peso dentro de la cubeta ($\Delta P = \Delta m \cdot g$), el cual a su vez debió provocar un incremento en el empuje del agua ($\Delta E = d_o \cdot g \Delta V$). Entonces:

$$\Delta E = \Delta P \Rightarrow d_o \cdot g \cdot \Delta V = \Delta m \cdot g \Rightarrow \Delta V = \Delta m/d_o \dots (2)$$

$$\text{Finalmente, reemplazamos (2) en (1): } \Delta h = \Delta m/d_o A \therefore \Delta h = 1/100 \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

24.22. Utilizando el esquema mostrado, podemos reconocer que el volumen del cubo es $V = 10A \text{ cm}^3$, siendo A el área de la base. En vista que el aceite y el agua provocan fuerzas de empuje indepen-

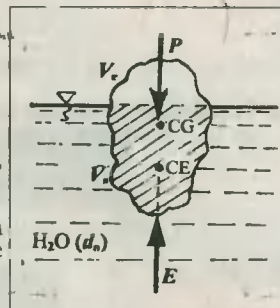


Fig. Solución Prob. 24.18

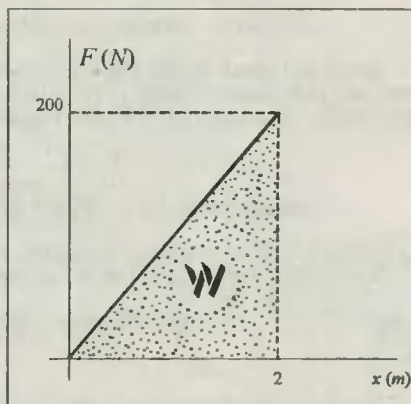
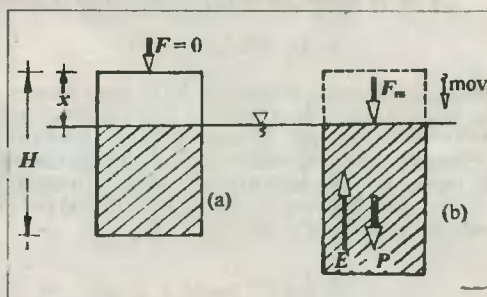


Gráfico. Solución Prob. 24.20

dientes E_a y E_o respectivamente, tenemos:

$$E_o + E_a = P_m$$

$$d_o g A (6 - x) + d_a g A x = d_m g A \cdot 10$$

$$\Rightarrow 1(6 - x) + 0,8x = 0,5 \cdot 10 \quad \therefore \quad \boxed{x = 5 \text{ cm}}$$

24.23. A partir del esquema original y por la condición de equilibrio, tendremos que:

$$E_1 + E_2 = P \quad \dots (*)$$

siendo E_1 y E_2 los empujes producidos por los líquidos 1 y 2 respectivamente. Utilizando la relación (24.11) para el empuje y la (24.4) para el peso, tendremos en (*):

$$d_1 g A (h - x) + d_2 g A x = d g A h \quad \dots (A = \text{área de la base})$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \left(\frac{d - d_1}{d_2 - d_1} \right) h}$$

24.24. Haciendo el DCL de los troncos considerados como un solo cuerpo, observaremos que las reacciones horizontales de las paredes deben ser iguales entre sí. El empuje que experimenta el tronco parcialmente sumergido es la mitad del que recibe el otro. Luego de la primera condición de equilibrio tenemos:

$$E + E/2 = 2P \Rightarrow E = 4/3 P$$

Tomando momentos respecto al centro B, aplicaremos la segunda condición de equilibrio.

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow N \cdot r = (E - P) \cdot r \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow N = \sqrt{3} / 3 P = \sqrt{3} / 3 mg$$

$$\therefore \quad \boxed{N = 10N}$$

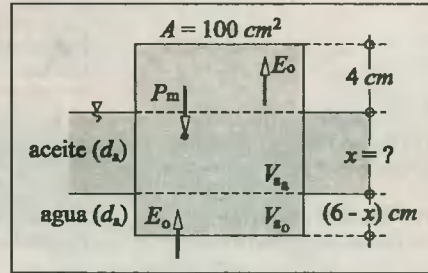


Fig. Solución Prob. 24.22

24.25. A partir del DCL mostrado, diremos que por equilibrio se verifica lo siguiente:

$$P_m + P_c = E_m + E_c \Rightarrow P_m - E_m = E_c - P_c$$

$$d_m g V_m - d_o g V_m = d_o g V_c - d_c g V_c$$

$$\Rightarrow V_m = \left(\frac{d_o - d_c}{d_m - d_o} \right) V_c$$

$$\therefore \quad \boxed{V_m = 1 \text{ m}^3}$$

24.26. A partir de los DCL mostrados, y aplicando la primera condición de equilibrio, tendremos:

$$\text{De (a): } P = F_1 \Rightarrow P = kx_1 \dots (1)$$

$$\text{De (b): } E = P + F_2 \Rightarrow E - P = kx_2 \dots (2)$$

Dividiendo miembro a miembro (1) y (2), y considerando que el peso de la esfera es $P = d_A g V$, y el empuje que recibe es $E = d_o g V$, tendremos que:

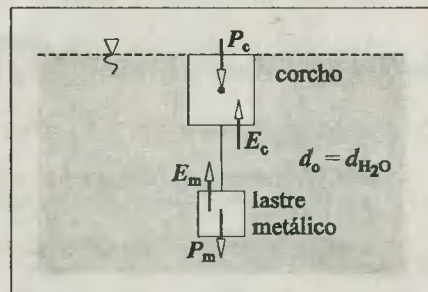
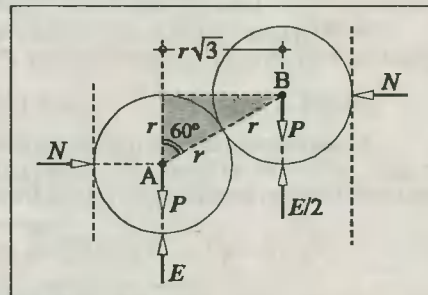


Fig. Solución Prob. 24.22

$$d_A = \left(\frac{x_1}{x_1 + x_2} \right) d_0 \quad \therefore \quad \boxed{d_A = 750 \text{ kg/m}^3}$$

24.27. Ya que los volúmenes de las esferas son iguales y el líquido en que se encuentran es el mismo, deducimos que ambos experimentan empujes iguales.

a) **Cálculo del empuje.**- Por medio del DCL en (a), y utilizando la primera condición de equilibrio, tenemos :

$$2E = P_1 + P_2 \Rightarrow E = 1/2 (P_1 + P_2) \quad \therefore \quad \boxed{E = 40N}$$

b) **Cálculo de la fuerza F_r del resorte.**- Por medio del esquema (b) reconocemos por equilibrio lo siguiente :

$$P_1 + F_r = E \Rightarrow F_r = 40 - 20 \quad \therefore \quad \boxed{F_r = 20N}$$

c) **Cálculo de la deformación x del resorte.**- Utilizando la Ley del Hooke para resortes iguales :

$$kx = F_r \Rightarrow x = F_r/k = 20/5 \cdot 10^3$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \text{ó} \quad x = 4 \text{ mm}}$$

24.28. Hacemos el DCL del sistema y observamos que el bloque C experimenta un peso aparente $P_C - E$, donde :

$$E = dgV = 500 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow E = 10N$$

A continuación, diremos que, por equilibrio, la resultante de P_A y P_B debe ser igual a $P_C - E$. Así, utilizando la Ley del Paralelogramo en el esquema (a), tendremos :

$$P_C - E = \sqrt{P_A^2 + P_B^2 + 2P_A \cdot P_B \cdot \cos \alpha_1}$$

$$\Rightarrow P_C - 10 = \sqrt{30^2 + 50^2 + 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot 1/15}$$

$$\Rightarrow P_C - 10 = 60 \Rightarrow P_C = 70 \text{ N}$$

Analizando el esquema (b), el peso del bloque C deberá equilibrar a la resultante de los pesos P_A y P_B . Luego por un procedimiento similar al anterior, tenemos:

$$P_A^2 + P_B^2 + 2P_A \cdot P_B \cdot \cos \alpha_2 = P_C^2 \Rightarrow \cos \alpha_2 = \frac{70^2 - (30^2 + 50^2)}{2 \cdot 30 \cdot 50} \Rightarrow \cos \alpha_2 = 1/2 \quad \therefore \quad \boxed{\alpha_2 = 60^\circ}$$

2.29. En primer lugar, debemos reconocer que el empuje E que experimenta la esfera viene dado por : $E = d_0 \cdot g \cdot V = 10^3 \cdot 10 \cdot 0.08 \Rightarrow E = 800 \text{ N}$.

A continuación, elaboramos el DCL de la esfera y aplicando la primera condición de equilibrio tendremos :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_A = R_B \cdot \cos 53^\circ \dots \dots \dots (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_B \cdot \text{sen } 53^\circ = E - P \dots \dots \dots (2)$$

Resolviendo (1) y (2) encontramos : $\boxed{R_A = 450 \text{ N}}$ y $\boxed{R_B = 750 \text{ N}}$

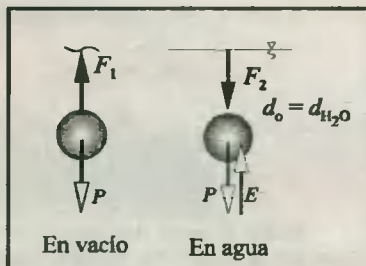


Fig. Solución Prob. 24.26

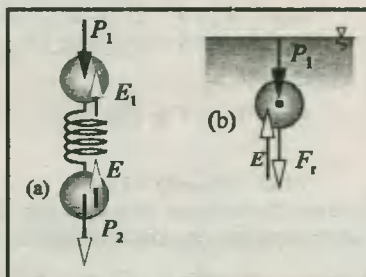
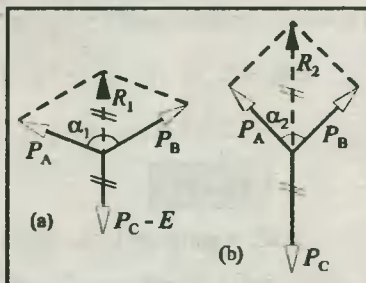


Fig. Solución Prob. 2.27



24.30. A partir del DCL mostrado aplicamos la 2^{da} condición de equilibrio, tomando como centro de momentos al punto A. Además, si S es el área de la sección recta, entonces:

$$V_{\text{sumergido}} = Sh \csc \theta; V_{\text{barra}} = Sl$$

$$\text{Luego: } \Sigma M_A = 0 \Rightarrow E \cdot h/2 \operatorname{ctg} \theta = P \cdot l/2 \cos \theta \Rightarrow (d_A \cdot gSh \csc \theta)h/2 \operatorname{ctg} \theta = (d_B \cdot gSl)l/2 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{d_A}{d_B}} \cdot \frac{h}{l} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = 4/5 \quad \therefore \theta = 53^\circ$$

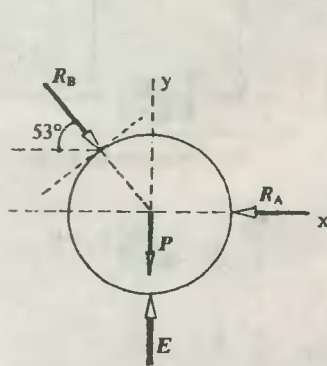


Fig. Solución Prob. 24.29

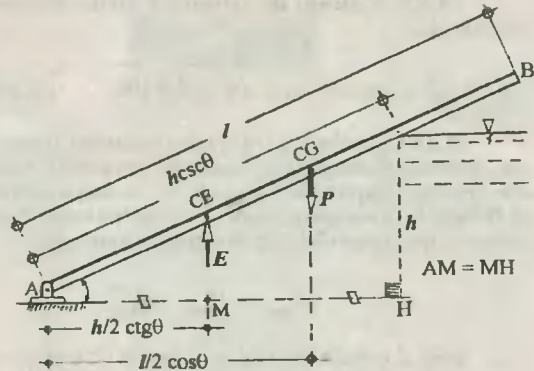


Fig. Solución Prob. 24.30

24.31. Del DCL mostrado notamos que CE es el centroide del volumen sumergido, cuya ubicación viene dada por AH, tal que por la fórmula de centro de gravedad, se verificará que:

$$AH = 1/3 (AC + L \cos \alpha) = L/3 (\sec \alpha + \cos \alpha) \dots (1)$$

$$\text{y: } AR = L \sqrt{2}/2 \cos (45^\circ - \alpha) \dots (2)$$

También se comprueba que: $E = d_o \cdot gL^3 \operatorname{tg} \alpha$

$$\text{Para el cubo: } P_c = d_c \cdot gL^3 \dots (3)$$

Luego, tomando momentos respecto a A:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow E \cdot AH + T \cdot AB = P_c \cdot AR \dots (4)$$

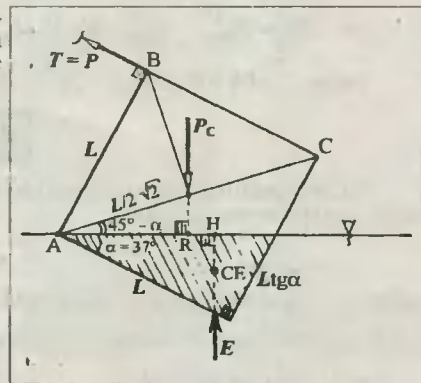
Finalmente, reemplazamos (1), (2) y (3) en (4):

$$(d_o \cdot gL^3 \operatorname{tg} \alpha)L/3 (\sec \alpha + \cos \alpha) + P \cdot L = d_c \cdot gL^3 \cdot L \sqrt{2}/2 \cos (45^\circ - \alpha)$$

Sustituyendo $\alpha = 37^\circ$, y despejando P , tendremos:

$$P = (7/10 d_c - 41/80 d_o)gL^3 \quad \therefore \quad P = 3800 \text{ N}$$

24.32. a. Cálculo de la aceleración.- A partir del DCL mostrado en la figura aplicaremos la 2^{da} Ley de Newton, en virtud a la existencia de fuerzas y aceleración, teniendo en cuenta además, que: $m = d_m V$.



$$P - E = ma \Rightarrow d_m g V - d_o g V = d_m Va$$

$$\Rightarrow a = (1 - d_o/d_m)g \therefore \boxed{a = 8 \text{ m/s}^3}$$

24.32b. Cálculo del tiempo.- Reconociendo que el movimiento es M.R.U.V., entonces utilizamos la relación (4.6).

$$e = 1/2 at^2 \dots (v_o = 0) \Rightarrow 100 = 1/2 \cdot 8 t^2 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

24.32c. Cálculo de velocidad final.- Utilizamos la relación (4.5).

$$v_f^2 = v_o^2 + 2ae \Rightarrow v_f = \sqrt{0^2 + 2 \cdot 8 \cdot 100} \therefore \boxed{v_f = 40 \text{ m/s}}$$

24.33. Con relación al esquema mostrado, reconocemos que en términos energéticos, la energía mecánica del cuerpo se conserva en el trayecto de A hasta B. Sin embargo en el trayecto de B hasta C la energía mecánica del cuerpo experimenta una variación que viene dada por la siguiente expresión:

$$\Delta E_{\text{mec}} = E_{\text{mec}}^C - E_{\text{mec}}^B$$

Igual al trabajo que realiza la fuerza de empuje (W_E). Pero:

$$E_{\text{mec}}^B - E_{\text{mec}}^A = mg(2h)$$

$$\Rightarrow W_E = E_{\text{mec}}^C - E_{\text{mec}}^B, \text{ donde } E_{\text{mec}}^C = 0, \text{ y } W_E = -E/h$$

$$\text{Luego: } -Eh = 0 - 2mgh \Rightarrow d_L \cdot gV = 2d_C \cdot gV$$

$$\therefore \boxed{d_C/d_L = 1/2}$$

24.34. A partir del esquema mostrado, y utilizando la relación (24.6) encontraremos la presión:

$$p_h = d_o \cdot g_{\text{ef}} \cdot h \dots (1)$$

siendo g_{ef} la gravedad efectiva en S.R. no I. elegido dentro del coche. Además, $\theta = 37^\circ$.

Por el diagrama vectorial podemos deducir que:

$$a = g \tan \theta \Rightarrow a = 10.3/4 \Rightarrow a = 7.5 \text{ m/s}^2$$

$$y: g_{\text{ef}} = g \sec \theta = 10.5/4 \Rightarrow g_{\text{ef}} = 12.5 \text{ m/s}^2 \dots (2)$$

Asimismo, debemos señalar que la profundidad h se ha conseguido trazando una línea paralela al vector g_{ef} y perpendicular a la superficie libre de líquido. Por el esquema deducimos además que:

$$h = 0.4 \sin \theta \Rightarrow h = 0.24 \text{ m} \dots (3)$$

Finalmente, reemplazamos (2) y (3) en (1):

$$p_h = 10^3 \cdot 12.5 \cdot 0.24 \therefore \boxed{p_h = 3 \text{ kPa}}$$

24.35. 1^{er} método.- Utilizando el mismo procedimiento del problema anterior, diremos que:

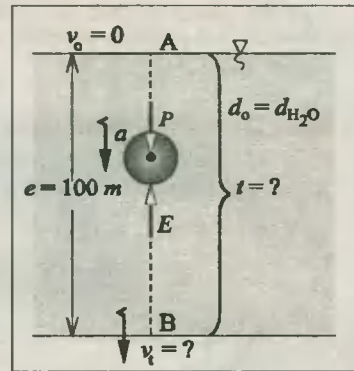


Fig. Solución Prob. 24.32

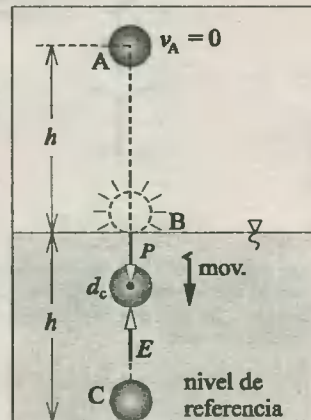
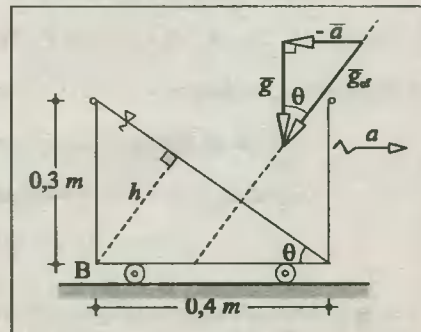


Fig. Solución Prob. 24.33



$$p_h = d_o \cdot g_{ef} \cdot H \dots (1)$$

Del diagrama vectorial:

$$\text{sen } \theta = a/g_{ef} \quad \text{cos } \theta = g/g_{ef} \dots (2)$$

$$\text{Y del esquema: } H = h \text{ cos } \theta + l \text{ sen } \theta \dots (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$p_h = d_o \cdot g_{ef} \cdot (h \cdot g/g_{ef} + l \cdot a/g_{ef})$$

$$p_h = d_o \cdot (h \cdot g + l \cdot a) \quad p_h = 10^3 \cdot (0,6 \cdot 10 + 2 \cdot 1)$$

$$\therefore \boxed{p_h = 8 \text{ kPa}}$$

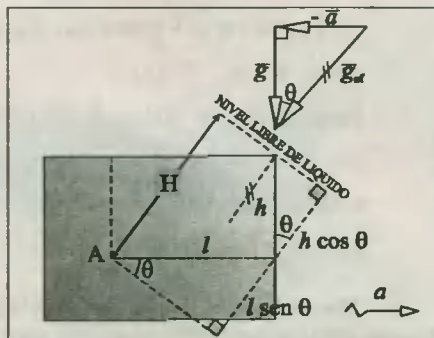


Fig. Solución Prob. 24.35

2do método.- La presión hidrostática que experimenta el punto A se debe a dos campos de aceleración: uno vertical hacia abajo (g) y otro horizontal y hacia la izquierda (a). Luego, las presiones que cada uno produce de manera independiente son: $p_1 = d_o g h$; $p_2 = d_o l$. Finalmente, la presión total viene dada por:

$$p_h = p_1 + p_2 = d_o g h + d_o a l \quad \therefore \boxed{p_h = d_o (g h + a l)}$$

24.36. Ubicando un observador dentro del vagón verificaremos que el péndulo no se mueve, y por ello está en equilibrio. De este modo el peso aparente (P_a), el empuje hidrostático (E) y la tensión de la cuerda serían paralelos a la gravedad efectiva g_{ef} .

Del diagrama vectorial y del esquema original, diremos que los ángulos α y θ tienen sus lados respectivamente perpendiculares. Luego:

$$\boxed{\theta = \alpha = 37^\circ}$$

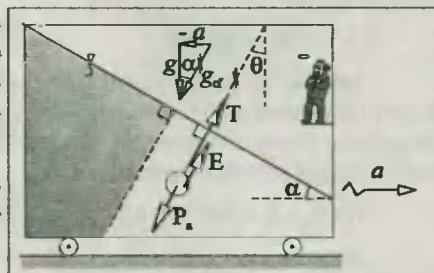


Fig. Solución Prob. 24.36

24.37. Utilizando el mismo procedimiento del problema anterior, deducimos que la cuerda se orienta en una dirección paralela al vector g_{ef} . Asimismo, diremos que, en el sistema ubicado dentro de la cubeta, la esfera se encuentra en equilibrio. Luego:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T + P_a = E$$

$$\Rightarrow T = E - P_a = d_o g_{ef} V - d_c g_{ef} V$$

$$\Rightarrow T = (d_o - d_c) g_{ef} V \dots (1)$$

$$\text{donde: } g_{ef} = \sqrt{g^2 + a^2} = \sqrt{10^2 + 7,5^2}$$

$$\Rightarrow g_{ef} = 12,5 \text{ m/s}^2 \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) y los datos del problema, obtendremos:

$$T = (1000 - 700) \cdot 12,5 \cdot 0,04 \quad \therefore \boxed{T = 150 \text{ N}}$$

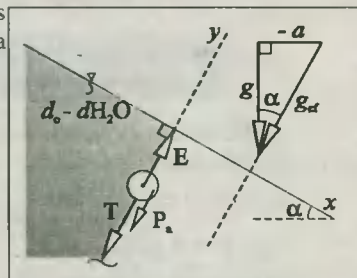


Fig. Solución Prob. 24.37

24.38. 1er método.- Elegimos un tubo vertical del líquido, y de altura h . Analizando su movimiento desde un sistema de referencia fijo a la Tierra aplicaremos la 2^{da} Ley de Newton.

$$F - P = ma \Rightarrow F = m(g + a) = d_0 V(g + a) \dots (1)$$

$$\text{donde: } V = V_h \dots (2)$$

Luego, la presión en el fondo obtendrá por la relación (24.5).

$$p_h = F/A \dots (3)$$

Finalmente, reemplazamos (1) y (2) en (3): $p_h = d_0(g + a)h$

$$\therefore \boxed{p_h = 3\,600 \text{ Pa}}$$

2do. método.- Reconociendo que la gravedad efectiva para un sistema ubicado en el interior del recipiente está dado por $g_{ef} = g + a$, entonces:

$$p_h = d_0 \cdot g_{ef} \cdot h \quad \therefore \boxed{p_h = d_0 \cdot (g + a)h}$$

24.39.a. A partir del DCL mostrado deducimos por los datos que: $h = 0,8H$, y calculando la gravedad efectiva en el interior del ascensor: $g_{ef} = g - a$. Luego, utilizando el resultado del problema anterior para la presión, diremos que: $p_h = d_0(g - a)h$.

$$\therefore \boxed{p_h = 2,8 \text{ kPa}}$$

24.39.b. Ahora, recordando que el empuje es la fuerza resultante que ejerce el líquido sobre el cuerpo en contacto con él, utilizamos la relación (24.5) y calculamos la fuerza de empuje E.

$$E = p_h \cdot A = 2,8 \cdot 10^3 \cdot 0,02 \quad \therefore \boxed{E = 56 \text{ N}}$$

Observación.- Si utilizamos la relación deducida para la presión y la sustituimos en la expresión del empuje, tendremos: $E = d_0(g - a)A_h V_{sumergido}$. Luego, el empuje en un líquido acelerado tiene la siguiente expresión:

$$E = d_0 \cdot g_{ef} \cdot V_{sum}$$

\therefore **“El empuje hidrostática depende de la gravedad local, independiente del sistema de referencia elegido para medirlo”.**

24.40. Sean V_{s1} y V_{s2} los volúmenes sumergidos del hielo cuando el recipiente está en reposo y en movimiento acelerado respectivamente.

a) Cuando el recipiente está en reposo, el peso del hielo es equilibrado por el empuje.

$$E_1 = P \Rightarrow d_0 \cdot g V_{s1} = d_h \cdot g V_h \Rightarrow V_{s1} = (d_h/d_0) V_h \dots (1)$$

b) Cuando el recipiente está acelerado hacia abajo, aplicaremos la 2da Ley de Newton desde un sistema de referencia fijo a la Tierra.

$$P - E_2 = ma \Rightarrow E_2 = m(g - a)$$

$$\Rightarrow d_0 \cdot g_{ef} \cdot V_{s2} = d_h \cdot V_h(g - a) \Rightarrow d_0(g - a)V_{s2} = d_h \cdot V_h(g - a) \Rightarrow V_{s2} = (d_h/d_0)V_h \dots (2)$$

Comparando los siguientes miembros de las relaciones (1) y (2), demostramos que: $V_{s1} = V_{s2}$

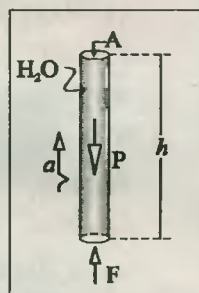


Fig. (a) Solución Prob. 24.38

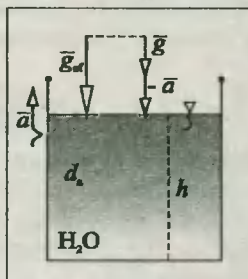


Fig. (a) Solución Prob. 24.38

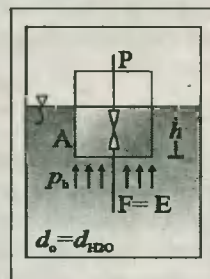


Fig. Solución Prob. 24.39

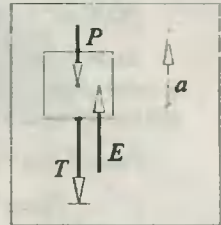
∴ El hielo estando en reposo o en un sistema acelerado, presenta siempre el mismo volumen sumergido.

24.41. Haciendo el DCL del bloque, podemos aplicar la 2^{da} Ley de Newton utilizando un sistema de referencia fijo a la tierra.

$$E - (P + T) = ma$$

$$d_o(g + a)V - d_w gV - T = d_o V a \Rightarrow T = (d_o - d_c)(g + a)V$$

$$\Rightarrow T = (1\,000 - 200)(10 + 2) \quad \therefore \quad T = 480\text{ N}$$



24.42. A partir del esquema mostrado trazamos un plano horizontal por la interface líquido - gas, y reconociendo que los puntos A y B se encuentran en el mismo líquido y a la misma profundidad, diremos que las presiones que soportan son iguales.

$$p_B = p_A \Rightarrow p_{\text{gas}} = p_{\text{hid.}} + p_{\text{atm}}$$

$$\Rightarrow p_{\text{gas}} = d_o g h + p_{\text{atm}} = 10^3 \cdot 10.6.Pa + 101\text{ kPa}$$

$$\therefore \quad p_{\text{gas}} = 131\text{ kPa}$$

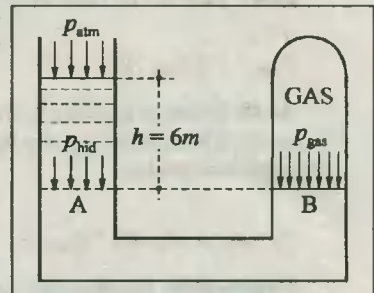


Fig. Solución Prob. 24.42

24.43. Haciendo el diagrama de presiones sobre el émbolo aislado, reconocemos que su peso es una fuerza distribuida sobre el área de sección A, ejerciendo una pequeña presión P/A hacia abajo. Luego, por equilibrio se verificará que :

$$p_{\text{gas}} = p_{\text{atm}} + P/A = 101\text{ kPa} + 600\text{ N/2} \cdot 10^{-2}\text{ m}^2$$

$$\therefore \quad p_{\text{gas}} = 131\text{ kPa}$$

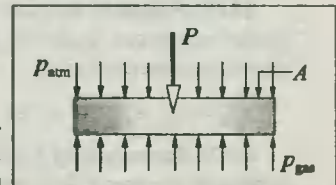


Fig. Solución Prob. 24.43

24.44. Trazando un plano horizontal en la interface gas 1- líquido B. ubicamos los puntos x e y, que por encontrarse en el mismo líquido y a la misma profundidad, experimentan la misma presión.

Reconocemos que el punto x soporta la presión que el gas 1 ejerce directamente sobre él, la cual a su vez se determina por el procedimiento del problema anterior, obteniéndose : $p_x = p_{\text{atm}} + P/A$.

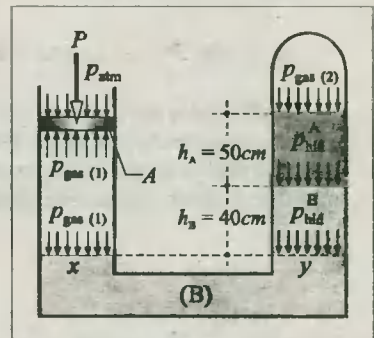
Por otro lado, el punto y soporta la presión hidrostática de los líquidos A y B, pero además la que ejerce el gas 2 sobre el líquido A, obteniéndose :

$$p_y = p_{\text{hid}}^B + p_{\text{hid}}^A + p_{\text{gas}}(2)$$

Luego, tendremos : $p_x = p_y$

$$\Rightarrow p_{\text{atm}} + P/A = d_B \cdot g h_B + d_A \cdot g h_A + p_{\text{gas}}(2)$$

Reemplazando datos y despejando $p_{\text{gas}}(2)$ obtenemos : $p_{\text{gas}}(2) = 81\text{ kPa}$



24.45. A partir del equilibrio del émbolo diremos que la presión por su cara superior y debida al agua y al gas encerrado debe equilibrarse con la presión mecánica F/A y la presión atmosférica que se

ejerce por su cara inferior:

$$p_{inf} = p_{sup} \Rightarrow F/A + p_{atm} = p_{hid} + p_{gas}$$

$$F/0,02 \text{ m}^2 + 101 \text{ kPa} = 10^3 \cdot 10 \cdot 15 + 11 \text{ kPa} \quad \therefore \quad \boxed{F = 1,2 \text{ kN}}$$

24.46. Analizando el equilibrio de la masa de agua observamos que la presión en el fondo del vaso es igual al que experimente el agua en su parte superior, y ésta más la presión hidrostática en la parte inferior del agua son equilibradas por la presión atmosférica. Veamos:

$$P_{fondo} + p_{hid} = p_{atm} \Rightarrow p_{fondo} = 101 \text{ kPa} - d_o \cdot gh \Rightarrow p_{fondo} = 101 \text{ kPa} - 10^3 \cdot 10 \cdot 0,1 \text{ Pa}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_{fondo} = 100 \text{ kPa}}$$

24.47. La altura de vuelo de la paloma la encontramos mediante la relación (24.16).

$$p_{atm} - p = d_{aire} \cdot gh \Rightarrow h = \frac{p_{atm} - p}{d_{aire} \cdot g} \quad \therefore \quad \boxed{h = 500 \text{ m}}$$

24.48. Eligimos un plano horizontal por el nivel libre del líquido en la cubeta, ubicamos un punto x expuesto a la atmósfera, y otro punto y ubicado debajo de la columna de agua, verificándose que las presiones son iguales.

$$p_x = p_y \Rightarrow d_o \cdot gh = p_{atm} \Rightarrow h_{m\acute{a}x} = \frac{p_{atm}}{d_o \cdot g} = \frac{101 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 10} \quad \therefore \quad \boxed{h_{m\acute{a}x} = 10,1 \text{ m}}$$

Observación: La altura máxima de la columna de agua calculada pone fuera de contacto a la parte superior del recipiente con el agua, existiendo entre ellos una región de "vacío ideal".

24.49. Trazando un plano horizontal que pase por la interfase del gas encerrado y el agua, encontraremos que la presión del gas es igual a la presión hidrostática de parte del agua mas la presión atmosférica externa. Luego:

$$p_{gas} = p_{hid} + p_{atm} = d_o \cdot gh + p_{atm} \Rightarrow p_{gas} = 10^3 \cdot 10 \cdot 2 \text{ Pa} + 101 \text{ kPa} \quad \therefore \quad \boxed{p_{gas} = 121 \text{ kPa}}$$

24.50. Haciendo el DCL del tubo encontramos que él se encuentra en equilibrio debido a dos fuerzas: Su peso (P) y la fuerza de empuje (E) debido al volumen de agua desalojado $V_s = Ax$ (igual al volumen sumergido).

$$\Rightarrow E = P \Rightarrow d_o \cdot gAx = P \Rightarrow x = \frac{P}{d_o \cdot gA} \quad \therefore \quad \boxed{x = 0,2 \text{ m}}$$

24.51. De los datos podemos deducir que el barómetro ha disminuido la altura de su columna en $\Delta h = H_1 - H_2 = 4 \text{ cm Hg}$. Esto significa que hemos ascendido con respecto al nivel del mar, y para conseguir la altura h elevada utilizaremos la relación (24.16); de modo que por una regla de tres simples se tendrá lo siguiente:

$$1 \text{ cm Hg} \rightarrow 105 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{4 \text{ cm Hg} \cdot 105 \text{ m}}{1 \text{ cm Hg}} \quad \therefore \quad \boxed{h = 420 \text{ m}}$$

$$4 \text{ cm Hg} \rightarrow h$$

24.52. A partir del DCL de la esfera, tendremos por equilibrio que: $P_e = E_g + E_L$ Utilizando la relación (24.19) para el empuje del gas (E_g) tendremos:

$$d_{e,g}V = d_{e,g} \cdot 7/8V + d_{L,g} \cdot V/8 \quad \therefore \quad \boxed{d_e = 1/8(7d_g + d_L)}$$

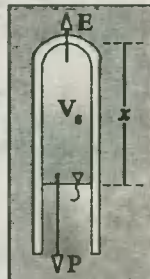


Fig. Solución
Prob. 24.50

24.53. Considerando a T como la lectura del dinamómetro, y a partir del DCL mostrado, por equilibrio tendremos que:

$$T + P_m + P_g = E_m + E_g \Rightarrow T = (E_m + E_g) - (P_m + P_g) \dots (*)$$

donde: $E_m = d_o \cdot g V'_m$; $E_g = d_{aire} \cdot g V'_g$, y $P_m = d_m \cdot g V_m$

Luego, reemplazando estas relaciones en (*) así como los datos correspondientes, tendremos finalmente lo siguiente:

$$T = [(d_o - d_m)V'_m + d_{aire} \cdot V'_g]g - P_g \quad \therefore \quad \boxed{T = 60 \text{ N}}$$

24.54. A partir del DCL del globo reconocemos que: $P_m = m_m g$; $P_{H_2} = m_{H_2} g = d_{H_2} V'_g g$; $E_a = d_a \cdot g V'_g$. Luego, aplicando la 2^{da} Ley de Newton se tendrá que:

$$m_{sist} a = E_a - (P_{H_2} + P_m) \Rightarrow a = \left[\frac{(d_{aire} - d_{H_2})V'_g - m_m}{d_{H_2} V'_g + m_m} \right] g$$

Reemplazando datos obtenemos: $\boxed{a = 2,9 \text{ m/s}^2}$

24.55. Reconocemos que cada bloque experimenta un empuje, y por ello en la balanza se equilibrarán los pesos aparentes de cada uno, de modo que:

$$(P_{apar})_{plomo} = (P_{apar})_{latón} \Rightarrow P_{pb} - E_{pb} = P_{latón} - E_{latón}$$

$$\Rightarrow d_{pb} \cdot g V_{pb} - d_{aire} \cdot g V_{pb} = d_{latón} \cdot g V_{latón} - d_{aire} \cdot g V_{latón} \dots (1)$$

donde: $V_{pb} = m_{pb}/d_{pb}$, y $V_{latón} = m_{latón}/d_{latón} \dots (2)$

Luego, reemplazando (2) en (1), y despejando la masa del bloque de plomo, tendremos:

$$m_{pb} = m_{latón} \left[\frac{1 - d_{aire}/d_{latón}}{1 - d_{aire}/d_{pb}} \right] \quad \therefore \quad \boxed{m_{pb} = 99,996 \text{ kg}}$$

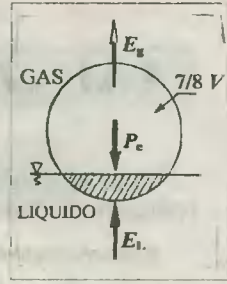


Fig. Solución Prob. 24.52

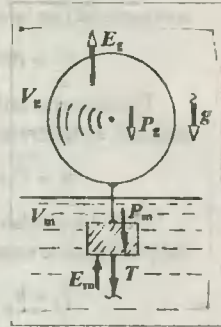


Fig. Solución Prob. 24.53

CAP .25 TERMOMETRÍA - DILATACIÓN

25.1. De la relación (25.2) expresaremos las lecturas F, H y R en función de la lectura en la escala centígrada (°C). Así pues, encontraremos que: $K = C + 273$; $F = 9/5 C + 32$, $R = 9/5 C + 492$.

Reemplazando estas relaciones en la expresión dada en el enunciado del problema, tendremos:

$$(C + 273) + 2(9/5 C + 32) = 2(9/5 C + 492) - 9C \quad \therefore \boxed{C = 64,7}$$

25.2 En base a las relaciones obtenidas en el problema anterior, diremos que: $F = 9/5 C + 32$. Luego sustituyendo en la ecuación dada, tendremos:

$$C + (9/5 C + 32) = 60 \quad \Rightarrow \quad C = 10$$

Finalmente, utilizando la relación entre las escalas centígrada y kelvin deducida en el problema anterior, obtendremos:

$$K = C + 273 \quad \therefore \boxed{K = 283}$$

25.3. De los datos conseguimos que: $T_0 = 10^\circ\text{C}$, $\Delta T_1 = 18^\circ\text{F}$, $\Delta T_2 = 5\text{K}$, $\Delta T_3 = 36^\circ\text{R}$, que por condición del problema se relacionan del siguiente modo:

$$T_f = T_0 + \Delta T_1 - \Delta T_2 + \Delta T_3 \dots (*)$$

Ahora utilizando las relaciones (25,3) y (25,4) encontraremos las variaciones temperatura (ΔT) dadas en °C. Así, encontramos que:

$$\Delta T_1 = 18(5/9^\circ\text{C}) = 10^\circ\text{C}; \quad \Delta T_2 = 5\text{K} = 5^\circ\text{C}; \quad \Delta T_3 = 36(5/9^\circ\text{C}) = 20^\circ\text{C}$$

Reemplazando en (*) encontraremos la temperatura final del cuerpo.

$$T_f = 10^\circ\text{C} + 10^\circ\text{C} - 5^\circ\text{C} + 20^\circ\text{C} \quad \therefore \boxed{x = -2^\circ\text{F}}$$

25.4. Dado que los termómetros poseen divisiones de igual longitud, podemos decir que las variaciones de temperatura en ambos termómetros serán iguales. Así pues, en el gráfico deducimos que la temperatura x buscada vendrá dada por:

$$x + 180^\circ\text{F} = 178^\circ\text{F} \quad \therefore \quad x = -2^\circ\text{F}$$

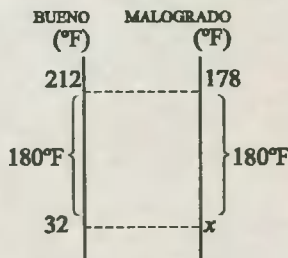
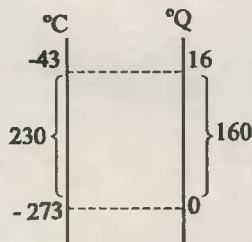


Fig.Solución Prob. 25.4



CERO ABSOLUTO

Fig.Solución Prob. 25.5

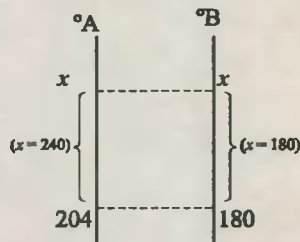


Fig.Solución Prob. 25.6

25.5. Recordando que una escala absoluta inicia sus lecturas desde el cero absoluto, podemos asegurar que $160 \text{ div } (O)$ equivalen a $230 \text{ div } (^{\circ}C)$, lo cual se consigue en base a la colocación de los datos en el gráfico de la figura. Luego, un incremento de temperatura de $80 O$ será equivalente a $115^{\circ}C$, lo que en $^{\circ}F$ según las relaciones (25.4) será equivalente a $207^{\circ}F$. De aquí se obtiene que:

$$T_f = T_o + \Delta T = -16^{\circ}F + 207^{\circ}F \quad \therefore \quad T_f = 191^{\circ}F$$

25.6. De acuerdo a los datos del problema, notamos que es a través del incremento de la temperatura que podemos relacionar las escalas termométricas A y B. Para ello elaboramos el gráfico de la figura, colocando en él los datos referidos, y del cual se consigue establecer que, si x es el valor de la temperatura común, se cumplirá lo siguiente:

$$(x - 240) \text{ div } (^{\circ}A) = (x - 180) \text{ div } (^{\circ}B) \dots (1)$$

$$1 \text{ div } ^{\circ}A = 1,5 \text{ div } ^{\circ}B \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) despejamos x : $x = 360$

25.7. Resolvamos el problema por dos métodos.

1^{er} método.- Utilizando la relación que existe entre las divisiones de ambas escalas, tendremos que:

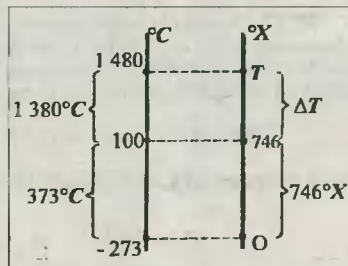
$$373 \text{ div } (^{\circ}C) = 746 \text{ div } (^{\circ}X) \Rightarrow 1 \text{ div } (^{\circ}C) = 2 \text{ div } (^{\circ}X)$$

$$\text{Luego: } T = 746^{\circ}X + \Delta T = 746^{\circ}X + 1380^{\circ}C \cdot 2^{\circ}X/1^{\circ}C$$

$$\therefore \quad T = 3\ 506^{\circ}X$$

2^{do} método.- Empleando la proporcionalidad de segmentos que establece el Teorema de Tales, para el gráfico adjunto:

$$\frac{T - 0}{746} = \frac{1\ 480 - (-273)}{373} \quad \therefore \quad T = 3\ 506^{\circ}X$$



25.8. Considerando la dilatación térmica del diámetro de la polea, utilizaremos la relación (25.5), para lo cual haremos que los datos sean identificados por: $L_o = 400 \text{ mm}$, $T_o = 0^{\circ}C$, $L_f = ?$, $T_f = 200^{\circ}C$, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}C^{-1}$.

$$\Rightarrow L_f = L_o[1 + \alpha(T_f - T_o)] \Rightarrow L_f = 400[1 + 1,2 \cdot 10^{-5}(200 - 0)] \quad \therefore \quad L_f = 400,96 \text{ mm}$$

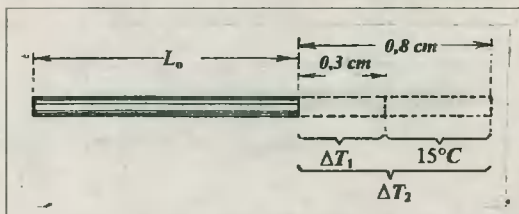
25.9. Por los datos del problema tendremos: $\Delta L_1 = 0,3 \text{ cm}$, y $\Delta T_1 = ?$, $\Delta L_2 = 0,8 \text{ cm}$, y $\Delta T_2 = \Delta T_1 + 15^{\circ}C$. Luego, utilizando el gráfico adjunto y la relación (25.5) tenemos:

$$\Delta L_1 = L_o \alpha \Delta T_1 \Rightarrow 0,3 = L_o \alpha \Delta T_1 \dots (1)$$

$$\Delta L_2 = L_o \alpha \Delta T_2$$

$$\Rightarrow 0,8 = L_o \alpha (\Delta T_1 + 15) \dots (2)$$

Dividiendo (2) entre (1) miembro a miembro encontramos que: $\Delta T_1 = 9^{\circ}C$



25.10. De acuerdo con los datos del problema, podemos predecir que la dilatación de los alambres (ΔL_1) será mayor que la de la barra (ΔL_2). Así pues, del gráfico adjunto establecemos que:

$$\cos 74^{\circ} = \frac{\Delta L_2/2}{L_f} = \frac{L_o \alpha_B \Delta T}{2L_o(1 + \alpha_A \Delta T)} \Rightarrow \frac{7}{25} = \frac{5,88 \cdot 10^{-3} \cdot (T_f - T_o)}{2[1 + 5 \cdot 10^{-4}(T_f - T_o)]} \quad \therefore \quad T_f = 120^{\circ}C$$

25.11. Sean x y y las longitudes de cada trozo y a una misma temperatura, de modo que, por condición del problema se deberá cumplir que:

$$x + y = 50 \text{ cm} \dots (1)$$

También, de acuerdo a las condiciones del problema, los trozos se dilatan de modo que:

$$\Delta x + \Delta y = 0,063 \text{ cm}$$

Utilizando la relación (25.5) para cada trozo tenemos:

$$x\alpha_1\Delta T + y\alpha_2\Delta T = 0,063 \text{ cm}$$

$$x \cdot 1,5 \cdot 10^{-5}(100) + y \cdot 0,9 \cdot 10^{-5}(100) = 0,063$$

$$\Rightarrow 5x + 3y = 210 \text{ cm} \dots (2)$$

Finalmente, de (1) y (2): $x = 30 \text{ cm}, y = 20 \text{ cm}$

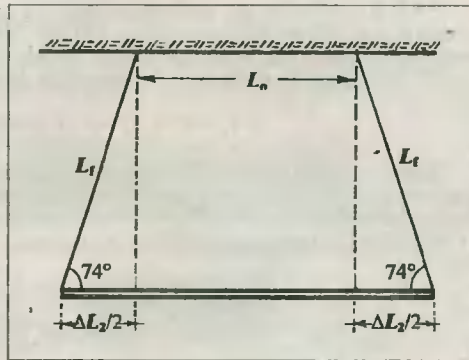


Fig. Solución Prob. 25.10

25.12. Cuando la barra desarrolla una dilatación térmica, su extremo libre experimenta un desplazamiento ΔL , cuyo valor viene dado por la relación (25.5). De acuerdo con el gráfico adjunto se puede comprobar que el desplazamiento del centro O del rodillo es igual a $\Delta L/2$, siendo $d = OR$, siendo θ el ángulo girado por el rodillo durante el movimiento.

$$\theta R = \Delta L/2 \Rightarrow \theta \cdot D/2 = \Delta L/2 \Rightarrow \theta = \Delta L/D \Rightarrow \theta = L\alpha\Delta T/D \dots (*)$$

Para el tramo OA.- Utilizando la relación (*) tendremos:

$$\theta_1 = \frac{L_1\alpha\Delta T}{D} \Rightarrow \theta_1 = \frac{1,1 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot (220 - 20)}{1 \cdot 10^{-2}} \therefore \theta_1 = 0,34 \text{ rad}$$

Tramo OB.- Empleando el mismo principio, el ángulo girado (θ_2) se obtendrá por una expresión análoga a la relación (*).

$$\theta_2 = \frac{L_2\alpha\Delta T}{D} \Rightarrow \theta_2 = \frac{3,1 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot (220 - 20)}{1 \cdot 10^{-2}} \therefore \theta_2 = 1,02 \text{ rad}$$

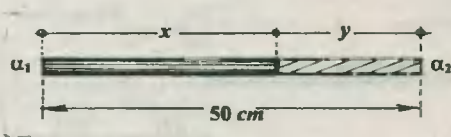


Fig. Solución Prob. 25.11

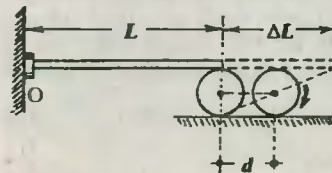


Fig. Solución Prob. 25.12

25.13. Con los datos obtendremos la longitud que presenta "1 m" de wincha dilatada, a la cual llamaremos 1 nuevo metro. De la relación (25.5) tendremos:

$$1 \text{ nuevo metro} = 1 \text{ m}[1 + 4 \cdot 10^{-4}(35 - 15)] \Rightarrow 1 \text{ nuevo metro} = 1,008 \text{ m}$$

La longitud verdadera del terreno será: $L_v = 100 \text{ nuevos metros} = 100 \cdot 1,008 \text{ m}$

$$\therefore L_v = 100,8 \text{ m}$$

25.14. Encontraremos primero la longitud final del bronce a partir de los datos dados, utilizando para ello la relación (25.5).

$$L_f = L_o[1 + \alpha_{\text{bronce}}(T_f - T_o)] = 80[1 + 1,8 \cdot 10^{-5}(40 - 20)] \Rightarrow L_f = 80,0288 \text{ cm}$$

En base a la resolución del problema anterior encontraremos la longitud del "nuevo centímetro" en la cinta de aluminio.

$$1 \text{ nuevo centímetro} = 1 \text{ cm}[1 + 2,3 \cdot 10^{-5}(40 - 20)] = 1,00046 \text{ cm}$$

Finalmente, para averiguar la "longitud aparente" de la varilla de bronce medida con el "nuevo centímetro", haremos una simple división para encontrar las veces que este último está contenido en el primero.

$$\text{Longitud aparente} = L_{f(\text{bronce})} / \text{nuevo centímetro} = 80,0288 \text{ cm} / 1,00046 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{Longitud aparente} = 79,992$$

25.15. Sea H la altura verdadera de la columna de mercurio (expresada en centímetros) a la temperatura $T_2 = 10^\circ\text{C}$. En vista que la masa de mercurio se mantiene constante, se verificará entonces que su altura estará en proporción inversa con su densidad: $H/H_1 = d_1/d_2$.

Utilizando la relación (25.9) para la densidad d_2 encontraremos que:

$$H = H_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow H = H_1(1 + \gamma\Delta T)$$

Luego, expresando esta altura en la regla de latón, la que a su vez presenta una nueva longitud para sus centímetros, las que por la solución del problema anterior miden: 1 nuevo centímetro = $1 \text{ cm}(1 + \alpha\Delta T)$, tendremos entonces:

$$H_2 = \frac{H}{\text{nuevo centímetro}} = \frac{H_1(1 + \gamma\Delta T)}{1(1 + \alpha\Delta T)}$$

Haciendo uso de la relación aproximada: $(1 + \alpha\Delta T)^{-1} \approx 1 - \alpha\Delta T$, tendremos:

$$\Rightarrow H_2 = H_1(1 + \gamma\Delta T)(1 - \alpha\Delta T) \Rightarrow H_2 \approx H_1[1 + (\gamma - \alpha)\Delta T] \therefore H_2 = 10,016 \text{ cm}$$

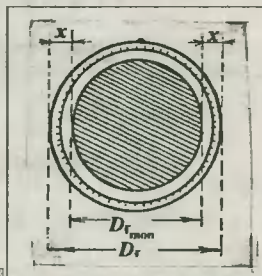
25.16. Comparando la dilatación que experimenta el diámetro del aro alámbrico con el diámetro de la moneda, tendremos que la separación x entre ellos vendrá dado por:

$$2x = D_{f\text{aro}} - D_{f\text{moneda}} \dots (*)$$

Considerando que el agujero del aro se dilata como si estuviera lleno del material que lo rodea, utilizaremos la relación (25.5) para cada dilatación. En (*):

$$2x = 2R(1 + \alpha_{\text{aro}}\Delta T) - 2R(1 + \alpha_{\text{moneda}}\Delta T)$$

$$\Rightarrow x = R(\alpha_{\text{aro}} - \alpha_{\text{moneda}})\Delta T = 50(3 \cdot 10^{-5} - 1 \cdot 10^{-5}) \cdot 100 \therefore x = 0,1 \text{ cm}$$



25.17. Estudiando la dilatación del diámetro del agujero como si éste estuviera lleno del material que lo rodea, por la relación (25.5) tendremos:

$$D_f = D_o(1 + \alpha_{\text{lámina}}\Delta T) \dots (*)$$

siendo $D_o = 50 \text{ mm}$ el diámetro inicial; y para que la esfera pueda pasar por el agujero, ésta deberá

tener un diámetro final $D_f = 52 \text{ mm}$. Luego, en (*):

$$52 = 50(1 + 2 \cdot 10^{-4} \Delta T) \quad \therefore \quad \Delta T = 2000^\circ \text{C}$$

25.18. Es evidente que las varillas llegarán a tocarse siempre que las dilataciones térmicas ΔL_1 y ΔL_2 de cada varilla verifiquen la siguiente relación:

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = x \quad \Rightarrow \quad L_1 \alpha_1 \Delta T + L_2 \alpha_2 \Delta T = x \quad \therefore \quad \Delta T = \frac{x}{L_1 \alpha_1 + L_2 \alpha_2}$$

25.19. Sean L_1 y L_2 las longitudes de las varillas a 0°C . Para que ellas mantengan siempre la misma diferencia de longitudes, entonces cada una debe experimentar la misma variación de longitud (ΔL) para un mismo cambio de temperatura. Así pues, tenemos que:

$$L_1 - L_2 = 50 \text{ cm} \dots (1)$$

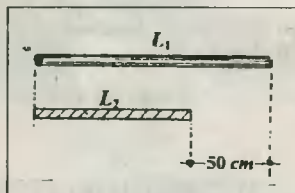
$$y: \Delta L_1 = \Delta L_2 \Rightarrow L_1 \alpha_1 \Delta T = L_2 \alpha_2 \Delta T \Rightarrow L_1 / L_2 = \alpha_2 / \alpha_1 \dots (*)$$

Al haber considerado que $L_1 > L_2$, entonces, en la relación (*) se deberá considerar que:

$$\alpha_2 = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ \text{C}^{-1} \text{ (bronce)}, \text{ y } \alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ \text{C}^{-1} \text{ (acero)}$$

Luego, al reemplazar en (*) obtenemos: $L_1 / L_2 = 3/2 \dots (2)$

$$\text{Finalmente, de (1) y (2): } L_1 = 150 \text{ cm}; L_2 = 100 \text{ cm}$$



25.20. Sea T_0 el periodo del péndulo a la temperatura $t_0 = 18^\circ \text{C}$. Luego, si el atraso del reloj durante un día (86 400 s) es x segundos, entonces, durante un tiempo T_0 el atraso será igual a $T_0 \cdot x / 86 400$. De este modo, el periodo T_f a la temperatura $t_f = 28^\circ \text{C}$ vendrá dado por: $T_f = T_0 + T_0 \cdot x / 86 400$.

Utilizando la fórmula del periodo para un péndulo simple, tendremos:

$$2\pi\sqrt{L_f/g} = 2\pi\sqrt{L_0/g} \cdot (1 + x/86 400)$$

Y de la relación (25.5) obtendremos: $\sqrt{L_0(1 + \alpha\Delta T)} = \sqrt{L_0(1 + x/86 400)}$

Empleando la fórmula aproximada: $\sqrt{1 + \alpha\Delta T} \approx 1 + \frac{1}{2} \alpha\Delta T$, dado que $\alpha\Delta T \ll 1$, tenemos:

$$1 + \frac{1}{2} \alpha\Delta T = 1 + x/86 400 \Rightarrow x = 43 200 \alpha \Delta T \quad \therefore \quad x = 4,75 \text{ s}$$

25.21. Utilizando el resultado del problema anterior, y considerando a T como la temperatura de trabajo normal del péndulo, tendremos:

$$t_1 = 43 200 \alpha (T_1 - T) \dots (1)$$

$$t_2 = 43 200 \alpha (T_2 - T) \dots (2)$$

Luego, restando (2) - (1) miembro a miembro, tendremos:

$$t_2 - t_1 = 43 200 \alpha (T_2 - T_1) \Rightarrow \alpha = \frac{t_2 - t_1}{43 200 (T_2 - T_1)} = \frac{30 - 3}{43 200 (30 - 5)} \quad \therefore \quad \alpha = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ \text{C}^{-1}$$

25.22. A partir del esquema mostrado tomaremos la pendiente de la recta ($\text{tg}\theta$), consiguiendo lo siguiente:

$$\text{tg}\theta = \Delta L / \Delta T = L_0 \alpha \Delta T / \Delta T \Rightarrow \text{tg}\theta = L_0 \alpha \dots (\text{Propiedad}).$$

En donde, reemplazando datos, tendremos:

$$3/4 \text{ cm}/^\circ \text{C} = L_0 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} (1/^\circ \text{C}) \quad \therefore \quad L_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ cm}$$

25.23. De los datos deducimos que: $T_0 = 0^\circ\text{C}$, $T_f = 400^\circ\text{C}$, $\Delta A = 0,8 \text{ cm}^2$, y $\gamma = 6 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Utilizando la relación (25.8) podemos deducir β .

$$\beta/2 = \gamma/3 \Rightarrow \beta = 2/3 \gamma = 2/3 (6 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) \Rightarrow \beta = 4 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

Luego, utilizando la relación (25.6) despejaremos el área inicial (A_0).

$$A_0 = \frac{\Delta A}{\beta \Delta T} = \frac{0,8}{4 \cdot 10^{-5} (400 - 0)} \Rightarrow A_0 = 50 \text{ cm}^2$$

Finalmente, el área A_f a la temperatura $T_f = 400^\circ\text{C}$ se obtendrá a partir de la siguiente relación:

$$A_f = A_0 + \Delta A \Rightarrow A_f = 50 + 0,8 \quad \therefore \boxed{A_f = 50,8 \text{ cm}^2}$$

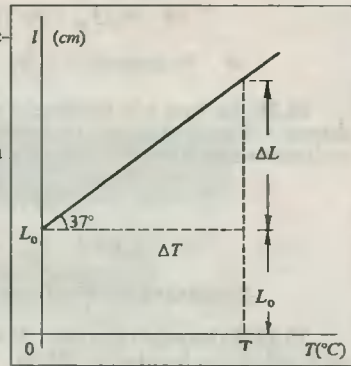


Fig. Solución Prob. 25.22

25.24. Sea A_0 el área inicial de las placas de latón y acero a las temperaturas $T_1 = 10^\circ\text{C}$ y $T_2 = 20^\circ\text{C}$ respectivamente. Por condición del problema, se tiene que: $(A_f)_{\text{latón}} = (A_f)_{\text{acero}} \dots (*)$

Utilizando la relación (25.6) para las áreas finales, encontraremos la temperatura común T_f . Así, en (*) tenemos:

$$A_0 [1 + \alpha_{\text{latón}}(T_f - T_1)] = A_0 [1 + \alpha_{\text{acero}}(T_f - T_2)]$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{\alpha_{\text{latón}} T_1 - \alpha_{\text{acero}} T_2}{\alpha_{\text{latón}} - \alpha_{\text{acero}}} \quad \therefore \boxed{T_f = -3,75^\circ\text{C}}$$

25.25. Dado que el porcentaje de variación del área se determina por la siguiente relación:

$$\%r_A = \Delta A/A_0, \text{ donde } \Delta A = A_0 \beta \Delta T \Rightarrow \%r_A = \beta \Delta T \dots (1)$$

A continuación, diremos que la variación porcentual de la longitud vendrá dada por la siguiente relación: $\%r_L = \Delta L/L_0 = L_0 \alpha \Delta T/L_0 \Rightarrow \%r_L = \alpha \Delta T \dots (2)$

Y teniendo en cuenta que para un mismo material se verifica que $\beta = 2\alpha$, luego, de (1) y (2) se obtendría que:

$$\%r_A = 2\%r_L \Rightarrow \%r_L = \frac{1}{2} \cdot 6\% \quad \therefore \boxed{\%r_L = 3\%}$$

25.26. Considerando que el coeficiente de dilatación volumétrica del vidrio es $\gamma_v = 3\alpha_v$, diremos que, por condición del problema, se verificará que los volúmenes finales del recipiente de vidrio y del líquido son iguales. Entonces:

$$(V_f)_{\text{vidrio}} = (V_f)_{\text{líquido}} \Rightarrow V_v (1 + 3\alpha_v \Delta T) = V_L (1 + \gamma_L \Delta T)$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{V_v - V_L}{V_L \gamma_L - 3V_v \alpha_v} \Rightarrow \Delta T = 200^\circ\text{C}$$

Luego, la temperatura a la cual se produce este fenómeno viene dada por:

$$T_f = T_0 + \Delta T \quad \therefore \boxed{T_f = 210^\circ\text{C}}$$

25.27. Debemos reconocer que las variaciones de volumen que experimentan el recipiente y el líquido a causa de un cambio en su temperatura deberán ser iguales, para que así la parte vacía tenga un volumen constante. Entonces, utilizando la relación (25.7) para dichas variaciones, tendremos:

$$\Delta V_L = \Delta V_m \Rightarrow V_L \gamma_L \Delta T = V_m \gamma_m \Delta T$$

$$\Rightarrow V_L/V_m = \gamma_m/\gamma_L \dots (\% \text{ ocupado por el líquido} = V_L/V_m \cdot 100)$$

$$\Rightarrow \% \text{ ocupado} = \gamma_m/\gamma_L \cdot 100 = 3 \cdot 10^{-4}/4 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \quad \therefore \quad \% \text{ ocupado} = 75\%$$

25.28. En base a la resolución del problema anterior, diremos que la parte vacía mantendrá el mismo volumen siempre que las variaciones de volumen de ambos cascarones sean iguales. Así, utilizando esta condición y la relación (25.7) tendremos:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \Rightarrow V_1 \cdot \gamma_1 \cdot \Delta T = V_2 \cdot \gamma_2 \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow 4/3 \pi R_1^3 \cdot 3\alpha_1 = 4/3 \pi R_2^3 \cdot 3\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = (R_2/R_1)^3 \cdot \alpha_2 \dots (*)$$

Reemplazando datos en (*) se consigue: $\alpha_1 = 29,7 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

25.29. Extrayendo los datos: $T_1 = 0^\circ\text{C}$, $T_2 = 50^\circ\text{C}$, $d_1 = 13,6 \text{ g/cm}^3$, y $\gamma = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. A continuación utilizamos la relación (25.9).

$$d_2 = \frac{d_1}{1 + \gamma(T_2 - T_1)} \Rightarrow d_2 \approx d_1[1 - \gamma(T_2 - T_1)]$$

Reemplazando datos: $d_2 \approx 13,6[1 - 1,8 \cdot 10^{-4}(0 - 50)] \quad \therefore \quad d_2 \approx 13,48 \text{ g/cm}^3$

25.30. Analizando el equilibrio mecánico del sistema, concluimos que al inicio y al final las lecturas tienen una diferencia de valores ΔL debido al cambio producido en la fuerza de empuje (E).

$$\Delta L = \Delta E \dots (1)$$

Notamos que el empuje cambia debido a que tanto el volumen del cilindro de platino como la densidad del keroseno se ven afectados por el fenómeno de dilatación. Luego:

$$\Delta E = E_f - E_o = d_f \cdot g V_f - d_o \cdot g V_o \dots (2)$$

Ahora, el volumen V_f y la densidad d_f se determinan por las relaciones (25.7) y (25.9) respectivamente, las que al sustituir las en (2) permite obtener:

$$\Delta E = d_o \cdot g V_o [(1 - \gamma_k \Delta T)(1 + 3\alpha_{Pt} \Delta T) - 1]$$

Multiplicando y haciendo aproximaciones se consigue que la diferencia de lecturas está dada por:

$$\Delta L = d_o \cdot g V_o (3\alpha_{Pt} - \gamma_k) \Delta T \quad \therefore \quad \Delta L = -9,73 \text{ N}$$

Observación. - El signo menos del resultado nos indica que la lectura del dinamómetro ha disminuido en 9,73 N respecto a la lectura inicial.

25.31. A partir del esquema mostrado indicamos que:

V_h = Volumen original del bloque de hielo.

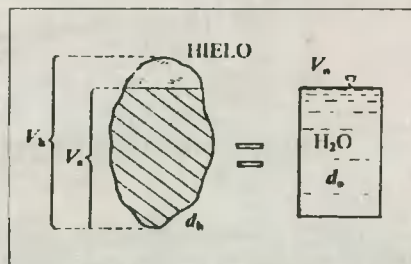
V_s = Volumen sumergido del hielo.

V_o = Volumen de agua obtenido del hielo fundido.

1) Analizando el equilibrio del bloque de hielo se tiene lo siguiente:

$$E = P_h \Rightarrow d_o \cdot g V_s = d_h \cdot g V_h$$

$$\Rightarrow V_s = (d_h/d_o) V_h \dots (1)$$



2) Analizando las masas de agua y hielo tendremos que:

$$\text{Masa de agua} = \text{Masa de hielo} \Rightarrow d_o V_o = d_h V_h \Rightarrow V_o = (d_h/d_o) V_h \dots (2)$$

Así, observando las relaciones (1) y (2) concluimos que los volúmenes V_s y V_o son iguales, lo cual significa que: "El volumen de agua obtenida del hielo fundido es exactamente igual al desalojado por el hielo cuando flotaba en agua". Por esta razón:

"El nivel del agua se mantiene igual"

25.32. En virtud a la solución del problema anterior podemos predecir que el nivel del líquido va a disminuir debido a que el hielo con el metal dentro desaloja un volumen mayor que en el caso anterior. Así pues, el volumen de agua que disminuye en el recipiente viene dado por la expresión:

$$\Delta V = V_s - (V_o + V_m) \dots (1)$$

Del esquema adjunto se tiene que:

$$E = P_h + P_m \Rightarrow d_o \cdot g V_s = d_h \cdot g V_h + m_m g$$

$$\Rightarrow V_s = (d_h/d_o) V_h + m_m/d_o \dots (2)$$

Además, de la moneda se sabe que:

$$V_m = m_m/d_m \dots (3)$$

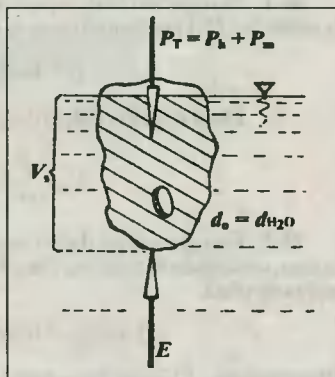
Y de la relación (2) deducida en el problema anterior para el volumen de agua (V_o) obtenida del hielo, tendremos:

$$V_o = (d_h/d_o) V_h \dots (4)$$

Luego, reemplazando (2), (3) y (4) en (1): $\Delta V = m_m(1/d_o - 1/d_m)$

Pero: $\Delta V = A \cdot \Delta h \dots (\Delta h = \text{desnivel})$

$$\Rightarrow \Delta h = m_m/A \cdot (1/d_o - 1/d_m) \Rightarrow \Delta h = 1/5 \text{ cm} \approx 2 \text{ mm}$$



CAP 26 CALOR

26.1. Extrayendo lo datos tendremos: $K = 6 \text{ cal/}^\circ\text{C}$, $m = 300\text{g}$, $T_o = 16 \text{ C}$, $T_f = 26 \text{ C}$. Utilizando la relación (26.1) encontraremos el calor absorbido (Q).

$$Q = 6 \text{ cal/}^\circ\text{C} \cdot (26^\circ\text{C} - 16 \text{ C}) \quad \therefore \quad \boxed{Q = 60 \text{ cal}}$$

De la relación (26,3) despejamos el calor específico (C_e).

$$C_e = \frac{K}{m} = \frac{6 \text{ cal/}^\circ\text{C}}{30 \text{ g}} \quad \therefore \quad \boxed{C_e = 0,02 \text{ cal/g.}^\circ\text{C}}$$

26.2. Extrayemos los datos conseguimos que: $m = 200\text{g}$, $T_o = 200 \text{ C}$, $T_f = 70 \text{ C}$, $C_e = 0,056 \text{ cal/g.}^\circ\text{C}$. Luego, utilizando la relación (26.5) encontraremos el calor sensible cedido al líquido por parte de la esfera de plata.

$$Q = 200\text{g} \cdot 0,056 \text{ cal/g.}^\circ\text{C} \cdot (70^\circ\text{C} - 200 \text{ C}) \quad \therefore \quad \boxed{Q = -1456 \text{ cal}}$$

Observación.- El signo menos de la respuesta se entiende como una cantidad de calor perdido por el cuerpo.

26.3. 1) Analicemos lo que sucede con el agua. Ella tiene una temperatura inicial $T_o = 0 \text{ C}$, y otra final $T_f = 33 \text{ C}$, siendo su masa $m = 1\text{kg}$ (equivalente a un litro). Si utilizamos la relación (26.5) para calcular el calor ganado por el agua, considerando además que su calor específico es $C_{e_{\text{H}_2\text{O}}} = 1 \text{ kcal/kg.}^\circ\text{C}$, tendremos:

$$Q_{\text{ganado}}_{\text{H}_2\text{O}} = [m C_e (T_f - T_o)]_{\text{H}_2\text{O}} = 1\text{kg} \cdot 1 \text{ kcal/kg.}^\circ\text{C} \cdot (33 - 0)^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{ganado}}_{\text{H}_2\text{O}} = 33 \text{ kcal}$$

2) Analizando lo que sucede con el bloque tendremos, que su temperatura inicial es $T_o = 200^\circ\text{C}$, su masa $m = 2\text{kg}$ y calor específico $C_e = 0,11 \text{ kcal/kg.}^\circ\text{C}$. Luego, utilizando el Teorema Fundamental de la Calorimetría (relación (26.7)) y la relación (23.5) tendremos:

$$Q_{\text{perdido}}_{\text{Fe}} = Q_{\text{ganado}}_{\text{H}_2\text{O}} \Rightarrow [m C_e (200 - T_f)]_{\text{Fe}} = 33 \Rightarrow 2 \cdot 0,11 (200 - T_f) = 33.$$

$$\therefore \quad \boxed{T_f = 50^\circ\text{C}}$$

Observación.- El calor perdido por el Hierro se ha obtenido considerando $\Delta T = T_{\text{mayor}} - T_{\text{menor}}$.

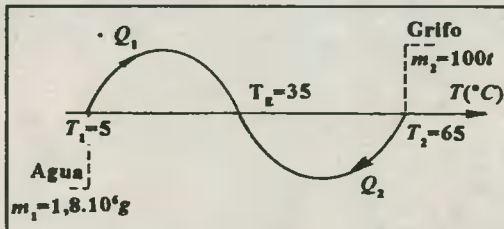
26.4. Utilizando el teorema fundamental de la calorimetría, y aprovechando el esquema adjunto podemos calcular la temperatura de equilibrio (T_e).

Q_1 = Calor ganado por el calorímetro.

Q_2 = Calor perdido por el agua.

$$Q_1 = Q_2$$

$$m_{\text{cal}} \cdot C_{e_{\text{cal}}} (T_e - T_1) = m_{\text{H}_2\text{O}} C_{e_{\text{H}_2\text{O}}} (T_2 - T_e)$$

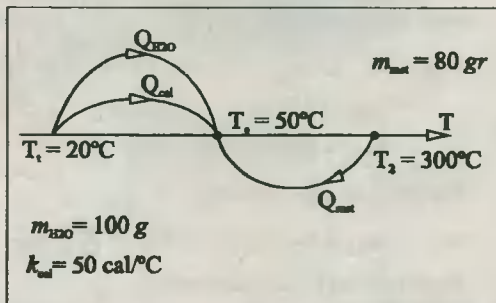


26.5. Utilizando un procedimiento similar al del problema anterior tendremos que:

$$Q_{\text{gana termómetro}} = Q_{\text{pierde agua}} \Rightarrow m_t \cdot C_e (T_e - T_1) = m_{\text{H}_2\text{O}} C_e \text{H}_2\text{O} (T_2 - T_e)$$

Reemplazando datos: $50 \cdot 0,2 \cdot (39 - 19) = 200 \cdot 1 \cdot (T_2 - 39) \quad \therefore \quad T_2 = 40^\circ\text{C}$

26.6. En el esquema mostrado se señalan los datos del problema. Luego, utilizando el teorema Fundamental de la Calorimetría:



$$Q_{\text{H}_2\text{O}} + Q_{\text{cal}} = Q_{\text{metal}}$$

$$\Rightarrow m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot C_e \text{H}_2\text{O} \cdot (T_e - T_1) + k_{\text{cal}}(T_e - T_1) =$$

$$m_{\text{met}} \cdot C_e \text{met} (T_2 - T_e)$$

$$C_e \text{metal} = \frac{(m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot C_e \text{H}_2\text{O} + k_{\text{cal}})(T_e - T_1)}{m_{\text{met}} (T_2 - T_e)}$$

$\therefore \quad C_e \text{metal} = 0,225 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$

26.7. Utilizando un procedimiento similar al del problema anterior tendremos:

$$Q_{\text{H}_2\text{O}} + Q_{\text{cal}} = Q_{\text{metal}} \Rightarrow m_{\text{H}_2\text{O}} C_e \text{H}_2\text{O} (T_e - T_1) + m_{\text{cal}} \cdot C_e \text{cal} (T_e - T_1) = m_{\text{met}} \cdot C_e \text{met} \cdot (T_2 - T_e) \dots (*)$$

Ahora, utilizando la Relación (26,6) para el equivalente en agua del calorímetro, reemplazamos en (*) y despejamos la temperatura final de equilibrio.

$$T_e = \frac{(m_{\text{H}_2\text{O}} + M_{\text{H}_2\text{O}}) \cdot C_e \text{H}_2\text{O} \cdot T_1 + m_{\text{met}} \cdot C_e \text{met} \cdot T_2}{(m_{\text{H}_2\text{O}} + M_{\text{H}_2\text{O}}) C_e \text{H}_2\text{O} + m_{\text{met}} \cdot C_e \text{met}} \quad \therefore \quad T_e = 21,8^\circ\text{C}$$

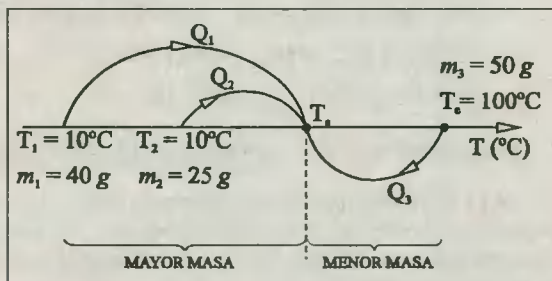
26.8. Mediante el esquema mostrado aplicaremos el teorema Fundamental de la Calorimetría considerando que la temperatura de equilibrio se ubica entre T_2 y T_3 .

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot C_e (T_e - T_1) + m_2 \cdot C_e (T_e - T_2) = m_3 \cdot C_e (T_3 - T_2)$$

$\therefore \quad T_e = 49^\circ\text{C}$

Observación: La temperatura de equilibrio se aproximara siempre hacia la zona de temperatura donde hay mayor participación de masa.

26.9. Reconocemos que los lingotes, por ser del mismo material, tendrán el mismo tratamiento que el aplicado para el problema anterior, y es a partir de la fórmula deducida allí, que al reemplazar los datos, y considerando que $T_1 = T_e = x$, tendremos:



$$T_e = \frac{m \cdot T_1 + 2m \cdot T_2 + 3m \cdot T_3}{m + 2m + 3m} \Rightarrow x = \frac{m \cdot (x) + 2m(120^\circ\text{C}) + 3m(20^\circ\text{C})}{6m}$$

$$\Rightarrow 6x = x + 300 \quad \therefore \quad \boxed{x = 60^\circ\text{C}}$$

26.10. Designamos con m_{Au} y m_{Cu} a las masas de oro y cobre respectivamente. Utilizando el esquema mostrado en la figura y el Teorema Fundamental de la Calorimetría.

$$Q_{\text{Au}} + Q_{\text{Cu}} = Q_{\text{H}_2\text{O}} \Rightarrow m_{\text{Au}} \cdot C_{e_{\text{Au}}} (T_2 - T_e) + m_{\text{Cu}} \cdot C_{e_{\text{Cu}}} (T_2 - T_e) = m_{\text{H}_2\text{O}} C_{e_{\text{H}_2\text{O}}} (T_e - T_1)$$

$$m_{\text{Au}} \cdot 0,03 (75,5 - 25,5) + m_{\text{Cu}} \cdot 0,09 (75,5 - 25,5) = 540 \cdot 1 \cdot (25,5 - 25)$$

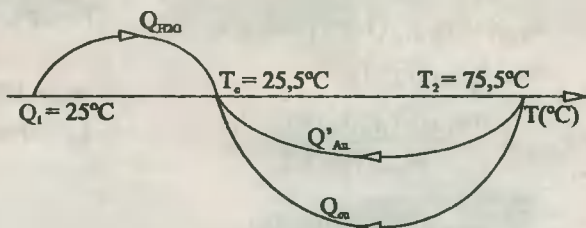
$$\Rightarrow m_{\text{Au}} + 3m_{\text{Cu}} = 180 \dots (1)$$

Por condición de problema:

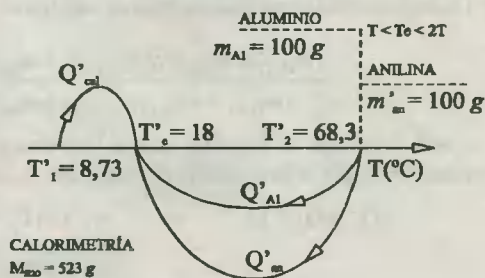
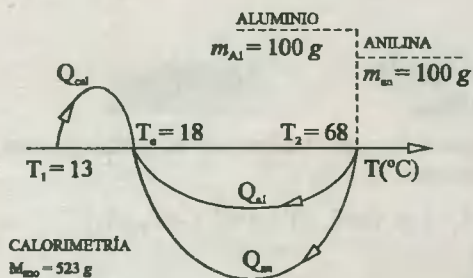
$$\Rightarrow m_{\text{Au}} + m_{\text{Cu}} = 100 \dots (2)$$

Resolviendo (1) y (2) encontramos lo siguiente:

$$\boxed{m_{\text{Au}} = 60 \text{ g}; m_{\text{Cu}} = 40 \text{ g}}$$



26.11 En vista que se obtienen dos procesos, elaboramos dos esquemas en los que se indicarán los datos y condiciones del problema, utilizando en cada caso el Teorema Fundamental de Calorimetría.



$$\text{De (I): } (Q_{\text{Al}} + Q_{\text{an}}) = Q_{\text{cal}} \Rightarrow [m_{\text{Al}} \cdot C_{e_{\text{Al}}} + m_{\text{an}} \cdot C_{e_{\text{an}}}] (T_e - T_2) = M_{\text{H}_2\text{O}} \cdot C_{e_{\text{H}_2\text{O}}} (T_e - T_1)$$

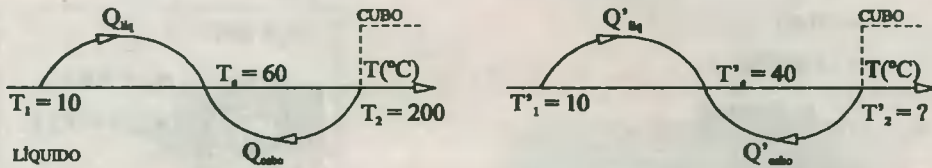
$$\Rightarrow [100 \cdot C_{e_{\text{Al}}} + 60 C_{e_{\text{an}}}] (68 - 18) = 523 \cdot 1 \cdot (18 - 13) \Rightarrow 10 C_{e_{\text{Al}}} + 6 C_{e_{\text{an}}} = 6,23 \dots (1)$$

$$\text{De (I) } (Q'_{\text{Al}} + Q'_{\text{an}}) = Q'_{\text{cal}} \Rightarrow [m_{\text{Al}} \cdot C_{e_{\text{Al}}} + m'_{\text{an}} \cdot C_{e_{\text{an}}}] (T_e - T_2) = M_{\text{H}_2\text{O}} C_{e_{\text{H}_2\text{O}}} (T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow [100 \cdot C_{e_{\text{Al}}} + 100 C_{e_{\text{an}}}] (68,3 - 16) = 523 \cdot 1 (16 - 8,73) \Rightarrow C_{e_{\text{Al}}} + C_{e_{\text{an}}} = 0,727 \dots (2)$$

$$\text{Resolviendo (1) y (2): } \boxed{C_{e_{\text{Al}}} = 0,217 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}; C_{e_{\text{an}}} = 0,51 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}}$$

26.12. Construyendo dos esquemas para los procesos indicados, tendremos que la masa y el calor específico del cubo ($m_c \cdot C_{e_c}$) y del líquido ($m_L \cdot C_{e_L}$) son desconocidos. Sin embargo, utilizando el Teorema Fundamental de la Calorimetría, ellos se eliminarán entre sí, permitiéndose encontrar el valor de la temperatura T'_2 solicitada.



Líquido

$$\text{De (1): } Q_{\text{Hig}} = Q_{\text{cubo}} \Rightarrow m_L \cdot Ce_L (T_2 - T_1) = m_c \cdot Ce_c (T_2 - T_c)$$

$$\Rightarrow 5m_1 \cdot Ce_1 = 14m_c \cdot Ce_c \dots (1)$$

$$\text{De (1): } Q'_{\text{Hig}} = Q'_{\text{cubo}} \Rightarrow m_L \cdot Ce_L (T'_e - T_1) = m_c \cdot Ce_c (T'_1 - T'_e)$$

$$\Rightarrow 20m_1 \cdot Ce_L = m_c \cdot Ce_c \cdot (T_2 - 40) \dots (2)$$

Dividiendo (2) + (1) y despejando T'_2 encontramos que: $T'_2 = 96^\circ\text{C}$

26.13. Analizando los procesos por separado, será necesario utilizar el esquema mostrado, en donde se señalan los distintos calores específicos de los líquidos empleados. Luego, utilizando el teorema (26.7) en cada caso tendremos:

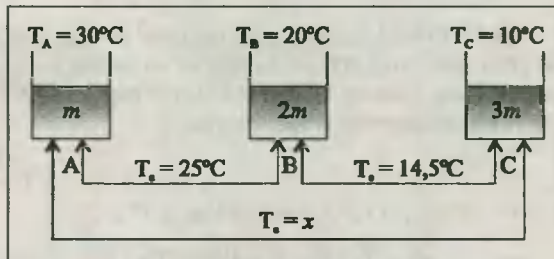
1) Mezcla A y B:

$$Q_A = Q_B$$

$$m \cdot Ce_A (30 - 25) = 2m \cdot Ce_B (25 - 20)$$

$$\Rightarrow Ce_A = 2Ce_B \dots (1)$$

2) Mezcla B y C:



$$Q_C = Q_B \Rightarrow 3m \cdot Ce_C (14,5 - 10) = 2m \cdot Ce_B (20 - 14,5) \Rightarrow Ce_C = 22/27 Ce_B \dots (2)$$

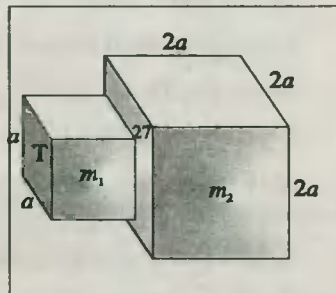
$$3) \text{ Mezcla A y C: } Q_C = Q_A \Rightarrow 3m \cdot Ce_C (x - 10) = m \cdot Ce_A (30 - x) \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3) encontramos: $x = 19^\circ\text{C}$

26.14. Recordando la relación (24.1) para la densidad, tendremos que la masa de cualquiera de los cubos viene dado por: $m = dV = dL^3$. Luego, de los datos dados, por el teorema (26.7) se verifica que:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow m_1 \cdot Ce(T_e - T_1) = m_2 \cdot Ce(2T - T_2)$$

$$da^3(T_c - T) = d(2a)^3(3T - T_c) \quad \therefore \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $T_c = 17/9 T$$$



26.15. Según los datos podemos determinar el calor Q necesario para calentar al sistema aluminio - agua a partir de la relación (26.5).

$$Q = Q_{\text{Al}} + Q_{\text{H}_2\text{O}} = (m_{\text{Al}} \cdot Ce_{\text{Al}} + m_{\text{H}_2\text{O}} Ce_{\text{H}_2\text{O}})(T_f - T_c) \Rightarrow Q = 12\,000 \text{ cal}$$

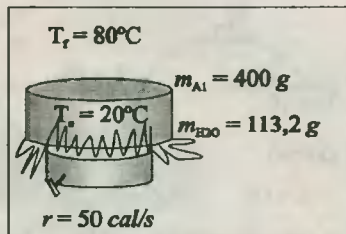
Del dato referido a la rapidez de entrega de calor, aplicaremos una regla de tres simple directa para calcular del tiempo t .

$$1s \rightarrow 50 \text{ cal}$$

$$t \rightarrow 12\,000 \text{ cal}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1s \cdot 12\,000 \text{ cal}}{50 \text{ cal}}$$

$$\therefore t = 240 \text{ s } \text{ ó } t = 4 \text{ min}$$



26.16. Sean Q_1 y Q_2 las cantidades de calor que llegan a la cacerola y debido a la misma fuente, y para el agua y mercurio respectivamente, en los tiempos t_1 y t_2 , luego, utilizando el procedimiento del problema anterior, tendremos la siguiente regla de tres:

$$Q_1 \rightarrow t_1$$

$$Q_2 \rightarrow t_2 \quad Q_2 = Q_1(t_2/t_1) \Rightarrow m_{\text{Hg}} \cdot C_{e_{\text{Hg}}} \cdot \Delta T = m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot C_{e_{\text{H}_2\text{O}}} \cdot \Delta T(t_2/t_1)$$

$$\Rightarrow C_{e_{\text{Hg}}} = C_{e_{\text{H}_2\text{O}}} \cdot \frac{m_{\text{H}_2\text{O}}}{m_{\text{Hg}}} \cdot \frac{t_1}{t_2} \Rightarrow C_{e_{\text{Hg}}} = 4\,187 \cdot \frac{20}{83,74} \cdot \frac{30}{240} \quad \therefore C_{e_{\text{Hg}}} = 125 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

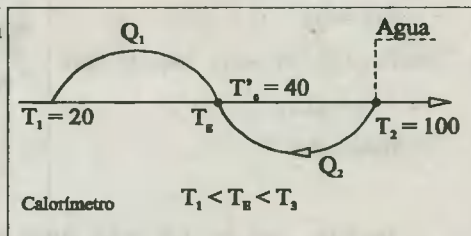
26.17. Considerando que por cada cm^3 de agua se tiene 1 g de masa, entonces diremos respecto al grifo, que arroja 100 g/s. Luego, en un tiempo t arrojará una masa $m_2 = 100 t$. Ahora del esquema mostrado aplicaremos el teorema (26.7).

$$Q_1 = Q_2$$

$$m_1 \cdot C_{e_{\text{H}_2\text{O}}} \cdot (T_e - T_1) = m_2 \cdot C_{e_{\text{H}_2\text{O}}} \cdot (T_2 - T_e)$$

$$1,8 \cdot 19^6 \cdot (35 - 5) = 100 t \cdot (65 - 35)$$

$$\therefore t = 18\,000 \text{ s } , \text{ ó } t = 5 \text{ h}$$



26.18. Utilizando el resultado del problema 25.5 encontramos el incremento de temperatura (ΔT) de la barra en función de su variación porcentual ($\%r_L$) y su coeficiente de dilatación lineal (α):

$$\Delta T = \% r_L / \alpha \dots (1)$$

Luego, utilizando la relación (26.5) encontramos la cantidad de calor (Q) que absorbió la barra:

$$Q = m \cdot C_e \cdot \Delta T \dots (1)$$

$$\text{Reemplazando (1) en (2): } Q = m \cdot C_e \cdot \%r_L / \alpha \quad \therefore Q = 46 \text{ kJ}$$

26.19. Debemos reconocer que tenemos una cantidad de calor $Q = 4560 \text{ cal}$, el que se irá empleando en los siguientes procesos:

a) Calor necesario para calentar el hielo de -18°C hasta 0°C . Usando la relación (26.5):

$$Q_1 = m_{\text{hielo}} \cdot C_{e_{\text{hielo}}} \cdot (T_f - T_a) = 40 \cdot 0,5 \cdot [0 - (-18)] \Rightarrow Q_1 = 360 \text{ cal} \dots (\text{calor sensible})$$

(*) Quedarían: $4\,560 - 360 = 4\,200 \text{ cal}$.

b) Calor necesario para fundir el hielo. Usando la relación (26.10):

$$Q_2 = 80 m = 80 \cdot 40 \Rightarrow Q_2 = 3\,200 \text{ cal} \dots (\text{calor latente})$$

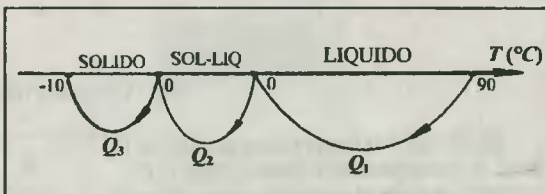
(*) Quedarían: $4200 - 3200 = 1000 \text{ cal}$.

c) Calor necesario para calentar el agua desde 0°C hasta T .- Usando la relación (26.5):

$$Q_3 = m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot C_{e_{\text{H}_2\text{O}}}(T - T_0) \Rightarrow 1000 = 40.1(T - 0) \Rightarrow T = 25^\circ\text{C}$$

\therefore El agua queda en fase líquida y a 25°C de temperatura

26.20. Utilizando un procedimiento similar al del problema anterior, y con ayuda del esquema de la figura tendremos:



a) Calor perdido durante el enfriamiento del agua desde 90°C hasta 0°C .- Usando la relación (26.5):

$$Q_1 = m_{\text{H}_2\text{O}} C_{e_{\text{H}_2\text{O}}}(T_f - T_0) = 0,2 \cdot 1(0 - 90) \Rightarrow Q_1 = -18 \text{ cal} \dots \dots (\text{calor sensible})$$

b) Calor perdido durante la solidificación del agua.- Usando la relación (26.10):

$$Q_2 = -80m = -80 \cdot 0,2 \Rightarrow Q_2 = -16 \text{ cal} \dots \dots (\text{calor latente})$$

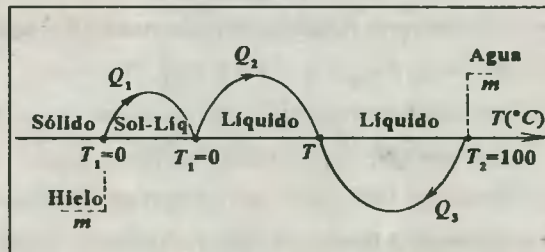
c) Calor perdido durante el enfriamiento del hielo desde 0° hasta -10°C .- Usando la relación (26.5):

$$Q_3 = m_{\text{hielo}} \cdot C_{e_{\text{hielo}}}(T_f - T_0) = 0,2 \cdot 0,5(-10 - 0) \Rightarrow Q_3 = -1 \text{ cal} \dots \dots (\text{calor sensible})$$

Finalmente, el calor total perdido por la gota de agua será:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad \therefore \quad \boxed{Q = -35 \text{ cal}}$$

26.21. Sea m la masa de agua buscada. Entonces, por condición del problema, la temperatura final del proceso será 0°C hasta el mismo instante en que el último trozo de hielo se halla fundido. Haciendo un esquema tendremos lo siguiente:



$$Q_{\text{masa hielo}} = Q_{\text{pierde agua}}$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$m_h \cdot C_{e_A}(T_f - T_i) + 80m_h = m \cdot C_{e_{\text{H}_2\text{O}}}(T_2 - T_e) \Rightarrow 30 \cdot 0,5[0 - (-20)] + 80 \cdot 30 = m \cdot 1 \cdot (60 - 0)$$

$$\therefore \quad \boxed{m = 45 \text{ g}}$$

26.22. Empleando un procedimiento similar al del problema anterior, construimos el esquema de la figura y utilizamos el teorema (26.7).

$$Q_{\text{masa hielo}} = Q_{\text{pierde agua}} \Rightarrow Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4$$

$$\Rightarrow x \cdot C_{e_{\text{hielo}}}(0 - T_1) + 80x + x \cdot C_{e_{\text{H}_2\text{O}}}(T_e - 0) = m_{\text{H}_2\text{O}} C_{e_{\text{hielo}}}(T_2 - T_e)$$

$$\Rightarrow x \cdot 0,5 \cdot [0 - (-20)] + 80x + x \cdot 1 \cdot (30 - 0) = 500 \cdot 1 \cdot (90 - 30) \quad \therefore \quad \boxed{x = 250 \text{ g}}$$

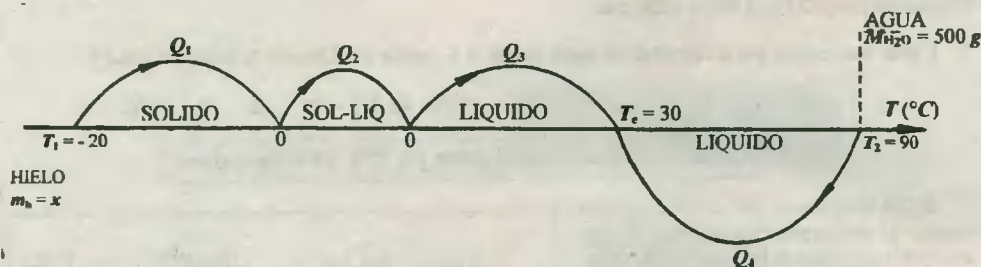


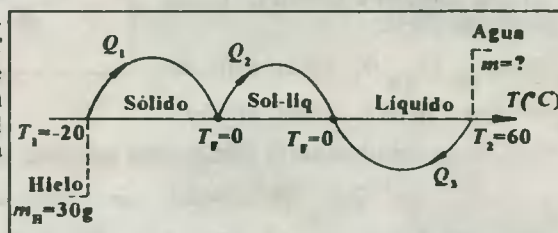
Fig. Solución Prob. 26.22

26.23. Sea T la temperatura que buscamos, la que suponemos ubicada entre 0°C y 100°C , es decir, el esquema queda en fase líquida íntegramente. A continuación construimos un esquema similar al del problema anterior, y aplicamos el teorema (26.7).

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$\Rightarrow 80m + m \cdot 1(T - T_1) = m \cdot 1(T_2 - T)$$

$$\Rightarrow 80m + m(T - 0) = m(100 - T) \quad \therefore \quad T = 10^{\circ}\text{C}$$



26.24. Este tipo de problemas se resuelve comparando las cantidades de calor que necesita el hielo para calentarse y fundirse, con el que puede desprender el agua hasta enfriarse; si éste fuese menor, entonces el sistema quedará a 0°C . Veamos:

a) Calor que cede el agua al enfriarse desde 40°C hasta 0°C .- Usamos la relación (26.5).

$$Q_1 = m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot C_{e \text{H}_2\text{O}} (T_o - T_f) = 25 \cdot 1(40 - 0) \quad \Rightarrow \quad Q_1 = 1000 \text{ cal}$$

b) Calor que necesita el hielo para calentarse desde -10°C hasta 0°C .- Usamos la relación (26.5).

$$Q_2 = m_h \cdot C_{e \text{h}} (T_f - T_o) = 40 \cdot 0,5[0 - (-10)] \quad \Rightarrow \quad Q_2 = 200 \text{ cal}$$

(*) Quedarían: $1000 - 200 = 800 \text{ cal}$ (para ser utilizados en la fusión del hielo).

c) Cálculo de la masa m de hielo que se funde.- Usando la relación (26.10):

$$Q_{L1} = 80m \quad \Rightarrow \quad 800 = 80m \quad \Rightarrow \quad m = 10 \text{ g}$$

Finalmente, en el recipiente quedan:

$$m'_{\text{H}_2\text{O}} = 25 + 10 = 35 \text{ g (líquido)}; \quad m'_{\text{hielo}} = 40 - 10 = 30 \text{ g (sólido)} \quad (\text{Y todo a } 0^{\circ}\text{C})$$

26.25. Tal como hicimos en el problema anterior, calcularemos la cantidad de calor que proporciona el agua y el calorímetro durante su enfriamiento, y luego la forma cómo el hielo emplea este calor en su proceso de calentamiento y fusión.

a) Calor que ceden el agua y el calorímetro desde 45°C hasta 0°C .- Usando las relaciones (26.5) y (26.6):

$$Q_1 = Q_{H_2O} + Q_{cal} = m_{H_2O} \cdot C_{eH_2O} \cdot \Delta T + M_{H_2O} \cdot C_{eH_2O} \cdot \Delta T = (m_{H_2O} + M_{H_2O})C_{eH_2O}(T_e - T_1)$$

b) Calor que necesita el hielo para calentarse desde -10°C . Usamos la relación (26.5):

$$Q_2 = m_b \cdot C_{eh} \cdot (T_1 - T_0) = 200 \cdot 0,5[0 - (-10)] \Rightarrow Q_2 = 1000 \text{ cal}$$

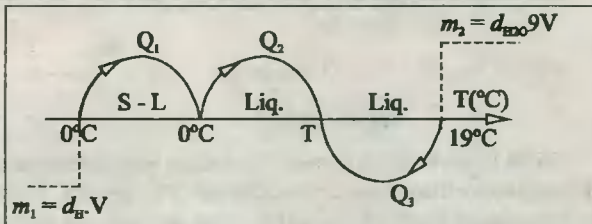
(*) Quedan: $9\,000 - 1\,000 = 8\,000 \text{ cal}$ (para fundir el hielo)

c) Cálculo de la masa m de hielo que se funde: Usando la relación (26.10).

$$Q_{11} = 80 m \Rightarrow 8\,000 = 80 m \Rightarrow m = 100 \text{ g}$$

∴ El sistema queda 0°C , y con la siguiente composición: Agua = 250 g; Hielo = 100 g

26.26. Haciendo el esquema adjunto, y utilizando el Teorema Fundamental de la Calorimetría, donde suponemos que el hielo se funde y el agua obtenida de él se calienta hasta la temperatura T que buscamos. Veamos:



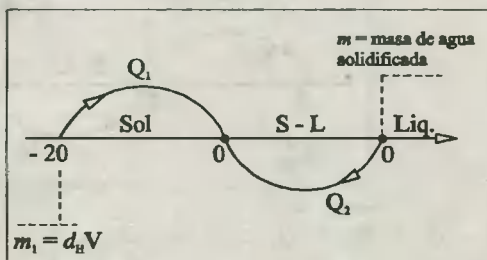
$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$80 m_1 + m_1 \cdot C_{eH_2O} (T - 0) = m_2 \cdot C_{eH_2O} (19 - T)$$

$$(80 + 1 \cdot T)d_b \cdot V = d_{H_2O}^9 V \cdot 1 (19 - T)$$

$$(80 + T) \cdot 0,9 = 9(19 - T) \quad \therefore \quad T = 10^\circ\text{C}$$

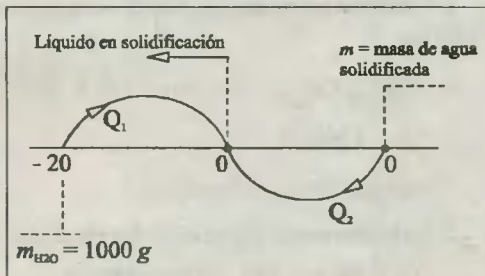
26.27. En vista que el agua del estanque está a mayor temperatura (0°C) que el hielo, se observará que este último absorberá calor de parte de aquel. Debemos señalar que el calor que pierde el agua lo hace a costa de solidificarse, cediendo 80 cal por cada gramo de agua solidificada, y suponiendo que el cubo de hielo se calienta desde -20°C hasta 0°C , utilizaremos el Teorema Fundamental de la Calorimetría.



Sensible latente

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow m_b \cdot C_{eh} [0 - (-20)] = 80 m \quad 96 \cdot 0,5 \cdot 20 = 80 m \quad \therefore \quad m = 12 \text{ g}$$

26.28. Sabemos que la sobrefusión del agua es un estado de equilibrio inestable que puede alcanzarse mediante la división por gotas de toda la masa, interviniendo así sobre los centros de cristalización, sin los cuales el proceso de solidificación no tendría lugar. Es por ello que cualquier agitación mecánica sobre el sistema le haría perder súbitamente su equilibrio, y el agua elevaría su temperatura bruscamente desde -16°C hasta 0°C . Este calor será a su vez una contribución de una parte del agua, que a 0°C se solidificará, quedando finalmente un sistema compuesto por agua y hielo a 0°C .



sensible latente

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow m_{\text{H}_2\text{O}} C_{e\text{H}_2\text{O}} [0 - (-16)] = 80 \text{ cm} \Rightarrow 1000 \cdot 1 \cdot 16 = 80 \text{ cm} \Rightarrow m = 200 \text{ g}$$

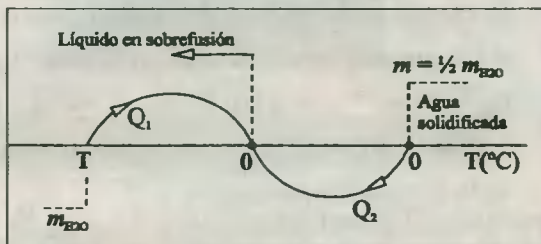
Composición final: Agua líquida = 800 g; Hielo = 200 g

26.29. Utilizando el fundamento del problema anterior, se tendrá que el calor Q_1 necesario para calentar el agua desde T hasta 0°C debe ser igual al calor Q_2 que proviene de la solidificación del agua. Luego, por el teorema fundamental (26.7) tendremos:

$$Q_1 = Q_2$$

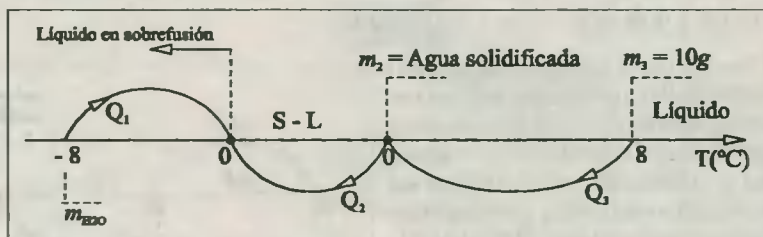
$$m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot C_{e\text{H}_2\text{O}} (0 - T) = 80 (m_{\text{H}_2\text{O}} / 2)$$

$$\therefore \quad \mathbf{T = -40^\circ\text{C}}$$



26.30. Procediendo de un modo similar que los problemas anteriores, tenemos que el calor que necesita el agua subenfriada para calentarse desde -8°C hasta 0°C lo ofrecen por un lado el agua caliente al bajar su temperatura desde 8°C hasta 0°C , y por otro lado una parte de la agua subenfriada, cuya masa es m_2 , que a 0°C se solidificará. Trataremos de encontrar m_2 utilizando el teorema (26.7).

Empleando el esquema de la figura tenemos:



sensible latente latente

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \Rightarrow m_1 \cdot C_{e\text{H}_2\text{O}} [0 - (-8)] = 80 m_2 + m_3 \cdot C_{e\text{H}_2\text{O}} (8 - 0)$$

$$400 \cdot 1.8 = 80 m_2 + 10.18 \quad \therefore \quad \mathbf{m_2 = 39 \text{ g}}$$

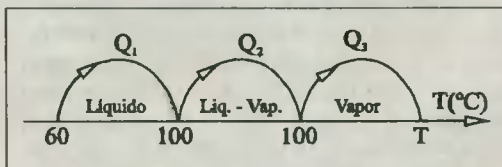
26.31. Procederemos tal como se hizo en el problema 26.19, reconociendo que ahora el calor originalmente disponible es $Q = 62\,800 \text{ cal}$.

1) **Calor necesario para calentar el agua desde 60°C hasta 100°C .**- Usando la relación (26.5), tenemos:

$$Q_1 = m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot C_{e\text{H}_2\text{O}} \cdot (100 - 60) = 100 \cdot 1 \cdot 40$$

$$\Rightarrow Q_1 = 4\,000 \text{ cal}$$

(*) Quedan: $62\,800 - 4\,000 = 58\,800 \text{ cal}$



2) **Calor necesario para hacer hervir el agua**.- Usando la relación (26.12), tenemos:

$$Q_2 = 540 m = 540 \cdot 100 = 54\,000 \text{ cal}$$

(*) Quedan: $58\,800 - 54\,000 = 4\,800 \text{ cal}$

3) Calor necesario para calentar el vapor de agua desde 100°C hasta T .- Usando la relación (26.5) tenemos:

$$Q_3 = m_{\text{vapor}} \cdot C_{e_{\text{vapor}}} (T_f - T_o) \Rightarrow 4\,800 = 100 \cdot 0,48 (T - 100) \therefore T = 200^\circ\text{C}$$

26.32. Se tienen originalmente $Q = 4\,500 \text{ cal}$, que se utilizarán del siguiente modo:

1°) Para fundir el hielo: $Q_1 = 80m = 80 \cdot 10 = 800 \text{ cal}$.

(*) Quedan: $4\,500 - 800 = 3\,700 \text{ cal}$.

2°) Para calentar el agua desde 0°C hasta 100°C : $Q_2 = m_{\text{H}_2\text{O}} C_{e_{\text{H}_2\text{O}}} (100 - 0) \Rightarrow Q_2 = 1\,000 \text{ cal}$.

(*) quedan: $3\,700 - 1\,000 = 2\,700 \text{ cal}$.

3°) Para hacer hervir el agua sólo se cuenta con $Q_3 = 2\,700 \text{ cal}$. Luego:

$$Q_3 = 540m_v \Rightarrow 2\,700 = 540m_v \Rightarrow m_v = 5 \text{ g}$$

Finalmente, el sistema tiene la siguiente composición:

Agua Líquida = 5 g; Vapor de agua = 5 g, y todo a 100°C

26.33.a. Las temperaturas de cambio de fase son las que vienen dadas por los segmentos horizontales. Así:

$$\text{BC} = \text{Fusión} \Rightarrow T_f = -20^\circ\text{C} \quad \text{DE} = \text{Ebullición} \Rightarrow T_c = 180^\circ\text{C}$$

26.33.b. Reconocemos que las fases sólido, líquido y vapor están dados por segmentos inclinados AB, CD y EF respectivamente. Luego, utilizando la relación (26.2) encontraremos el calor específico de cada fase, y analizando el gráfico tendremos:

$$\text{AB} = \text{Sólido} \Rightarrow C_{e_s} = \frac{40 \text{ cal}}{10 \text{ g} \cdot 20^\circ\text{C}} \therefore C_{e_s} = 0,2 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$\text{CD} = \text{Líquido} \Rightarrow C_{e_L} = \frac{150 \text{ cal}}{10 \text{ g} \cdot 200^\circ\text{C}} \therefore C_{e_L} = 0,075 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$\text{EF} = \text{Vapor} \Rightarrow C_{e_v} = \frac{50 \text{ cal}}{10 \text{ g} \cdot 50^\circ\text{C}} \therefore C_{e_v} = 0,1 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$$

26.33 c. Para el cálculo de los calores latentes específicos utilizaremos la relación (26.8). Luego, de los segmentos horizontales obtendremos:

$$\text{BC} \Rightarrow L_f = Q_{\text{f}}/m = 60/10 \therefore L_f = 6 \text{ cal/g}$$

$$\text{DE} \Rightarrow L_v = Q_{\text{v}}/m = 150/10 \therefore L_v = 15 \text{ cal/g}$$

26.34. Por condición del problema se tiene que:

$$Q_{\text{ganado agua}}^{\text{sensible}} = Q_{\text{perdido agua}}^{\text{latente}} \Rightarrow m_{\text{H}_2\text{O}} C_{e_{\text{H}_2\text{O}}} (100 - 0) = 540m_v \Rightarrow 54 \cdot 1 \cdot 100 = 540m_v \Rightarrow m_v = 10 \text{ g}$$

Luego: Se necesitan sólo 10 g de vapor para calentar el agua

26.35. Por condición del problema se tiene que:

$$Q_{\text{gana hielo}}^{\text{latente}} = Q_{\text{pierde vapor}}^{\text{latente}} \Rightarrow 80m_h = 540m_v \Rightarrow 80.135 = 540m_v \Rightarrow m_v = 20\text{g}$$

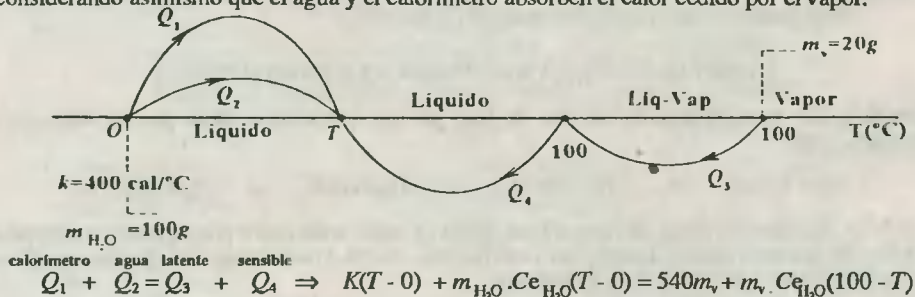
Luego: Se necesitan sólo 20 g de vapor de agua para fundir el hielo

26.36. Sean Q_1 y Q_2 las cantidades de calor que se necesitan para calentar el agua y hacerla hervir respectivamente, suministrados por la misma fuente en los tiempos t_1 y t_2 . Utilizando ahora una regla de tres simple tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 \text{ — } t_1 \\ Q_2 \text{ — } t_2 \end{array} \right\} \Rightarrow t_2 = \frac{Q_2}{Q_1} \cdot t_1 = \frac{540m}{m \cdot C_e \text{H}_2\text{O} \Delta T} \cdot t_1 \Rightarrow t_2 = \frac{540}{1.90} \cdot 10 \text{ min}$$

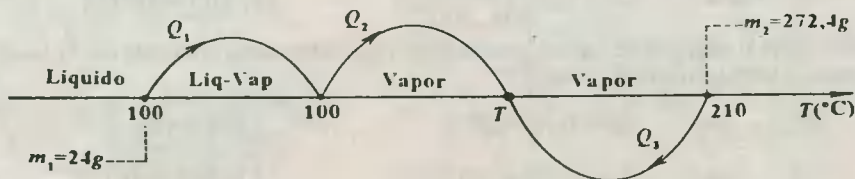
$$\therefore \boxed{t_2 = 60 \text{ min, ó } t_2 = 1 \text{ h}}$$

26.37. Dado que el vapor se encuentra a la temperatura de condensación ($T = 100^\circ\text{C}$), cuando empiece a ceder calor, inevitablemente empezará a condensarse, liberando 540 cal por cada gramo de vapor condensado. Suponiendo entonces que el vapor se condensa íntegramente, y a continuación el agua caliente obtenida de él se enfría hasta T , aplicaremos el teorema fundamental (26.7), considerando asimismo que el agua y el calorímetro absorben el calor cedido por el vapor.



$$\Rightarrow 40T + 100T = 540.20 + 20.19(100 - T) \quad \therefore \boxed{T = 80^\circ\text{C}}$$

26.38. Supongamos que el agua a 100°C gana calor la que utiliza para hervir completamente, y en su fase de vapor elevar su temperatura desde 100°C hasta la temperatura de equilibrio (T), siendo el vapor original el que cede todo el calor. Luego, del esquema mostrado, y utilizando el teorema fundamental (26.7) tenemos:

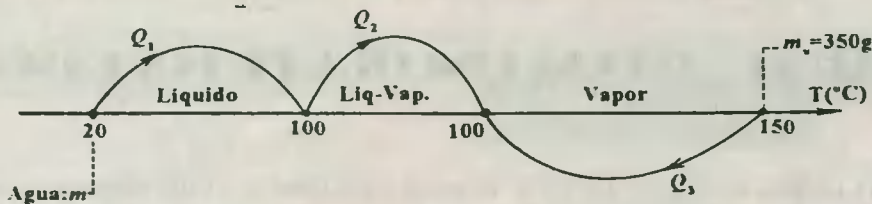


$$\text{latente sensible sensible} \\ Q_1 + Q_2 = Q_3 \Rightarrow 540m_1 + m_1 \cdot C_{e,\text{vap}}(T - 100) = m_2 \cdot C_{e,\text{vap}}(210 - T)$$

$$540.24 + 24.0.48(T - 100) = 272.4.0.48.(210 - T) \quad \therefore \boxed{T = 110^\circ\text{C}}$$

29.39. En vista que al final del proceso coexiste agua líquida y vapor, deducimos que la temperatura de equilibrio es 100°C . Así pues, si suponemos que m es la masa original del agua del recipiente, esta se calienta desde 20°C hasta 100°C . y una parte de ella, igual a $(m - 12) \text{ g}$ llega a hervir, quedando

en el recipiente 12 g de agua líquida, todo el calor absorbido por el agua es suministrado por el vapor al enfriarse desde 150°C hasta 100°C. De este modo, utilizaremos el teorema (26.7)

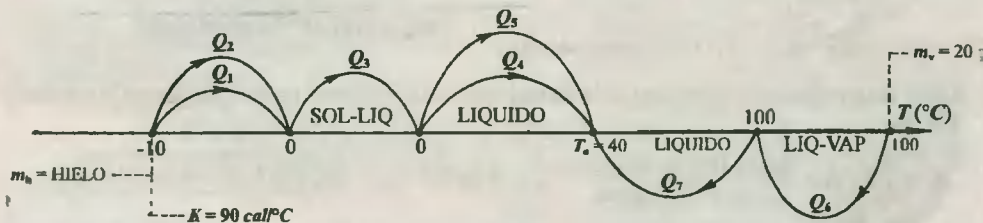


sensible latente sensible

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \Rightarrow m \cdot c_{e_{H_2O}}(100 - 20) + 540(m - 12) = 350 \cdot 0,48 \cdot (150 - 100)$$

$$m \cdot 1.80 + 540m = 14\ 880 \quad \therefore \boxed{m = 24g}$$

26.40 Utilizando el esquema de calores adjunto, y aplicando el teorema fundamental (26.7) tendremos, por condición del problema que la temperatura de equilibrio es $T_e = 40^\circ C$



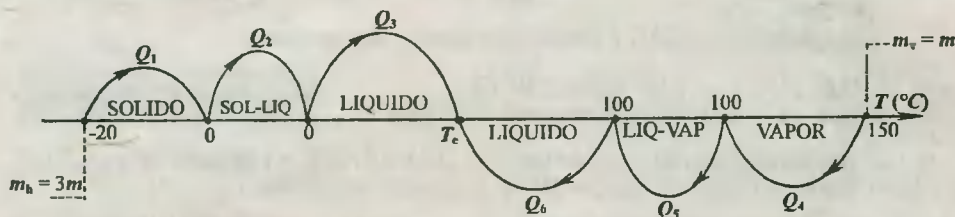
$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = Q_6 + Q_7$$

hielo calorim. latente agua calorim. latente sensible
(fusión) (condensación)

$$m_h \cdot c_{e_h}[0 - (-10)] + K[0 - (-10)] + 80m_h + m_h \cdot c_e(40 - 0) + K(40 - 0) = 540m_v + m_v \cdot c_e(100 - 40)$$

$$5m_h + 900 + 80m_h + 40m_h + 3\ 600 = 10\ 800 + 20 \cdot 1.60 \quad \therefore \boxed{m_h = 60g}$$

26.41. Suponiendo que la temperatura de equilibrio se ubica entre 0°C y 100°C, construimos entonces un esquema de calores, y a partir de él utilizaremos el teorema fundamental (26.7).



sensible latente sensible sensible latente sensible

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4 + Q_5 + Q_6$$

$$m_h \cdot c_{e_h}[0 - (-20)] + 80m_h + m_h \cdot c_{e_{H_2O}}(T_e - 0) = m_v \cdot c_{e_v} \cdot (150 - 100) + 540m_v + m_v \cdot c_{e_v} \cdot (100 - T_e)$$

$$3m \cdot 0,5 \cdot 20 + 80 \cdot 3m + 3m \cdot 1 \cdot T_e = m \cdot 0,48 \cdot 50 + 540m + m \cdot 1 \cdot (100 - T_e) \quad \therefore \boxed{T_e = 98,5^\circ C}$$

CAP 27 TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

27.1. Los datos son: $m = 1 \text{ kg}$; $M = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg/mol}$; $d_o = 1,98 \text{ kg/m}^3$; $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ moléculas/mol}$.

a) Para calcular la cantidad de moléculas por unidad de masa utilizaremos la relación (27.4).

$$n_m = \frac{N_A}{M} = \frac{6,023 \cdot 10^{23} \text{ moléculas/mol}}{4,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg/mol}} \quad \therefore \quad n_m \approx 1,37 \cdot 10^{25} \text{ moléculas/kg}$$

b) Para el cálculo de la masa de una molécula emplearemos la relación (27.3): $m_m = M/N_A$; pero se puede observar que esta fórmula es la inversa de la utilizada en a). Por tanto:

$$m_m = \frac{1}{n_m} = \frac{1}{1,37 \cdot 10^{25} \text{ moléculas/kg}} \quad \therefore \quad m_m \approx 7,31 \cdot 10^{-25} \text{ kg/molécula}$$

c) Ahora, determinaremos la concentración de moléculas en condiciones normales en base a la relación (27.5).

$$n_o = \frac{N_A}{M} \cdot d_o = \frac{6,023 \cdot 10^{23} \text{ moléculas/mol}}{4,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg/mol}} \cdot 1,98 \text{ kg/m}^3 \quad \therefore \quad n_o \approx 2,7 \cdot 10^{25} \text{ moléculas/m}^3$$

27.2. Se tienen los siguientes datos: $p = 100 \text{ kPa}$; $d = 0,12 \text{ kg/m}^3$; $M = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$; $i = 3$ (grados de libertad de los gases monoatómicos). Luego, para el cálculo de la energía cinética molecular promedio utilizaremos las relaciones (27.9) y (27.7) para la presión.

$$E_{\text{cmp}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{n_m} \left(\frac{1}{2} n_m m v^2 \right) \Rightarrow E_{\text{cmp}} = \frac{3}{2 n_m} \cdot p \dots (1)$$

Y para el cálculo de la concentración de moléculas por unidad de volumen usaremos la relación (27.5).

$$n_m = \frac{N_A}{M} \cdot d \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) y sustituyendo valores, encontramos:

$$E_{\text{cmp}} = \frac{3}{2} \frac{M \cdot p}{N_A \cdot d} = \frac{3}{2} \frac{4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol} \cdot 10^5 \text{ Pa}}{6,023 \cdot 10^{23} \text{ moléculas/mol} \cdot 0,12 \text{ kg/m}^3} \quad \therefore \quad E_{\text{cmp}} = 8,3 \cdot 10^{-21} \text{ J/molécula}$$

27.3.a. A condiciones normales se sabe que $p_o = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $d_o = 1,98 \text{ kg/m}^3$; $n_o = (N_A/M)d_o$; $m_m = M/N_A$. Luego, utilizando la relación (27.7) despejamos la velocidad v .

$$p_o = 1/3 m_m n_o v^2 = 1/3 (M/N_A) \cdot (N_A/M) \cdot d_o v^2 \Rightarrow v = \sqrt{3p_o/d_o} \Rightarrow v = \sqrt{3 \cdot 1,013 \cdot 10^5 / 1,98}$$

$$\therefore \quad v \approx 392 \text{ m/s}$$

27.3.b. A la temperatura dada, tendremos que: $T = 273 + 100 = 373 \text{ K}$. Ahora, igualando las relaciones (27.9) y (27.10), reconociendo que $i = 3$, tendremos:

$$\frac{1}{2} m_m v^2 = 3/2 kT \Rightarrow (M/N_A) v^2 = 3(R/N_A)T \Rightarrow v = \sqrt{3RT/M}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{3.8,31.373/44.10^{-3}} \quad \therefore \quad \boxed{v = 460 \text{ m/s}}$$

27.4. Se tienen los siguientes datos: $v = 500 \text{ m/s}$, $d = 18 \text{ kg/m}^3$; $m = 7,2 \text{ kg}$, $M = 26.10^{-3} \text{ kg/mol}$.

a) Utilizando la relación (27.9) para la energía cinética molecular promedio tendremos:

$$E_{\text{cmp}} = \frac{1}{2} m_m v_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{N_A} v_2 = \frac{26.10^{-3} \text{ kg/mol} \cdot (500 \text{ m/s})^2}{2.6,023.10^{23} \text{ moléculas/mol}} \quad \therefore \quad \boxed{E_{\text{cmp}} = 5,4 \cdot 10^{21} \text{ J/molécula}}$$

b) La energía cinética total del gas estará dada por la N moléculas contenidas en la masa m dada.

$$U = N \cdot E_{\text{cmp}} = 1/2(N \cdot m_m) v_2 = 1/2 m v_2 = 1/2 \cdot 7,2 \text{ kg} \cdot (500 \text{ m/s})^2 \quad \therefore \quad \boxed{U = 0.10^5 \text{ J}}$$

c) Utilizando las relaciones (27.5) y (27.7) encontramos la presión del gas.

$$p = 1/3(M/N_A) \cdot (N/M) d v_2^2 \Rightarrow p = 1/3 d v_2^2 = 1/3 \cdot 18 \cdot 500^2 \quad \therefore \quad \boxed{p = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}}$$

27.5. De acuerdo con la resolución del problema 27.2, se sabe que entre la presión y la energía cinética molecular promedio existe la siguiente relación: $p = 2/3 n_m E_{\text{cmp}} \dots (1)$

Y de acuerdo con la relación (27.12), los gases monoatómicas verifican que:

$$E_{\text{cmp}} = 3/2 kT \dots (2)$$

Luego, reemplazando (2) en (1) se obtiene:

$$p = n_m kT = \frac{N}{V} kT = \frac{2,4,10^{26} \text{ moléculas} \cdot 1,38 \cdot 10^{23} \text{ J/molécula} \cdot \text{K} \cdot (60 + 273) \text{ K}}{1 \text{ m}^3}$$

$$\therefore \quad \boxed{p = 1,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}}$$

27.6. De acuerdo con los datos se tiene que: $p = 1,33 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}$; $T = 293 \text{ K}$; $V = 1 \text{ m}^3$; y empleando la relación obtenida en el problema anterior para la presión, despejaremos el número (N) de moléculas.

$$p = \frac{N}{V} kT \Rightarrow N = \frac{pV}{kT} = \frac{1,33 \cdot 10^{-9} \text{ Pa} \cdot 1 \text{ m}^3}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/molécula} \cdot \text{K} \cdot 293 \text{ K}} \quad \therefore \quad \boxed{N = 3,29 \cdot 10^{11} \text{ moléculas}}$$

27.7. Según los datos del problema se sabe que:

$$\text{Estado 1: } p_1 = 4 \cdot 10^7 \text{ Pa; } V_1 = V; T_1 = 300 \text{ K; } n_1 = n \text{ (moles)}$$

$$\text{Estado 2: } p_2 = x; V_2 = V; T_2 = 240 \text{ K; } n_2 = n - 3/5 n = 2/5 n \text{ (moles)}$$

Luego, utilizando la ecuación de estado de un gas ideal (27.14), tendremos:

$$p_1 V_1 = RT_1 n_1 \Rightarrow 4 \cdot 10^7 \cdot V = R \cdot 300 n \dots (1)$$

$$p_2 V_2 = RT_2 n_2 \Rightarrow x \cdot V = R \cdot 240 \cdot 2/5 n \dots (1)$$

$$\text{Dividiendo (2) + (1) miembro a miembro, tendremos: } \frac{x}{4 \cdot 10^7} = \frac{240 \cdot 2/5}{300} \quad \therefore \quad \boxed{x = 1,28 \cdot 10^7 \text{ Pa}}$$

27.8. En los datos reconocemos dos estados:

$$\text{Estado 1: } p = 0,7 \cdot 10^4 \text{ Pa; } T_1 = 10 + 273 = 283 \text{ K; } V = 50 \text{ m}^3; m_1 = x; M = 2,9 \cdot 10^{-2} \text{ kg/mol}$$

$$\text{Estado 2: } p = 9,7 \cdot 10^4 \text{ Pa; } T_2 = 20 + 273 = 293 \text{ K; } V = 50 \text{ m}^3; m_2 = y$$

Luego, aplicamos la ecuación de estado de un gas ideal para cada estado encontramos la masa del gas en cada caso:

$$\text{Estado 1: } pV = RT_1 (m_1/M) \Rightarrow m_1 = pVM/RT_1 \dots (1)$$

$$\text{Estado 2: } pV = RT_2 (m_2/M) \Rightarrow m_2 = pVM/RT_2 \dots (2)$$

Finalmente, diremos que la masa de aire en la habitación habrá variado en:

$$\Delta m = m_1 - m_2 \dots (3)$$

$$\text{Reemplazando (1) y (2) en (3): } \Delta m = \frac{pVM}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad \therefore \boxed{\Delta m = 2,1 \text{ kg}}$$

27.9. Sean m la masa de la botella vacía, y M la masa molar del helio. Entonces, al aplicar la ecuación de estado del gas ideal en ambos casos tendremos:

$$\text{Primer caso: } p_1 V_1 = RT_1 \frac{m_1 - m}{M} \dots (1)$$

$$\text{Segundo caso: } p_2 V_2 = RT_2 \frac{m_2 - m}{M} \dots (2)$$

Considerando que $V_1 = V_2 = V$, y $T_1 = T_2$, resolvemos (1) y (2), encontrando la capacidad (V) de la botella.

$$V = \frac{(m_1 - m_2)RT_1}{(p_1 - p_2)M} \dots (*)$$

A continuación, para el tercer caso establecemos lo siguiente: $pV = RT(m_3/M) \dots (**)$

$$\text{Reemplazando (*) en (**) despejamos } m_3; m_3 = \frac{(m_1 - m_2)pT_1}{(p_1 - p_2)T} \quad \therefore \boxed{m^3 = 3 \text{ kg}}$$

27.10. De los datos se tiene que: $m = 200 \text{ g}$; $m_2 = 205 \text{ g}$; $m_3 = 212 \text{ g}$; $M_a = 29 \text{ g/mol}$; $P_a = 10^5 \text{ Pa}$, $P_g = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $T_a = T_g$; y $V_a = V_g$. Luego, analizando por separado tendremos:

$$\text{Aire: } m_a = m_2 - m_1 \Rightarrow p_a V_a = RT_a (m_a/M_a) \dots (1)$$

$$\text{Gas: } m_g = m_3 - m_1 \Rightarrow p_g V_g = RT_g (m_g/M_g) \dots (2)$$

Luego, dividiendo (1), (2) miembro a miembro despejamos M_g .

$$M_g = \frac{m_g}{m_a} \cdot \frac{p_a}{p_g} \cdot M_a = \left(\frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} \right) \cdot \frac{p_a}{p_g} M_a \quad \therefore \boxed{M_g = 58 \text{ g/mol}}$$

27.11. Sean n_1 y n_2 el número de moles de aire que se respira en la Costa y en la Sierra respectivamente. Entonces, el porcentaje r de aire que se deja de respirar viene dado por:

$$r = \frac{\Delta n}{n_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1} = 1 - \frac{n_2}{n_1} \dots (1)$$

$$\text{En la Costa: } p_1 V = RT_1 n_1 \dots (\alpha) \quad \text{En la Sierra: } p_2 V = RT_2 n_2 \dots (\beta)$$

$$\text{Dividiendo (b), (a) encontramos: } \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2 \cdot n_2}{T_1 \cdot n_1} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} \dots (2)$$

$$\text{Reemplazando (2) en (1): } r = 1 - \frac{p_2 \cdot T_1}{p_1 \cdot T_2} = 1 - \frac{9/10 p_0 \cdot (273 + 21)}{p_0 \cdot (273 - 3)} \quad \therefore \quad r = 0,02 = 2\%$$

27.12. Calcularemos la presión del gas encerrado, utilizando para ello la ecuación de estado del gas ideal.

$$p_g V = RTn \Rightarrow p_g = \frac{RTn}{Ah_1} = \frac{8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \cdot 300 \text{ K} \cdot 1,39 \cdot 10^{-4} \text{ moles}}{10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 0,1 \text{ m}} \Rightarrow p_g = 34 \text{ 653 Pa}$$

Luego, relacionamos la presión que ejercen el gas y la columna de mercurio (h_2) con la presión exterior (p_0), verificándose lo siguiente:

$$p_g + p_{\text{Hg}} = p_0 \Rightarrow 34 \text{ 653} + p_{\text{Hg}} = 101 \text{ 000} \Rightarrow p_{\text{Hg}} = 66 \text{ 347 Pa}$$

$$\text{Y recordando: } \gamma_{\text{Hg}} h_2 = p_{\text{Hg}} \Rightarrow 136 \text{ 000} h_2 = 66 \text{ 347} \quad \therefore \quad h_2 = 48,78 \text{ cm}$$

27.13. Extrayendo los datos reconocemos que la masa se mantiene constante, y para cada estado se tiene:

Estado 1: $p_1 = x$, $V_1 = 40 \text{ l}$, $T_1 = 87 + 273 = 360 \text{ K}$

Estado 2: $p_2 = 1 \text{ atm}$, $V_2 = 9,1 \text{ l}$, $T_2 = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$

Luego, utilizando la ecuación de procesos (27.15) tendremos:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{x \cdot 40 \text{ l}}{360 \text{ K}} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 9,1 \text{ l}}{273 \text{ K}} \Rightarrow x = 0,3 \text{ atm}$$

Asimismo, utilizando la relación (27.14) para el estado 2 tendremos:

$$p_2 V_2 = RT_2 \frac{m}{M} \Rightarrow m = \frac{p_2 V_2 M}{RT_2} = \frac{1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 40 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 32 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}}{8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \cdot 273 \text{ K}} \quad \therefore \quad m \approx 57 \text{ g}$$

27.14. En base a los datos se puede establecer que:

Estado 1: $V_1 = 85 \text{ l}$, $p_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $T_1 = 27 + 273 = 300 \text{ K}$

Estado 2: $V_2 = 800 \text{ l}$, $p_2 = x$, $T_2 = 320 \text{ K}$

Luego, aplicando la ecuación de procesos, tenemos:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{3 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 85 \text{ l}}{300 \text{ K}} = \frac{x \cdot 800 \text{ l}}{320 \text{ K}} \quad \therefore \quad x = 3,42 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

27.15. Reconociendo los datos tenemos:

Estado 1: $p_1 = 6 \text{ atm}$, $V_1 = 586 \text{ l}$, $T_1 = 293 \text{ K}$

Estado 2: $p_2 = 4 \text{ atm}$, $V_2 = x$, $T_2 = 248 \text{ K}$

Seguidamente, relacionaremos ambos estados, empleando para ello la relación (27.15).

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{6 \text{ atm} \cdot 586 \text{ l}}{293 \text{ K}} = \frac{4 \text{ atm} \cdot x}{248 \text{ K}} \quad \therefore \quad x = 744 \text{ l}$$

27.16. Luego de reconocer los datos, se tiene lo siguiente:

Estado 1: $p_1 = 7,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $V_1 = 0,6 \text{ m}^3$, $T_1 = 288 \text{ K}$

Estado 2: $p_2 = 2,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $V_2 = 1,6 \text{ m}^3$; $T_2 = x$

Ahora, utilizamos la relación (27.15) para relacionar los dos estados:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{7,2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0,6 \text{ m}^3}{293 \text{ K}} = \frac{2,25 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 1,6 \text{ m}^3}{x} \quad \therefore \quad \boxed{x = 240 \text{ K}}$$

27.17. Sean T y p temperatura y presión iniciales del gas. Luego por condición del problema, la temperatura y presión finales serán: $(T + 1) \text{ K}$ y $(p + 0,2/100p)$. Asimismo, por tratarse de un proceso isovolumétrico, emplearemos la relación (27.18).

$$\frac{P}{T} = \frac{p + 2/1000p}{T + 1} \Rightarrow 1000(T + 1) = 1002 T \quad \therefore \quad \boxed{T = 500 \text{ K}}$$

27.18. Reconociendo que existen dos estados para el aire de la botella, tenemos:

Estado 1: $V_1 = 30 \text{ l}$; $T_1 = 285 \text{ K}$; $p_1 = 1,47 \cdot 10^7 \text{ Pa}$.

Estado 2: $V_2 = x$; $T_2 = 277 \text{ K}$; $p_2 = p_{\text{hid}} + p_{\text{atm}} = d_1 g h + 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 3,53 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Luego, aplicando la ecuación de procesos, tendremos:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{1,47 \cdot 10^7 \text{ Pa} \cdot 30 \text{ l}}{285 \text{ K}} = \frac{3,53 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{277 \text{ K}} \quad \therefore \quad \boxed{x = 1,2 \text{ m}^3}$$

27.19. Del gráfico original se obtienen los siguientes datos: $p_1 = p_2 = p = 6 \text{ kPa}$; $V_1 = 3 \text{ m}^3$; $V_2 = 7 \text{ m}^3$. Ahora por tratarse de un gas monoatómico se tiene que el número de grados de libertad es $i = 3$. Luego, de acuerdo con estos datos utilizaremos la relación (27.13), una vez para cada estado, de manera que el cambio experimentado por la energía interna viene dado por:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = (i/2)pV_2 - (i/2)pV_1 \Rightarrow \Delta U = (i/2)p\Delta V \quad (\text{proceso isobárico})$$

$$\text{Reemplazando datos: } \Delta U = 3/2 \cdot 76 \text{ kPa} \cdot 4 \text{ m}^3 \quad \therefore \quad \boxed{\Delta U = 36 \text{ kJ}}$$

27.20. Del gráfico original se reconocen los siguientes datos $p_1 = 10 \text{ kPa}$; $p_2 = 20 \text{ kPa}$; $V_1 = V_2 = V$; $i = 5$ (grados de libertad de un gas diatómico). Luego, empleando la relación (27.23) obtendremos el cambio de la energía interna.

$$\Delta U = U_2 - U_1 = (i/2)nRT_2 - (i/2)nRT_1 \Rightarrow \Delta U = (i/2)(p_2 - p_1)V \quad (\text{Proceso isovolumétrico})$$

$$\text{Reemplazando datos: } 50 \text{ kJ} = 5/2(10 \text{ kPa})V \quad \therefore \quad \boxed{V = 2 \text{ m}^3}$$

27.21. De acuerdo con los datos se tiene: $n = 2$ moles; $V_1 = V_2 = V$; $T_1 = 27 + 273 = 300 \text{ K}$; $p_2 = p_3 = 2p_1$; $V_3 = 2V$. Luego, el cambio experimentado por la energía interna estará dado por:

$$\Delta U = U_3 - U_1 = (i/2)nRT_3 - (i/2)nRT_1 \Rightarrow \Delta U = (i/2)nR(T_3 - T_1) \dots (1)$$

Analizando el proceso isovolumétrico 1 - 2; empleando para ello la relación (27.18), tenemos:

$$p_1/T_1 = p_2/T_2 \Rightarrow T_2 = (p_2/p_1)T_1 = (2p_1/p_1) \cdot 300 \text{ K} \Rightarrow T_2 = 600 \text{ K} \dots (2)$$

Y ahora, examinamos el proceso isobárico 2 - 3, empleando para ello la relación (27.17).

$$V_2/T_2 = V_3/T_3 \Rightarrow T_3 = (V_3/V_2)T_2 = (2V/V) \cdot 600 \text{ K} \Rightarrow T_3 = 1200 \text{ K} \dots (3)$$

Finalmente, reemplazamos (2) y (3) en (1): $\Delta U = 5/2 \cdot 2,8,31(600)$

$$\therefore \quad \boxed{\Delta U = 24,93 \text{ kJ}}$$

27.22. Del enunciado del problema se tienen los siguientes datos: $Q_v = 200 \text{ J}$ (A volumen constante)

$n = 2$ moles; $i = 3$ (grados de libertad), con los que podemos averiguar el aumento de temperatura (ΔT) si utilizamos las relaciones (27.19) y (27.20).

$$Q = n \cdot C_v \cdot \Delta T, \text{ donde: } C_v = iR/2 = 3/2 \cdot 8,31 \approx 12,5 \text{ J/mol.K}$$

Reemplazando datos: $200 \text{ J} = 2 \text{ moles} \cdot 12,5 \text{ J/mol.K} \cdot \Delta T \quad \therefore \Delta T = 8 \text{ K}$

27.23. Reconociendo los datos: $T_1 = 27 + 273 = 300 \text{ K}$; $T_2 = 127 + 273 = 400 \text{ K}$; $i = 5$ (grados de libertad), y $Q_p = 450 \text{ J}$ (a presión constante), procederemos a calcular el número de moles (n) utilizando para ello las relaciones (27.19) y (27.21).

$$Q_p = n \cdot C_p \cdot \Delta T, \text{ donde: } C_p = \frac{1}{2} (i + 2)R = 7/2 \cdot 8,31 \Rightarrow C_p \approx 29 \text{ J/mol.K}$$

Reemplazando datos: $580 \text{ J} = n \cdot 29 \text{ J/mol.K} \cdot 100 \text{ K} \quad \therefore n = 0,2 \text{ moles}$

27.24. De acuerdo con la condición del problema, se trata de un proceso isotérmico. Luego, la presión y el volumen del aire en la burbuja están relacionadas por la Ley de Boyle - Mariotte.

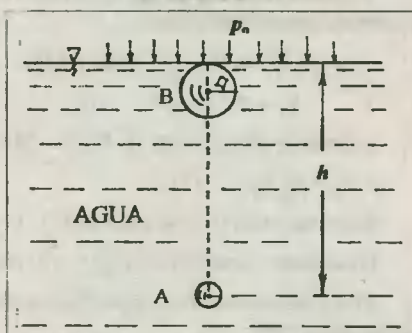
$$p_A \cdot V_A = p_B \cdot V_B$$

$$\Rightarrow (p_{H_2O} \cdot h + p_o) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = (p_{H_2O} \cdot h) \cdot \frac{4}{3} \pi (2r)^3$$

$$\Rightarrow p_{H_2O} \cdot h + p_o = 8 p_{H_2O} \cdot h$$

$$\Rightarrow h = 1/7 p_o / p_{H_2O} = 1/7 \cdot 10^5 \text{ Pa} / 10 \text{ 000 N/m}^2$$

$$\therefore h \approx 1,43 \text{ m}$$



27.25. En base a los esquemas mostrados podemos encontrar las presiones p_1 y p_2 del aire encerrado, así como sus volúmenes V_1 y V_2 . Para los cálculos utilizaremos el "centímetro de mercurio" (cm Hg) para la presión de los líquidos y los gases. Veamos:

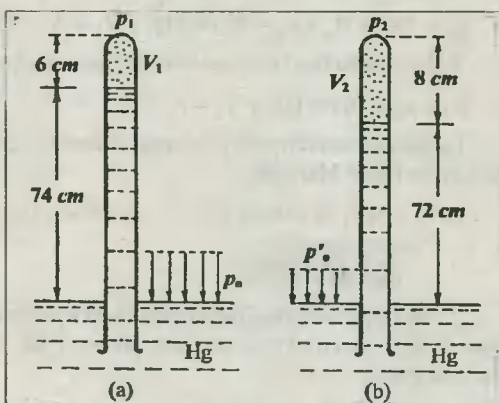
De (a): $p_1 + 74 \text{ cm Hg} = p_o$

siendo $p_o = 76 \text{ cm Hg} \Rightarrow p_1 = 2 \text{ cm Hg}$

También: $V_1 = A \cdot 6 \text{ cm}$, siendo: $A =$ Area de la sección del tubo.

De (b): $p_o' = p_2 + 72 \text{ cm Hg} \dots (1)$

Y además: $V_2 = A \cdot 8 \text{ cm}$



Ahora, como la temperatura permaneció constante, utilizaremos la Ley de Boyle - Mariotte para el aire encerrado.

$$p_2 V_2 = p_1 V_1 \Rightarrow p_2 = \frac{2 \text{ cm Hg} \cdot A \cdot 6 \text{ cm}}{A \cdot 8 \text{ cm}} \Rightarrow p_2 = 1,5 \text{ cm Hg} \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1): $p_o' = 73,5 \text{ cm Hg}$

27.26. Luego de introducir más mercurio en una cantidad: $h = x + y \dots (1)$

el sistema queda según como se muestra en el esquema, donde es fácil deducir por condición del

problema que : $y = 6 \text{ cm} \dots (2)$

Trazando un plano horizontal en la interfase aire - mercurio encontramos los puntos A y B, que como sabemos experimentan la misma presión total.

$$p_B = p_A \Rightarrow p_2 = p_{\text{hid}} + p_o$$

$$\Rightarrow p_2 = [x + (76 - 6) \text{ cm Hg}] + 76 \text{ cm Hg}$$

$$\Rightarrow p_2 = x + 146 \text{ cm Hg} \dots (3)$$

$$\text{También: } V_2 = A \cdot 12 \text{ cm} \dots (4)$$

Y analizando las condiciones iniciales del aire encerrado encontramos que:

$$p_1 = 76 \text{ cm Hg} + p_o = 152 \text{ cm Hg} \dots (5)$$

$$\text{Y: } V_1 = A \cdot 18 \text{ cm} \dots (6)$$

Utilizando ahora la Ley de Boyle - Mariotte para el aire encerrado ($T = \text{constante}$):

$$p_2 V_2 = p_1 V_1 \dots (*)$$

$$\text{Reemplazando (3), (4) y (6) en (*): } (x + 146) \cdot A \cdot 12 = 152 \cdot A \cdot 18 \Rightarrow x = 82 \text{ cm} \dots (7)$$

Finalmente, reemplazamos (2) y (7) en (1): $h = 88 \text{ cm}$

27.27. Del sistema inicial podemos deducir que el aire encerrado en el tubo presenta una presión y volumen iniciales:

$$p_1 = 19 \text{ cm Hg} + p_o = 95 \text{ cm Hg}, \text{ y } V_1 = A \cdot 19 \text{ cm}$$

Y del sistema final mostrado en el esquema adjunto podemos reconocer que:

$$p_2 = p_o = 76 \text{ cm Hg}, \text{ y } V_2 = A \cdot x$$

Luego, asumiendo que el proceso se realizó sin afectar la temperatura del aire encerrado, aplicaremos la Ley de Boyle Mariotte.

$$p_2 V_2 = p_1 V_1 \Rightarrow (76 \text{ cm Hg}) \cdot A \cdot x = (95 \text{ cm Hg}) \cdot A \cdot 19 \text{ cm}$$

$$\therefore \boxed{x = 23,75 \text{ cm}}$$

27.28. Del estadio final del sistema en el esquema reconocer que el aire encerrado en el tubo presenta las siguientes características:

$$p_2 + 10 \text{ cm Hg} = p_o$$

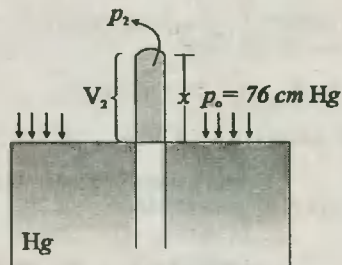
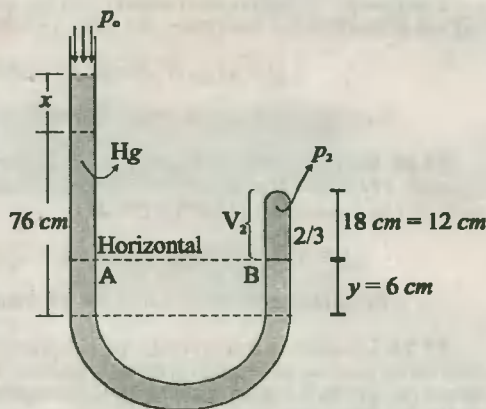
$$\Rightarrow p_1 = 66 \text{ cm Hg}; V_1 = A \cdot 30 \text{ cm}; T_1 = 27 + 273 = 300 \text{ K}$$

Y del estado final mostrado en el esquema adjunto, se tienen que al considerar un descenso x del nivel de mercurio en el tubo, se obtiene:

$$p_2 + (10 + x) \text{ cm Hg} = 76 \text{ cm Hg}$$

$$\Rightarrow p_2 = (66 + x) \text{ cm Hg}; V_2 = A(30+x) \text{ cm}; T_2 = 77 + 273 = 350 \text{ K}$$

Ahora, aplicando la ecuación de procesos tendremos:



$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{66 \text{ cm Hg} \cdot A \cdot 30 \text{ cm}}{300 \text{ K}} = \frac{(66 + x) \text{ cm Hg} \cdot A(30 + x) \text{ cm}}{350 \text{ K}}$$

$$\Rightarrow x^2 + 96x - 330 = 0$$

De esta ecuación, la única raíz físicamente aceptable es:

$$x = 3,3 \text{ cm}$$

27.29. Reconocemos que el émbolo ejerce presión debido a su propio peso: $p_e = mg/A$, así como la pesa $p_p = Mg/A$. Luego, ordenando los datos tendremos:

Estado 1: $p_1 = p_e + p_p + p_o$; $V_1 = V$; $T_1 = T$

Estado 2: $p_2 = p_e + p_o$; $V_2 = 2V$; $T_2 = T/2$

Luego, utilizando la ecuación de procesos tendremos:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{(p_e + p_p + p_o)V}{T} = \frac{(p_e + p_o)2V}{T/2} \Rightarrow p_p = 3(p_e + p_o)$$

$$\Rightarrow Mg/A = 3(mg/A + p_o) \Rightarrow M = 3(m + p_o A/g) \therefore M = 50 \text{ kg}$$

27.30. A partir del esquema original podemos encontrar la presión del gas: $p = p_o - Mg/A$, la cual se mantiene constante durante el proceso. Asimismo, las temperaturas inicial y final: $T_1 = 100 + 273 = 373 \text{ K}$; $T_2 = 273 \text{ K}$. Luego, empleando la ecuación de estado del gas ideal encontraremos el volumen inicial y final.

Estado inicial: $pV_1 = RT_1 n \Rightarrow V_1 = (Rn/p)T_1 \dots (1)$

Estado final: $pV_2 = RT_2 n \Rightarrow V_2 = (Rn/p)T_2 \dots (2)$

Ahora, si la pesa asciende la distancia Δh , el émbolo baja la misma distancia, y se produce un cambio en el volumen, de modo que: $A \cdot \Delta h = V_1 - V_2 \dots (3)$

A continuación, reemplazamos (1) y (2) en (3), de donde despejaremos Δh .

$$\Delta h = \frac{Rn(T_1 - T_2)}{p_o A - Mg} \therefore \Delta h = 1,66 \text{ m}$$

27.31. Desde que el resorte sin deformar llega hasta el fondo del recipiente, diremos que cuando el émbolo se eleva comprime al resorte, y por ello él ejerce una reacción F sobre aquel, cuya intensidad se obtendrá por la Ley de Hooke: $F = kx$, donde x está dado por los desplazamientos h . Aplicando la Ecuación de Estado del Gas Ideal tenemos:

Caso (a): $pV = RTn$, donde:

$$p = F/A = kh/A, \text{ y } V = Ah$$

$$\Rightarrow kh^2 = RTn \dots (1)$$

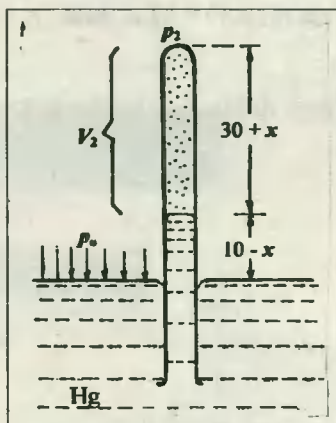


Fig. Solución Prob. 27.28

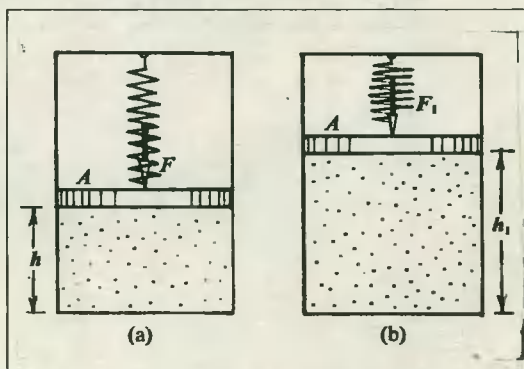
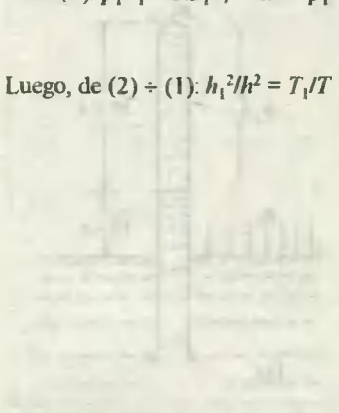


Fig. Solución Prob. 27.31

Caso (b): $p_1 V_1 = RT_1 n$, donde: $p_1 = F_1/A = kh_1/A$, y $V_1 = Ah_1$

$$\Rightarrow kh_1^2 = RT_1 n \dots (2)$$

Luego, de (2) \div (1): $h_1^2/h^2 = T_1/T \Rightarrow h_1 = \sqrt{T_1/T} h \therefore h_1 = 10 \text{ cm}$



CAP 28 TERMODINÁMICA

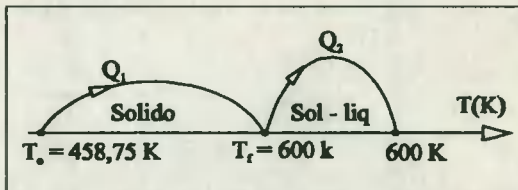
28.1 Sea N el número de panes que debe comer la persona. Entonces, Nm_o es la cantidad de masa que se combustiona, siendo m_o la masa de un pan con mermelada. Si llamamos q al calor de combustión (que según el problema vale 720 cal/g), diremos que el calor total que se desprende por combustión será $W = Nm_o \cdot q$, expresión que quedaría en calorías. Luego, utilizando la relación (17.5) para la potencia, de donde despejamos el trabajo (W), tendremos: $W = \text{Pot} \cdot t$, siendo $\text{Pot} = 125 \text{ W}$, y $t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$. Finalmente, igualamos estas expresiones, obteniendo:

$$Nm_o \cdot q = \text{Pot} \cdot t \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\text{Pot} \cdot t}{m_o \cdot q} = \frac{125 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s}}{50 \text{ g} \cdot 720 \text{ cal/g}} = \frac{450000 \text{ J}}{36000 \text{ cal}} \quad (*)$$

Ahora, utilizando la relación (28.1) para el joule, y en (*) tendremos:

$$N = 450000 \cdot 0,24 \text{ cal} / 36000 \text{ cal} \quad \therefore \quad \boxed{N = 3 \text{ panes}}$$

28.2. Pasando todos los datos de temperatura al SI tendremos: $T_o = 185,75 + 273 = 458,75 \text{ K}$, y $T_f = 327 + 273 = 600 \text{ K}$. Luego, comparando la pérdida de energía cinética de la bala (ΔE_c) con la cantidad de calor necesario para calentarse y fundirse parcialmente en la cantidad m que buscamos, tendremos la siguiente expresión:



sensible latente

$$Q_1 + Q_2 = |\Delta E_c|$$

$$m \cdot c_e (T_f - T_o) + L_f \cdot m' = 1/2 m (v_o^2 - v_f^2) \Rightarrow m \cdot 120(600 - 458,75) + 25000 m' = 1/2 m (250^2 - 60^2)$$

$$\therefore \quad m' = 1/2 m$$

Luego: Se funde sólo el 50% de la bala de plomo

Observación.- Debe notarse que al momento de reemplazar datos no se ha necesitado utilizar el equivalente mecánico del calor, por haber trabajado todo en el SI.

28.3. Encontraremos primero la velocidad final del sistema coche - ladrillo por medio del Principio de conservación de la Cantidad de Movimiento en el eje horizontal. Veamos:

$$P_{\text{tot antes}} = P_{\text{tot después}} \Rightarrow Mv_o = (M + m)v_f \quad \Rightarrow \quad v_f = \left(\frac{M}{M + m} \right) v_o \dots (1)$$

Ahora, la energía mecánica convertida en calor (Q) durante la inserción del ladrillo se encontrará a partir de la diferencia existente entre la energía cinética original y la final. Así tendremos:

$$Q = E_{c2} - E_{c1} = 1/2 Mv_o^2 - 1/2 (M + m)v_f^2 \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2), y reduciendo términos encontramos:

$$Q = 1/2 \left(\frac{Mm}{M + m} \right) v_o^2 \quad \therefore \quad \boxed{Q = 180 \text{ J}}$$

[Faint Title]

[Faint introductory text]

[Faint text block]



[Faint text block]

[Faint text block]

[Faint text block]

[Faint text block]

[Faint text block]

$$\Rightarrow m \cdot C_{ch} \cdot [0 - (-29,3)] + L_f \cdot m = m \cdot C_{e_{H_2O}} \cdot (100 - 0) + L_v \cdot m = \frac{1}{2} m v_o^2$$

$$\Rightarrow v_o = \sqrt{2(29,3 C_{ch} + L_f + 100 \cdot C_{e_{H_2O}} + L_v)} \quad \therefore \quad \boxed{v_o = 2480 \text{ m/s}}$$

Nota.- Para las variaciones de temperatura hemos empleado °C, dado que éstos concuerdan con las variaciones expresadas en grados absolutos (K).

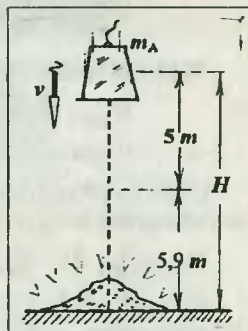
28.9. Cuando los bloques se cruzan presentan la misma velocidad v , cuyo valor lo determinaremos a partir de la solución del problema (18.31).

$$v = \sqrt{\left(\frac{m_B - m_A}{m_B + m_A}\right)gh} = \sqrt{\left(\frac{75 - 25}{75 + 25}\right) \cdot 10 \cdot 10} \Rightarrow v = 5\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Por condición del problema, la cuerda se rompe cuando los bloques se cruzan, instante en el cual A sube y B baja. A partir de ese instante, el bloque A termina de subir, y al pasar de regreso por el punto de cruce presenta la misma velocidad v , y su energía mecánica (E_{mec}) se convierte en calor (Q_f) para fundir una masa de hielo m_h . Luego:

$$Q_f = E_{mec} \Rightarrow L_f \cdot m_h = \frac{1}{2} m_A v^2 + m_A gh$$

$$\Rightarrow m_h = \left(\frac{v^2/2 + gH}{L_f}\right) m_A \quad \therefore \quad \boxed{m_h = 0,01 \text{ kg}}$$



28.10. A partir de la condición del problema respecto al hielo fundido, tendremos que la cantidad de movimiento en el eje Y se conserva. Así pues:

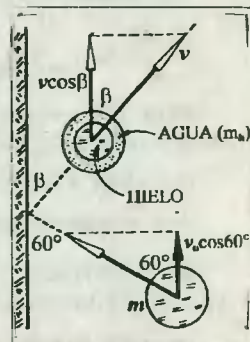
$$mv \cdot \cos\beta = mv_o \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow \cos\beta = v_o/2v \dots (1)$$

De la figura, m_h es la masa fundida de la bola de hielo después del impacto. Ahora, por conservación de la energía se verificará que:

$$Q_f + E_c^f = E_c^i \Rightarrow L_f \cdot m_h + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_o^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_o^2 - 2L_f \cdot m_h/m} \Rightarrow v = 250 \text{ m/s} \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1): $\cos\beta = 400/2 \cdot 250 \quad \therefore \quad \boxed{\beta = 37^\circ}$



28.11. Utilizando la observación 28.3 diremos que el trabajo realizado por el gas coincide con el área bajo la línea 1-2 (trapecio sombreado), en el cual ΔV es el incremento del volumen durante la expansión. Luego, tendremos lo siguiente:

$$\text{AREA} = W_{\text{gas}} \Rightarrow \frac{1}{2} (160 + 100) \cdot \Delta V = 130 \Rightarrow \Delta V = 1 \text{ m}^3$$

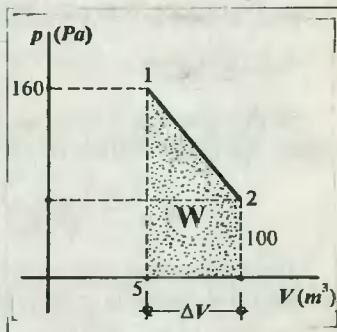
Finalmente, encontraremos el desplazamiento del émbolo a partir de la siguiente relación:

$$\Delta x \cdot A = \Delta V \Rightarrow \Delta x = 1 \text{ m}^3 / 4 \text{ m}^2 \quad \therefore \quad \boxed{\Delta x = 0,25 \text{ m}}$$

28.12. Teniendo en cuenta la regla de signos para el trabajo (W) y el calor (Q) en la Primera Ley de la Termodinámica, tendremos que el trabajo que recibe el sistema por parte del ventilador (W_{vent}) será negativo; y de acuerdo a la condición del problema, el trabajo neto vendrá dado por:

$$W_{\text{gas}} + W_{\text{vent}} = W_{\text{neto}} \Rightarrow W_{\text{gas}} + (-2 \text{ kJ}) = 5 \text{ kJ} \Rightarrow W_{\text{gas}} = 7 \text{ kJ} \text{ (positivo)} \dots (1)$$

Teniendo en cuenta que el proceso de expansión es isobárico, entonces, por la relación



(28.3). tendremos:

$$W_{\text{gas}} = p \cdot \Delta V = pA \cdot \Delta x \dots (2)$$

Finalmente, igualando (1) y (2) tenemos:

$$pA \cdot \Delta x = 7 \text{ kJ} \Rightarrow 10^5 \cdot 0,5 \cdot \Delta x = 7 \cdot 10^3$$

$$\Delta x = 0,14 \text{ m}$$



28.13. Utilizando la regla de signos para los trabajos, tendremos:

$$W_{\text{gas}} + W_{\text{res}} = W_{\text{neto}} \Rightarrow W_{\text{gas}} + (-5 \text{ kJ}) = -20 \text{ kJ}$$

$$\Rightarrow W_{\text{gas}} = -15 \text{ kJ}$$

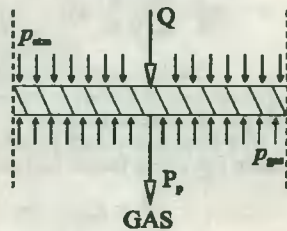
Luego, empleando la relación (28.3) para un proceso isobárico encontramos la presión del gas (p_{gas})

$$W_{\text{gas}} = p_{\text{gas}} \cdot \Delta V = p_{\text{gas}} \cdot A(h_f - h_o)$$

$$\Rightarrow p_{\text{gas}} \cdot 0,2(0,5 - 1,0) = -15 \cdot 10^3 \Rightarrow p_{\text{gas}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Y del equilibrio que presenta el pistón diremos:

$$\frac{Q + P_p}{A} + p_{\text{atm}} = p_{\text{gas}} \Rightarrow \frac{Q + 4 \text{ kN}}{0,2 \text{ m}^2} + 10^5 \text{ Pa} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad \therefore \boxed{Q = 5 \text{ kN}}$$



28.14. Ya que el proceso es isobárico, empleamos la relación (28.3), de modo que encontramos el trabajo a partir del gráfico. Entonces:

$$W = nR\Delta T = \text{área} \Rightarrow 0,4 \cdot 8,31 (T_2 - T_1) = 277,1,2 \Rightarrow T_2 - T_1 = 100 \text{ K}$$

$$\text{Pero, recordemos que } \Delta 1 \text{ K} \approx \Delta 1^\circ \text{C, entonces: } T_2 - T_1 = 100^\circ \text{C} \quad \therefore \boxed{T_2 = 127^\circ \text{C}}$$

28.15. Utilizamos las relaciones (28.5) para el cálculo del trabajo W y la constante C , dado que el proceso es isotérmico. Luego, según los datos:

$$W = nRT \cdot \ln(V_f/V_o), \text{ donde: } T = 27 + 273 = 300 \text{ K, y } V_f = 10 V_o \Rightarrow W = 0,1 \cdot 8,31 \cdot 300 \cdot \ln(10)$$

$$\text{Pero, se sabe que: } \ln x \approx 2,3 \log x. \text{ Entonces: } W = 249,3 \cdot 2,3 \cdot \log 10$$

$$\text{Además: } \log 10 = 1 \quad \therefore \boxed{W = 573,39 \text{ J}}$$

28.16. A partir de la ecuación del proceso determinamos el coeficiente adiabático $\gamma = 1,5$, para el cálculo del trabajo realizaremos la relación (28.7).

$$W = \frac{p_o \cdot V_o - p_f \cdot V_f}{\gamma - 1} \dots (1)$$

Ahora, para encontrar el valor de la presión final p_f utilizaremos la ecuación del proceso y la condición del problema respecto al volumen final ($V_f = 4V_o$).

$$\Rightarrow p_f \cdot V_f^{1,5} = p_o \cdot V_o^{1,5} \Rightarrow p_f = p_o (V_o/V_f)^{1,5} = 800 (V_o/4V_o)^{3/2} \Rightarrow p_f = 100 \text{ Pa} \dots (2)$$

$$\text{Luego, de (2) en (1): } W = \frac{800 \cdot 0,1 - 100 \cdot 0,4}{1,5 - 1} \quad \therefore \boxed{W = 800 \text{ J}}$$

28.17. Utilizando la relación (28.3) para el cálculo del trabajo, tenemos:

$$nR\Delta T = W \Rightarrow m/M \cdot R (T_f - T_o) = W \Rightarrow m = \frac{332,4J \cdot 2g/mol}{8,31J/mol \cdot K \cdot 400K} \therefore M = 0,2g$$

28.18. En base al gráfico adjunto vemos que el trabajo viene dado por el área bajo la línea 1-2, en el cual se necesita conocer previamente $\Delta V = V_1 - V_2$. Esto se determinará aplicando la ecuación de estado para cada punto.

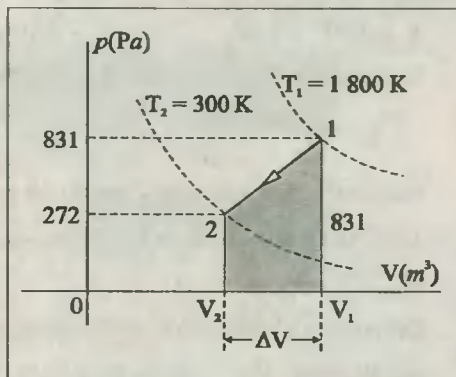
Estado 1: $p_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow V_1 = 0,05 \cdot 8,31 \cdot 1800 / 831$
 $\Rightarrow V_1 = 0,9 m^3$

Estado 2: $p_2 V_2 = nRT_2 \Rightarrow V_2 = 0,05 \cdot 8,31 \cdot 300 / 277$
 $\Rightarrow V_2 = 0,45 m^3$

Luego: $W = \text{ÁREA DEL TRAPEZIO}$

$$W = 1/2(277 + 831) \cdot (0,45 - 0,9)$$

$\therefore W = -249,3 J$



28.19. Ya que el trabajo se efectúa en el proceso (1 - 2), diremos en base a la relación (28.3) que:

$$nR\Delta T = W_{12} \Rightarrow T_2 - T_1 = 8,31 \cdot 10^3 / 1,8,31 \Rightarrow T_2 - T_1 = 100 K \dots (*)$$

Ahora, por condición del problema: $p_2/p_3 = 3$, y $T_3 = T_1$. Así encontramos que: $t_2 = 3t_1$

Reemplazando en (*): $3T_1 - T_1 = 1000 K \therefore T_1 = 500 K$

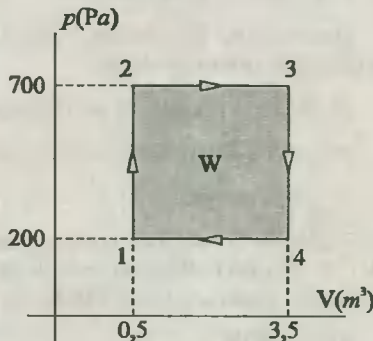
28.20. Teniendo en cuenta la observación (28.6), diremos que el trabajo neto del ciclo viene dado por el área encerrada por él en el gráfico p - v - V . Asimismo, por ser un ciclo de sentido antihorario, el signo del trabajo será negativo.

$W = - \text{área del triángulo} = 1/2 \text{base} \cdot \text{altura} \Rightarrow W = -1/2 \cdot 2p \cdot V \therefore W = -pV$

28.21. Del gráfico deducimos que el ciclo está compuesto de cuatro procesos, dos de los cuales son isobáricos (2-3 y 4-1) y dos isovolumétricos (1-2 y 3-4). Dado que la recta 1-2 tiene mayor pendiente que la recta 3-4. Dado que la recta 1-2 tiene mayor pendiente que la recta 3-4, diremos que el volumen en los estados 1 y 2 es menor que en los estados 3 y 4. Construyendo este ciclo en el plano p - v - V , y respetando el orden de sucesión de los estados, así como las condiciones del problema, tendremos:

$$W_{\text{ciclo}} = \text{Área del cuadrilátero} = + (700 - 200) \cdot (3,5 - 0,5)$$

$\therefore W_{\text{ciclo}} = +1500 J$



28.22. Encontramos el trabajo del ciclo a partir de los trabajos efectuados sólo en los procesos isobáricos; para ello utilizaremos la relación (28.3).

$$W_{\text{ciclo}} = W_{23} + W_{41} = nR(T_3 - T_2) + nR(T_1 - T_4) \dots (T_2 = T_4)$$

$\Rightarrow W_{\text{ciclo}} = nR(T_1 + T_3 + 2T_2) \dots (1)$

Ahora, analizando los procesos isobáricos por separados utilizaremos la ecuación de procesos.

$$2-3: V_3/V_2 = T_3/T_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = (V_3/T_3) \cdot T_2$$

$$4-3: V_1/T_1 = T_4/T_4 \quad \Rightarrow \quad T_2 = (V_4/V_1) \cdot T_1 \dots (T_2 = T_4)$$

Multiplicando miembro a miembro estas expresiones: $T_2^2 = (V_2/V_3) \cdot (V_4/V_1) \cdot T_1 \cdot T_3$ siendo:

$$V_1 = V_2 \text{ y } V_3 = V_4, \quad \text{entonces: } T_2 = \sqrt{T_1 \cdot T_3} \dots (2)$$

$$\text{Finalmente, reemplazando (2) en (1): } W = nR(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1 \cdot T_3}) \quad \therefore \quad \boxed{W = 831 \text{ J}}$$

28.23. Del gráfico se observa que el trabajo en el proceso BC viene dado por:

$$W_{BC} = p_B \cdot (V_C - 4) \dots (1)$$

Del proceso adiabático AB, por la ecuación de procesos tendremos:

$$p_B \cdot V_B^\gamma = p_A \cdot V_A^\gamma \quad \Rightarrow \quad p_B = p_A (V_A/V_B)^{1,5} = 16(1/4)^{3/2} \Rightarrow p_B = 2 \text{ kPa} \dots (2)$$

Ahora, analizando el proceso isotérmico AC, utilizando la ecuación de procesos, considerando que $p_B = p_C$, tendremos:

$$p_C \cdot V_C = p_A \cdot V_A \quad \Rightarrow \quad V_C = (p_A/p_C) \cdot V_A = (16 \text{ kPa}/2 \text{ kPa}) \cdot 1 \text{ m}^3 \Rightarrow V_C = 8 \text{ m}^3 \dots (3)$$

$$\text{Finalmente, reemplazamos (2) y (3) en (1): } W_{BC} = 2 \text{ kPa} \cdot (8 - 4) \text{ m}^3 \quad \therefore \quad \boxed{W_{BC} = 8 \text{ kJ}}$$

28.24. Utilizando la relación (28.11) de la primera ley de la Termodinámica tendremos:

$$Q = W + (U_2 + U_1) \dots (*)$$

Y teniendo en cuenta la regla de signos para el calor, notamos que $Q = -200 \text{ J}$. Luego, en (*):

$$-200 \text{ J} = W + (300 \text{ J} - 650 \text{ J}) \quad \therefore \quad \boxed{W = +150 \text{ J}}$$

Observación.- El gas realiza trabajo (durante su expansión), y además cede calor al exterior a costa de disminuir su energía interna.

$$28.25. \text{ De la primera ley de Termodinámica se deberá cumplir que: } Q_{12} = W_{12} + \Delta U_{12} \dots (1)$$

Por tratarse de un proceso isobárico se verifica que el área bajo la línea 1-2 no da el trabajo realizado:

$$W_{12} = \text{Área} = 300(15 - 5) \Rightarrow W_{12} = 3 \text{ kJ} \dots (2)$$

Y además, el cambio de la energía interna para el proceso 1-2 vendrá dado por la relación (28.8): $\Delta U_{12} = 3/2 nR\Delta T$. Pero por tratarse de un proceso isobárico, se verifica que la expresión $nR\Delta T$ concuerda, según la relación (28.3), con el trabajo realizado (W_{12}) en dicho proceso. Luego:

$$\Delta U_{12} = 3/2 W_{12} \dots (3)$$

Finalmente, sustituyendo (2) y (3) en (1) se tiene que: $Q_{12} = 5/2 W_{12} = 5/2 \cdot 3 \text{ kJ} = 7,5 \text{ kJ}$

$$\therefore \quad \boxed{Q_{12} = 7,5 \text{ kJ}}$$

28.26. En base a la primera Ley de la Termodinámica se establecerá que: $Q_{12} + W_{12} + \Delta U_{12}$, donde $W_{12} = 0$, por ser un proceso isovolumétrico. A continuación, calcularemos la variación de la energía interna.

ΔU_{12} por medio de la relación (28.10). Luego, el calor absorbido en el proceso 1-2 estará dado por la siguiente expresión:

$$Q_{12} = n \cdot C_v (T_2 - T_1) \dots (1)$$

Analizando el proceso isovolumétrico 1-2, teniendo en cuenta que $T_1 = 27 + 273 = 300\text{K}$, utilizando la ecuación de procesos, tendremos:

$$p_1/T_1 = p_2/T_2 \Rightarrow T_2 = (p_2/p_1)T_1 = 2p_1/p_1 \cdot (300\text{K}) \Rightarrow T_2 = 600\text{K} \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1): $Q_{12} = 1 \text{ mol} \cdot 20 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \cdot (600 - 300) \text{ K} \therefore$ $Q_{12} = 6 \text{ kJ}$

28.27. Considerando que se trata de un proceso isométrico, entonces el trabajo del gas será nulo, y por la Primera ley de la Termodinámica tendremos que:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = n \cdot C_v (T_2 - T_1) \Rightarrow T_2 - T_1 = Q_{12}/n C_v \Rightarrow T_2/T_1 = (1 + Q_{12}/n C_v T_1) \dots (1)$$

Utilizando la ecuación de procesos para 1-2 encontramos la presión final.

$$p_2/T_2 = p_1/T_1 \Rightarrow p_2 = p_1 (T_2/T_1) \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2): $p_2 = p_1 (1 + Q_{12}/n C_v T_1) \dots (*)$

Y ahora, por la ecuación de estado tendremos que: $nT_1 R = p_1 V_1 \Rightarrow nT_1 p_1 V_1 / R \dots (**)$

Finalmente, reemplazando (**) en (*): $p_2 = p_1 (1 + Q_{12} R / p_1 V_1 C_v) \therefore$ $p_2 = 2,108 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

28.28. De la relación para el calor Q en un proceso isobárico, tendremos: $Q = n C_p \Delta T$, del cual encontraremos la capacidad calorífica del aire a presión constante a partir de: $C_p - C_v = R$. Luego, el calor Q quedará como:

$$Q = n(C_v + R)(T_f - T_o) \Rightarrow T_f - T_o = \frac{Q}{n(C_v + R)} \Rightarrow T_o \left(\frac{T_f}{T_o} - 1 \right) = \frac{Q}{n(C_v + R)} \dots (1)$$

Y por tratarse de un proceso isobárico, se cumple que:

$$V_o/T_o = V_f/T_f \Rightarrow T_f/T_o = V_f/V_o \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) despejaremos T_o : $T_o = \frac{Q}{n(V_f/V_o - 1)(C_v + R)} \therefore$ $T_o = 300 \text{ K}$

28.29. Se observa que el calor total recibido por el gas viene dado por:

$$Q_T = (W_{12} + W_{13}) + (U_3 - U_1) \dots (1)$$

Proceso 1-2.- Calculemos el volumen C_2 utilizando la ecuación de procesos, teniendo en cuenta que por condición del problema: $T_1 = T_2$.

$$p_1 V_1 / T_1 = p_2 V_2 / T_2 \Rightarrow 3pV = pV_2 = V_2 = 3V$$

Luego, el trabajo realizando viene dado por el área bajo la línea 1-2.

$$W_{12} = \text{AREA DEL TRAPECIO} = 1/2 (3p + p)(V_2 - V) \quad W_{12} = 4pV \dots (2)$$

Proceso 2-3.- Calculemos el trabajo realizado en el proceso isobárico, el cual viene dado por el área bajo la línea 2-3.

$$W_{23} = p(V_3 - V_2) = p(5V - 3V) \quad W_{23} = 2pV \dots (3)$$

Finalmente, reemplazamos (2) y (3) en (1): $Q_T = (4pV + 2pV) + (2pV - pV) \therefore$ $Q_T = 7pV$

28.30. Reconociendo que la temperatura absoluta del gas es $T = 27 + 273 = 300$ K, emplearemos las relaciones (18.5), (28.8) y (28.11), obteniendo: $Q = W \dots (1)$

$$W = nRT \cdot \ln(V_f/V_o) \dots (V_f = 2V_o) \Rightarrow W = 2.8,31 \cdot 300 \ln(2) \Rightarrow W = 3\,440 \text{ J}$$

Finalmente, en (1): $Q = W \approx 3\,440 \text{ J}$

29.31. a. Cálculo de $\Delta U = U_3 - U_1$.- Utilizando la primera Ley de la Termodinámica para el proceso 1 - 2 - 3, tendremos:

$$Q_a = W_{12} + W_{23} + (U_3 - U_1) \dots (W_{12} = 0)$$

$$\Rightarrow 2\,000 = 400(10 - 6) + (U_3 - U_1)$$

$$\therefore \boxed{U_3 - U_1 = 400 \text{ J}}$$

28.31. b. Cálculo de $Q_c = Q_{31}$.- De los datos tendremos:
 $Q_c = W_{31} + (U_1 - U_3) = -1\,400 + (-400)$

$$\therefore \boxed{Q_c = 1\,800 \text{ J}}$$

28.31. c. Cálculo de U_3 .- Del paso (a) y del dato del problema, diremos que:

$$U_3 - 250 = 400$$

$$\therefore \boxed{U_3 = 650 \text{ J}}$$

28.31. d. Cálculo de $Q_d = Q_{14}$.- Utilizando la primera Ley de la Termodinámica y el gráfico, tendremos:

$$Q_d = W_{14} + (U_4 - U_1) = 200(10 - 6) + (500 - 250)$$

$$\therefore \boxed{Q_d = 1\,050 \text{ J}}$$

28.30. Del gráfico se puede deducir que $U_3 > U_1$. Luego, es a través del proceso 1 - 2 - 3 que el ciclo absorbe calor. Así, calculando el área encerrada por el ciclo tendremos el trabajo neto del mismo.

$$W_n = \text{Área Encerrada} = + (250 - 100) \cdot (10 - 6)$$

$$\therefore \boxed{W_n = 750 \text{ J}}$$

Finalmente, la eficiencia la encontramos aplicando la relación (28.13)

$$\eta = W_n / Q_{\text{sum}} = 750 / 1\,500$$

$$\therefore \boxed{\eta = 50 \%}$$

28.33. Calculemos el volumen V_2 a partir del proceso isotérmico 1 - 2, usando la Ley de Boyle-Mariotte.

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow V_2 = (p_1/p_2) V_1 \Rightarrow V_2 = 4V_1$$

Reconocemos por el gráfico que el calor que se suministra al ciclo se efectúa sólo en los procesos 3 - 1 y 1 - 2. Haciendo los cálculos por separado tenemos:

1) Proceso 3 - 1: Por el resultado del problema (18.8) encontramos el calor Q_{13} .

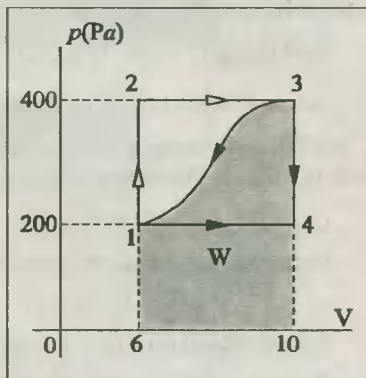
$$4p = p(1 + Q_{13} \cdot R/pV \cdot C_v) \dots (C_v = 3/2R \text{ (gas monoatómico)}) \Rightarrow Q_{13} = 9/2 pV$$

2) Proceso 1 - 2: Aplicando la primera Ley de la Termodinámica y la relación (28.5) obtenemos:

$$Q_{12} = W_{12} + (U_2 - U_1) \dots (U_1 = U_2)$$

$$Q_{12} = p_1 V_1 \ln(V_2/V_1) = 4pV_1 \ln(4V_1/V_1) \Rightarrow Q_{12} = 4pV_1 \ln(4)$$

Finalmente, la eficiencia térmica del ciclo será:



$$\eta = \frac{W'_n}{Q_{\text{sum}}} = \frac{|W'_{12}| + |W'_{23}|}{Q_{12} + Q_{31}} = \frac{4pV \ln(4) - 3pV}{4pV \ln(4) + 9/2 pV} \Rightarrow \eta = \frac{8 \ln(2) - 3}{8 \ln(2) + 4,5} \therefore \boxed{\eta \approx 25\%}$$

28.34. Reconocemos que el calor suministrado al ciclo se efectúa a través de los procesos 1-2 y 2-3. Luego:

$$Q_{\text{sum}} = Q_{12} + Q_{23} = 5/2 p_1(V_2 - V_1) + p_2 V_2 \ln(V_3/V_2)$$

$$Q_{\text{sum}} = 5/2 \cdot 2p(V - V/2) + 2pV \ln(2V/V) \Rightarrow Q_{\text{sum}} = pV(5/2 + 2 \ln 2) \dots (1)$$

El trabajo neto lo conseguimos por el área encerrada en el ciclo.

$$W'_n = [p_1(V_2 - V_1) + p_2 V_2 \ln(V_3/V_2)] - [p_3(V_4 - V_3)] + [p_3 V_3 \ln(V_1/V_3)] \Rightarrow W'_n = pV \ln(2) \dots (2)$$

Finalmente, de (1) y (2) encontramos la eficiencia del ciclo.

$$\eta = \frac{W'_n}{Q_{\text{sum}}} = \frac{pV \ln(2)}{pV[5/2 + 2 \ln(2)]} \therefore \boxed{\eta \approx 18\%}$$

28.35. Del esquema original reconocemos que el calor cedido al foco frío es $Q_B = 900 \text{ J}$. Luego, por tratarse de una máquina ideal de Carnot, utilizaremos la relación de Kelvin (28.16).

$$Q_B/Q_A = T_B/T_A \Rightarrow 900 \text{ J}/Q_A = 300 \text{ K}/500 \text{ K} \Rightarrow Q_A = 1\,500 \text{ J}$$

Y empleando la conservación de la energía (Primera Ley de la Termodinámica) se establece lo siguiente:

$$Q_A = W + Q_B \Rightarrow 1\,500 \text{ J} = W + 900 \text{ J} \therefore \boxed{W = 600 \text{ J}}$$

28.36. Por los datos podemos reconocer que $Q_A = 1\,800 \text{ kJ}$, $W = 800 \text{ kJ}$, y $T_A = 900 \text{ K}$. A continuación, utilizando las relaciones (28.13) y (28.15) tendremos:

$$W/Q_A = 1 - T_B/T_A \Rightarrow 800/1\,800 = 1 - T_B/900 \therefore \boxed{T_B = 500 \text{ K}}$$

28.37. De la relación (28.15) despejamos la temperatura baja (T_B) de la máquina.

$$T_{B1} = (1 - \eta_1)T_A \dots (1) \quad \text{Y:} \quad T_{B2} = (1 - \eta_2)T_A \dots (2)$$

Luego, restando miembro a miembro (1) - (2):

$$T_{B1} - T_{B2} = [(1 - \eta_1) - (1 - \eta_2)]T_A = (\eta_2 - \eta_1)T_A \Rightarrow \Delta T_B = \Delta \eta \cdot T_A \quad (T_A = 127 + 273 = 400 \text{ K})$$

$$\text{Reemplazando datos obtenemos: } \Delta T_B = 2/100 \cdot 400 \therefore \boxed{\Delta T_B = 8 \text{ K, u. } 8^\circ \text{C}}$$

28.38. Reconocemos por los datos y condición del problema que: $T_{A1} = 3\,000 \text{ K}$, $T_{B1} = T_{A2} = 1\,500 \text{ K}$, $T_{B2} = x$.

$$\text{Como } \eta_{II} = 2\eta_{II} \Rightarrow 1 - T_{B1}/T_{A1} = 2(1 - T_{B2}/T_{A2})$$

$$\Rightarrow 1 - 1\,500/3\,000 = 2(1 - T_x/1\,500) \therefore \boxed{T_x = 1\,125 \text{ K}}$$

Asimismo, de la máquina I se reconoce que $Q_{A1} = 1\,600 \text{ kJ}$, y $\eta_I = 1/2$; luego:

$$\eta_I = W'_1/Q_{A1} \Rightarrow 1/2 = W'_1/1\,600 \therefore \boxed{W'_1 = 800 \text{ kJ}}$$

Finalmente, de la máquina II reconocemos que $Q_{B2} = 600 \text{ kJ}$, y $\eta_{II} = 0,25 = 1/4$. Luego, aplicando la relación (28.13) tenemos:

$$\eta_{II} = 1 - Q_{B2}/Q_{A2} \Rightarrow 1/4 = 1 - 600/Q_{A2} \therefore \boxed{Q_{A2} = 800 \text{ kJ}}$$

28.39. En base al esquema dado y a la condición del problema, tenemos lo siguiente:

$$\eta_1/\eta_2 = 2/3 \Rightarrow 3(1 - T_x/1800) = 2(1 - 600/T_x)$$

Simplificando la relación anterior obtenemos:

$$T_x^2 - 600T_x - 720000 = 0 \Rightarrow (T_x - 1200)(T_x + 600) = 0$$

De la descomposición en factores obtenemos la solución: $T_x = 1200 \text{ K}$

Finalmente, de la máquina I tendremos:

$$\eta_1 = W_1/Q_{A1} \Rightarrow 1 - T_x/1800 = W_1/3 \text{ kJ} \quad \therefore \boxed{W_1 = 1 \text{ kJ}}$$

28.40. A partir del esquema adjunto aplicamos la relación de Keivin (28.16).

$$\frac{Q_B}{Q_A} = \frac{T_B}{T_A} \Rightarrow \frac{Q_B}{Q_A} = \frac{(-23 + 273)}{(27 + 273)} \Rightarrow \frac{Q_B}{Q_A} = \frac{5}{6} \dots (1)$$

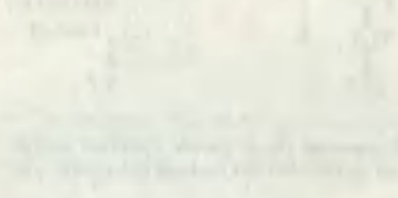
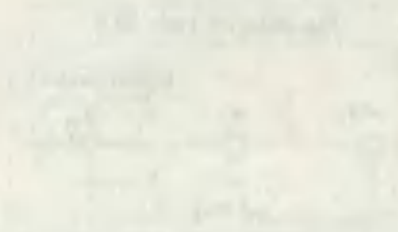
Por conservación de la energía se verifica: $Q_A = Q_B + W \dots (2)$

$$\text{Luego, de (1) y (2) despejamos } Q_B : Q_B = 5W = 5.50 \quad \therefore \boxed{Q_B = 250 \text{ kJ}}$$

28.41. Aplicando la relación (28.14) tenemos:

$$\text{COP} = \frac{Q_B}{W} = \frac{Q_A - W}{W} = \frac{Q_A}{W} - 1 = \frac{1}{W/Q_A} - 1 \Rightarrow \text{COP} = 1/\eta - 1$$

$$\text{Reemplazando en dato: } h = 20\% = 0,2, \text{ obtenemos: } \boxed{\text{COP} = 4}$$



Reaction 7:

$$C_2H_5COCl + C_2H_5N(C_2H_5)_2 \rightarrow C_2H_5N(C_2H_5)_2CO + HCl$$

Reaction 8:

$$C_2H_5COCl + C_2H_5N(C_2H_5)_2 \rightarrow C_2H_5N(C_2H_5)_2CO + HCl$$

Reaction 9:

$$C_2H_5COCl + C_2H_5N(C_2H_5)_2 \rightarrow C_2H_5N(C_2H_5)_2CO + HCl$$

Reaction 10:

$$C_2H_5COCl + C_2H_5N(C_2H_5)_2 \rightarrow C_2H_5N(C_2H_5)_2CO + HCl$$

Reaction 11:

$$C_2H_5COCl + C_2H_5N(C_2H_5)_2 \rightarrow C_2H_5N(C_2H_5)_2CO + HCl$$

Reaction 12:

$$C_2H_5COCl + C_2H_5N(C_2H_5)_2 \rightarrow C_2H_5N(C_2H_5)_2CO + HCl$$

Y utilizando la Ley de Coulomb en (*) tendremos:

$$k_c \frac{q_1 \cdot q}{x^2} = k_c \frac{q_2 \cdot q}{(d-x)^2} \Rightarrow (d-x)^2 = \frac{q_2}{q_1} x^2$$

$$x = \frac{d}{\sqrt{q_2/q_1 + 1}} \quad \therefore \quad \boxed{x = 4 \text{ m}}$$

29.5. Procediendo como se hizo en el problema anterior, tendremos que una carga $-q$ se encontrará en equilibrio.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$$

$$\Rightarrow k_c \frac{q_1 \cdot q}{(d+x)^2} = k_c \frac{q_2 \cdot q}{x^2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} x^2 = (d+x)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{q_1/q_2 - 1}} \quad \therefore \quad \boxed{x = 6 \text{ m}}$$

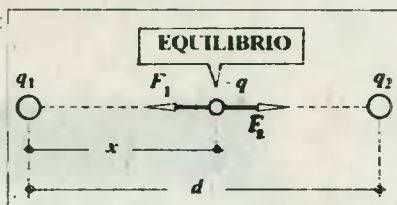
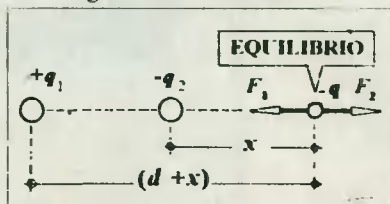


Fig. Solución Prob. 29.4



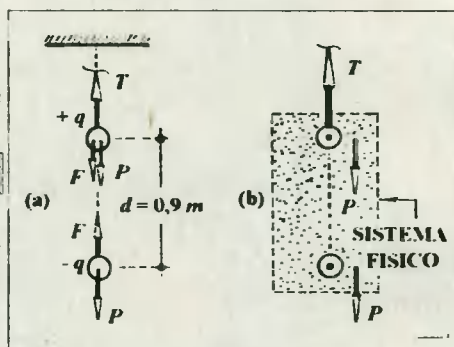
29.6. En base al esquema (a) aplicaremos la primera condición de equilibrio.

1) Para la esfera inferior.- La fuerza eléctrica (F) se equilibra con el peso (P).

$$P = F \Rightarrow P = 9 \cdot 10^9 \frac{(6 \cdot 10^{-5})^2}{(9 \cdot 10^{-1})^2} \quad \therefore \quad \boxed{P = 40 \text{ N}}$$

2) Para la esfera superior.- La tensión (T) de la cuerda equilibra al peso (P) de la esfera y a la fuerza eléctrica (F). Luego, por los resultados obtenidos:

$$T = P + F \quad \therefore \quad \boxed{T = 80 \text{ N}}$$



Observación.- Al estudiar el sistema físico indicado en el esquema (b) se puede apreciar que la tensión (T) equilibra el peso total de las esferas ($2P$). Aquí no se señalan las fuerzas eléctricas, por ser éstas dos fuerzas internas del sistema.

29.7. Reconocemos que las esferas experimentan fuerzas (F) de repulsión, debido a que sus cargas son de igual signo, y las tensiones de las cuerdas son T_A y T_B . Aplicaremos la primera condición de equilibrio en los esquemas (a) y (b).

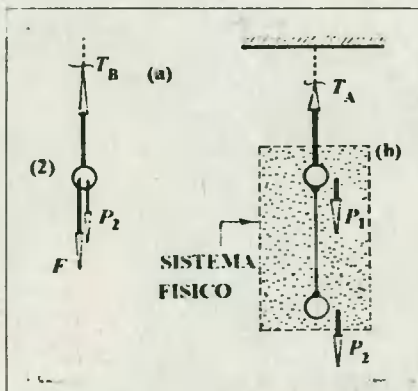
En el esquema (a) se muestra el DCL de la esfera 2, en el cual por equilibrio se cumple que:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_B = P_2 + F \dots (*)$$

$$\text{donde: } F = 9 \cdot 10^9 \frac{(2 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^{-5})}{(3 \cdot 10^{-1})^2} = 80 \text{ N}$$

$$\text{Y en (*): } T_B = 40 + 80 \quad \therefore \quad \boxed{T_B = 120 \text{ N}}$$

En el esquema (b) no se muestran ni las fuerzas eléctricas ni la tensión T_B , debido a que son fuerzas internas al sistema. Por ello se verifica que: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_A = P_1 + P_2 \quad \therefore \quad \boxed{T_A = 70 \text{ N}}$



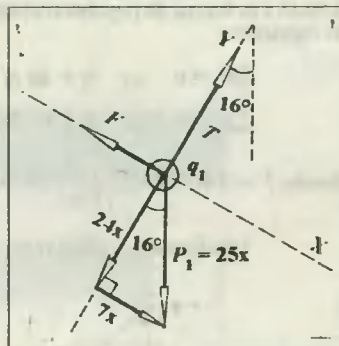
29.8. A partir de la resolución del triángulo encontramos que la distancia entre las esferas es $d = 30 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-1} \text{ m}$, y a partir de ello determinaremos la fuerza (F) de repulsión electrostática entre las esferas.

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{(7 \cdot 10^{-5})^2}{(3 \cdot 10^{-1})^2} \Rightarrow F = 490 \text{ N}$$

Luego, por equilibrio se tendrá que:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 7x = F \Rightarrow x = 70 \text{ N}$$

Finalmente: $P_1 = 25x \therefore P_1 = 1750 \text{ N}$



29.9. Analizando el DCL de la esfera 1 se establece que la tensión T en la cuerda que lo sostiene podrá ser determinada resolviendo el equilibrio de fuerzas. La fuerza (F) de atracción eléctrica se obtiene de la Ley de Coulomb.

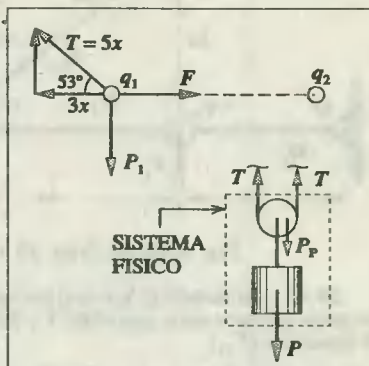
$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{(30 \cdot 10^{-6})(20 \cdot 10^{-6})}{(3 \cdot 10^{-1})^2} \Rightarrow F = 60 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 3x = F \Rightarrow x = 20 \text{ N}$$

$$\Rightarrow T = 5x \Rightarrow T = 100 \text{ N}$$

Finalmente, del DCL del bloque se cumplirá que:

$$P_p + P = 2T \therefore P = 160 \text{ N}$$



29.10. A partir del DCL de la esfera inferior, tendremos por equilibrio que:

$$\Sigma F' = 0 \Rightarrow F_r + P = F_e \dots (1)$$

donde: $F_r = kx = 400x \dots (2)$

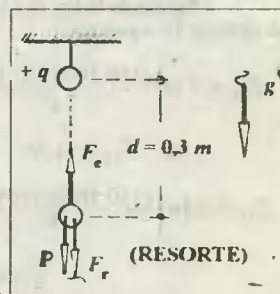
y: $F_e = 9 \cdot 10^9 \frac{(4 \cdot 10^{-5})^2}{(3 \cdot 10^{-1})^2} = 160 \text{ N} \dots (3)$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$400x + 120 = 160 \Rightarrow x = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

Finalmente, diremos que la longitud natural (L_0) del resorte estará dada por:

$$L_0 = L_f - x = 25 - 10 \therefore L_0 = 15 \text{ cm}$$



29.11. Reconocemos que la carga q_2 debe ser de signo negativo para que la fuerza de atracción eléctrica (F_2) genere un momento (M_2) de sentido opuesto al momento (M_1) producido por la fuerza de repulsión eléctrica (F_1). Luego, por la segunda condición de equilibrio se tendrá que:

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_1 = M_2 \Rightarrow F_1 \cdot 2a = (F_2 \cdot \text{sen}37^\circ) \cdot 6a \Rightarrow F_1 = 9/5 F_2$$

$$\Rightarrow k_e \frac{q_1 \cdot q}{(3a)^2} = 9/5 k_e \frac{|q_2| \cdot q}{(5a)^2} \Rightarrow |q_2| = 125/27 q_1 \therefore q_2 = -125 \mu\text{C}$$

29.12. Cuando el coeficiente de fricción (μ) sea mínimo, el bloque 1 intentará resbalar hacia arriba,

debido a la fuerza de repulsión eléctrica (F). Luego, del DCL del bloque 1, por equilibrio tendremos lo siguiente:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = 48 \text{ N} \Rightarrow f = \mu N = 48\mu \dots (1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = f + 36 \dots (2)$$

$$\text{donde: } F = 9 \cdot 10^9 \frac{(6 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^{-5})}{(3/4)^2} = 48 \text{ N} \dots (3)$$

Finalmente, reemplazamos (1) y (3) en (2): $48 = 48\mu + 36 \therefore \mu = 0,25$

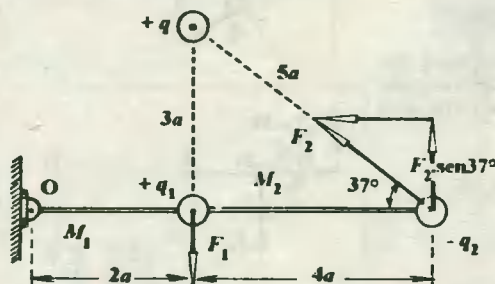


Fig. Solución Prob. 29.11

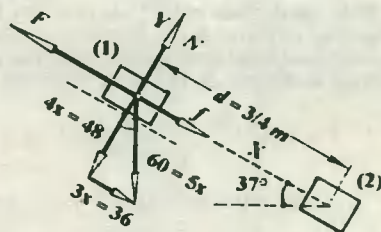


Fig. Solución Prob. 29.12

29.13. Utilizando la ley cualitativa para la interacción de cargas, y en base a los signos de las mismas, reconocemos que entre 1 y 2 existe repulsión (F_{12}); entre 1 y 3 atracción (F_{13}), y entre 2 y 3 atracción (F_{23}).

Utilizando la ley de Coulomb se obtiene lo siguiente:

$$F_{12} = 9 \cdot 10^9 \frac{(150 \cdot 10^{-6}) \cdot (40 \cdot 10^{-6})}{1^2}$$

$$\Rightarrow F_{12} = 54 \text{ N}$$

$$F_{13} = 9 \cdot 10^9 \frac{(150 \cdot 10^{-6}) \cdot (60 \cdot 10^{-6})}{3^2} \Rightarrow F_{13} = 9 \text{ N}$$

$$F_{23} = 9 \cdot 10^9 \frac{(40 \cdot 10^{-6}) \cdot (60 \cdot 10^{-6})}{2^2} \Rightarrow F_{23} = 5,4 \text{ N}$$

Finalmente, encontramos la resultante de estas fuerzas sobre cada esferilla.

$$FR_1 = F_{12} - F_{13} = 54 - 9 \therefore$$

$$FR_1 = 45 \text{ N } (\leftarrow)$$

$$FR_2 = F_{12} + F_{13} = 54 + 9 \therefore$$

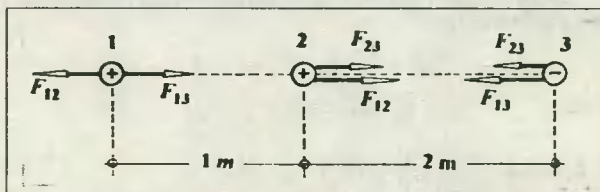
$$FR_2 = 63 \text{ N } (\rightarrow)$$

$$FR_3 = F_{13} + F_{23} = 9 + 5,4 \therefore$$

$$FR_3 = 14,4 \text{ N } (\leftarrow)$$

29.14. Reconociendo que las cargas se rechazan entre si con las fuerzas indicadas en el esquema, procederemos a calcularlas como en el problema anterior.

$$F_{12} = 9 \cdot 10^9 \frac{(40 \cdot 10^{-6}) \cdot (50 \cdot 10^{-6})}{1^2} \Rightarrow F_{12} = 18 \text{ N}$$



$$F_{13} = 9 \cdot 10^9 \frac{(40 \cdot 10^{-6}) \cdot (75 \cdot 10^{-6})}{2^2}$$

$$F_{13} = 6,75 \text{ N}$$

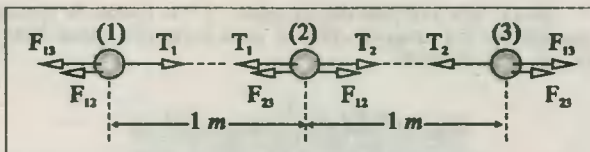
$$F_{23} = 9 \cdot 10^9 \frac{(50 \cdot 10^{-6}) \cdot (75 \cdot 10^{-6})}{1^2}$$

$$\therefore F_{23} = 33,75 \text{ N}$$

Finalmente, encontramos las tensiones T_1 y T_2 de las cuerdas en base al equilibrio de las esferas 1 y 3.

$$1: \Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_1 = F_{13} + F_{12} = 6,75 + 18 \quad \therefore T_1 = 24,75 \text{ N}$$

$$2: \Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_2 = F_{13} + F_{23} = 6,75 + 33,75 \quad \therefore T_2 = 40,5 \text{ N}$$



29.15. A partir del esquema mostrado, en el cual se señalan las fuerzas de interacción entre cargas, aplicaremos la primera condición de equilibrio en las cargas 1 y 2.

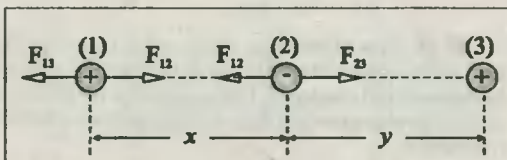
$$\text{De } q_1: F_{12} = F_{13} \Rightarrow k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{x^2} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{(x+y)^2}$$

$$\frac{q_2}{x^2} = \frac{q_3}{(x+y)^2} \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \sqrt{\frac{q_2}{q_3}} \dots (1)$$

$$\text{De } q_2: F_{12} = F_{23} \Rightarrow k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{x^2} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{y^2}$$

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_3}{y^2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{q_1}{q_3}} \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_3}} \dots (2)$$

$$\text{igualando (1) y (2): } \frac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_3}} = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_3}} \Rightarrow q_3 = \frac{q_1 \cdot q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_1})^2} \quad \therefore q_3 = 36 \mu\text{C}$$



29.16. A partir del esquema y de los datos del problema podemos encontrar las fuerzas de atracción de FAB y repulsión FCB que actúan sobre la carga en B.

$$F_{AB} = 9 \cdot 10^9 \frac{(125 \cdot 10^{-6}) \cdot (40 \cdot 10^{-6})}{3^2}$$

$$\Rightarrow F_{AB} = 5 \text{ N} \dots (1)$$

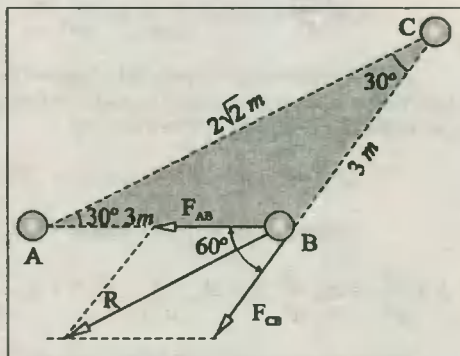
$$F_{CB} = 9 \cdot 10^9 \frac{(75 \cdot 10^{-6}) \cdot (40 \cdot 10^{-6})}{3^2}$$

$$\Rightarrow F_{CB} = 3 \text{ N} \dots (2)$$

A continuación aplicaremos la Ley del Paralelogramo para encontrar la resultante de las fuerzas FAB y FCB.

$$R = \sqrt{F_{AB}^2 + F_{CB}^2 + 2F_{AB} \cdot F_{CB} \cdot \cos 60^\circ} \dots (3)$$

$$\text{Finalmente, reemplazamos (1) y (2) en (3): } R = 7 \text{ N}$$



29.17. Sea a el lado del triángulo, y F la fuerza de repulsión que ejercen las cargas q entre sí, cuya expresión viene dada por la Ley de Coulomb:

$$F = k_e \frac{q^2}{(a\sqrt{3})^2} \dots (1)$$

Dado que el equilibrio (inestable) de cualquiera de las cargas q es la misma, analizamos la carga superior, en la cual la resultante R de las fuerzas (F) viene dada por la Ley del Paralelogramo.

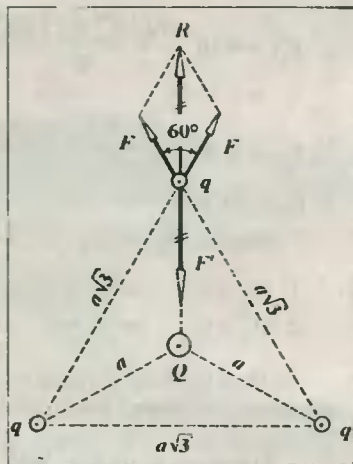
$$R = \sqrt{3} F \dots (2)$$

Ahora, analizando el equilibrio de q se verificará que:

$$F' = R \dots (3)$$

Luego, de (1) y (2) en (3) se tiene:

$$k_e \frac{q \cdot |Q|}{a^2} = \sqrt{3} \cdot k_e \frac{q^2}{3a^2} \Rightarrow |Q| = \sqrt{3}/3 q \quad \therefore \quad \boxed{Q = -1 \mu\text{C}}$$



29.18. Procediendo tal como se hizo en el problema anterior, analizaremos el equilibrio de una de las cargas ubicadas en los vértices del cuadrado. Luego, estableciendo el equilibrio de las fuerzas ubicadas en la diagonal del cuadrado y su prolongación, tendremos:

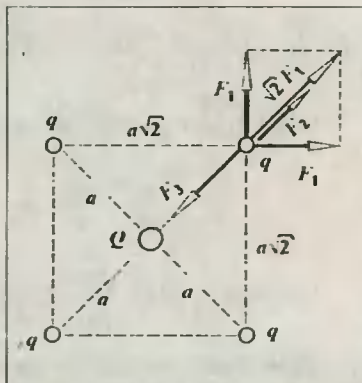
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_3 = \sqrt{2} F_1 + F_2 \dots (1)$$

donde: $F_1 = k_e \frac{q^2}{(a\sqrt{2})^2} \dots (2)$

$$F_2 = k_e \frac{q^2}{(2a)^2} \dots (3) \quad F_3 = k_e \frac{q|Q|}{a^2} \dots (4)$$

Reemplazando (2), (3) y (4) en (1) tendremos:

$$k_e \frac{q \cdot |Q|}{a^2} = \sqrt{2} \cdot k_e \frac{q^2}{(2a)^2} + k_e \frac{q^2}{4a^2} \Rightarrow |Q| = q(\sqrt{2}/2 + 1/4) \quad \therefore \quad \boxed{Q = -95,5 \mu\text{C}}$$



29.19. Considerando el lado del hexágono de longitud a , aplicaremos la 1ª condición de equilibrio, teniendo en cuenta que la resultante de las fuerzas de repulsión eléctrica (S , T y V) es equilibrada por la fuerza de atracción eléctrica (R).

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R = 2S \cos 60^\circ + 2T \cos 30^\circ + V$$

Aplicando la Ley de Coulomb tendremos:

$$k_e \frac{q \cdot |Q|}{a^2} = 2k_e \frac{q^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2} + 2k_e \frac{q^2}{(a\sqrt{3})^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + k_e \frac{q^2}{(2a)^2} \Rightarrow |Q| = q(1 + \sqrt{3}/3 + 1/4) \quad \therefore \quad \boxed{Q = -1,83}$$

29.20. Analizando el equilibrio de la esfera 1 observamos que la resultante (R) de las fuerzas F_{12} y P es siempre colineal con la fuerza de repulsión eléctrica F_{13} , de modo que ellas se equilibran con la tensión indicada. A continuación, del esquema mostrado diremos que:

$$F_{12} = k_e \frac{q_1 \cdot q_2}{(2l \sin \theta)^2}; \text{ y } \operatorname{tg} \theta = \frac{F_{12}}{P} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{k_e \cdot q_1 \cdot q_2}{4l^2 P \sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta \cdot \operatorname{tg} \theta = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^2}{4 \cdot 3^2 \cdot 20} \Rightarrow \sin^2 \theta \cdot \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2}$$

Transformando $\operatorname{tg} \theta$ en función de $\sin \theta$ y $\cos \theta$ ($\operatorname{tg} \theta = \sin \theta / \cos \theta$) obtenemos la siguiente ecuación:

$$4 \sin^6 \theta + \sin^2 \theta - 1 = 0 \Rightarrow (2 \sin^2 \theta - 1)(2 \sin^4 \theta + \sin^2 \theta + 1) = 0$$

El único factor que nos da soluciones reales es: $(2 \sin^2 \theta - 1) = 0 \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sin \theta = \sqrt{2}/2 \Rightarrow \theta = 45^\circ \therefore \alpha = 90^\circ$$

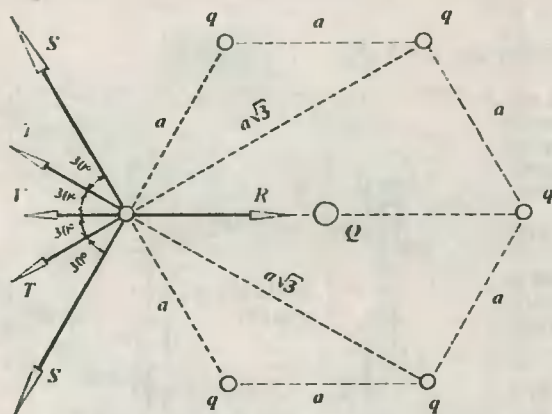


Fig. Solución Prob. 29.19

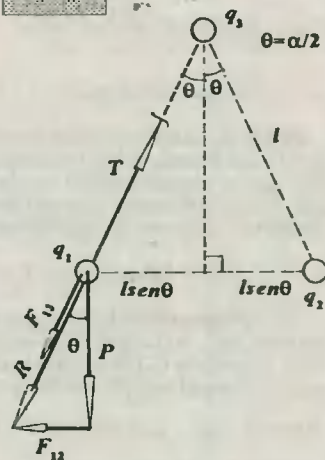


Fig. Solución Prob. 29.20

29.21. Reconocemos que la simetría del esquema se debe a la igualdad de pesos y cargas, por ello, el ángulo θ que forman las cuerdas con la vertical es el mismo para cada uno. Asimismo, utilizaremos el procedimiento que se empleó en el problema 29.18 para el cálculo de F_R .

$$F_R = k_e \frac{q^2}{4a^2} (2\sqrt{2} + 1) \dots (1)$$

en la cual el término a viene dado por la semidiagonal del cuadrado de la base piramidal: $a = L \cdot \sin \theta \dots (2)$

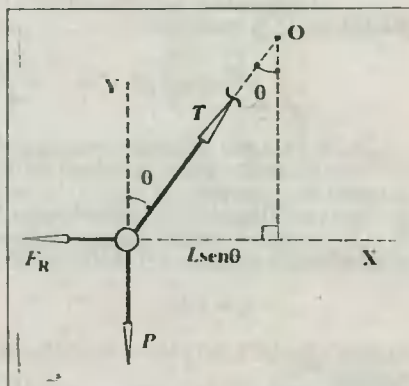
Y del DCL de una de las esferas, se verifica que:

$$\operatorname{tg} \theta = F_R / P \dots (3)$$

Reemplazando (2) en (1), y el resultado en (3), tendremos:

$$\sin^2 \theta \cdot \operatorname{tg} \theta = k_e \frac{q^2}{4L^2 P} (2\sqrt{2} + 1) \quad (\sqrt{2} = 1,41)$$

Sustituyendo datos y simplificando obtendremos la siguiente ecuación:



$$\text{sen}^2\theta \cdot \text{tg}\theta = 0,27 = 27/100$$

Procediendo análogamente como en el problema anterior obtendremos la siguiente ecuación:

$$\text{sen}^6\theta + 729/10\,000 \text{sen}^2\theta - 729/10\,000 = 0 \Rightarrow (\text{sen}^2\theta - 9/25)(\text{sen}^4\theta + 9/25 \text{sen}^2\theta + 81/400)$$

La única solución real la obtenemos de: $(\text{sen}^2\theta - 9/25) = 0 \Rightarrow \text{sen}\theta = 3/5 \therefore \theta = 37^\circ$

29.22. Utilizando las relaciones (29.3) y (29.6) tendremos que la fuerza de repulsión eléctrica en los medios indicados viene dado por:

a) En el vacío: $F_1 = k_0 \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} \dots (1)$

b) En el líquido: $F_2 = \frac{k_0}{\epsilon_r} \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} \dots (2)$

Luego, dividiendo (1) ÷ (2) tendremos que: $\epsilon_r = F_1/F_2 \therefore \epsilon_r = 1,5$

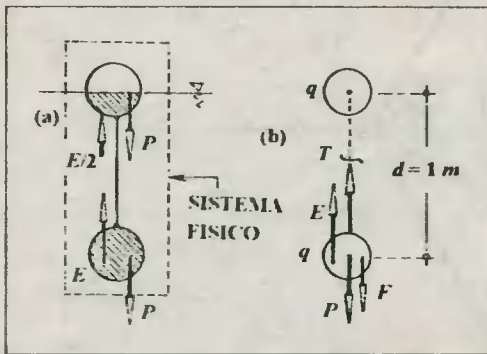
29.23. Del esquema (a) notamos que el empuje (E) del líquido sobre la esfera inferior es el doble que el experimentado por la superior, en razón de sus volúmenes sumergidos. Luego, por la primera condición de equilibrio tendremos:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow E + E/2 = 2P \Rightarrow P = 3/4 E \dots (*)$$

El esquema (b) muestra el DCL de la esfera inferior, en la cual por condición del problema, la tensión (T) de la cuerda debe ser nula. Luego, por equilibrio se tendrá que:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow E + T = F + P \dots (T = 0)$$

Y de (*): $E = F + 3/4 E \Rightarrow F = 1/4 E \dots (**)$



Utilizando la Ley de Coulomb para F, y expresando el empuje (E) en base a la relación (24.12), en (**) tendremos:

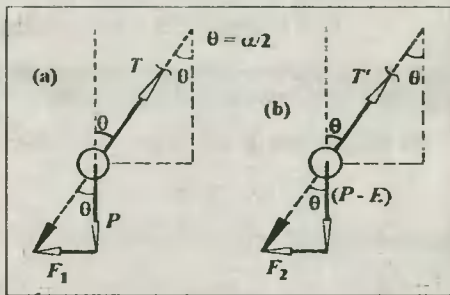
$$\frac{k_0}{\epsilon_r} \frac{q^2}{d^2} = 1/4 d_1 g V \Rightarrow \frac{9 \cdot 10^9}{4} \frac{q^2}{1^2} = 1/4 \cdot 1\,800 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \therefore q = 4 \mu\text{C}$$

29.24. Para que el ángulo de separación (α) sea el mismo en ambos casos, se deberá verificar que la distancia de separación (d) cuando las esferas estén en el aire y en el líquido sean iguales. Luego, las fuerzas F₁ y F₂ en ambos medios estarán relacionados de acuerdo con la solución del problema 29.22:

$$\epsilon_r = F_1/F_2 \dots (*)$$

En base a los DCL (a) y (b) se establece la siguiente relación:

$$\text{tg}\theta = \frac{F_1}{P} = \frac{F_2}{P - E} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{P}{P - E} \dots (**)$$



Luego, de (*) en (**), y utilizando la relación (24.12) para el empuje (E), tendremos:

$$\epsilon_T = \frac{d_0 \cdot g \cdot V}{d_0 \cdot g \cdot V - dgV} \Rightarrow \epsilon_T = \frac{d}{d_0 - d} \quad \therefore \boxed{\epsilon_T = 3}$$

29.25. Sea d la distancia entre los electrones. Entonces, las fuerzas F_e y F_g debido a la repulsión eléctrica y atracción gravitatoria estarán dadas por las relaciones (29.3) y (20.1) respectivamente. Al encontrar la razón entre ellas tenemos:

$$r = \frac{F_e}{F_g} = \frac{k_e \cdot e^2 / d^2}{Gm^2 / d^2} \Rightarrow r = \frac{k_e}{G} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \Rightarrow r = \frac{9 \cdot 10^9}{6.67 \cdot 10^{-11}} \left(\frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{9.1 \cdot 10^{-31}} \right)^2 \quad \therefore \boxed{r = 4,2 \cdot 10^{42}}$$

29.26. A partir del DCL del electrón giratorio, en el cual no se señala el peso, dada su insignificancia, aplicaremos la relación (16.3) para la fuerza centrípeta.

$$F_r = \Sigma F_{\text{radiales}} \Rightarrow m\omega^2 r = k_e e^2 / r^2 \quad \therefore \boxed{\omega = e/r \sqrt{k_e/m}}$$

29.27. Del DCL indicado tenemos, por equilibrio en el eje vertical, lo siguientes:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 4x = 20 \text{ N} \quad \Rightarrow x = 5 \text{ N} \dots (1)$$

Y por Dinámica Circular:

$$m\omega^2 r = \Sigma F_{\text{radiales}} \Rightarrow m\omega^2 r = F + 3x \dots (2)$$

Utilizando la Ley de Coulomb y reemplazando (1) en (2):

$$2 \cdot \omega^2 \cdot 3 = 9 \cdot 10^9 \frac{(1.5 \cdot 10^{-5}) \cdot (9 \cdot 10^{-4})}{3^2} + 3(5)$$

$$\therefore \boxed{\omega = 5 \text{ rad/s}}$$

29.28.- A partir del DCL mostrado se verifica que:

$$m a_c = \Sigma F_{\text{rad}} \Rightarrow mv^2/r = mg + T - T_c \dots (*)$$

Para garantizar que la esferilla mostrada se mantenga en la trayectoria circular, la fuerza de tensión (T) en la cuerda deberá tener un valor mayor que cero. En el caso crítico la tensión es nula, y la velocidad (v) es mínima. Luego, en (*):

$$mv^2/r = mg - k_e q^2 / r^2 \quad \therefore \boxed{v = \sqrt{gr - k_e q^2 / mr}}$$

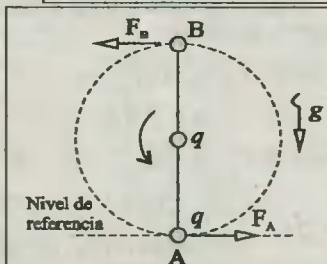
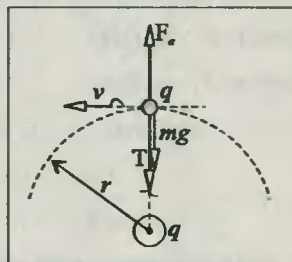
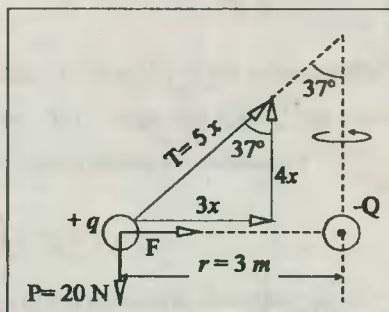
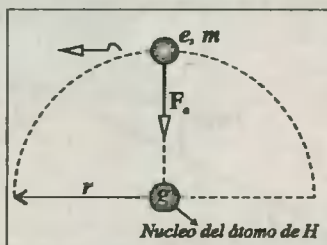
29.29. Dado que tanto la tensión de la cuerda como la fuerza de repulsión eléctrica, por ser fuerzas internas, no realizan trabajo sobre el sistema, diremos que la energía mecánica se mantiene constante.

$$E_{\text{mec}}^A = E_{\text{mec}}^B \Rightarrow 1/2 mv_A^2 = 1/2 mv_B^2 + mg(2r) \dots (*)$$

Reemplazando en (*) la solución obtenida para v_B en el problema anterior, tendremos:

$$v_{A2} = (gr - k_e q^2 / mr) + 4gr \quad \therefore \boxed{v_A = \sqrt{5gr - k_e q^2 / mr}}$$

29.30. Dado que la fuerza de repulsión eléctrica (F_e) está siempre en la dirección de la cuerda, podemos decir que su presencia no influye en absoluto sobre la fuerza recuperadora.



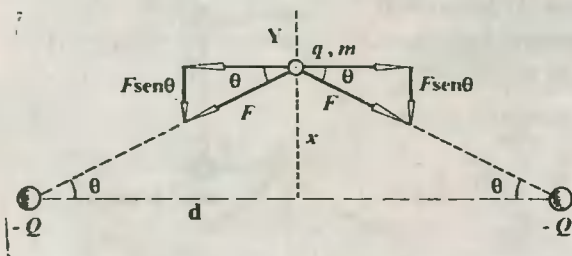
del oscilador para cualquier desplazamiento x . De esto podemos concluir que el periodo del péndulo viene dado por la relación (22.1).

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \quad \therefore \quad \boxed{T = 4 \text{ s}}$$

29.31. De acuerdo al esquema mostrado, la fuerza restauradora (F_r) que actúa sobre la esferilla m para un pequeño desplazamiento x viene dado por:

$$F_r = \Sigma F_y \Rightarrow kx = 2F \cdot \text{sen}\theta \dots (*)$$

donde: k = constante de elasticidad del oscilador.



Además: $\text{sen}\theta \approx \text{tg}\theta \approx x/d$, y $F = k_e qQ/d^2$

Luego, en (*): $kx = 2(k_e qQ/d^2) \cdot x/d \Rightarrow k = 2k_e qQ/d^3$

Finalmente, utilizando la relación (21.14) para el periodo del oscilador mecánico-eléctrico será:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d^3 m}{2k_e qQ}} \quad \therefore \quad \boxed{T = 2\pi/3 \text{ s}}$$

29.32. Utilizando la relación (29.9) encontraremos la intensidad del campo en los puntos P y R. Veamos.

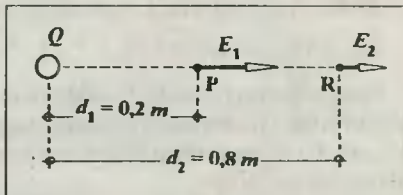
Punto P: $E_1 = k_e Q/d_1^2 \dots (1)$

Punto R: $E_2 = k_e Q/d_2^2 \dots (2)$

Dividiendo (2) ÷ (1) miembro a miembro:

$$E_2/E_1 = d_1^2/d_2^2 \Rightarrow E_2/E_1 = (0,2/0,8)^2 \Rightarrow E_2 = E_1/16$$

Y del dato: $E_1 = 4 \cdot 10^5 \quad \therefore \quad \boxed{E_2 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ N/C}}$



29.33. Procediendo según como se hizo en el problema anterior, tendremos:

Punto P: $E_1 = k_e Q/d_1^2 \Rightarrow 8 \cdot 10^3 = 9 \cdot 10^9 Q/x^2$

$$\Rightarrow Q = 8/9 \cdot 10^{-6} x^2 \dots (1)$$

Punto R: $E_2 = k_e Q/d_2^2 \Rightarrow 1,8 \cdot 10^4 = 9 \cdot 10^9 Q/(x-1)^2$

$$\Rightarrow Q = 2 \cdot 10^{-6} (x-1)^2 \dots (2)$$

Resolviendo (1) y (2): $\boxed{Q = 8 \cdot 10^{-6} \text{ C}}$ y $\boxed{x = 3 \text{ m}}$

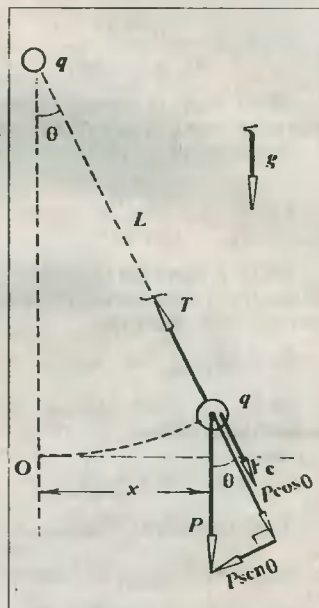
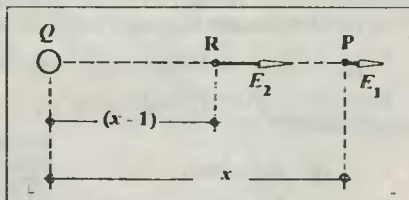
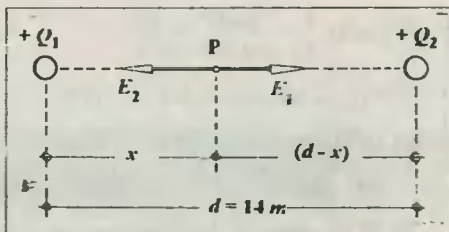


Fig. Solución Prob. 29.30

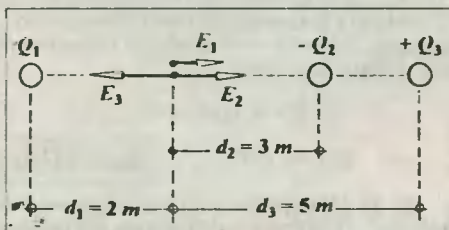
29.34. A partir del esquema mostrado notamos que cada carga crea su propio campo eléctrico, los que se representan con vectores que se alejan de aquellas, por ser éstas de signo positivo. Luego, aplicando el principio de superposición de campos y la condición del problema, tendremos para el punto P:



$$\Sigma E = 0 \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow k_e \frac{Q_1}{x^2} = k_e \frac{Q_2}{(d-x)^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{d}{1 + \sqrt{Q_2/Q_1}} \therefore x = 6 \text{ m}$$

29.35. A partir del esquema elaborado calculamos las intensidades de campo E_2 y E_3 creados por las cargas conocidas Q_2 y Q_3 . Los vectores se han indicado según el signo de cada carga: E_2 apuntando hacia Q_2 (negativo) y E_3 alejándose de Q_3 (positivo).



$$I_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot 63 \cdot 10^{-6} / 3^2 \Rightarrow E_2 = 63 \cdot 10^3 \text{ NIC}$$

$$E_3 = 9 \cdot 10^9 \cdot 200 \cdot 10^{-6} / 5^2 \Rightarrow E_3 = 72 \cdot 10^3 \text{ NIC}$$

Dado que $E_3 > E_2$, deducimos que la carga Q_1 debe ser de signo positivo para que su campo (E_1) se sume al de Q_2 (E_2), y de ese modo equilibre al creado por Q_3 (E_3), satisfaciendo así la condición del problema. Luego:

$$\Sigma E = 0 \Rightarrow E_1 + E_2 = E_3 \Rightarrow E_1 + 63 \cdot 10^3 = 72 \cdot 10^3 \Rightarrow E_1 = 9 \cdot 10^3 \text{ NIC}$$

Finalmente tendremos que:

$$E_1 = 9 \cdot 10^3 \text{ NIC} / d_1^2 \Rightarrow 9 \cdot 10^3 = 9 \cdot 10^9 \cdot Q_1 / 2^2 \therefore Q_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

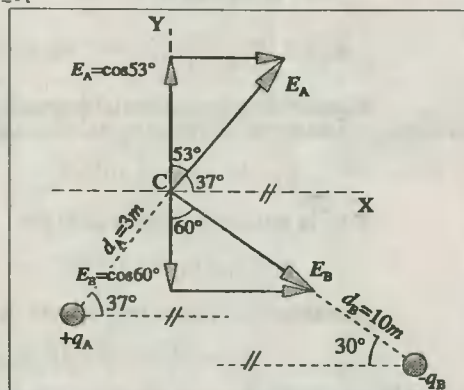
29.36. Por condición del problema diremos que el campo eléctrico total en C será horizontal si y sólo si las componentes verticales se eliminan entre sí, lo cual sólo será posible si el campo E_B creado por la carga q_B es de signo negativo. Luego:

$$\Sigma E_y = 0 \Rightarrow E_B \cdot \cos 60^\circ = E_A \cdot \cos 53^\circ$$

$$\Rightarrow k_e |q_B| / d_B^2 \cdot 1/2 = k_e q_A / d_A^2 \cdot 3/5$$

$$\Rightarrow |q_B| / 10^2 \cdot 1/2 = 3 \mu\text{C} / 3^2 \cdot 3/5$$

$$\Rightarrow |q_B| = 40 \mu\text{C} \therefore q_B = -40 \mu\text{C}$$



29.37. Atendiendo la condición del problema se ha construido el triángulo vectorial donde el campo resultante (E_T) sólo será horizontal, siempre que el campo creado por B (E_B) tenga la dirección señalada, lo cual será posible siempre que q_B sea de signo negativo. Ahora, en vista de no conocerse las distancias, aplicaremos sucesivamente semejanza de triángulos y la Ley de los Senos. Veamos.

$$\Delta COG \sim \Delta ACB \Rightarrow E_B / E_A = b/a$$

$$\Rightarrow \frac{k_e |q_B| / b^2}{k_e q_A / a^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{|q_B|}{q_A} = \left(\frac{b}{a}\right)^3 \dots (1)$$

$$\text{Y del } \triangle ACB: \frac{b}{a} = \frac{\text{sen}37^\circ}{\text{sen}127^\circ} = \frac{3/5}{4/5}$$

$$\Rightarrow b/a = 3/4 \dots (2)$$

Luego, de (2) en (1): $|q_B|/64 \mu\text{C} = (3/4)^3$

$$\Rightarrow |q_B| = 27 \mu\text{C} \quad \therefore \quad \boxed{q_B = -27 \mu\text{C}}$$

29.38. A partir de las convenciones establecidas para la dirección de los vectores campo se ha elaborado el esquema adjunto. Es también evidente que los campos creados por todas las cargas tienen la misma intensidad (E) debido a la misma magnitud de las cargas y la equidistancia del centro del cuadrado respecto a sus vértices. Luego, tendremos:

$$E = k_e q/a^2, \text{ y } E_{\text{tot}} = \Sigma E$$

$$\Rightarrow E_{\text{tot}} = 2\sqrt{2} E \quad \therefore \quad \boxed{E_{\text{tot}} = 2\sqrt{2} k_e q/a^2}$$

29.39. De los datos sobre las distancias deducimos que: $x = 0,3 \text{ m}$, y $\theta = 60^\circ$. Asimismo, calcularemos los campos creados por cada una de las cargas.

$$E_A = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^{-1})^2} \Rightarrow E_A = 5 \cdot 10^5 \text{ NIC}$$

$$E_B = 9 \cdot 10^9 \frac{8 \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^{-1})^2} \Rightarrow E_B = 8 \cdot 10^5 \text{ NIC}$$

$$E_C = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^{-1})^2} \Rightarrow E_C = 2 \cdot 10^5 \text{ NIC}$$

$$E_D = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^{-1})^2} \Rightarrow E_D = 3 \cdot 10^5 \text{ NIC}$$

Según el diagrama vectorial podemos deducir que el campo resultante en la dirección AC está dado por:

$$E_1 = E_A - E_C = 3 \cdot 10^5 \text{ NIC}$$

Y en la dirección BD está dado por:

$$E_2 = E_B - E_D = 5 \cdot 10^5 \text{ NIC}$$

Finalmente, el campo total vendrá dado por:

$$E_T = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos\theta} \quad \therefore \quad \boxed{E_T = 7 \cdot 10^5 \text{ NIC}}$$

29.40. Para satisfacer la condición de que la carga q_C sea negativa, de modo que las componentes verticales de los campos en B se puedan anular entre sí, quedando sólo las componentes horizontales. Asimismo, observamos que la contribución del campo de q_A no modifica en nada lo expuesto anteriormente. Luego, tendremos:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow E_C = E_D \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow k_e \frac{|q_C|}{a^2} = k_e \frac{q_D}{(a\sqrt{2})^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow |q_C| = 7\sqrt{2} \mu\text{C} \quad \therefore \quad \boxed{q_C = -7\sqrt{2} \mu\text{C}}$$

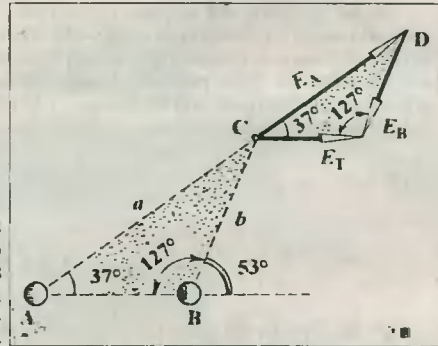
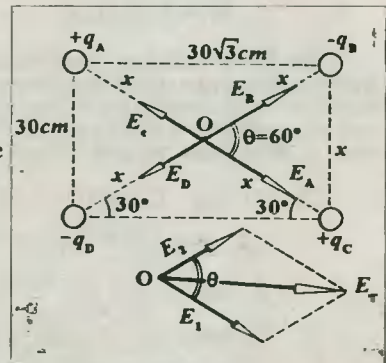
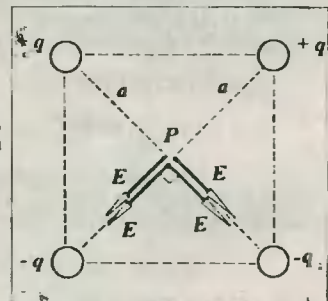


Fig. Solución Prob. 29.37



29.41. De acuerdo con la relación (29.8) se prevee que la fuerza F que ejerce el campo es de dirección contraria al mismo (E), de modo que al hacer el DCL de la esferita se nos permite trazar dos ejes (X-Y) girados, aprovechando la perpendicularidad de las fuerzas T y F . Seguidamente, diremos lo siguiente:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P/2 = F \Rightarrow P = 2 \cdot |Q|E \Rightarrow P = 2(10 \cdot 10^{-6})(4.10^5) \therefore P = 8 \text{ N}$$

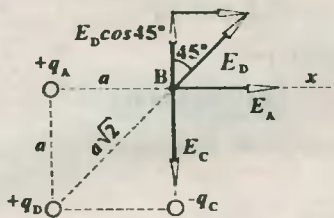


Fig. Solución Prob. 29.40

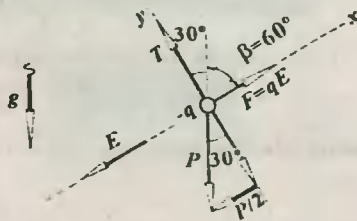


Fig. Solución Prob. 29.41

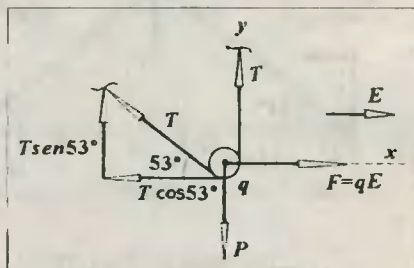
29.42. Ya que la carga q es positiva, entonces la fuerza (F) ejercida por el campo es de igual dirección que aquel, y sobre la base del DCL mostrado diremos lo siguiente:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T + T \cdot \text{sen} 53^\circ = P \Rightarrow T = 5/9 P \dots (1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow qE = T \cdot \text{cos} 53^\circ \dots (2)$$

$$\text{De (1) en (2): } qE = 5/9 P \cdot 3/5 \Rightarrow E = 1/3 \cdot 24/4 \cdot 10^{-5}$$

$$\therefore E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$



29.43. A partir de los datos y del DCL indicado, diremos que por condición de equilibrio se tendrá lo siguiente:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_e + F_r = P \Rightarrow qE + kx = P$$

$$\Rightarrow q(5 \cdot 10^5) + 2 \cdot 10^3(5 \cdot 10^{-2}) = 200 \therefore q = 2 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

29.44. Al analizar el DCL de la esfera A notamos que la fuerza (F_e) que ejerce el campo sobre ella va hacia la derecha en el supuesto de que la carga q_A sea negativa. Asimismo, la fuerza de Coulomb entre las esferas (F_A) deberá apuntar hacia la izquierda para equilibrar a la anterior, lo cual será posible si y sólo si las cargas tienen el mismo signo. Luego:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_A = F_e \Rightarrow k_e q_A |q_B| / d^2 = q_A E$$

$$\Rightarrow |q_B| = Ed^2 / k_e = 6 \cdot 10^5 (3 \cdot 10^{-1})^2 / 9 \cdot 10^9$$

$$\therefore q_B = -6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

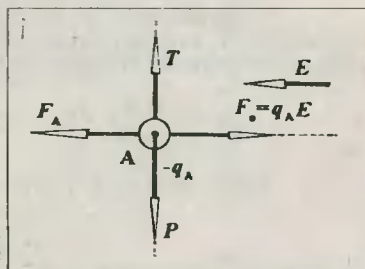
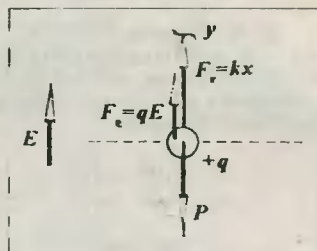


Fig. Solución Prob. 29.44

29.45. Haciendo el esquema vectorial del sistema físico formado por las varillas y las esferas, aplicaremos la segunda condición de equilibrio, tomando al punto O como centro de momentos.

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_1 + M_2 = M_3 \Rightarrow P_1 \cdot 12 + P_2 \cdot 30 = F_1 \cdot 16$$

$$\Rightarrow 16 \text{ N} \cdot 6 + 8 \text{ N} \cdot 15 = (3 \cdot 10^{-5})E \cdot 8 \quad \therefore \quad E = 9 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

29.46. El cuerpo cargado experimentará una fuerza horizontal (F_x) a causa del campo eléctrico, y otra vertical (F_y) a causa del campo gravitatorio. Cada una de estas fuerzas provoca su propia aceleración, el primero a_x , y el segundo $a_y = g$. Luego, de la relación (29.8) y de la Segunda Ley de Newton tendremos:

$$a_x = F_x/m = qE/m \Rightarrow a_x = 7,5 \text{ m/s}^2$$

Finalmente, la aceleración resultante vendrá dada por:

$$a_R = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{7,5^2 + 10^2} \quad \therefore \quad a_R = 12,5 \text{ m/s}^2$$

Observación. - La dirección de a_R respecto a la horizontal viene dada por $\theta = 53^\circ$.

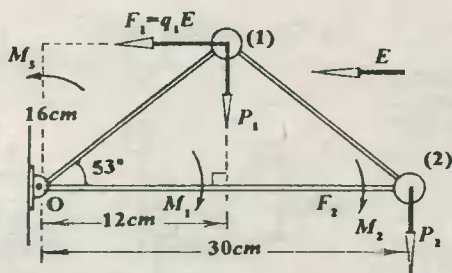


Fig. Solución Prob. 29.45

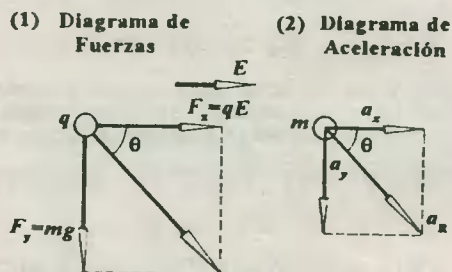


Fig. Solución Prob. 29.46

29.47. A partir de los DCL indicados, diremos que cada esferilla experimenta una aceleración a causa del mismo campo que los moviliza en direcciones contrarias y al encuentro. Aplicando la Segunda Ley de Newton tenemos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{F_1/m}{F_2/m} = \frac{q_1 E}{q_2 E} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{1 \mu\text{C}}{2 \mu\text{C}}$$

$$\Rightarrow a_1/a_2 = 1/2 \dots (1)$$

Y reconociendo que las esferillas experimentan MRUV, diremos que los espacios recorridos están relacionados del siguiente modo:

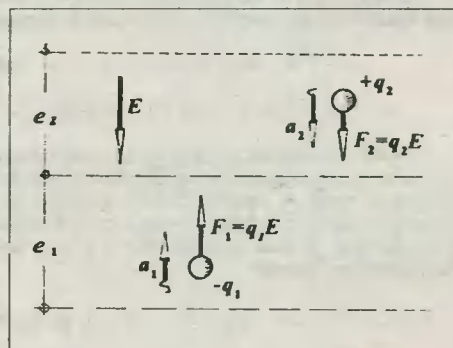
$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{1/2 a_1 t^2}{1/2 a_2 t^2} = \frac{a_1}{a_2} \dots (2)$$

Luego, de (1) en (2): $e_1/e_2 = 1/2$; y ya que $e_1 + e_2 = 6 \text{ cm}$, finalmente encontramos:

$$e_1 = 2 \text{ cm}, e_2 = 4 \text{ cm}$$

29.48. Determinemos la aceleración vertical del electrón ($q = e$).

$$a_y = F/m = qE/m \dots (*)$$



Luego, analizando el movimiento vertical (MRUV) encontraremos el tiempo t .

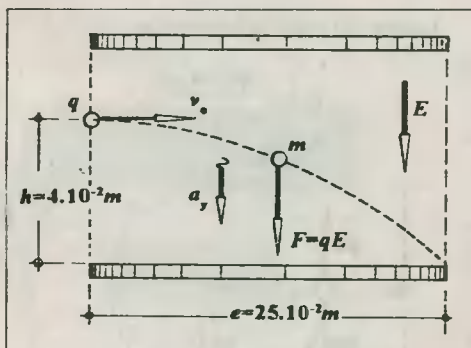
$$h = \frac{1}{2} a_y t^2 \dots (v_{0y} = 0)$$

Y de (*): $t = \sqrt{2hm/qE} \therefore t = 5 \cdot 10^{-10} \text{ s}$

29.48.b. Finalmente, reconocemos que él se desarrolla como un MRU. Por ello:

$$v = elt = 25 \cdot 10^{-2} \text{ m} / 5 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

$$v = 5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$



29.49. Reconocemos que se trata de un movimiento compuesto que se inicia en O y desarrolla en el eje Y una caída libre vertical, y en el eje X un movimiento horizontal que se inicia en A.

a) De la caída libre vertical.- Podemos utilizar las relaciones:

$$h = \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow 20 + L = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2 \therefore L = 25 \text{ m}$$

Asimismo, podemos deducir que en el tramo OA el movimiento duró $t = 2 \text{ s}$, y el tramo AB: $t_2 = 1 \text{ s}$.

b) Del movimiento horizontal.- Calcularemos su aceleración horizontal (a_x) por la relación deducida en el problema anterior.

$$a_x = qE/m = (20 \cdot 10^{-3}) \cdot 400 / 0.4 \Rightarrow a_x = 20 \text{ m/s}^2$$

Asimismo, reconocemos que este movimiento es MRUV con $v_{0x} = 0$. Luego, de la relación:

$$d = \frac{1}{2} a_x t_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1^2 \therefore d = 10 \text{ m}$$

29.50. A partir de la figura dada notamos que sobre la partícula cargada se ejercen tres fuerzas durante todo su movimiento: la fuerza eléctrica debido al campo (qE), el peso (mg) y la tensión de la cuerda (T). De ellas, sólo la última no hace ningún trabajo, por ser siempre perpendicular a la velocidad instantánea. Luego, utilizando la relación (18.5) para el desplazamiento de A hacia B tendremos:

$$F_R \cdot d_{AB} = E_c^B - E_c^A \Rightarrow (mg - qE) \cdot 2R = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) \dots (1)$$

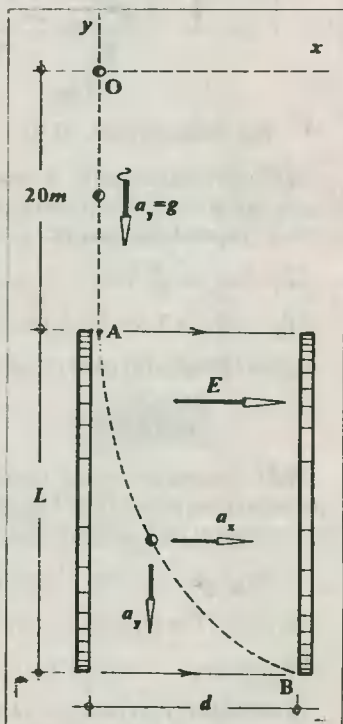
Y aplicando el criterio de fuerza centrípeta en el punto B tenemos:

$$m a_c = \Sigma F_{rad} \Rightarrow m v_B^2 / R = T_B + qE - mg \dots (T_B = 10mg) \Rightarrow v_B^2 = (9g + qE/m)R \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) y despejamos v_A obtendremos: $v_A = \sqrt{5(g + qE/m)R}$

29.51. Según la resolución del problema 29.45, toda partícula libre (m) y cargada (q) dentro de un campo eléctrico uniforme (E) experimenta una aceleración: $a = qE/m$. Asimismo, utilizando un observador (O) dentro del carro, diremos que el péndulo se orienta en una posición paralela a la gravedad efectiva del lugar (g_{ef}), la que según la gráfica viene dada así:

$$\vec{g}_{ef} = \vec{g} + (-\vec{a} + q\vec{E}/m)$$



Luego, del triángulo tendremos:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{qE/m + a}{g} \quad \therefore$$

$$\alpha = g \cdot \operatorname{tg} \theta - qE/m$$

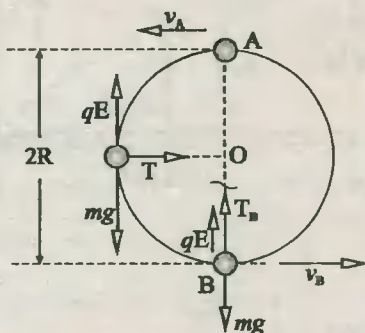


Fig. Solución Prob. 29.50

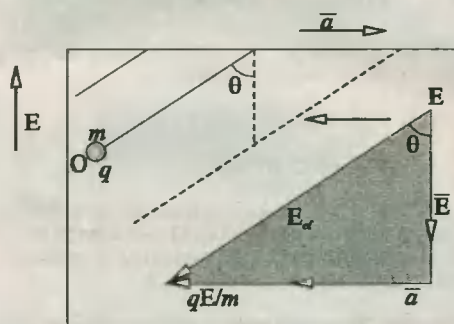


Fig. Solución Prob. 29.51

29.52. En el esquema (a) se muestra el DCL de la masa pendular, y en el esquema (b) el diagrama de aceleración visto por un observador ubicado en Tierra (sistema inercia). Luego, procediendo como se hizo en el problema anterior, aplicaremos la Segunda Ley de Newton en cada eje.

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow qE + mg - T \cos 37^\circ = ma \dots (1)$$

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T \sin 37^\circ = m\omega^2 r \Rightarrow T = 25/4 \text{ N} \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) y los datos restantes, encontramos:

$$\alpha = 4 \text{ m/s}^2$$

29.53. Reconocemos que la partícula (m) cargada (q) experimenta una fuerza (qE) debido al campo eléctrico (E), y en base al DCL indicado diremos que:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T \cos 37^\circ + qE = mg$$

$$\Rightarrow T \cos 37^\circ = mg - qE \dots (1)$$

$$\Sigma F_{\text{rad}} = ma_c \Rightarrow T \sin 37^\circ = m\omega^2 r \dots (2)$$

Dividiendo (2), (1) miembro a miembro tenemos:

$$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{m\omega^2 r}{mg - qE} \Rightarrow \omega = \sqrt{(g - qE/m) \operatorname{tg} 37^\circ / r}$$

$$\therefore \omega = 5 \text{ rad/s}$$

29.54. a. De acuerdo con la 4^{ta} Ley del Péndulo Simple, encontraremos la gravedad efectiva (g_{ef}) que afecta a éste dentro del campo eléctrico. Veamos:

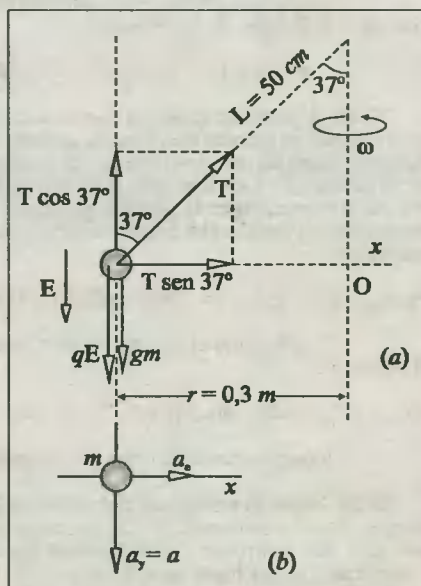


Fig. Solución Prob. 29.52

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_{ef}}{g}} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{g_{ef}}{10 \text{ m/s}^2} \Rightarrow g_{ef} = 12,5 \text{ m/s}^2$$

En seguida utilizamos el diagrama vectorial para las aceleraciones, del cual determinaremos el ángulo ϕ y la intensidad del campo eléctrico (E). Así:

$$\cos\phi = g/g_{ef} = 10/12,5 = 4/5 \quad \therefore \phi = 37^\circ$$

$$Y: qE/m = g \cdot \tan 37^\circ \Rightarrow 3 \cdot 10^{-4} \cdot E / 0,8 = 10 \cdot 3/4 \quad \therefore E = 2 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

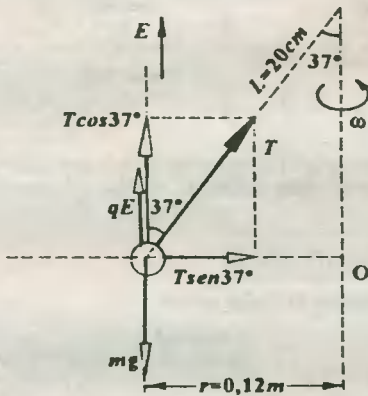


Fig. Solución Prob. 29.53

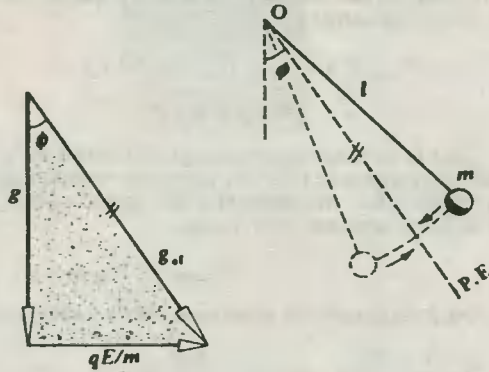


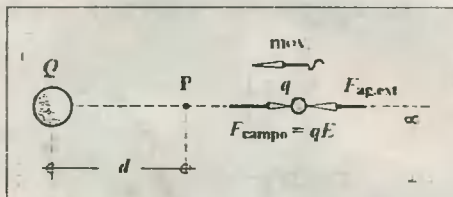
Fig. Solución Prob. 29.54

CAP 30 POTENCIAL ELECTRICO

30.1.a. Por los datos reconocemos que es necesario utilizar la relación (30.1), de donde despejaremos el trabajo del agente externo.

$$W_{\infty \rightarrow P} = q \cdot V_P = (5 \cdot 10^{-4} \text{ C}) \cdot (200 \text{ V})$$

$$\therefore W_{\infty \rightarrow P} = 0,1 \text{ J}$$



30.1.b. Si ahora suponemos que el traslado de la partícula cargada se hizo con velocidad constante, diremos que el campo eléctrico habrá efectuado un trabajo igual en magnitud al del agente externo, pero de signo diferente, debido a la dirección de la fuerza aplicada (qE). Luego:

$$W_{\text{campo}} = -W_{\text{ag. ext}} \quad \therefore W_{\text{campo}} = -0,1 \text{ J}$$

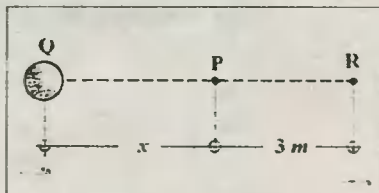
30.2. Igualando las relaciones (30.1) y (30.3) despejamos la carga móvil.

$$k_e \frac{Q}{d} = \frac{W_{\infty \rightarrow P}}{q} \Rightarrow q = \frac{d \cdot W_{\infty \rightarrow P}}{k_e Q} \Rightarrow q = \frac{6.6}{9 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} \quad \therefore q = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C} \text{ ó } q = 5 \mu\text{C}$$

30.3. Empleando la relación (30.3) y aprovechando el esquema adjunto, tenemos:

$$\begin{aligned} *) V_P &= k_e Q/d_P \Rightarrow -6 \cdot 10^3 = 9 \cdot 10^9 Q/x \\ &\Rightarrow Q = -2/3 \cdot 10^{-6} x \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} **) V_R &= k_e Q/d_R \Rightarrow -6 \text{ kV} + 2 \text{ kV} = 9 \cdot 10^9 \frac{Q}{x+3} \\ &\Rightarrow Q = -4/9 \cdot 10^{-6} (x+3) \dots (2) \end{aligned}$$



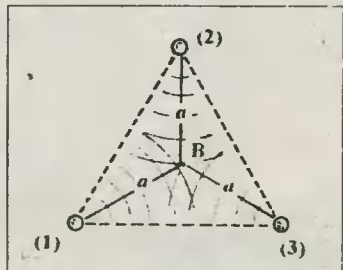
Luego, de (1) y (2) encontramos: $x = 6 \text{ m}; Q = -4 \mu\text{C}$

30.4. Aprovechando la equidistancia del baricentro con relación a los vértices del triángulo equilátero y el Principio de Superposición, tendremos:

$$V_{\text{tot}}^B = V_1^B + V_2^B + V_3^B = k_e(q_1/a + q_2/a + q_3/a)$$

$$\Rightarrow 0 = k_e/a (q_1 + q_2 + q_3) \Rightarrow q_3 = -(q_1 + q_2)$$

$$\Rightarrow q_3 = -[+5 \mu\text{C} + (-6 \mu\text{C})] \quad \therefore q_3 = +1 \mu\text{C}$$



30.5. Calculemos el potencial de M y N por separado utilizando para ello el principio de superposición de potenciales y la relación (30.3). Veamos.

$$V_M = k_e \frac{Q_1}{d_{1M}} + k_e \frac{Q_2}{d_{2M}} = k_e \cdot \frac{2}{1} + k_e \cdot \frac{5}{x+2} \dots (1)$$

$$V_N = k_e \frac{Q_1}{d_{1N}} + k_e \frac{Q_2}{d_{2N}} = k_e \cdot \frac{2}{1+x} + k_e \cdot \frac{5}{2} \dots (2)$$

Luego, utilizando la condición del problema: $V_M = V_N \dots (3)$

Finalmente, reemplazamos (1) y (2) en (3): $2 + \frac{5}{x+2} = \frac{2}{1+x} + \frac{5}{2} \therefore \boxed{x = 3 \text{ m}}$

30.6. En primer lugar encontraremos el potencial que crean las tres cargas en el vértice D, aprovechando para ello el principio de superposición de potenciales.

$$V_D = k_e q_A/a + k_e q_B/a\sqrt{2} + k_e q_C/a = 9 \cdot 10^9 [6 \cdot 10^{-6}/3 + (-9\sqrt{2} \cdot 10^{-6})/3\sqrt{2} + 12 \cdot 10^{-6}/3]$$

$$\Rightarrow V_D = 2,7 \cdot 10^4 \text{ V} \dots (*)$$

A continuación calcularemos el trabajo realizado por el agente externo para trasladar la carga q desde el infinito hasta el punto D, empleando para ello la relación (30.1).

$$W_{\infty \rightarrow D} = q \cdot V_D = (2 \cdot 10^{-4}) \cdot (2,7 \cdot 10^4) \therefore \boxed{W_{\infty \rightarrow D} = 5,4 \text{ J}}$$

30.7. En base al esquema mostrado se determina que la longitud de la diagonal del cubo ($2x$) viene dado así:

$$2x = a\sqrt{3} \Rightarrow x = 3 \text{ m}$$

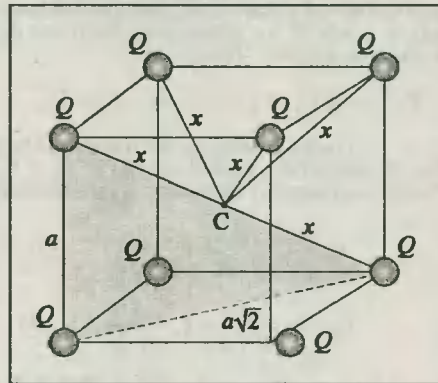
Luego, procedemos a calcular el potencial en el centro (C) del cubo, el cual se obtendrá por el Principio de Superposición de potenciales.

$$V_C = 8k_e Q/x = 8 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-5}/3 \Rightarrow V_C = 1,2 \cdot 10^6 \text{ V}$$

Finalmente, el trabajo realizado por el agente externo vendrá dado por:

$$W_{\infty \rightarrow C} = q \cdot V_C = (2 \cdot 10^{-6}) \cdot (1,2 \cdot 10^6)$$

$$\therefore \boxed{W_{\infty \rightarrow C} = 2,4 \text{ J}}$$



30.8. Utilizando la relación (30.7) encontraremos la diferencia de potencial entre Y y X en base al trabajo realizado por el campo eléctrico. Veamos.

$$V_Y - V_X = \frac{W_{Y \rightarrow X}}{q} \Rightarrow V_Y - 200 \text{ V} = \frac{2 \text{ J}}{-4 \cdot 10^{-3} \text{ C}} \therefore \boxed{V_Y = -300 \text{ V}}$$

30.9. Empleando la relación (30.3) tendremos que la diferencia de potencial entre B y A viene dada así:

$$V_B - V_A = k_e(Q/d_B - Q/d_A) \Rightarrow 600 = 9 \cdot 10^9 \cdot (-5 \cdot 10^{-6}) [1/50 - 1/x]$$

$$\Rightarrow -1/75 = 1/50 - 1/x \therefore \boxed{x = 30 \text{ m}}$$

30.10. Empleando la relación (30.6) despejaremos el trabajo realizado por el agente externo.

$$W_{B \rightarrow A} = q(V_A - V_B) \dots (1)$$

Y para el cálculo de la diferencia de potenciales entre **A** y **B** se recurrirá a la relación (30.3), que nos da el potencial creado por la carga fija (Q) en **A** y **B**, sin tener en cuenta la presencia de la carga móvil. Reconociendo del triángulo dado que: $d_A = 12 \text{ cm}$, $d_B = 16 \text{ cm}$, tenemos:

$$V_A - V_B = k_e(Q/d_A - Q/d_B) = 9 \cdot 10^9 \cdot (80 \cdot 10^{-6}) [1/0,12 - 1/0,16] \Rightarrow V_A - V_B = 1,5 \cdot 10^5 \text{ V} \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1): $W_{B \rightarrow A} = (5 \cdot 10^{-6}) \cdot (1,5 \cdot 10^5) \therefore W_{B \rightarrow A} = 7,5 \text{ J}$

30.11. En primer lugar calcularemos los potenciales de **M** y **N** utilizando el Principio de Superposición de potenciales y la relación (30.3).

$$(*) V_M = k_e Q_1/d_{1M} + k_e Q_2/d_{2M} = 9 \cdot 10^9 (60 \cdot 10^{-6}/2 + 30 \cdot 10^{-6}/5) \Rightarrow V_M = 3,24 \cdot 10^5 \text{ V} \dots (1)$$

$$(**) V_N = k_e Q_1/d_{1N} + k_e Q_2/d_{2N} = 9 \cdot 10^9 (60 \cdot 10^{-6}/6 + 30 \cdot 10^{-6}/1) \Rightarrow V_N = 3,6 \cdot 10^5 \text{ V} \dots (2)$$

A continuación, utilizaremos la relación (30.6) para el cálculo del trabajo realizado por el agente externo al trasladar la carga desde **M** hasta **N**.

$$W_{M \rightarrow N} = q(V_N - V_M) \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3) tendremos:

$$W_{M \rightarrow N} = 5 \cdot 10^{-5} (3,6 - 3,24) \cdot 10^5 \therefore W_{M \rightarrow N} = 1,8 \text{ J}$$

30.12. Analizando la condición del problema, deducimos que el trabajo realizado desde **A** hasta **B** será nulo si y solo si los potenciales eléctricos de dichos puntos son iguales. Veamos:

$$W_{A \rightarrow B} = q(V_B - V_A) = 0 \Rightarrow V_B = V_A \dots (1)$$

Luego, utilizamos el Principio de Superposición de potenciales para el cálculo de V_A y V_B . Recurriendo asimismo al esquema adjunto tendremos:

$$V_A = k_e \frac{Q_1}{6/5 R} + k_e \frac{Q_2}{8/5 R} \dots (2)$$

$$V_B = k_e \frac{Q_1}{R+x} + k_e \frac{Q_2}{R-x} \dots (3)$$

Luego, de (2) y (3) en (1): $\frac{5Q_1}{6R} + \frac{5Q_2}{8R} = \frac{Q_1}{R+x} + \frac{Q_2}{R-x} \Rightarrow \frac{5,33}{6R} + \frac{5,4}{8R} = \frac{33}{R+x} + \frac{4}{R-x}$

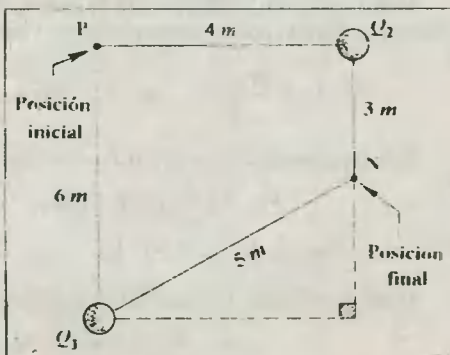
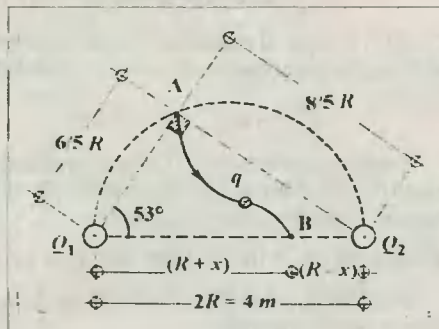
$$\Rightarrow x = R/2 \text{ y } x = 7/15 R \therefore$$

$$x = 1 \text{ m } \wedge x = 0,93 \text{ m}$$

30.13. De acuerdo con la propiedad (30.7) recordamos que el trabajo eléctrico no depende de la trayectoria, sino únicamente de las posiciones inicial y final, vale decir, de los potenciales de partida y de llegada. Empleando entonces la relación (30.6) encontramos el trabajo del agente externo para ir desde **P** hasta **N**, suponiendo una velocidad constante:

$$W_{P \rightarrow N} = q(V_N - V_P) \dots (1)$$

Y del esquema adjunto encontramos que:



$$V_N = k_e Q_1/d_{1N} + k_e Q_2/d_{2N} = 9 \cdot 10^9(30 \cdot 10^{-5}/5 + 12 \cdot 10^{-5}/3) \Rightarrow V_N = 9 \cdot 10^5 V \dots (2)$$

$$V_P = k_e Q_1/d_{1P} + k_e Q_2/d_{2P} = 9 \cdot 10^9(30 \cdot 10^{-5}/6 + 12 \cdot 10^{-5}/4) \Rightarrow V_P = 7,2 \cdot 10^5 V \dots (3)$$

Finalmente, reemplazamos (2) y (3) en (1): $W_{P \rightarrow N} = (5 \cdot 10^{-5}) \cdot (9 - 7,2) \cdot 10^5 \dots$

$$W_{P \rightarrow N} = 9 J$$

30.14. Utilizando el teorema del trabajo y la energía potencial tendremos:

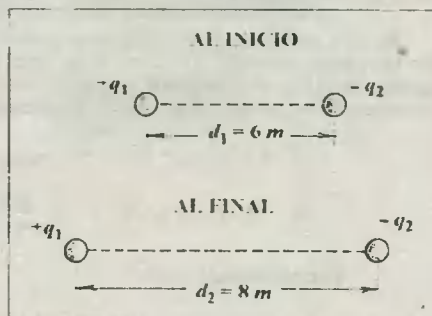
$$W = \Delta U = U_{pe}^f - U_{pe}^i \dots (*)$$

siendo U_{pe}^i y U_{pe}^f las energías potenciales electrostáticas de las cargas, cuyo valor se determinará por medio de la relación (30.9). Entonces, en (*) tendremos:

$$W = k_e q_1 \cdot q_2 / d_f - k_e q_1 \cdot q_2 / d_i = k_e q_1 \cdot q_2 (1/d_f - 1/d_i)$$

$$\rightarrow W = 9 \cdot 10^9 (+ 6 \cdot 10^{-5}) \cdot (- 4 \cdot 10^{-5}) [1/8 - 1/6]$$

$$\therefore W = + 0,9 J$$



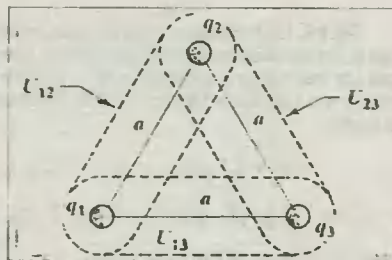
30.15. Utilizando las relaciones (30.8) y (30.10) diremos que el trabajo realizado por el agente externo se determinará a partir de la energía potencial electrostática total (U_{pe}) del sistema de cargas. Así, tendremos lo siguiente:

$$W = U_{pe} = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

$$W = k_e(q_1 \cdot q_2/a + q_1 \cdot q_3/a + q_2 \cdot q_3/a)$$

$$W = 9 \cdot 10^9/9 \cdot 10^{-1} [(4 \cdot 10^{-4}) \cdot (- 2 \cdot 10^{-4}) + (4 \cdot 10^{-4}) \cdot (+ 6 \cdot 10^{-4}) + (- 2 \cdot 10^{-4}) \cdot (+ 6 \cdot 10^{-4})]$$

$$\therefore W = 400 J$$



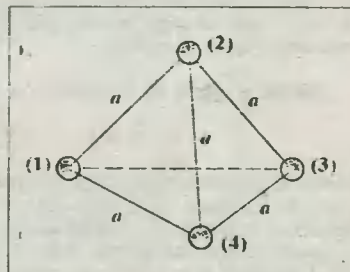
30.16. En base al procedimiento del problema anterior, diremos que:

$$W = U_{pe} = \sum_{i \neq j} U_{ij} \dots (*)$$

Y dado que las cargas (q) son iguales, así como las distancias relativas entre dos cualquiera de ellas, diremos que se cuenta con seis términos en (*):

$$W = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34} = 6 k_e q \cdot q/a$$

$$\Rightarrow W = 6 \cdot 9 \cdot 10^9 (5 \cdot 10^{-5})^2 / 5 \cdot 10^{-1} \therefore W = 270 J$$



30.17. Reconocemos que la energía total de la partícula cargada viene dada por la suma de las energías cinética (E_c) y energía potencial electrostática (U_{pe}) del sistema formado por las dos cargas.

$$\text{A partir del movimiento circular tendremos que: } F_c = \Sigma F_{rad} \Rightarrow m a_c = F_e$$

$$m v^2 / r = k_e |q| \cdot |q| / r^2 \Rightarrow m v^2 = k_e q^2 / r \dots (1)$$

Luego, la energía total vendrá dada por:

$$E_T = E_c + U_{pe} = \frac{1}{2}mv^2 + k_e (+q) \cdot (-q)/r \dots (2)$$

De (1) en (2): $E_T = -\frac{1}{2}k_e \frac{q^2}{r}$

Nota. - Es importante que el lector encuentre el significado del signo menos (-) en el resultado.

30.18. Considerando como sistema al conjunto formado por las cargas, veremos que sobre él no actúa fuerza externa alguna, de modo que podemos aplicar el Principio de Conservación de la Energía. De este modo tendremos lo siguiente:

$$(E_c + U_{pe})_{antes} = (E_c + U_{pe})_{después}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - k_e \frac{qQ}{d} = -k_e \frac{qQ}{d+x}$$

Reemplazando datos:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(14 \cdot 10^{-2}) \cdot 30^2 - 9 \cdot 10^9 \frac{(4 \cdot 10^{-5}) \cdot (6 \cdot 10^{-4})}{6} = -9 \cdot 10^9 \frac{(4 \cdot 10^{-5}) \cdot (6 \cdot 10^{-4})}{6+x} \therefore x = 2 \text{ m}$$

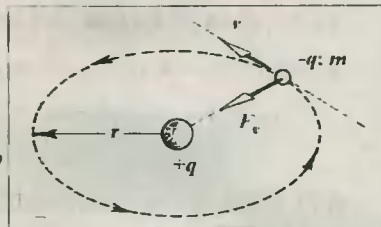
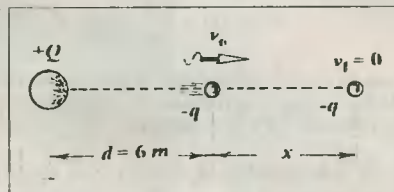


Fig. Solución Prob. 30.17



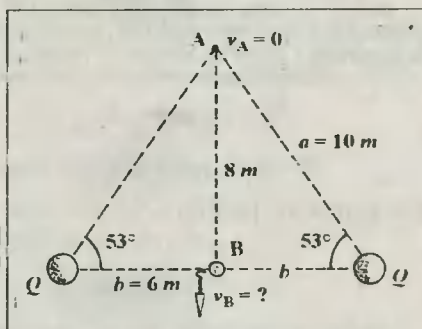
30.19. Utilizando el mismo fundamento del problema anterior elegimos como sistema el conjunto formado por las tres cargas, sobre el cual no actúan fuerzas externas, y por consiguiente se verifica la conservación de la energía.

$$(E_c + \sum U_{pe})_{antes} = (E_c + \sum U_{pe})_{después}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot k_e Q(-q)/a = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2 \cdot k_e Q(-q)/b$$

$$\Rightarrow v_B = 2\sqrt{k_e qQ/m(1/b - 1/a)} \therefore v_B = 120 \text{ m/s}$$

Observación. - El movimiento de la partícula cargada se genera por una atracción electrostática coulombiana, de modo que se experimenta una fuerza resultante y una aceleración variables.



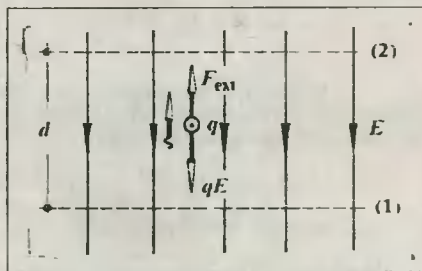
30.20. A partir de la definición tenemos:

$$U_{pe} = W_{12} \dots (*)$$

siendo W_{12} el trabajo realizado por el agente externo para ir del plano de referencia (1) al plano (2) que contiene a la carga, venciendo la fuerza eléctrica del campo. Imaginando que la traslación se hizo lentamente, diremos que la fuerza externa (F_{ext}) equilibra a la fuerza del campo (qE). Luego, de la fórmula del trabajo en (*) tendremos:

$$U_{pe} = F_{ext} \cdot d \cdot \cos 0^\circ \therefore U_{pe} = qEd$$

Observación. - Esta relación es similar a la que conocemos para la energía potencial gravitatoria: $E_{pg} = mgh$.



30.21. Este ejercicio permite relacionar dos campos de diferente naturaleza actuando simultáneamente sobre un mismo cuerpo; éstos son el campo gravitatorio (g) y el campo eléctrico (E), ambos

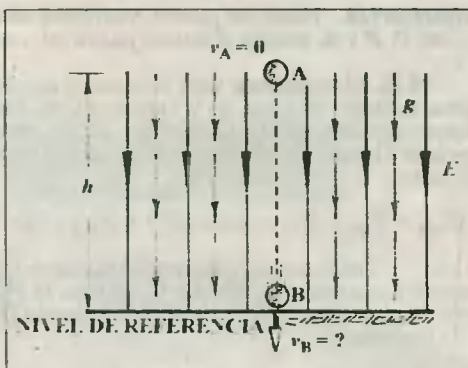
uniformes y paralelos entre sí. Ahora, utilizando el Teorema del Trabajo y la Energía Mecánica con el agregado de la energía potencial electrostática, tenemos:

$$E_{mec}^A + U_{pe}^A = E_{mec}^B + U_{pe}^B$$

$$\Rightarrow [\frac{1}{2} m(0)^2 + mgh] + qEh = [\frac{1}{2} mv_B^2 + mg(0) + qE(0)]$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2(g + qE/m)h} \quad \therefore v_B = 20 \text{ m/s}$$

Observación. - Según la expresión de la velocidad podemos reconocer que la partícula cargada experimenta una aceleración efectiva (g_e) dada por: $g_e = g + qE/m$, donde el primer sumando se debe al campo gravitatorio, y el segundo debido al campo eléctrico.

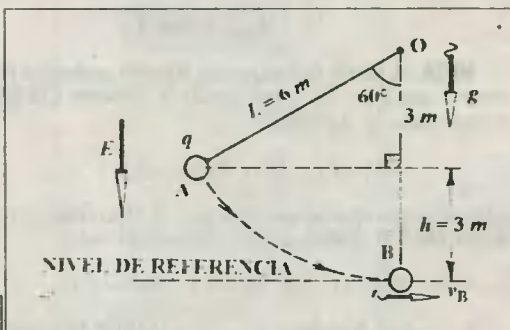


30.22. En base a la solución del ejercicio anterior, y utilizando el esquema adjunto, tenemos:

$$E_{mec}^A + U_{pe}^A = E_{mec}^B + U_{pe}^B$$

$$[\frac{1}{2} m(0)^2 + mgh] + qEh = [\frac{1}{2} mv_B^2 + mg(0) + qE(0)]$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2(g + Eq/m)h} \quad \therefore v_B = 30 \text{ m/s}$$

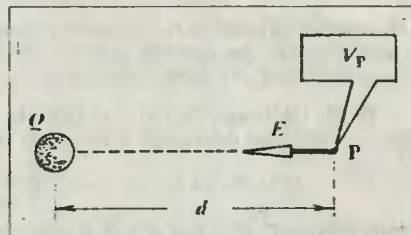


30.23. Utilizando la relación (30.11) encontraremos la distancia del punto P a la carga Q que genera el campo y potencial, para lo cual sólo vamos a utilizar los módulos de ambas magnitudes.

$$V = Ed \Rightarrow d = V/E = 360/40 \Rightarrow d = 9 \text{ m}$$

Luego, del esquema adjunto, y recurriendo a la relación (30.3) para el potencial, encontramos la carga y su signo.

$$V = k_e Q/d \Rightarrow -360 = 9 \cdot 10^9 Q/9 \quad \therefore Q = -3,6 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$



30.24. Empleando la relación (30.12), y reconociendo que los potenciales de los planos P, R y S son tales que $V_P > V_R > V_S$, tendremos lo siguiente:

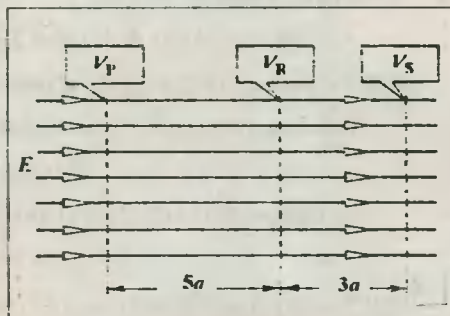
$$V_P - V_R = E \cdot (5a) \dots (1)$$

$$V_R - V_S = E \cdot (3a) \dots (2)$$

Dividiendo (1) ÷ (2) miembro a miembro:

$$\frac{V_P - V_R}{V_R - V_S} = \frac{5}{3} \Rightarrow V_R = \frac{3V_P + 5V_S}{8}$$

$$\therefore V_R = 40 \text{ V}$$



Observación. - Todos los puntos contenidos en los planos perpendiculares a las líneas de fuerza, como P, R y S, poseen el mismo potencial, constituyéndose en planos equipotenciales.

30.25. El trabajo que debe efectuar el agente externo para trasladar la carga q , y venciendo las fuerzas del campo eléctrico, según la trayectoria indicada, se encontrará en base a la relación (30.6) para la diferencia de potencial. Veamos.

$$W_{TOT} = W_{CB} + W_{BA} = q(V_B - V_C) + q(V_A - V_B) \dots (*)$$

Del esquema y de la observación del problema anterior, reconocemos que B y C están en un plano equipotencial; por tanto, $V_B = V_C$. Y de la relación (30.12) en (*) tendremos:

$$W_{TOT} = qEd_{AB} = (5 \cdot 10^{-4} C) \cdot (2 \cdot 10^5 V/m) \cdot (6 m)$$

$$\therefore W_{TOT} = 600 J$$

30.26. A partir del esquema adjunto podemos reconocer que $V_1 > V_2$, y aplicando la relación (30.12) encontramos lo siguiente:

$$V_1 - V_2 = E \Delta x = E(x_2 - x_1)$$

expresión que al multiplicarse por -1 reproduce la relación (30.15). Entonces, reemplazando datos:

$$V_0 - V(x) = E(x - x_0) \Rightarrow V(x) = V_0 - E(x - x_0) \dots (*)$$

$$\Rightarrow V(x) = 50 - 8(x - 2) \therefore V(x) = 66 - 8x$$

Observación. - Según la respuesta, el potencial eléctrico va disminuyendo a medida que la distancia x aumenta, o lo que equivale a decir, que el potencial disminuye si avanzamos en el sentido de las líneas de fuerza del campo eléctrico.

30.27. Utilizando la relación (30.14) encontramos que la intensidad del campo viene dado por:

$$E = - \Delta V / \Delta x = - 24 V / 6 m \therefore E = - 4 V/m$$

Observaciones. - El signo menos de la respuesta nos indica que el sentido del campo es hacia el lado negativo del eje X. Además, del gráfico adjunto podemos decir que: $E = - \operatorname{tg} \alpha = - (- \operatorname{tg} \theta)$.

$$\therefore E = \operatorname{tg} \theta = \text{pendiente de la curva } V\text{-vs-}x$$

30.28. De acuerdo con el esquema se tiene que: $E = V_{AB} / d = 50 / 0.2 \Rightarrow E = 250 \text{ N/C} \dots (1)$

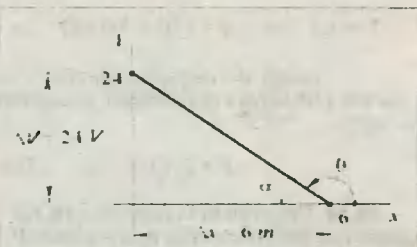
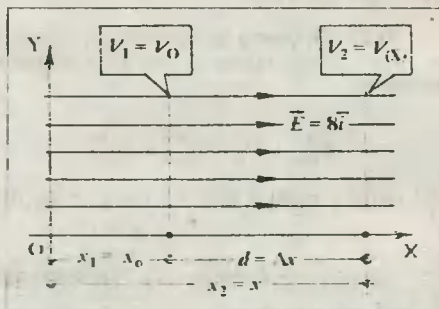
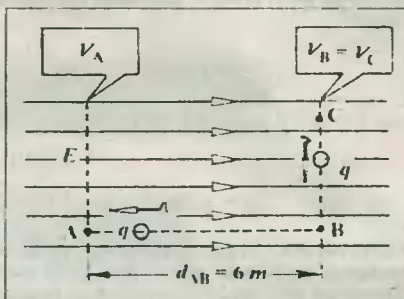
Y en base al triángulo vectorial elaborado gracias al DCL del péndulo, diremos que:

$$\operatorname{tg} \theta = qf / mg \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2), y efectuando operaciones conseguimos que:

$$\operatorname{tg} \theta = 0.75 = 3/4 \therefore \theta = 37^\circ$$

30.29. Siendo e el módulo de la carga del electrón, y utilizando la figura encontraremos la energía



cinética (E_{cA}) del mismo al llegar a la placa positiva (A) en base al Teorema del Trabajo y la Energía Cinética. Veamos.

$$W_{\text{campo}} = \Delta E_c \Rightarrow F_e \cdot d = E_{cA} - E_{cB} \Rightarrow eEd = E_{cA} - \frac{1}{2} m(0)^2, \text{ donde: } Ed = V_A - V_B = V$$

$$\Rightarrow E_{cA} = eV \quad \therefore \boxed{E_{cA} = 182 \text{ eV}}$$

Luego, de esta relación deducimos la velocidad final del electrón (v_A).

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = eV \Rightarrow v_A = \sqrt{2eV/m} \Rightarrow v_A = \sqrt{2 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 182 / 9,1 \cdot 10^{-31}} \quad \therefore \boxed{v_A = 8 \cdot 10^6 \text{ m/s}}$$

Observación.- La energía se ha expresado en electrón-voltio (eV), que equivale a $1,6 \cdot 10^{-19}$ J.

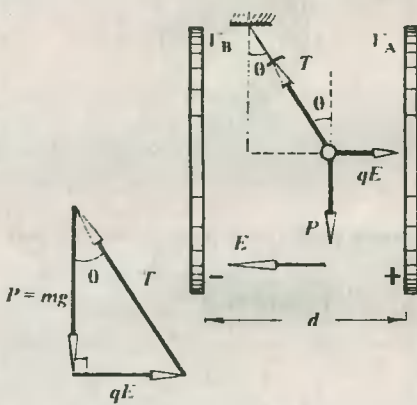


Fig. Solución Prob. 30.28

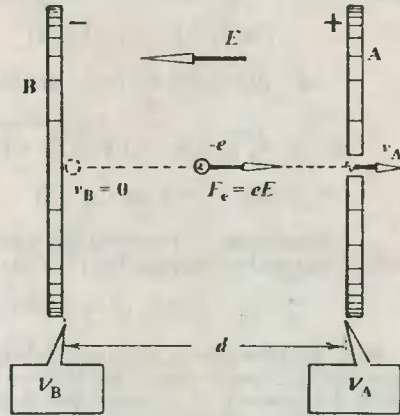


Fig. Solución Prob. 30.29

30.30. Utilizando la relación (30.13) podemos encontrar el radio de la esfera.

$$R = V/E = 2,4 \cdot 10^5 / 8 \cdot 10^5 \quad \therefore \boxed{R = 0,3 \text{ m}}$$

Y ahora, utilizamos la relación (30.4), que nos permite calcular el potencial de la esfera, asumiendo para ello que toda la carga se encuentra concentrada en el centro de aquella.

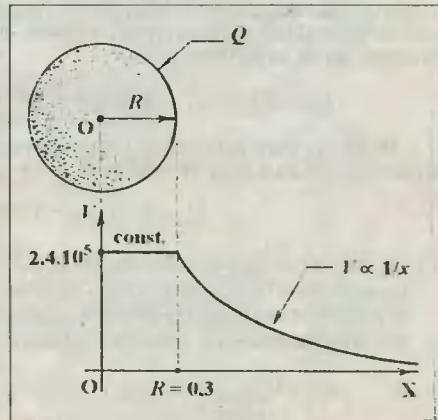
$$V = k_e Q/r \Rightarrow Q = V_R/k_e = 2,4 \cdot 10^5 \cdot 0,3 / 9 \cdot 10^9$$

$$\therefore \boxed{Q = 8 \cdot 10^{-6} \text{ C u } 8 \mu\text{C}}$$

30.31. Para construir el gráfico V -vs- x dividiremos el espacio en dos zonas: El interior de la esfera y su exterior. La primera de ellas queda definida en el eje X por $0 \leq x \leq R$, y la segunda por $x > R$.

a) $0 \leq x \leq R$.- En esta zona el potencial eléctrico es el mismo en todo el interior y superficie de la esfera, cuyo valor viene dado por:

$$V = k_e Q/R \quad \therefore \boxed{V = 2,4 \cdot 10^5 \text{ V}}$$



b) $x > R$ - A partir de la superficie de la esfera hacia afuera el potencial tiene un valor que viene dado por la relación (30.3), considerando que en esta zona toda la carga de la esfera está en su centro.

$$V = k_e Q/x \quad \therefore \quad V = 7,2 \cdot 10^4/x$$

30.32. En primer lugar calculemos la carga Q_3 de la gota que se forma de la unión de las otras dos utilizando el principio de conservación de la carga eléctrica.

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ C} \dots (1)$$

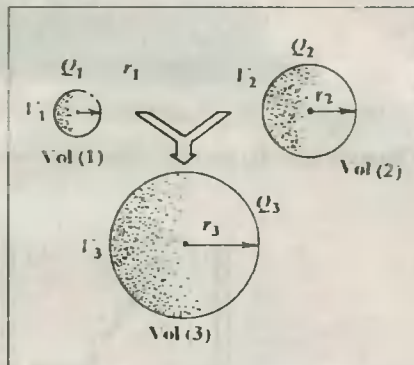
Seguidamente calcularemos el radio r_3 de la gota mayor, usando para ello la relación existente entre los volúmenes.

$$\text{Vol}(3) = \text{Vol}(1) + \text{Vol}(2)$$

$$\Rightarrow 4/3 \pi r_3^3 = 4/3 \pi r_1^3 + 4/3 \pi r_2^3$$

$$\Rightarrow r_3 = \sqrt[3]{r_1^3 + r_2^3} = 3 \sqrt[3]{(\sqrt[3]{12})^3 + (\sqrt[3]{15})^3}$$

$$\Rightarrow r_3 = 3 \text{ cm} \dots (2)$$



Finalmente, el potencial eléctrico de la gota formada vendrá dada por la relación (30.4), y con los resultados obtenidos en (1) y (2) tendremos:

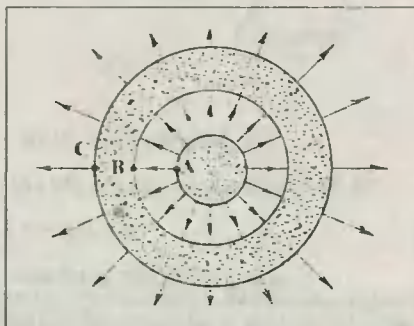
$$V_3 = k_e Q_3/r_3 = 9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-8}/3 \cdot 10^{-2} \quad \therefore \quad V_3 = 18 \text{ kV}$$

30.33. a. Del esquema mostrado podemos decir que el número de líneas de fuerza que llegan a la superficie interior del cascarón es el mismo que el que sale de la esfera. Luego, si asumimos que cada línea de fuerza es reproducida por una carga, entonces concluimos que la carga inducida en la superficie indicada es igual a la carga de la esfera, pero de signo contrario.

$$Q_{\text{ind}} = -Q \quad \therefore \quad Q_{\text{ind}} = -5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

30.33. b. De acuerdo con el Principio de Conservación de la Carga, el cascarón se encontraba inicialmente descargado. Por consiguiente, la carga en su superficie exterior debe ser igual, pero de signo contrario, que la que se presenta en su superficie interior.

$$Q_{\text{ext}} = +Q \quad \therefore \quad Q_{\text{ext}} = +5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$



30.34. a) Para calcular el potencial en C bastará con reconocer la carga existente sobre la superficie del cascarón, el cual es $Q_{\text{ext}} = +Q$. Luego, por la relación (30.4) tendremos:

$$V_C = k_e Q_{\text{ext}}/c = 9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-9}/0,9 \quad \therefore \quad V_C = 50 \text{ V}$$

b) Aprovechando la propiedad de que el potencial es uniforme dentro de un conductor, diremos que la carga superficial (externa) del cascarón crea sobre B un potencial igual a V_C , pero además sobre él se induce un potencial debido a la presencia de la carga $+Q$ en la esfera interior. Así entonces, por superposición de potenciales tendremos:

$$V_B = V_{\text{cascarón}} + V_{\text{inducido}} = k_e Q/c + k_e Q/b = k_e Q(b+c)/bc \quad \therefore \quad V_B = 125 \text{ V}$$

(propio)

c) Para el cálculo del potencial en A procederemos como en el paso (b).

$$V_A = V_{\text{esfera}} + V_{\text{inducido}} = k_e Q/a + k_e Q/c = k_e Q(a+c)/ac \quad \therefore V_A = 200 \text{ V}$$

30.35. Según los resultados del problema anterior podemos hacer los siguientes análisis:

a) $0 \leq x \leq 0,3 \text{ m}$ - En esta zona el potencial es uniforme y a su vez el más alto. Luego, su valor viene dado por:

$$V_1 = 200 \text{ V}$$

b) $0,3 \text{ m} \leq x \leq 0,6 \text{ m}$ - En esta zona comprendida entre la esfera y el cascarón el potencial viene dado por la relación:

$$V = V_{\text{propio}} + V_{\text{cascarón}} = k_e Q/x + k_e Q/c$$

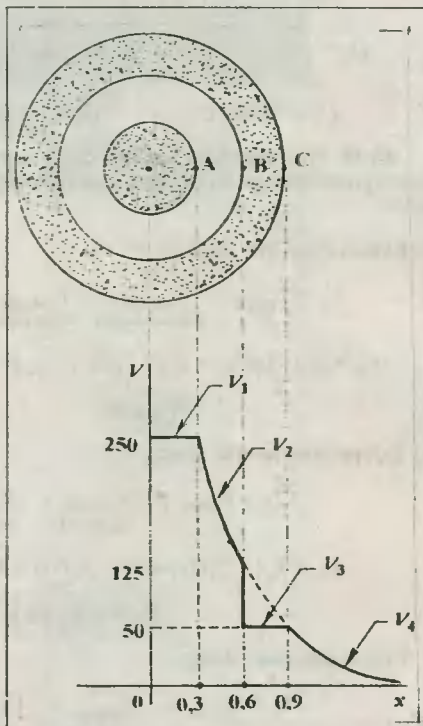
$$\therefore V_2 = 45/x + 50$$

c) $0,6 \text{ m} \leq x \leq 0,9 \text{ m}$ - En esta zona el potencial experimenta una brusca caída en $x = 0,6 \text{ m}$, y toma su valor constante hasta $x = 0,9 \text{ m}$, que corresponde al interior del cascarón.

$$\therefore V_3 = 50 \text{ V}$$

d) $x \geq 0,9 \text{ m}$ - En esta zona el potencial viene dado por:

$$V_4 = k_e Q/x = 45/x$$



30.36. Calculemos los potenciales de cada cuerpo por separado.

a) **Del cascarón.** - Tendremos un potencial propio debido a su carga Q y otro potencial debido a la carga q de la esfera interior, generada a la distancia $d = R$.

$$V_R = V_{\text{propio}} + V_{\text{inducido}} = k_e Q/R + k_e q/R \dots (1)$$

b) **De la esfera.** - Su potencial viene dado por la superposición de los potenciales creados por su propia carga q y el que ocupa dentro del cascarón.

$$V_r = V_{\text{propio}} + V_{\text{inducido}} = k_e q/r + k_e Q/R \dots (2)$$

Luego, la diferencia de potencial entre la esfera y el cascarón viene dado por:

$$\Delta V = V_r - V_R \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3): $\Delta V = k_e q(1/r - 1/R)$

30.37. Sean Q_1 y Q_2 las cargas de la esfera y del cascarón respectivamente. La primera se mantiene gracias a la inducción que le ofrece el cascarón metálico. Sin embargo, por estar conectada a Tierra, su potencial total deberá ser nulo. Entonces, utilizando las relaciones deducidas para los potenciales en el problema anterior, tendremos:

Para el cascarón: $V_o = k_e Q_1/R + k_e Q_2/R \dots (1)$

Para la esfera: $0 = k_e Q_1/r + k_e Q_2/R \dots (2)$

Resolviendo (1) y (2) encontramos que:

$$Q_1 = \frac{V_o}{k_e} \left(\frac{Rr}{R-r} \right) \quad \therefore \quad Q_1 = +2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Y: $Q_2 = -(R/r) Q_1 \quad \therefore \quad Q_2 = -6 \cdot 10^{-8} \text{ C}$

30.38. Procediendo del mismo modo como se hizo en los problemas anteriores, por superposición tendremos:

a) Esfera exterior: Radio = $3r$

$$V_{3r} = V_{\text{propio}} + V_{\text{inducido esfera intermedia}} + V_{\text{inducido esfera interior}}$$

$$V_{3r} = k_e (-3q/3r) + k_e (+2q/3r) + k_e (+q/3r)$$

$$\therefore \quad V_{3r} = 0$$

b) Esfera intermedia: Radio = $2r$

$$V_{2r} = V_{\text{propio}} + V_{\text{inducido cascarón (3r)}} + V_{\text{inducido esfera interior}}$$

$$V_{2r} = k_e (+2q/2r) + k_e (-3q/3r) + k_e (+q/2r)$$

$$\therefore \quad V_{2r} = \frac{1}{2} k_e q/r$$

c) Esfera interior: Radio = r

$$V_r = V_{\text{propio}} + V_{\text{inducido cascarón intermedio}} + V_{\text{inducido cascarón exterior}}$$

$$V_r = k_e q/r + k_e (2q/2r) + k_e (-3q/3r) \quad \therefore \quad V_r = k_e q/r$$

30.39. En base a las relaciones establecidas en el problema 30.36, y considerando que el potencial del cascarón es $V_2 = 0$ debido a su conexión a Tierra, tendremos:

Del cascarón: $0 = k_e Q_1/R_2 + k_e Q_2/R_2 \dots (1)$

De la esfera: $V_1 = k_e Q_1/R_1 + k_e Q_2/R_2 \dots (2)$

Restando miembro a miembro (2) - (1) encontramos: $V_1 = k_e Q_1(1/R_1 - 1/R_2) \dots (*)$

Pero, por condición del problema, se sabe que la esfera interior presenta un potencial propio V_o debido a su carga (Q_1). Luego, se deberá cumplir que:

$$V_o = k_e Q_1/R_1 \Rightarrow k_e Q_1 = V_o R_1 \dots (**)$$

Reemplazando (**) en (*): $V_1 = V_o(1 - R_1/R_2) \quad \therefore \quad V_1 = 150 \text{ V}$

30.40. Sobre la base del esquema presentado en la solución del problema 30.33, diremos que la carga de la esfera queda neutralizada por la carga inducida en la superficie interior del cascarón

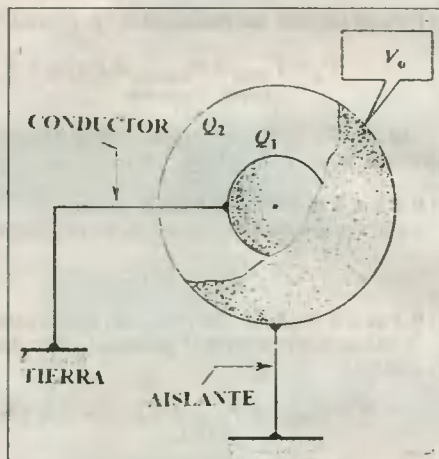
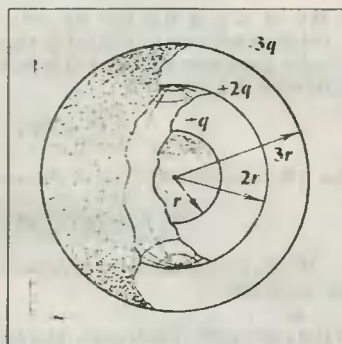


Fig. Solución Prob. 30.37



cuando entre ellos se conecta el alambre conductor. Así pues, tanto la esfera como la superficie interior del cascarón quedan descargados, quedando en el cascarón la carga inicialmente inducida en su superficie e igual a la que tenía la esfera. Finalmente, el potencial de todo el espacio interior del cascarón presenta un único potencial, siendo el potencial de la esfera igual a:

$$V = k_e Q_1 / R_2, \text{ donde } k_e Q_1 = V_o R_1 \Rightarrow V = V_o R_1 / R_2 \quad \therefore \boxed{V = 50 \text{ voltios}}$$

Observación. - Toda la carga inicial de la esfera pasó al cascarón metálico que lo cubre y a través del contacto interno, fenómeno de descarga conocido como **juula de Faraday**.

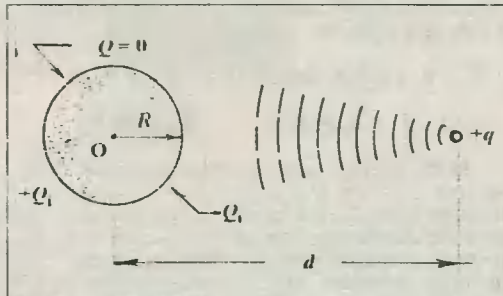
30.41. El potencial de la esfera se encontrará a partir del Principio de Superposición.

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{propio}} + V_{\text{inducido}}$$

$$V_{\text{esfera}} = k_e Q / R + k_e Q / d \dots (Q = 0)$$

$$\Rightarrow V_{\text{esfera}} = k_e q / d \quad \therefore V_{\text{esfera}} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ V}$$

Observación. - Sobre la esfera se presenta una distribución irregular de cargas inducidas de iguales magnitudes, pero de signos contrarios Q_1 , de modo que su carga neta es nula.

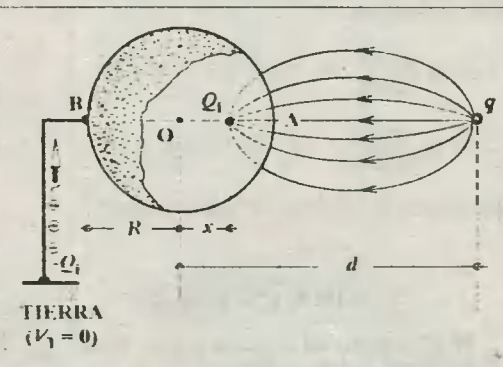


30.42.a. Al conectar la esfera con Tierra, ella descarga la carga positiva inducida por q hasta antes de la conexión, de modo que su potencial final es nulo como el de Tierra. Luego, procediendo del mismo modo que en el problema anterior, tendremos:

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{propio}} + V_{\text{inducido}}$$

$$0 = k_e Q_1 / R + k_e q / d$$

$$\Rightarrow Q_1 = -q R / d \quad \therefore \boxed{Q_1 = -5 \mu\text{C}}$$



30.42.b. Para el cálculo de la posición (x) de la carga imagen Q_A , observamos la simetría de las líneas de fuerza, y de ello concluimos que Q_1 se ubica en la recta que pasa por el centro O y la carga q . Calculando el potencial del punto A de la esfera podremos encontrar el valor de x . Veamos.

$$V_A = k_e \frac{Q_1}{R-x} + k_e \frac{q}{d-R} = 0 \Rightarrow Q_1 = -q \frac{R-x}{d-R}$$

Igualando esta expresión con la conseguida en el paso (a) encontramos:

$$-q \frac{R-x}{d-R} = -q \frac{R}{d} \Rightarrow x = \frac{Rd}{d} \quad \therefore \boxed{x = 0,03 \text{ m}}$$

30.43. Reconociendo que las cargas imagenes $+Q_1$ y $-Q_1$ se ubican simétricamente respecto al centro O de la esfera, entonces la fuerza neta sobre ella estará dada por:

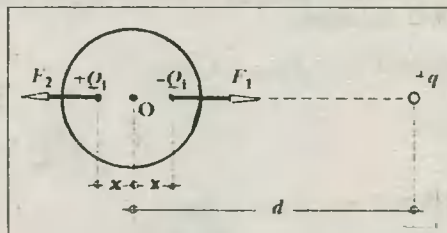


Fig. Solución Prob. 30.43

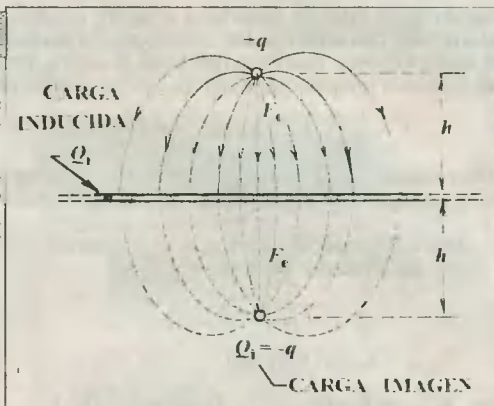
$$F_R = F_1 - F_2 = k_e \frac{q|Q_1|}{(d-x)^2} - k_e \frac{q|Q_1|}{(d+x)^2}$$

$$\Rightarrow F_R = k_e q |Q_i| \frac{4dx}{(d^2 - x^2)^2} \quad \therefore F_R \approx 10^2 \text{ N}$$

30.44. Del esquema podemos asegurar que la carga Q_i inducida sobre la placa conductora se distribuye de manera tal que si imaginamos a dicha carga colocada a la misma distancia (h) de la placa, observaremos que la estructura del campo eléctrico sería exactamente el mismo. Luego, la fuerza eléctrica (F_e) entre q y Q_i vendrá dada por la Ley de Coulomb.

$$F_e = k_e q |Q_i| / d^2, \text{ donde: } Q_i = -q, \text{ y } d = 2h$$

$$\Rightarrow F_e = k_e q^2 / 4h^2 \quad \therefore F_e = 90 \text{ N}$$



30.45. En este caso las cargas imagenes son tres: $Q_{i1} = -q$, $Q_{i2} = -q$, y $Q_{i3} = +q$, que ubicados según la disposición indicada en el esquema desarrollan fuerzas cuya acción simultánea es exactamente la misma que ofrecen las cargas inducidas sobre las placas conductoras infinitas. De acuerdo con la Ley de Coulomb tendremos:

$$F_1 = k_e \frac{q |Q_{i1}|}{(2a)^2} \Rightarrow F_1 = F_2 = \frac{1}{4} k_e q^2 / a^2$$

$$F_3 = k_e \frac{q |Q_{i3}|}{(2\sqrt{2}a)^2} \Rightarrow F_3 = \frac{1}{8} k_e q^2 / a^2$$

Finalmente, la resultante vendrá dada por:

$$F_R = \sqrt{2} F_1 - F_3$$

$$\therefore F_R = \frac{1}{8} k_e q^2 / a^2 (2\sqrt{2} - 1)$$

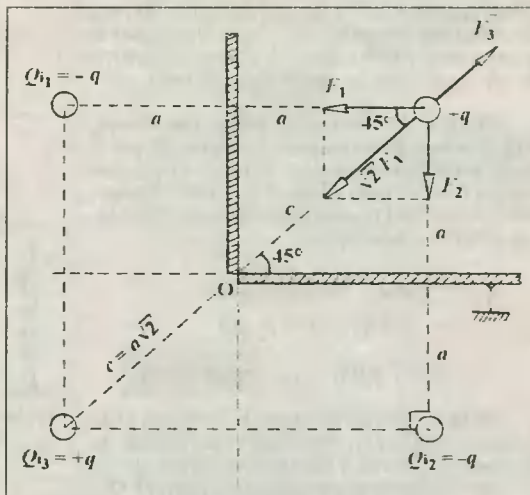


Fig. Solución Prob. 30.45

30.46. A partir del esquema y de los datos del problema podemos decir que:

$$\Sigma Q_{\text{final}} = \Sigma Q_{\text{inicial}} \Rightarrow Q_{1f} + Q_{2f} = Q \dots (1)$$

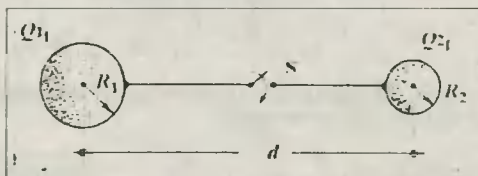
Asimismo, utilizando el Principio de Superposición de potenciales y lo visto en el problema 30.41 tendremos:

Esfera 1: $V_{1f} = V_{\text{propio}} + V_{\text{inducido por (2) en (1)}}$

$$\Rightarrow V_{1f} = k_e \frac{Q_{1f}}{R_1} + k_e \frac{Q_{2f}}{(d + R_1 + R_2)} \dots (2)$$

Esfera 2: $V_{2f} = V_{\text{propio}} + V_{\text{inducido por (1) en (2)}}$

$$\Rightarrow V_{2f} = k_e \frac{Q_{2f}}{R_2} + k_e \frac{Q_{1f}}{(d + R_1 + R_2)} \dots (3)$$



A continuación, diremos que luego de cerrar el interruptor (S) existe un paso de cargas de una esfera a otra hasta que éstas logran equilibrar (igualar) sus potenciales eléctricos, única causa para el movimiento de las cargas. Entonces, igualando las expresiones (2) y (3), y simplificando términos, encontramos:

$$\frac{Q_{1f}}{Q_{2f}} = \frac{R_1(d + R_1)}{R_2(d + R_2)} \dots (*)$$

Finalmente, reemplazando valores y resolviendo las ecuaciones (1) y (*) obtenemos:

$$Q_{1f} = 27 \mu\text{C}; Q_{2f} = 16 \mu\text{C}$$

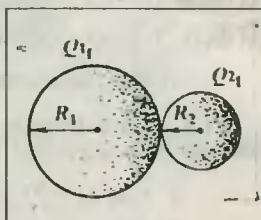
30.47. Para resolver este problema basta con analizar la relación (*) obtenida en el problema anterior, en donde al hacer $d = 0$ satisfacemos la condición de contacto solicitada en el enunciado. Así pues, quedará:

$$Q_{1f}Q_{2f} = R_1^2/R_2^2 \Rightarrow Q_{1f}Q_{2f} = 9/4 \dots (1)$$

Y sabiendo que ahora : $Q_{1f} + Q_{2f} = 39 \mu\text{C} \dots (2)$

Resolvemos las ecuaciones (1) y (2), obteniendo:

$$Q_{1f} = 27 \mu\text{C}; Q_{2f} = 12 \mu\text{C}$$



CAP 31 CAPACIDAD ELECTRICA

31.1. A partir de la relación (31.1) despejamos la carga (Q) del conductor, y tendremos:

Al inicio: $Q_0 = CV_0 \dots (1)$

Al final: $Q_0 + \Delta Q = C(V_0 + \Delta V) \dots (2)$

Luego, reemplazando (1) en (2) obtenemos: $Q_0 = (\Delta Q / \Delta V) V_0 \quad \therefore \quad Q_0 = 40 \mu C$

31.2. A partir del gráfico notamos que la pendiente de la recta nos da la capacidad del conductor.

$$C = \Delta q / \Delta V = 21 \mu C / 7 V \quad \therefore \quad C = 3 \mu F$$

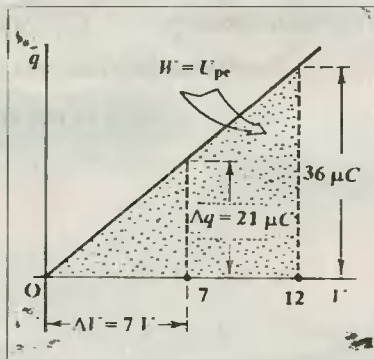
Del mismo gráfico notamos que al calcular el área bajo la curva estaremos encontrando la energía potencial electrostática almacenada en el conductor.

$$U_{pe} = \text{AREA} \Rightarrow U_{pe} = \frac{1}{2} (36 \mu C) \cdot (12 V)$$

$$\therefore \quad U_{pe} = 2,16 \cdot 10^{-4} J$$

Observación. - La energía también pudo calcularse utilizando la relación (31.6).

$$U_{pe} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} (3 \mu F)(12)^2 \quad \therefore \quad U_{pe} = 2,16 \cdot 10^{-4} J$$



31.3. a) Empleando la relación (31.2) para el cálculo de la capacidad de una esfera conductora tendremos:

$$R = k_e C = (9 \cdot 10^9 \text{ m/F})(1 F) \quad \therefore \quad R = 9 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Comentario. - El resultado obtenido nos demuestra que el faradio es una unidad de medida muy grande. Así, al pretender construir una esfera de radio igual al calculado ($9 \cdot 10^6 \text{ km}$), ésta sería enormemente mayor en comparación a la esfera terrestre (aproximadamente $6 \cdot 400 \text{ km}$).

b) Utilizando la relación (31.6) encontramos la energía potencial electrostática almacenada en la esfera.

$$U_{pe} = \frac{1}{2} Q^2 / C = \frac{1}{2} \cdot 20^2 / 1 \quad \therefore \quad U_{pe} = 200 J$$

31.4. Utilizando el resultado del problema 30.36 tendremos:

$$\Delta V = qk_e (1/R_1 - 1/R_2)$$

Y empleando la relación (31.3) tendremos que la capacidad de este condensador viene dado por:

$$C = \frac{q}{\Delta V} \Rightarrow C = \frac{q}{qk_e \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \right)} = \frac{1}{k_e} \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)$$

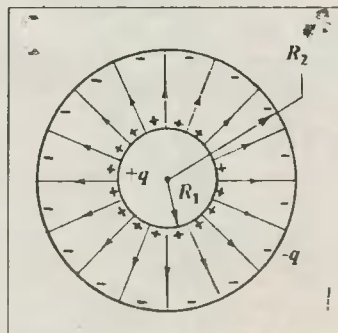


Fig. Solución Prob. 31.4

$$\Rightarrow C = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \left(\frac{6.3}{6-3} \right) \therefore C = 2/3 \cdot 10^{-9} F \text{ o } 2/3 nF$$

31.5.a. El cálculo de la intensidad del campo eléctrico neto (E) se determinará por medio de la relación (30.12).

$$E = V_{ab}/d = 50 V / 5 \cdot 10^{-3} m \therefore E = 1 \cdot 10^4 V/m$$

Debemos reconocer que cada placa contribuye en la creación del campo neto con sus campos propios: $E_1 = E_2 = E/2$.

31.5.b. La capacidad del condensador se obtiene empleando la relación (31.4), siendo el área común de las placas: $A = \pi/10 \cdot (0.09)^2 = 9\pi \cdot 10^{-3} m^2$. Luego:

$$C = \frac{1}{4\pi k_e} \frac{A}{d} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 m/F} \frac{9\pi \cdot 10^{-3} m^2}{5 \cdot 10^{-3} m}$$

$$\therefore C = 5 \cdot 10^{-11} F$$

31.5.c. Para calcular el módulo de la carga (Q) en cada placa utilizaremos la relación (31.3) y el resultado del paso anterior. Veamos:

$$Q = CV = (5 \cdot 10^{-11} F)(50 V)$$

$$\therefore Q = 2.5 \cdot 10^{-9} C, \text{ o } 2.5 nC$$

31.5.d. La densidad superficial de carga eléctrica es una magnitud escalar que nos indica la cantidad de carga que se distribuye en cada unidad de área del conductor. Luego:

$$\sigma = Q/A = 2.5 \cdot 10^{-9} C / 9\pi \cdot 10^{-3} m^2 \therefore \sigma = 8.8 \cdot 10^{-4} C/m^2$$

31.5.e. La fuerza sobre cualquiera de las placas es de igual intensidad y de atracción. Cada placa se encuentra en el campo creado por la otra placa. Luego, por la relación (29.8), la fuerza viene dada por:

$$F = QE/2 = \frac{1}{2} (2.5 \cdot 10^{-9} C)(10^4 N/C) \therefore F = 1.25 \cdot 10^{-5} N$$

31.5.f. Finalmente, la energía almacenada en el condensador viene dada por la relación (31.6).

$$U_{pe} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} (5 \cdot 10^{-11} F)(50 V)^2 \therefore U_{pe} = 6.25 \cdot 10^{-9} J$$

31.6. Del esquema adjunto notamos que las áreas de las placas en el estado final es el cuádruple del que se tiene en el estado inicial. Luego, utilizando la relación (31.4) tendremos:

Al inicio: $C_o = \epsilon_o A_o/d_o \dots (1)$

Al final: $C_f = \epsilon_o \frac{A_f}{d_f} = \epsilon_o \frac{4A_o}{d_o/2} = 8\epsilon_o A_o/d_o \dots (2)$

Y de (1) en (2): $C_f = 8C_o \therefore C_f = 40 \mu F$

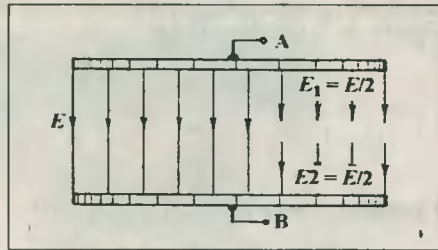


Fig. (1). Solución Prob. 31.5

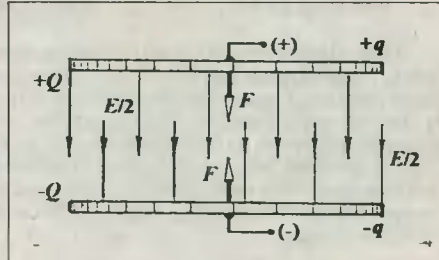
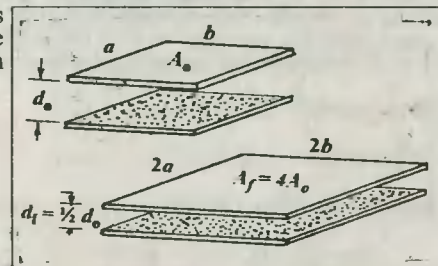


Fig. (2). Solución Prob. 31.5



31.7. Sabemos que si un sistema experimenta una variación en su energía almacenada, ello se deberá al trabajo realizado externamente sobre el sistema. Luego, de la condición del problema tendremos que:

$$W = \Delta U_{pe} = U_{pe}^f - U_{pe}^i \dots (1)$$

donde cada energía potencial electrostática se obtendrá a partir de la relación (31.6).

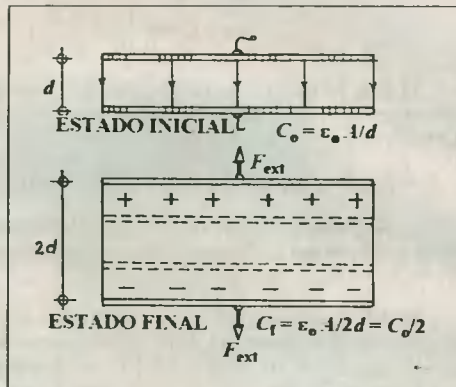
$$U_{pe}^i = \frac{1}{2} Q^2 / C_0 \dots (2)$$

$$U_{pe}^f = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_f} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{(C_0/2)} = 2 \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} \right) \dots (3)$$

Finalmente, reemplazamos (2) y (3) en (1):

$$W = \frac{1}{2} Q^2 / C_0 [2 - 1] = \frac{1}{2} Q^2 / C_0$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} (4 \cdot 10^{-6})^2 / 5 \cdot 10^{-4} \therefore W = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$



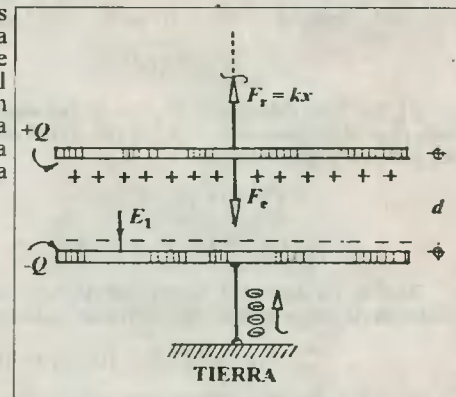
31.8. Al hacer un análisis del fenómeno, observamos que la placa cargada con $+Q$ induce sobre la otra una carga igual a $-Q$, que la absorbe de Tierra, de modo que el sistema se convierte en un condensador, en el cual el campo uniforme (E) provoca una fuerza de atracción (F_e), la que aplicada sobre la placa superior provoca que ésta descienda una distancia x hasta que la fuerza recuperadora del resorte (F_r) logra equilibrar la fuerza eléctrica. Luego:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{dC} = \frac{Q}{d\epsilon_0 A/d}$$

$$\Rightarrow E = Q/\epsilon_0 A \text{ (campo neto)}$$

$$\Rightarrow F_e = QE_1 = QE/2 \Rightarrow F_e = Q^2/2\epsilon_0 A$$

$$\Rightarrow F_e = 2\pi k_e Q^2/A \dots (\epsilon_0 = 1/4\pi k_e)$$



Y del equilibrio: $F_r = F_e \Rightarrow kx = 2\pi k_e Q^2/A \Rightarrow x = 2\pi k_e Q^2/kA \therefore x = 75 \text{ cm}$

31.9. Se sabe que un condensador normalmente cargado es aquel que tiene cargas de igual magnitud, pero de signos contrarios. Entonces, agreguemos a cada placa una carga q para lograr la "normalidad", pero sin alterar el campo original (E), lo que se logra gracias a que los campos (E_1) creados por dichas cargas se compensan entre sí. Ahora, sean Q_N y $-Q_N$ las cargas netas que quedarían en cada placa. Entonces, ellas deberán satisfacer las siguientes relaciones:

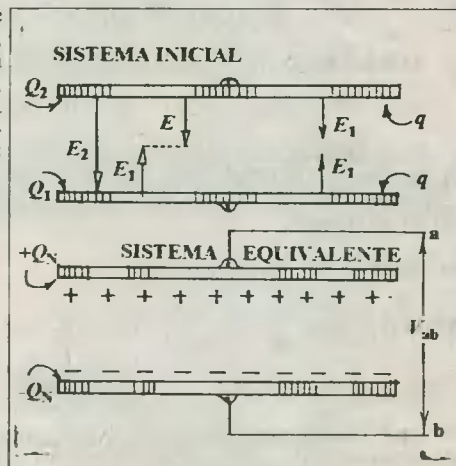
Placa superior: $Q_N = Q_2 + q \dots (1)$

Placa inferior: $-Q_N = Q_1 + q \dots (2)$

Restando miembro a miembro (1) - (2) tendremos:

$$2Q_N = Q_2 - Q_1 \Rightarrow Q_N = \frac{1}{2} (Q_2 - Q_1)$$

Finalmente, de la relación (31.3) encontramos la diferencia de potencial.



$$V_{ab} = \frac{Q_N}{C} = \frac{Q_2 - Q_1}{2C} \therefore V_{ab} = 1 \text{ voltio}$$

31.10. Al analizar el esquema, notamos que el campo (E) es el mismo arriba como abajo, y es creado sólo por la placa metálica, el cual a su vez tiene un valor que viene dado por la relación obtenida en el problema 31.8.

$$E = \frac{Q/2}{\epsilon_0 \cdot l} = \frac{Q}{2\epsilon_0 \cdot l} \dots (*)$$

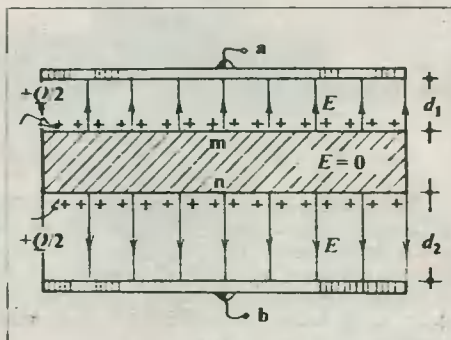
Seguidamente se establecen los cálculos de la diferencia de potencial entre a y m, y, n y b, utilizando para ello la relación (30.12).

- 1) $V_a - V_m = -Ed_1 \dots (1) (V_m > V_a)$
- 2) $V_n - V_b = Ed_2 \Rightarrow V_m - V_b = Ed_2 \dots (2) (V_n = V_m)$

Finalmente, sumamos miembro a miembro (1) + (2): $V_a - V_b = E(d_2 - d_1) \dots (**)$

(*) en (**)

$$V_a - V_b = \frac{Q(d_2 - d_1)}{2\epsilon_0 \cdot l}$$



31.11. El campo neto $E = E_1 - E_2$ en el condensador puede ser interpretado como causa de una carga neta (Q_N) en cada placa, tal como se indica en el esquema (a), y cuyo valor se encontrará en base al resultado del problema 31.9: $Q_N = \frac{1}{2}(Q_2 - Q_1)$.

Sobre la base de este sistema equivalente introducimos la placa, y tal como lo indica el esquema (b), las líneas de fuerza se interrumpen sólo en el interior del conductor. Además, las cargas inducidas en la cara inferior y superior son de igual magnitud, pero de signos diferentes, y de un valor igual a Q_N .

$$\Rightarrow q = Q_N \Rightarrow q = \frac{1}{2}(Q_2 - Q_1)$$

$$\therefore q = 7 \mu C$$

31.12.a. Sabemos que los dieléctricos aumentan la capacidad eléctrica de los condensadores. Así, aplicando la relación (31.5) tendremos que la capacidad final viene dada por:

$$C_d = KC_o = 3(5 \mu F) \therefore C_d = 15 \mu F$$

31.12.b. Haremos el cálculo de las cargas en base a la relación (31.3), siendo el voltaje (V) entre las placas el mismo al inicio como al final del proceso.

En vacío: $Q_o = C_o V = 5 \mu F \cdot 20 V \therefore Q_o = 100 \mu C$

Con dieléctrico: $Q_d = C_d V = KC_o V \Rightarrow Q_d = KQ_o \therefore Q_d = 300 \mu C$

31.12.c. Para el cálculo de la energía potencial eléctrica utilizaremos la relación (31.6).

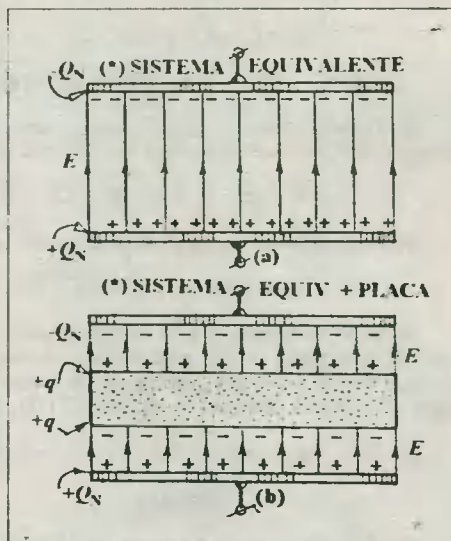


Fig. Solución Prob. 31.11

En vacío: $U_{pe}^i = \frac{1}{2} C_0 V^2 = \frac{1}{2} (5 \cdot 10^{-6} F)(20 V)^2$

$$\therefore U_{pe}^i = 10^{-3} J$$

Con dieléctrico: $U_{pe}^f = \frac{1}{2} C_d V^2 = \frac{1}{2} K C_0 V^2$

$$\Rightarrow U_{pe}^f = K U_{pe}^i \quad \therefore U_{pe}^f = 3 \cdot 10^{-3} J$$

31.12.d. Debemos reconocer que el campo dentro de un condensador depende básicamente de la diferencia de potencial entre sus placas, y como éstas permanecen conectadas en todo momento a la fuente de tensión, diremos que el campo neto es el mismo al inicio (en vacío) como al final (con dieléctrico). Luego:

$$E_f = E_0 \quad \therefore E_f = 2 \cdot 10^5 V/m$$

31.12.e. Utilizando la relación para el campo obtenida en el problema 31.8, diremos que el campo creado sólo por las cargas finales (Q_d) de las placas vendrá dado por:

$$E_d = Q_d / \epsilon_0 A = K Q_0 / \epsilon_0 A$$

$$\Rightarrow E_d = K E_0 \quad \therefore E_d = 6 \cdot 10^5 V/m$$

31.12.f. En base a las líneas de fuerza del campo eléctrico mostradas en el esquema del problema anterior diremos que se verifica la siguiente relación:

$$E_f = E_d - E_i \Rightarrow E_i = E_d - E_f = K E_0 - E_0 \Rightarrow E_i = (K - 1) E_0 \quad \therefore E_i = 4 \cdot 10^5 V/m$$

31.12.g. A partir de la relación obtenida en el paso anterior para el campo E_i , tendremos:

$$Q_i / \epsilon_0 A = (K - 1) Q_0 / \epsilon_0 A \Rightarrow Q_i = (K - 1) Q_0 \quad \therefore Q_i = 200 \mu C$$

31.13.a. En primer lugar debemos reconocer que la carga inicial y final en las placas es la misma durante todo el fenómeno. Asimismo, la capacidad final (C_f) vendrá dada por la relación (31.5).

$$C_f = K C_0 \Rightarrow Q_0 / V_f = K Q_0 / V_0 \quad V_f = V_0 / K$$

$$\therefore V_f = 10 V$$

31.13.b. Ahora, en base a la relación (30.12) podemos encontrar el campo eléctrico final (E_f) usando asimismo el resultado del problema anterior.

$$E_f d = E_0 d / K \Rightarrow E_f = E_0 / K$$

$$\therefore E_f = 3 \cdot 10^4 V/m$$

31.13.c. Según el esquema adjunto, podemos apreciar que los campos eléctricos se relacionan del siguiente modo:

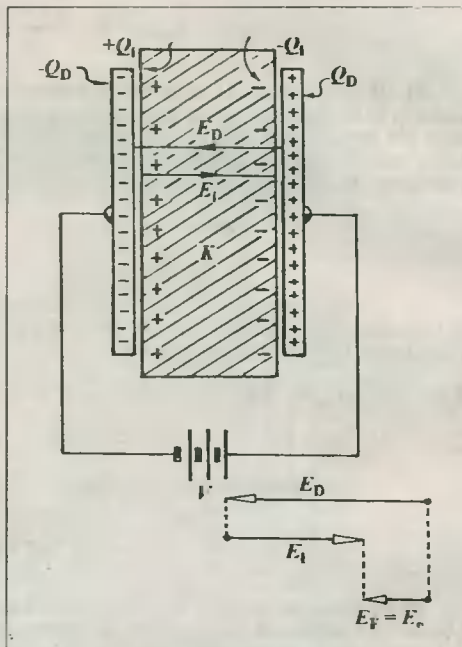
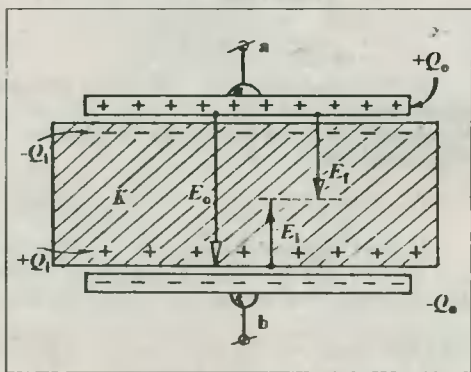


Fig. Solución Prob. 31.12



$$E_f = E_o - E_i \Rightarrow E_i = E_o - E_f \Rightarrow E_i = E_o(1 - 1/K) \therefore E_i = 3 \cdot 10^4 \text{ V/m}$$

31.13.d. Para el cálculo de la carga inducida (Q_i) sobre el dieléctrico utilizaremos la relación de los campos deducida en el paso anterior.

$$E_i = E_o(1 - 1/K) \Rightarrow \frac{Q_i}{\epsilon_o A} = \frac{Q_o}{\epsilon_o A} (1 - 1/K) \Rightarrow Q_i = Q_o(1 - 1/K) \therefore Q_i = 2 \mu\text{C}$$

31.13.e. La energía potencial electrostática (U_{pe}) se calculará utilizando la relación (31.6).

En vacío: $U_{pe}^i = \frac{1}{2} Q_o V_o = \frac{1}{2} (4 \cdot 10^{-6} \text{ C})(20 \text{ V}) \therefore U_{pe}^i = 4 \cdot 10^{-5} \text{ J}$

Con dieléctrico: $U_{pe}^f = \frac{1}{2} Q_d V_d = \frac{1}{2} Q_o V_o / K \Rightarrow U_{pe}^f = U_{pe}^i / K \therefore U_{pe}^f = 2 \cdot 10^{-5} \text{ J}$

31.14. Reconocemos que al cargarse las armaduras, éstas polarizan el dieléctrico, de modo que el sistema adquiere un comportamiento descrito por el esquema adjunto, en la cual los condensadores en vacío (C_1) y con el dieléctrico (C_2) quedan acoplados en serie.

a) Para calcular las capacidades recurrimos a la relación (31.4).

En vacío: $C_1 = \epsilon_o A / d_1 = \epsilon_o ab / d_1$

Con dieléctrico: $C_2 = K \epsilon_o A / d_2 = K \epsilon_o ab / d_2$

Ahora, la capacidad equivalente estará dada por la relación (31.9).

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_o ab} + \frac{d_2}{K \epsilon_o ab} \Rightarrow C_{eq} = \frac{\epsilon_o ab}{(d_1 + d_2/K)} \therefore C_{eq} = 18/7 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

b) Para el cálculo de las cargas Q_1 y Q_2 de cada condensador nos apoyaremos en la relación (31.7), el cual establece que: $Q_{TOT} = Q_1 = Q_2$. Luego, de la relación (31.3):

$$Q_{TOT} = C_{eq} V_{xy} = (18/7 \cdot 10^{-10} \text{ F})(7 \cdot 10^2 \text{ V}) \therefore Q_{TOT} = Q_1 = Q_2 = 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

c) Finalmente, los campos eléctricos E_1 y E_2 en cada condensador vendrán dados por:

$$E_1 = V_1 / d_1 = (Q_1 / C_1) / d_1 = Q_1 / \epsilon_o A \therefore E_1 = 5,1 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

$$E_2 = V_2 / d_2 = (Q_2 / C_2) / d_2 = Q_2 / K \epsilon_o A \Rightarrow E_2 = E_1 / K \therefore E_2 = 1,7 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

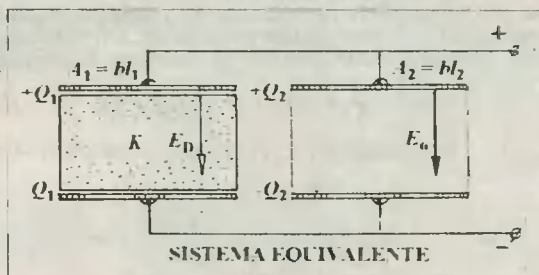
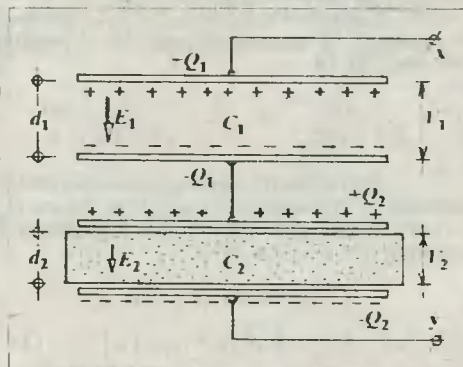
31.15.a. Para el cálculo de las capacidades utilizaremos la relación (31.4).

a) Con dieléctrico: $C_1 = K \epsilon_o A_1 / d = K \epsilon_o b l_1 / d$

a) En vacío: $C_2 = \epsilon_o A_2 / d = \epsilon_o b l_2 / d$

Del sistema equivalente observamos que los condensadores están acoplados en paralelo; por ello recurrimos a la relación (31.13).

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \epsilon_o b (K l_1 + l_2) / d$$



$$\therefore C_{eq} = 1,239 \cdot 10^{-10} F$$

b) Ahora, el campo eléctrico neto en el dieléctrico (E_d) tiene el mismo valor que el campo dentro del condensador en vacío (E_0), dado que en ambos casos las placas experimentan la misma diferencia de potencial (V). Ambos valores se encontrarán a partir de la relación:

$$E_0 = E_d = V/d = 50 V / 5 \cdot 10^{-3} m \quad \therefore E_0 = E_d = 10^4 V/m$$

c) Finalmente, para el cálculo de las cargas eléctricas tendremos:

c₁) En el dieléctrico: $Q_1 = C_1 V \quad \therefore Q_1 = 5,31 nC$ (Carga neta)

c₂) En vacío: $Q_2 = C_2 V \quad \therefore Q_2 = 885 pC$

31.16. En primer lugar debemos tener en cuenta lo expuesto en la relación (31.5), donde $K = \epsilon_r$. A continuación calcularemos la capacidad del condensador en el esquema (1), empleando para ello el resultado del problema 31.14.

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 ab}{d/2 + d/2\epsilon_r} \Rightarrow C_1 = \frac{2\epsilon_0 ab}{(1 + 1/\epsilon_r)d} \quad (1)$$

Seguidamente calculamos la capacidad del condensador en el esquema (2), empleando para el efecto el resultado del problema anterior, teniendo en cuenta que aquí: $l_1 = x$; $l_2 = a - x$.

$$C_2 = \epsilon_0 b/d \cdot [\epsilon_r x + a - x]$$

$$\Rightarrow C_2 = \epsilon_0 b/d \cdot [a + (\epsilon_r - 1)x] \quad (2)$$

Finalmente, atendiendo la condición del problema, igualamos las expresiones (1) y (2).

$$C_1 = C_2 \Rightarrow \frac{2\epsilon_0 \epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \cdot \frac{ab}{d} = \frac{\epsilon_0 b}{d} [a + (\epsilon_r - 1)x] \Rightarrow \frac{2\epsilon_r a}{\epsilon_r + 1} = a + (\epsilon_r - 1)x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{1}{\epsilon_r + 1} \quad \therefore \frac{x}{a} = \frac{1}{5}$$

31.17. Del esquema (1) se tiene que la fuerza entre placas viene dada por:

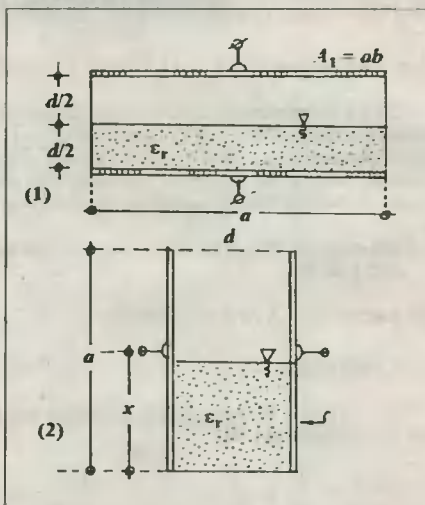
$$F_0 = \frac{1}{2} E_0 Q_0 = \frac{1}{2} (Q_0 / \epsilon_0 A) Q_0 \Rightarrow F_0 = (C_0 V)^2 / 2\epsilon_0 A \quad (1)$$

Ahora, el esquema (2) representa el sistema equivalente que corresponde al condensador con dieléctrico. Aquí haremos uso del resultado obtenido en el problema 31.14 para la capacidad equivalente (C_f), en el cual haremos $A = ab$, y $d_1 = d_2 = d/2$. Asimismo, en este esquema, la carga neta sobre las placas viene dada por Q_f . Entonces, la fuerza final sobre las placas vendrá dada por:

$$F_f = \frac{1}{2} E_f Q_f = \frac{1}{2} (Q_f / \epsilon_0 A) Q_f \Rightarrow F_f = (C_f V)^2 / 2\epsilon_0 A \quad (2)$$

Dividiendo (2) ÷ (1) miembro a miembro tenemos:

$$\frac{F_f}{F_0} = \left(\frac{C_f}{C_0} \right)^2 = \left[\frac{\epsilon_r A}{d/2 + d/2\epsilon_r} \right]^2 \Rightarrow \frac{F_f}{F_0} = \frac{4\epsilon_r^2}{(\epsilon_r + 1)^2} \quad \therefore \frac{F_f}{F_0} = \frac{9}{4}$$



31.18. Del esquema (1) se tiene que la capacidad inicial viene dada por: $C_0 = \epsilon_0 A/d \dots (1)$

Del esquema (2) calcularemos la capacidad equivalente de los condensadores acoplados en paralelo.

$$C_f = C_1 + C_2 = K_1 \frac{\epsilon_0 A/2}{d} + K_2 \frac{\epsilon_0 A/2}{d} \Rightarrow C_f = \frac{\epsilon_0 A}{d} \left(\frac{K_1 + K_2}{2} \right) \dots (2)$$

De (1) y (2) encontramos finalmente que: $C_f = \frac{1}{2} C_0 (K_1 + K_2) \therefore C_f = 12 \mu F$

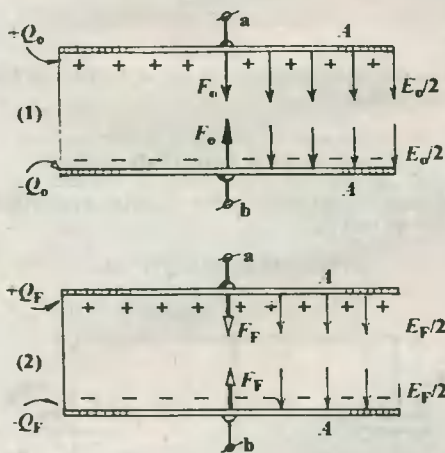


Fig. Solución Prob. 31.17

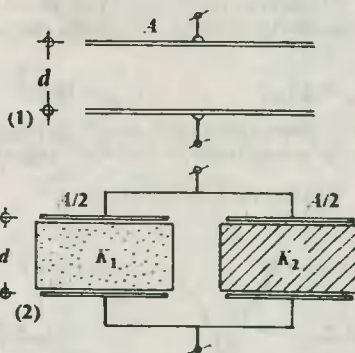


Fig. Solución Prob. 31.18

31.19. Del condensador original, diremos que su capacidad inicial viene dado por: $C_0 = \epsilon_0 A/d$. Ahora, del esquema mostrado se calculará su capacidad equivalente, teniendo en cuenta que se trata de una asociación en serie. Utilizando entonces la relación (31.10) encontramos lo siguiente:

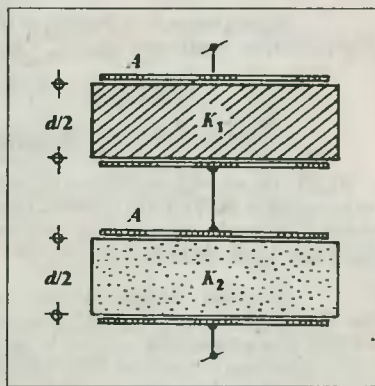
$$C_f = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\left(\frac{K_1 \epsilon_0 A}{d/2} \right) \left(\frac{K_2 \epsilon_0 A}{d/2} \right)}{\frac{K_1 \epsilon_0 A}{d/2} + \frac{K_2 \epsilon_0 A}{d/2}} \Rightarrow C_f = \left(\frac{2K_1 K_2}{K_1 + K_2} \right) \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\Rightarrow C_f = \left(\frac{2K_1 K_2}{K_1 + K_2} \right) C_0 \therefore C_f = 300 \mu F$$

30.20. Cuando el condensador C_1 se encontraba conectado a la batería, acumuló una carga q_0 , cuyo valor viene dado por:

$$q_0 = C_1 \mathcal{E} = (6 \mu F)(5 V) \Rightarrow q_0 = 30 \mu C$$

Ahora, en el esquema adjunto se muestra una redistribución de la carga inicial (q_0) en dos cargas q_1 y q_2 . Así, en virtud del Principio de Conservación de la Carga, se tendrá que:



$$q_1 + q_2 = q_0 \Rightarrow q_1 + q_2 = 30 \mu\text{C} \dots (1)$$

Y reconociendo que la conexión final de los condensadores es en paralelo, entonces se verifica que los voltajes V_1 y V_2 son iguales, tal como lo establece la relación (31.12).

$$V_1 = V_2 \Rightarrow q_1/C_1 = q_2/C_2$$

$$\Rightarrow q_1 = 3/2 q_2 \dots (2)$$

Finalmente, resolviendo (1) y (2):

$$q_1 = 18 \mu\text{C}; q_2 = 12 \mu\text{C}$$

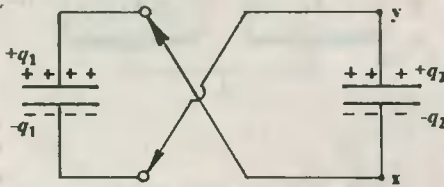
Al cerrar el interruptor S se presenta un arco voltaico (chispazo) lo que se traduce en una fuga de energía del sistema. Haciendo cálculos se encuentra:

$$U_{pe}^I = 27 \mu\text{J} \quad \text{y} \quad U_{pe}^F = 18 \mu\text{J} \quad \therefore$$

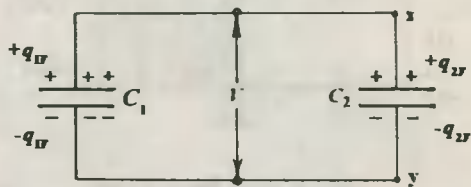
La energía del sistema disminuye

31.21. Podemos reconocer a partir del sistema eléctrico inicial que la carga eléctrica a repartirse entre los dos condensadores está dado por: $q_{TOT} = q_1 - q_2 = 6 \mu\text{C}$

SISTEMA ELECTRICO INICIAL



SISTEMA ELECTRICO FINAL



Seguidamente, al analizar el sistema eléctrico final del mismo modo como se hizo en el problema anterior, tendremos que: $q_{1f} + q_{2f} = 6 \mu\text{C} \dots (1)$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow q_{1f}/C_1 = q_{2f}/C_2 \Rightarrow q_{1f} = 3/2 q_{2f} \dots (2)$$

Y resolviendo (1) y (2): $q_{1f} = 3,6 \mu\text{C}; q_{2f} = 2,4 \mu\text{C}$

31.22. De acuerdo con el esquema (1) se observan tres capacitores: R, S y T, los cuales tienen igual capacidad debido a que cada uno posee las mismas dimensiones, cuyo valor viene dado por: $C = \epsilon_0 A/d$.

Asimismo, podemos reconocer que los capacitores R y S presentan la misma diferencia de potencial en virtud a la polaridad a y c. Por lo tanto, ellos quedan en paralelo, según como se indica en el esquema (2). Luego, la capacidad equivalente entre a y c es igual a $2C$, tal como se ha indicado en el esquema (3).

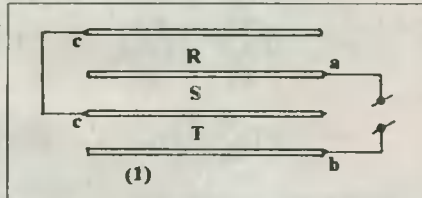


Fig. (1). Solución Prob. 31.22

Finalmente, la capacidad total del sistema viene dado por: $C_{eq} = \frac{2C \cdot C}{2C + C} = \frac{2}{3} C$

$$\therefore C_{eq} = 2/3 \epsilon_0 A/d$$

31.23. Procediendo del mismo modo como se hizo en el problema anterior, tendremos tres capacitores R, S y T, cada uno de capacidad eléctrica $C = \epsilon_0 A/d$. Luego, teniendo en cuenta la regla de los puntos del mismo potencial y los esquemas que se muestran abajo, diremos que la capacidad equivalente entre R y T, por estar éstos en serie es igual a $C/2$.

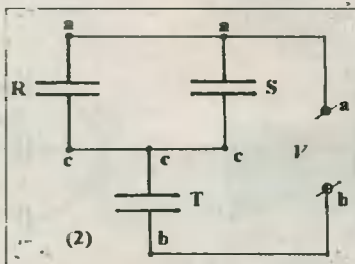


Fig. (2). Solución Prob. 31.22

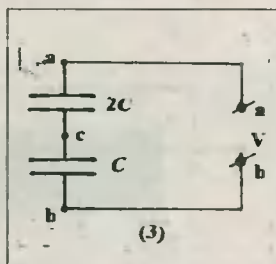
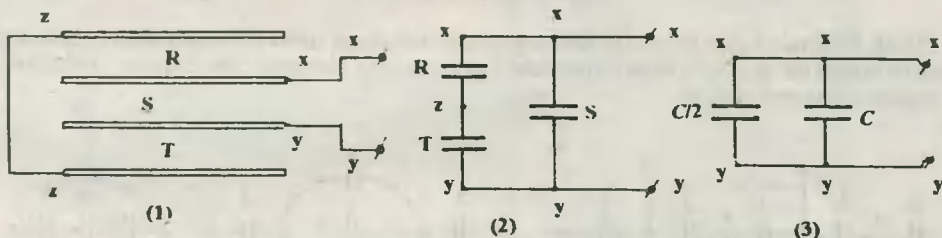


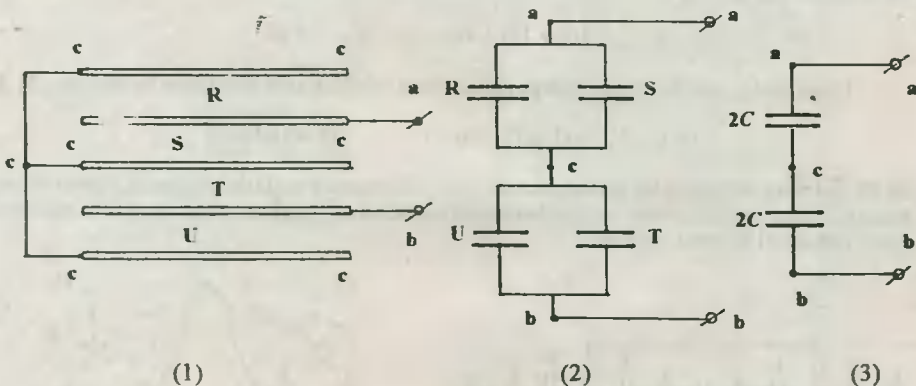
Fig. (3). Solución Prob. 31.22



Finalmente, a partir del esquema (3) diremos que la capacidad total del sistema en paralelo es:

$$C_{eq} = C/2 + C = 3/2 C \quad \therefore \quad C_{eq} = 3/2 \epsilon_0 A/d$$

31.24. Hagamos uso de la regla de los puntos del mismo potencial, y designemos con R, S, T y U a los capacitores cuya capacidad individual es $C = \epsilon_0 A/d$. A continuación se indican los esquemas que señalan el proceso de reducción del sistema capacitivo.



Y del esquema (3): $C_{eq} = \frac{2C \cdot 2C}{2C + 2C} \Rightarrow C_{eq} = C \quad \therefore \quad C_{eq} = \epsilon_0 A/d$

31.25. Utilizando la regla de los puntos deducimos que los condensadores se encuentran en paralelo, tal como se describe en los esquemas que se muestran en la página siguiente.

Finalmente, del esquema (2) encontramos: $C_{eq} = 1 + 2 + 3 \quad \therefore \quad C_{eq} = 6 \mu F$

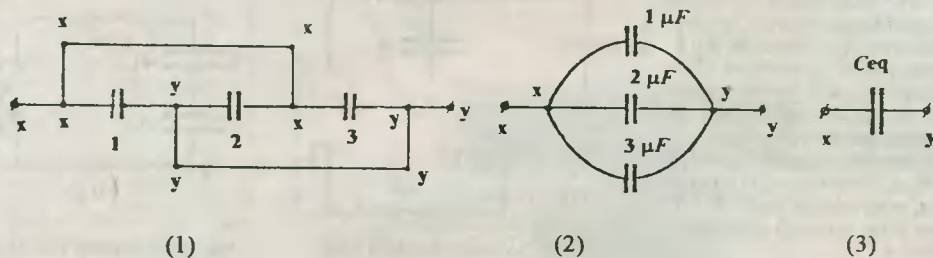
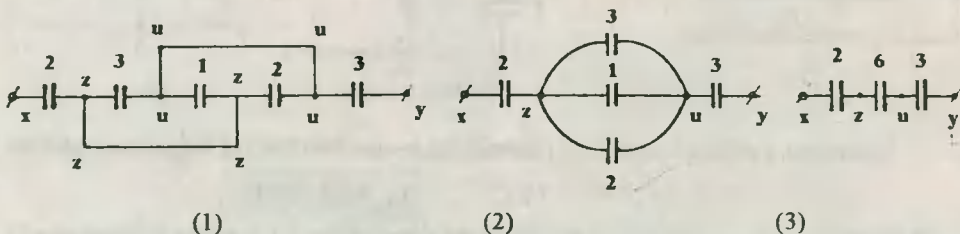


Fig. Solución Prob 31.25

31.26. Haciendo uso de la regla de los puntos encontramos que todos los condensadores ubicados entre un mismo par de puntos están en paralelo. Luego, en base a los siguientes esquemas reducimos el sistema capacitivo original.



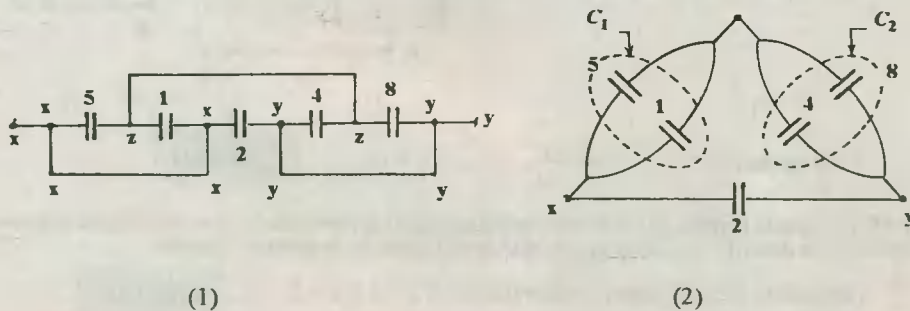
Finalmente, del esquema (3) diremos que la capacidad equivalente de todo el sistema viene dado por la relación (31.9).

$$1/C_{eq} = 1/2 + 1/6 + 1/3 \Rightarrow C_{eq} = 1 \mu F$$

Finalmente, calcularemos la carga almacenada en el circuito utilizando la relación (31.3).

$$Q = C_{eq} V_{xy} = (1 \mu F)(100 V) \therefore Q = 100 \mu C$$

31.27. Tal como se hizo en los ejercicios anteriores, utilizamos la regla de los puntos, y descubrimos la forma real como se encuentran conectados los condensadores, y en base a los siguientes esquemas logramos reducir el sistema original.



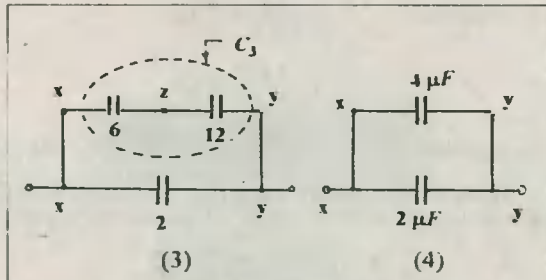
Del esquema (3): $C_3 = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = 4 \mu F$

Y del esquema (4): $C_{eq} = 4 + 2 = 6 \mu F$

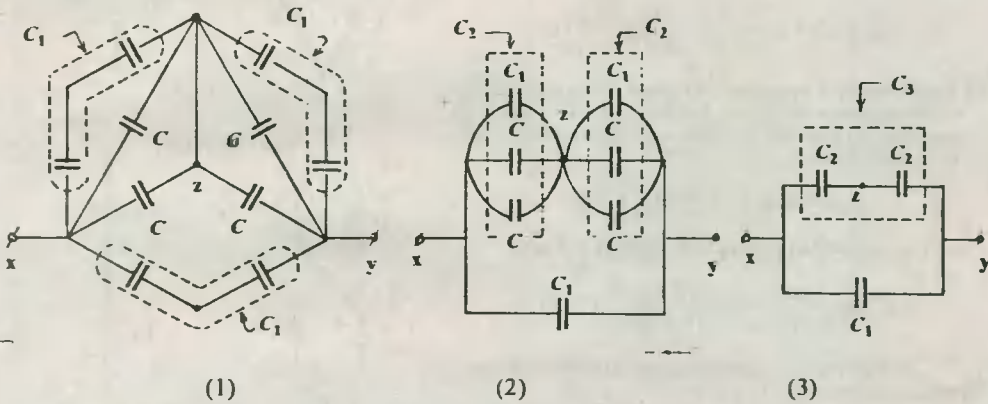
Finalmente, la carga que almacena el sistema lo encontramos de: $U_{pe} = \frac{1}{2} Q^2 / C_{eq}$.

$$\Rightarrow 3 \cdot 10^{-2} = \frac{1}{2} Q^2 / 6 \cdot 10^{-6}$$

$$\therefore Q = 6 \cdot 10^{-4} C$$



31.28. Haciendo uso de la reducción de condensadores por secciones se elaboran los siguientes esquemas:



Del esquema (1): $C_1 = \frac{C \cdot C}{C + C} = \frac{C}{2}$

Del esquema (2): $C_2 = C_1 + C + C = 5/2 C$

Del esquema (3): $C_3 = C_2 / 2 = 5/4 C$

Finalmente, la capacidad equivalente se obtendrá reconociendo que C_1 y C_3 quedaron en paralelo.

$$C_{eq} = C_1 + C_3 = C/2 + 5/4 C$$

$$\Rightarrow C_{eq} = 7/4 C = 7/4 (12 \mu F) \therefore C_{eq} = 21 \mu F$$

31.29. Al pasar a un solo plano todo el sistema capacitivo obtenemos el esquema (1), en donde se observa que la malla "x-m-y-n" es un puente de Wheatstone, tal como se indica en el ítem (31.13). Aquí se verifica que los valores de las capacidades $4 \sqrt{6}$, $\sqrt{3}$ y 8 satisfacen la siguiente relación: $4 \cdot 6 = 3 \cdot 8 = 24$. Entonces, el condensador ubicado en la rama m-n ($C = 7 \mu F$) se encuentra desenergizada, y por tanto fuera de servicio.

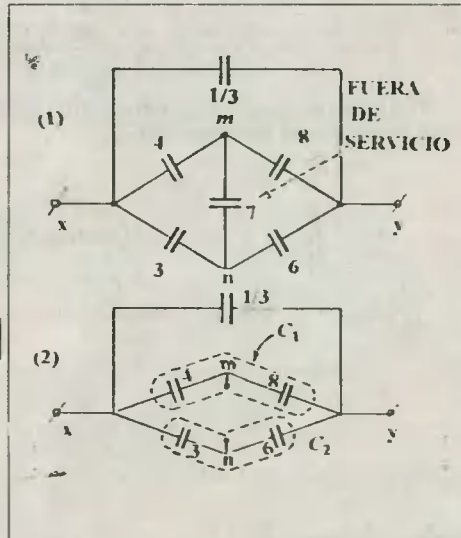
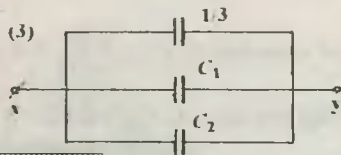


Fig. Solución Prob. 31.29

Del esquema (2): $C_1 = \frac{4 \cdot 8}{4 + 8} = \frac{8}{3} \mu F$

$C_2 = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \mu F$

Del esquema (3): $C_{eq} = C_1 + C_2 + 1/3 = 8/3 + 2 + 1/3 \therefore C_{eq} = 5 \mu F$



31.30. a) Interruptor S abierto. - Cuando ésto sucede se tiene el circuito (1), y de allí encontramos que:

$C_1 = \frac{8 \cdot 4}{8 + 4} = \frac{8}{3}$, y $C_2 = \frac{4C}{4 + C}$

Luego, la capacidad equivalente entre x e y estará dada por:

$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{8}{3} + \frac{4C}{4 + C} \dots (1)$

b) Interruptor S cerrado. - Al cerrar el interruptor los condensadores de capacidad 8 y 4, 4 y C quedan en paralelo, lo que está graficado en el circuito (2), del cual se obtiene:

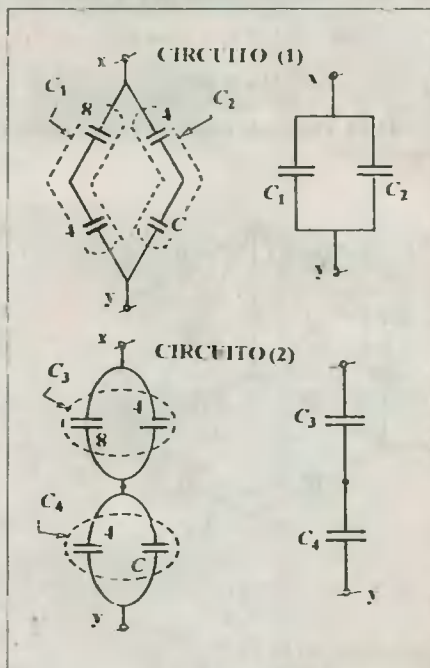
$C_3 = 8 + 4 = 12$, y $C_4 = 4 + C$

Luego, la capacidad equivalente entre x e y será:

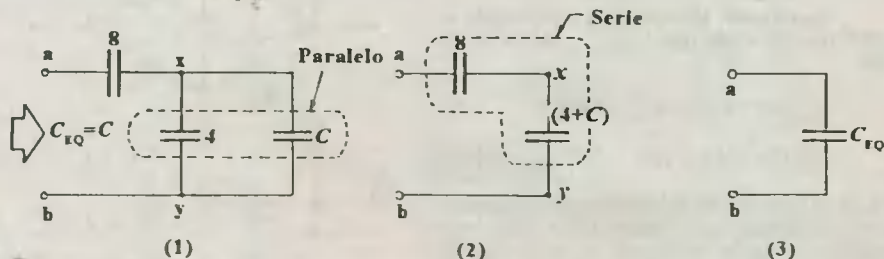
$C_{eq} = \frac{C_3 \cdot C_4}{C_3 + C_4} = \frac{12(4 + C)}{16 + C} \dots (2)$

Finalmente, por condición del problema igualamos las relaciones (1) y (2).

$\frac{8}{3} + \frac{4C}{4 + C} = \frac{12(4 + C)}{16 + C} \therefore C = 2 \mu F$



31.31. Los esquemas permiten describir la reducción del circuito original hasta llegar al condensador de capacidad equivalente (C_{eq}).



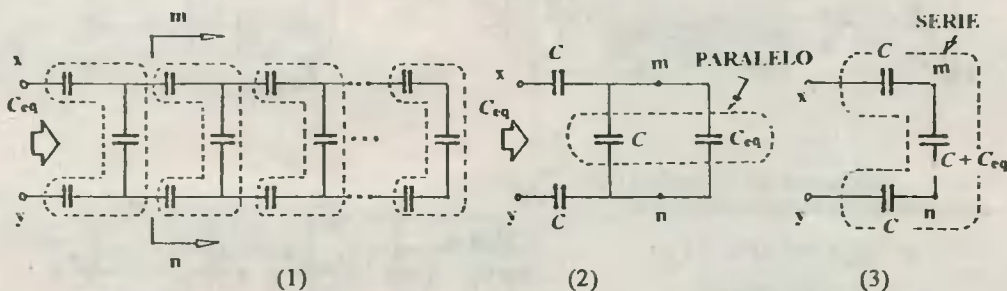
De (1): $C_{eq} = C \dots (1)$

De (2) y (3): $C_{eq} = \frac{8(4 + C)}{12 + C} \dots (2)$

Luego, igualando (1) y (2) tendremos: $C = \frac{8(4+C)}{12+C} \Rightarrow C^2 + 4C - 32 = 0$

$\Rightarrow (C+8)(C-4) = 0 \therefore C = 4 \mu F$

31.32. Bajo el principio que al eliminar la primera célula de condensadores la capacidad equivalente desde m-n es prácticamente la misma que la observada desde x-y, dado que el número de células es muy grande (infinito), por ello podemos colocar entre m-n un condensador de capacidad C_{eq} igual al calculado entre x-y.



$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C+C_{eq}} + \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{3C+C_{eq}}{C(C+C_{eq})} \Rightarrow C_{eq}^2 + 2C.C_{eq} - C^2 = 0$

$\Rightarrow C_{eq} = C(\sqrt{2} - 1) \therefore C_{eq} = 1 \mu F$

31.33. Reconocemos de las instalaciones que los condensadores de capacidades 1 y 2, y 2 y 4 están en paralelo, según se indica en el esquema (1).

$C_1 = 1 + 2 = 3 \mu F; C_2 = 2 + 4 = 6 \mu F$

Del esquema (2): $C_3 = \frac{C_1.C_2}{C_1+C_2} = \frac{3.6}{3+6}$

$\Rightarrow C_3 = 2 \mu F$

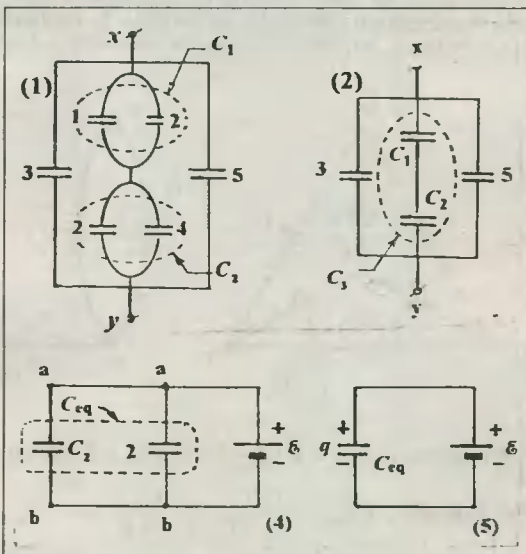
Del esquema (3): $C_{eq} = 3 + C_3 + 5$

$\Rightarrow C_{eq} = 10 \mu F$

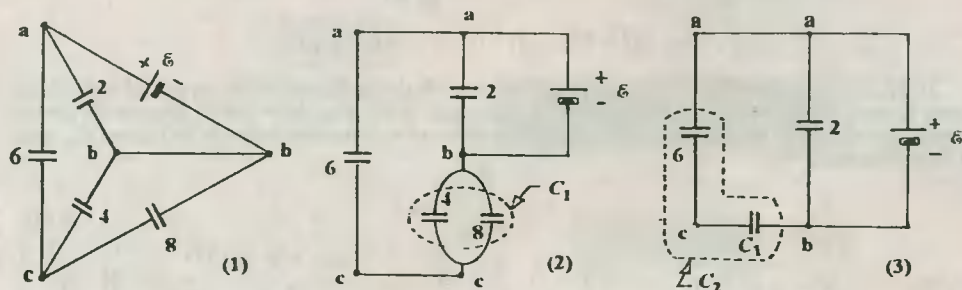
Seguidamente, del esquema (4) encontramos la carga q de circuito.

$q = C_{eq} \cdot \mathcal{E} = (10 \mu F) \cdot (12 V)$

$\therefore q = 120 \mu C$



31.34. Usando tres puntos a, b y c sobre el circuito encontramos que entre los puntos b y c existen dos condensadores de capacidades 4 y 8, los que por tener los mismos extremos se encuentran conectados en paralelo. Del esquema (2) se encuentra que: $C_1 = 4 + 8 = 12 \mu F$; del esquema (3) se consigue: $C_2 = 6C_1/(6+C_1) = 4 \mu F$; y del esquema (4) se llega a la capacidad equivalente del circuito: $C_{eq} = C_2 + 2 = 6 \mu F$.

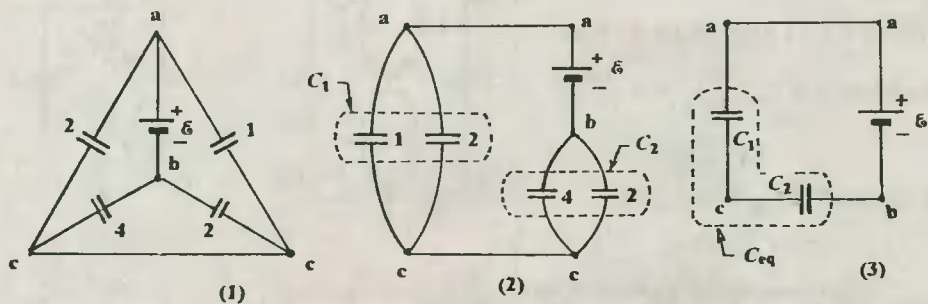
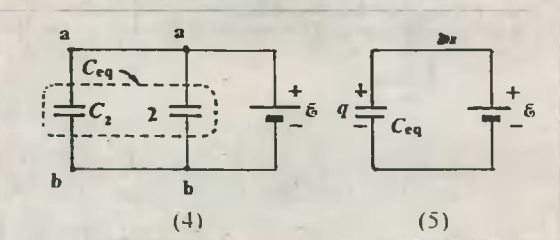


Finalmente, del esquema (5) se encuentra que la carga del circuito es:

$$q = C_{eq} \cdot \mathcal{E} = (6 \mu F) \cdot (10 V)$$

$$\therefore q = 60 \mu C$$

31.35. Procediendo del mismo modo que en el problema anterior utilizamos tres puntos a, b y c, los cuales permiten reducir el circuito original. Con ello reconocemos que los condensadores de capacidades 2 y 1 μF tienen los mismos extremos a y c, y por ello se encuentran conectados en paralelo; lo mismo sucede con los condensadores ubicados entre b y c, es decir, los que tienen capacidades de 2 y 4 μF .



Del esquema (2): $C_1 = 1 + 2 = 3 \mu F$, y $C_2 = 2 + 4 = 6 \mu F$

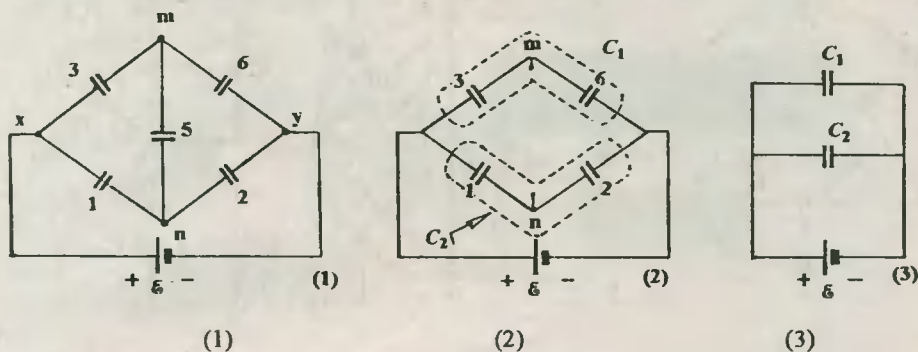
Del esquema (3): $C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} \Rightarrow C_{eq} = 2 \mu F$

Finalmente, diremos que la fuerza electromotriz (\mathcal{E}) o voltaje de la batería viene dado por:

$$\mathcal{E} = q/C_{eq} = 24 \mu C / 2 \mu F \quad \therefore \mathcal{E} = 12 V$$

31.36. En el esquema (1) se observa que las capacidades de los condensadores ubicados entre

x e y verifican la relación (31.13): $3 \cdot 2 = 1 \cdot 6$; luego, se trata de un puente de Wheatstone, y por consiguiente el condensador ubicado entre los bornes m y n no trabaja.



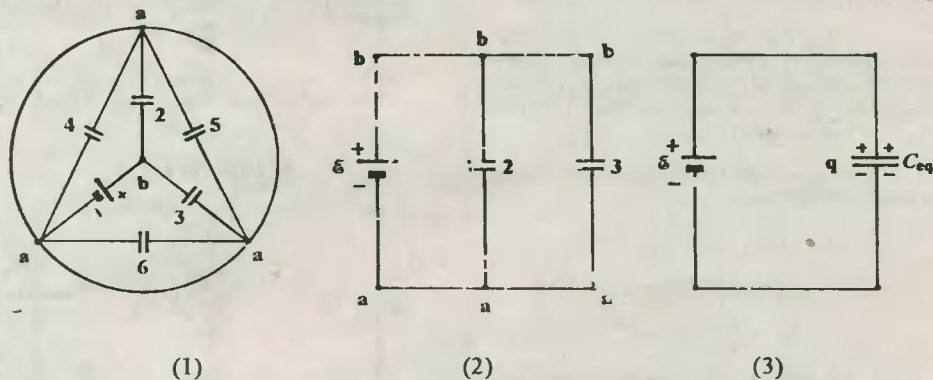
Del esquema (2): $C_1 = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \mu F$; y $C_2 = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{2}{3} \mu F$

Del esquema (3): $C_{eq} = C_1 + C_2 \Rightarrow C_{eq} = 8/3 \mu F$

Finalmente, la carga almacenada en el circuito vendrá dada por:

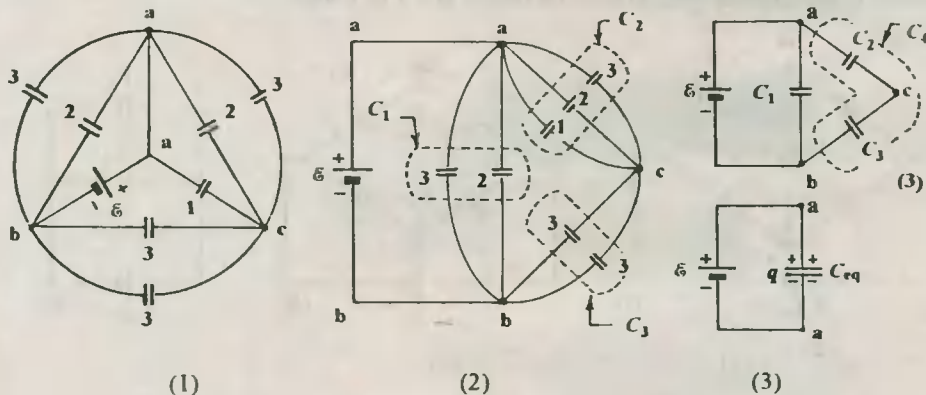
$$q = C_{eq} \cdot \epsilon = (8/3 \mu F)(12 V) \quad \therefore \quad q = 32 \mu C$$

31.37. Bajo el criterio de cortocircuito de un condensador (item (31.10)), hacemos uso de la regla de los puntos, reconociendo en primer lugar que el alambre circular tiene un único potencial (a), y por ello los condensadores de capacidades 4, 5 y 6 μF presentan los mismos bornes a, quedando todas cortocircuitadas y fuera de servicio. En el esquema (2) se han colocado sólo los condensadores cuyos bornes son a y b, así como la batería (ϵ) colocada entre ellos, de modo que la capacidad equivalente viene dada por: $C_{eq} = 2 + 3 = 5 \mu F$.



Finalmente, del esquema (3) tendremos: $q = C_{eq} \cdot \epsilon = (5 \mu F)(12 V) \quad \therefore \quad q = 60 \mu C$

31.38. A partir de los puntos a, b y c señalados en el esquema (1) podemos reconocer que entre cada par de puntos a-b, b-c y a-c existen tres grupos de condensadores en paralelo, cuya instalación se describe en el esquema (2). De este esquema se deduce lo siguiente: $C_1 = 3 + 2 = 5 \mu F$; $C_2 = 1 + 2 + 3 = 6 \mu F$; $C_3 = 3 + 3 = 6 \mu F$.



Del esquema (3): $C_4 = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} = \frac{6 \cdot 6}{6 + 6} \Rightarrow C_4 = 3 \mu F$

Del esquema (4): $C_{eq} = C_1 + C_4 = 5 + 3 \Rightarrow C_{eq} = 8 \mu F$

Finalmente, el voltaje (ϵ) de la batería estará dado por:

$$\epsilon = q/C_{eq} = 96 \mu C / 8 \mu F \quad \therefore \quad \boxed{\epsilon = 12 V}$$

31.39. A partir del esquema que muestra el estado inicial calcularemos las cargas iniciales de los condensadores.

$$Q_{1i} = C_1 V_1 = C_1 \epsilon = (8 \mu F) \cdot (10 V) = 80 \mu C$$

$$Q_{2i} = C_2 V_2 = C_2 \epsilon = (5 \mu F) \cdot (10 V) = 50 \mu C$$

Ahora, en el esquema que muestra el estado final se ha representado el condensador en vacío que equivale al que posee el dieléctrico entre sus placas, de modo que su capacidad es: $C_{2f} = K C_2 = 4(5 \mu F) = 20 \mu F$.

Luego, calcularemos las cargas finales en cada condensador.

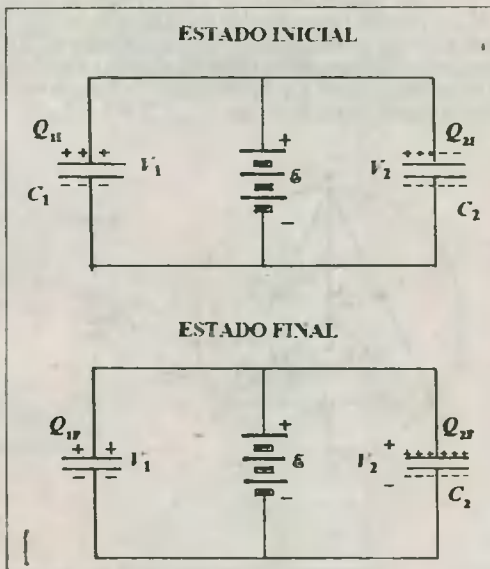
$$Q_{1f} = C_1 V_1 \Rightarrow Q_{1f} = Q_{1i}$$

$$Q_{2f} = C_{2f} V_2 = C_{2f} \epsilon = (20 \mu F) \cdot (10 V)$$

$$\Rightarrow Q_{2f} = 200 \mu C$$

Finalmente, los cambios producidos en las cargas en cada condensador es:

$$\boxed{\Delta Q_1 = 0; \Delta Q_2 = 150 \mu C}$$



Observación. - El incremento de carga sobre las placas del condensador C_2 se explica por una mayor solitud de la misma a la fuente de energía (batería).

31.40. a. Acerca de la capacidad equivalente nos referiremos a los esquemas (1) y (2).

$$\text{De (1): } C_{eq}^i = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{12 \cdot 4}{12 + 4} \Rightarrow C_{eq}^i = 3 \mu F$$

$$\text{De (2): } C_{eq}^f = \frac{C_1 \cdot KC_2}{C_1 + KC_2} = \frac{12 \cdot (3 \cdot 4)}{12 + 3(4)} \Rightarrow C_{eq}^f = 6 \mu F$$

Luego: $\Delta C_{eq} = 3 \mu F$

31.40. b. Para el cálculo de la carga total del circuito diremos lo siguiente:

$$\text{De (1): } q_i = C_{eq}^i \delta = (3 \mu F) \cdot (10 V) = 30 \mu C$$

$$\text{De (2): } q_f = C_{eq}^f \delta = (6 \mu F) \cdot (10 V) = 60 \mu C$$

Luego: $\Delta q = 30 \mu C$

31.40. c. Seguidamente, calcularemos la variación que experimenta la energía potencial electrostática del circuito.

$$\Delta U_{pe} = \frac{1}{2} C_{eq}^f \delta^2 - \frac{1}{2} C_{eq}^i \delta^2 = \frac{1}{2} (C_{eq}^f - C_{eq}^i) \delta^2 \quad \therefore \Delta U_{pe} = 1,5 \cdot 10^{-4} J$$

31.41. A partir del esquema (1) podemos calcular las cargas iniciales en cada condensador.

$$q_1 = C_1 V = (3 \mu F)(12 V) \Rightarrow q_1 = 36 \mu C$$

$$q_2 = C_2 V = (2 \mu F)(12 V) \Rightarrow q_2 = 24 \mu C$$

Seguidamente, analizamos el esquema (2), donde C_2' representa la capacidad del condensador C_2 con dieléctrico dentro, de modo que: $C_2' = KC_2 = 3(2 \mu F) = 6 \mu F$.

Luego, para el cálculo de las cargas finales en cada condensador nos apoyaremos en el Principio de Conservación de la Carga Eléctrica y en la igualdad de los voltajes finales, dado que el acoplamiento es en paralelo.

$$q_{1f} + q_{2f} = q_1 + q_2$$

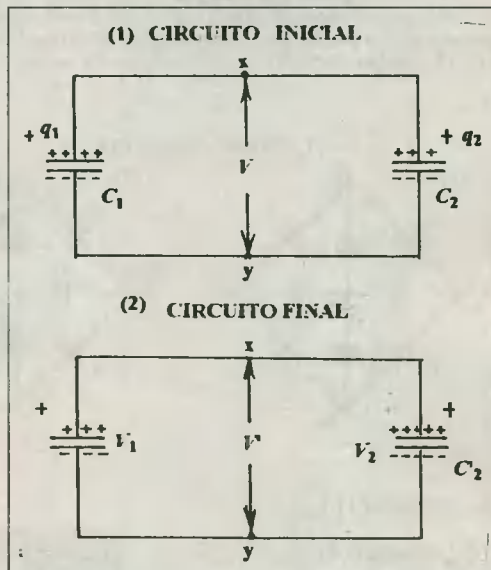
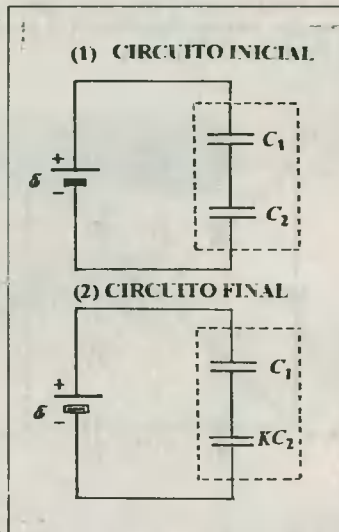
$$\Rightarrow q_{1f} + q_{2f} = 60 \mu C \dots (1)$$

y: $V_{1f} = V_{2f} \Rightarrow q_{1f}/C_1 = q_{2f}/C_2'$

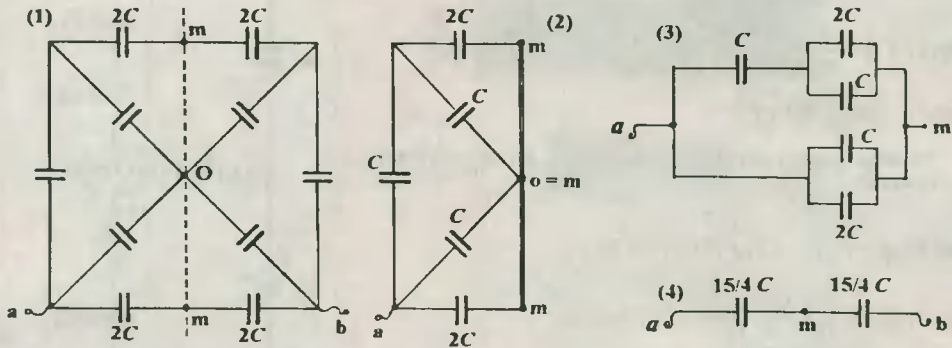
$$\Rightarrow q_{1f} = \frac{1}{2} q_{2f} \dots (2)$$

Resolviendo (1), y (2) obtenemos: $q_{1f} = 20 \mu C, q_{2f} = 40 \mu C$

31.42. a. Reso ver un circuito de condensadores de este tipo consiste en elegir un plano de simetría que divida a circuito en dos partes exactamente iguales y equidistante de los bornes extremos. Si el plano divide a n capacitor, sus componentes deberán ser de igual capacidad, y cuyo equivalente



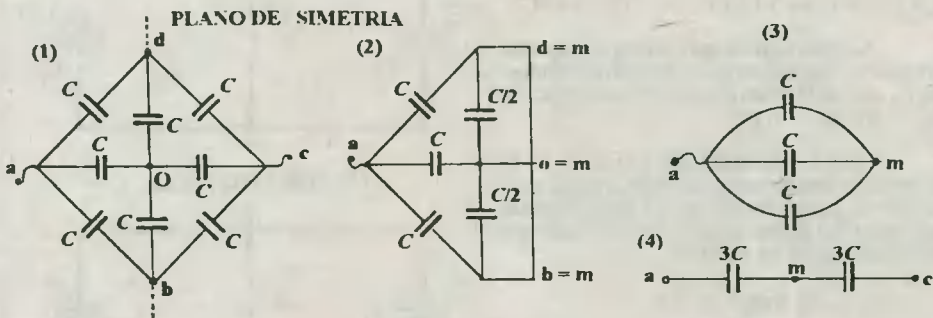
concuere con el capacitor original. A continuación se debe unir con un cable conductor ideal todos aquellos puntos ubicados en el plano de simetría. En el caso dado, el plano de simetría es vertical y pasa por O. Veamos.



Del esquema (3): $C_{am} = 15/4 C$

Y del esquema (4): $C_{ab} = C_{am}/2 \therefore C_{ab} = 15/8 C$

31.42. b. A partir del esquema (1) aplicamos el mismo procedimiento que en el caso anterior. Se reconoce que el plano de simetría pasa por d-o-b, siendo designados luego por m. Se observa asimismo que al unir los puntos de igual potencial, los condensadores obtenidos de la división de C convertidos en C/2 quedan cortocircuitados y fuera de servicio.



Del esquema (3): $C_{am} = 3C$

Y del esquema (4): $C_{ac} = C_{am}/2 \therefore C_{ac} = 3/2 C$

31.43. a. Procediendo del mismo modo que en el problema anterior, trazaremos un plano de simetría vertical que pase por O. A continuación se reduce el circuito de arriba hacia abajo, tomando como antes sólo la mitad izquierda del circuito original. Veamos.

Del esquema (4), la capacidad equivalente entre a y m está dado por:

$$C_{am} = 7/11 C + 3C = 40/11 C \Rightarrow C_{ab} = C_{am}/2 \therefore C_{ab} = 20/11 C$$

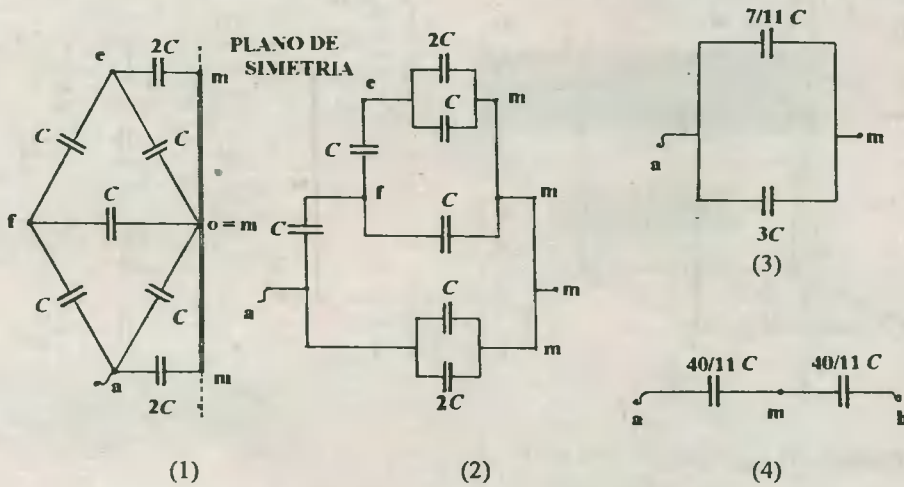
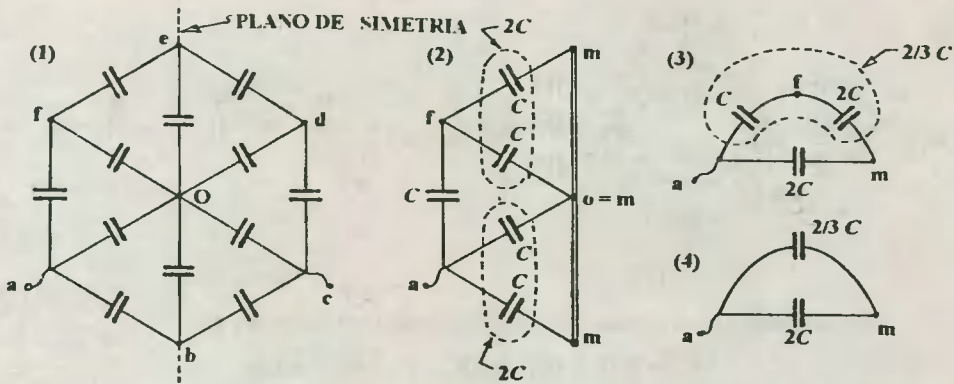


Fig. Solución Prob. 31.43.a

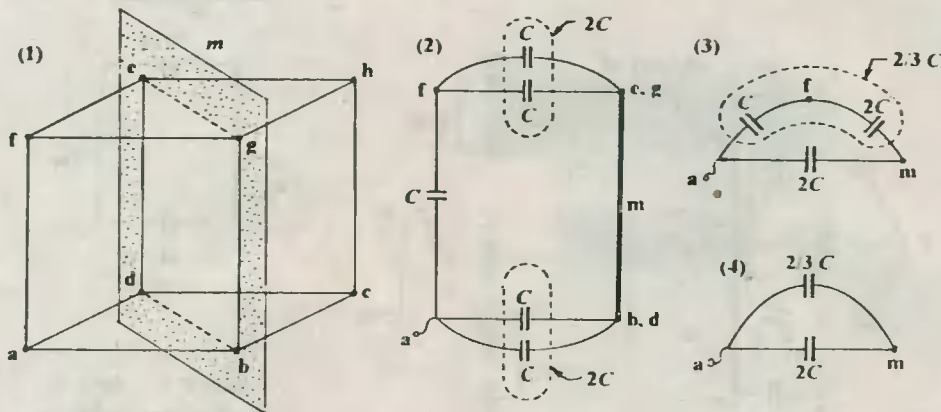
31.43.b. En base a la resolución del problema 31.42.b y el gráfico adjunto, procedemos a trazar un plano de simetría vertical que pase por o, lo que a su vez permite eliminar los condensadores ubicados entre e y o y entre o y b, debido a que se trata de un plano equipotencial.



Del esquema (4): $C_{am} = 2/3 C + 2C = 8/3 C$

Luego: $C_{ac} = C_{am}/2 \therefore C_{ac} = 4/3 C$

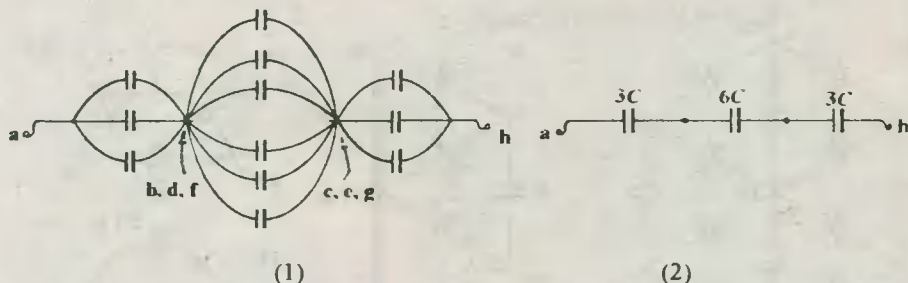
31.44.a. Al trazar un plano de simetría equidistante de a y c encontramos que los vértices b, g, e y d están en el plano equipotencial, eliminándose los condensadores entre d y e, y b y g. Seguidamente procedemos a unir los vértices e-g y b-d, quedando un par de condensadores en paralelo.



Del esquema (4): $C_{am} = 2/3 C + 2C = 8/3 C$

Luego: $C_{ac} = C_{am}/2 \quad \therefore \quad C_{ac} = 4/3 C$

31.44.b. Cuando el circuito es energizado entre a y h, se verificará que la diferencia de potencial entre el vértice a con b, d o f es la misma: lo mismo sucede entre los bornes c, e y g con el vértice h (presentan igual diferencia de potencial). Por tanto, se comprueba que: $V_b = V_d = V_f$ y $V_c = V_e = V_g$. Luego, podemos unir dichos vértices en uno solo, quedando el circuito que se muestra a continuación.



Del esquema (2) encontramos la capacidad equivalente entre a y h.

$$1/C_{ah} = 1/3C + 1/6C + 1/3C \quad \therefore \quad C_{ah} = 6/5 C$$

31.45. Trazando un plano de simetría vertical y equidistante de los bornes x e y eliminamos dos condensadores de capacidad C, elaboramos entonces una reducción del circuito a partir de la mitad izquierda de él. Veamos.

Del esquema (3) tenemos que: $C_{xm} = 2C + 2/3 C + 2C = 14/3 C$

Luego: $C_{xy} = C_{xm}/2 \quad \therefore \quad C_{xy} = 7/3 C$

31.46. Para este ejercicio recurriremos al teorema de la trayectoria (item (31.12)), para lo cual

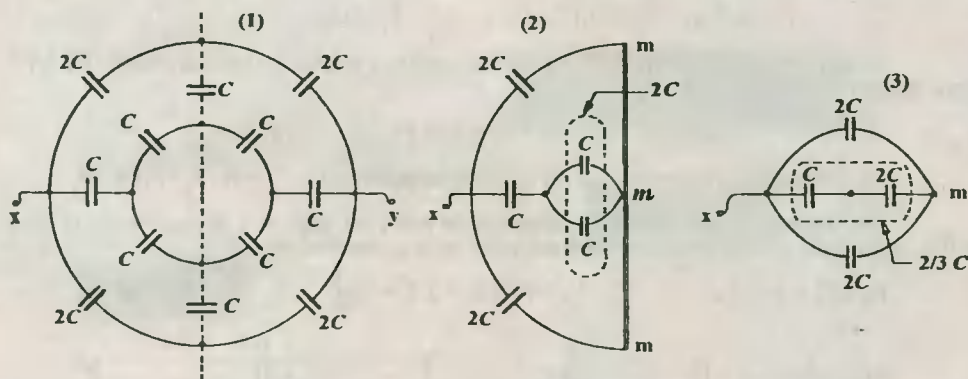


Fig. Solución Prob. 31.45

elegiremos el sentido de **A** hacia **B**: "Al empezar en **A**, el potencial es V_A ; al pasar por la fuente de **A** a **X**, el potencial disminuye en un valor igual a ϵ_1 . Ahora al pasar por el condensador cargado, el potencial aumenta en un valor igual a V . Finalmente, al pasar por la fuente de **Y** a **B**, el potencial aumenta en un valor igual a ϵ_2 , llegando al potencial V_B del punto **B**".

Traduciendo este suceso en una ecuación, al ir de **A** hacia **B** tendremos lo siguiente:

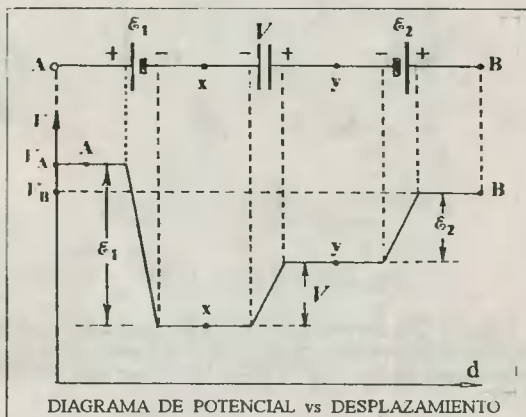
$$V_A - \epsilon_1 + V + \epsilon_2 = V_B$$

$$\Rightarrow V_A - V_B = \epsilon_1 - V - \epsilon_2 \dots (*)$$

Pero: $V = q/C = 30 \mu C/5 \mu F$

$$\Rightarrow V = 6 \text{ voltios} \dots (**)$$

Reemplazando (**) en (*): $V_A - V_B = 18 - 6 - 10 \therefore V_A - V_B = 2 V$



31.47. A partir del esquema reconocemos que en la malla **abcdea** el único voltaje desconocido (V) es el que presenta el condensador de capacidad $C = 3 \mu F$. Luego, aplicando la Segunda Ley de Kirchoff en dicha malla, tendremos según la relación (31.15) que: $\Sigma V = 0 \dots (*)$

La regla de los signos para la aplicación de esta ley es que, al recorrer la malla desde **a** en el sentido horario señalado, se colocará en (*) el valor y primer signo encontrado al pasar por una fuente o un capacitor. Luego, tendremos que:

abcdea: $-12 - 8 - 10 + 25 + V = 0 \Rightarrow V = 5 \text{ voltios}$

Seguidamente, con este resultado encontraremos la carga:

$$q = CV = (3 \mu F)(5 V) \therefore q = 15 \mu C$$

31.48. En primer lugar reconocemos que se trata de dos condensadores conectados en serie. Luego, por la relación (31.7) diremos que sus cargas serán iguales; por ello se verificará que:

$$q_1 = q_2 \Rightarrow C_1 V_1 = C_2 V_2 \Rightarrow V_1 = 3V_2 \dots (1)$$

Ahora, aplicando la 2^{da} Ley de Kirchoff a la malla, y eligiendo el sentido horario BXAYB para su recorrido, tendremos:

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -\epsilon_1 + V_1 + \epsilon_2 + V_2 = 0 \dots (2)$$

A continuación reemplazamos (1) en (2) y despejamos V_2 : $V_2 = \frac{1}{4}(\epsilon_1 - \epsilon_2) = 2V$

Finalmente, encontraremos la diferencia de potencial entre A y B recorriendo la rama BYA, expresando el comportamiento del potencial del siguiente modo:

$$V_B + V_2 + \epsilon_2 = V_A \Rightarrow V_A - V_B = V_2 + \epsilon_2 = 2V + 12V \therefore \boxed{V_A - V_B = 14V}$$

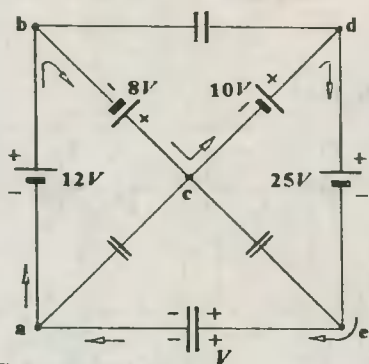


Fig. Solución Prob. 31.47

31.49. Del esquema (2) podemos decir que C_x es la capacidad equivalente de 4 y 8 μF , y C_y es la capacidad equivalente de 2 y 6 μF . Luego, las cargas de cada uno serán:

$$q_x = C_x V = (8/3 \mu F)(12V) \Rightarrow q_x = 32 \mu C$$

$$q_y = C_y V = (3/2 \mu F)(12V) \Rightarrow q_y = 18 \mu C$$

A continuación, del esquema (1) diremos que los condensadores C_1 y C_2 presentan la misma carga q_x por encontrarse éstos en serie. Luego: $V_1 = q_x / C_1 = 8V$.

Asimismo, podemos decir que la carga q_y es la carga de los condensadores C_3 y C_4 . Luego: $V_3 = q_y / C_3 = 9V$.

Finalmente, encontraremos la diferencia de potencial entre A y B haciendo el recorrido B-m-A, expresando el comportamiento del potencial del siguiente modo:

$$V_B + V_3 - V_1 = V_A \Rightarrow V_A - V_B = V_3 - V_1 = 9V - 8V \therefore \boxed{V_A - V_B = 1V}$$

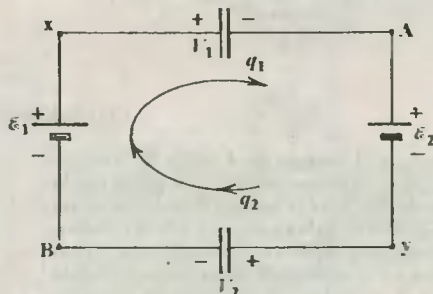
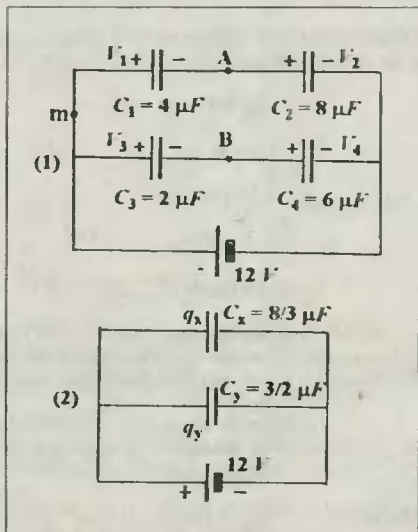


Fig. Solución Prob. 31.48



31.50. Analizando la malla *abcfa*, y aplicando la 2^{da} Ley de Kirchoff, tendremos:

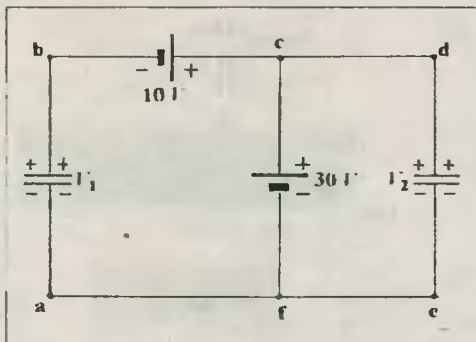
$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -I_1 - 10 + 30 = 0 \Rightarrow V_1 = 20 \text{ V}$$

Luego, la carga de C_1 estará dada por:

$$q_1 = C_1 V_1 = (3 \mu\text{F})(20 \text{ V}) \therefore q_1 = 60 \mu\text{C}$$

Ahora, en la malla *cdefc* se observa que el condensador está conectado directamente a la batería. Por ello, $V_2 = 30 \text{ V}$. A partir de esto la carga en este elemento vendrá dada por:

$$q_2 = C_2 V_2 = (5 \mu\text{F})(30 \text{ V}) \therefore q_2 = 150 \mu\text{C}$$



31.51. En base al esquema adjunto se han señalado dos mallas, y las resolveremos aplicando las leyes de Kirchoff.

(*) Del nudo C.- Utilizamos la 1^{ra} Ley de Kirchoff (relación (31.14)), de modo que, respetando la polaridad de las cargas se tendrá que:

$$\Sigma q = 0 \Rightarrow -q_1 + q_2 + q_3 = 0$$

$$\Rightarrow q_1 = q_2 + q_3 \dots (1)$$

(*) De la malla *abcfa* (sentido horario) utilizamos la 2^{da} ley de Kirchoff.

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -50 + V_1 + V_2 = 0$$

$$\Rightarrow V_1 + V_2 = 50 \Rightarrow q_1/C_1 + q_2/C_2 = 50$$

$$\Rightarrow q_1 + 2q_2 = 200 \dots (2)$$

(*) De la malla *cdefc* (sentido horario), por la 2^{da} Ley de Kirchoff tendremos:

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow +V_3 + 20 - V_2 = 0 \Rightarrow V_2 - V_3 = 20 \Rightarrow q_2/C_2 - q_3/C_3 = 20$$

$$\Rightarrow q_2 - q_3 = 40 \dots (3)$$

Finalmente, resolviendo (1), (2) y (3) encontramos que:

$$q_1 = 80 \mu\text{C}; q_2 = 60 \mu\text{C}; q_3 = 20 \mu\text{C}$$

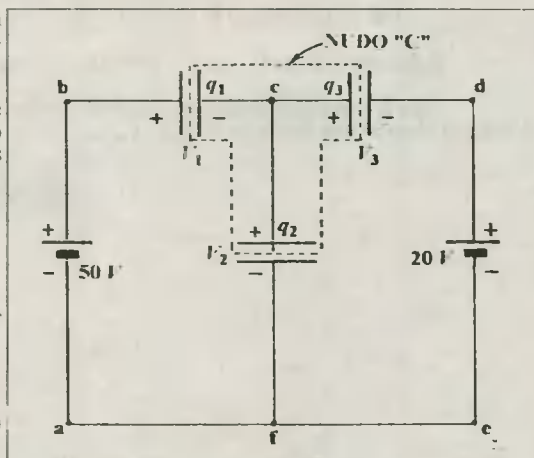
31.52. Del esquema (1) encontramos que la capacidad equivalente está dada por:

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 3 \mu\text{F}$$

$$\Rightarrow q_{\text{inicial}} = C_{\text{eq}} \cdot \mathcal{E} = (3 \mu\text{F})(5 \text{ V}) \Rightarrow q_{\text{inicial}} = 15 \mu\text{C}$$

Ahora, del esquema (2) podemos apreciar que el condensador C_2 está conectado directamente a la batería del lado derecho. Por ello, $V_2 = \mathcal{E}$; y analizando la malla *abcda* se verifica que $V_1 = 0$. Luego, las cargas finales de cada condensador será:

$$q_1 = C_1 V_1 \Rightarrow q_1 = 0$$



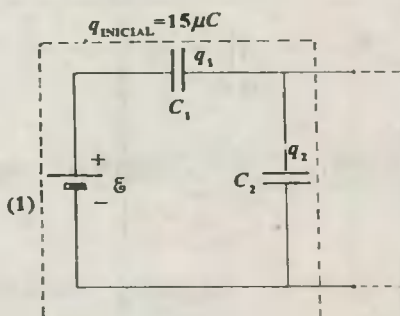


Fig. (1). Solución Prob. 31.52

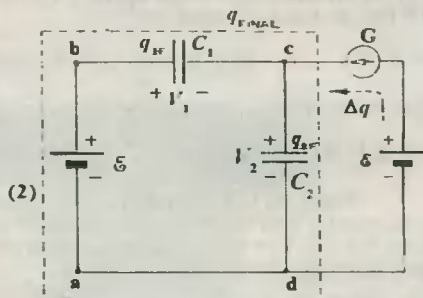


Fig. (2). Solución Prob. 31.52

Entonces tendremos: $q_{\text{final}} = q_{1f} + q_{2f} \Rightarrow q_{\text{final}} = 60 \mu\text{C}$

Ahora, comparando los resultados obtenidos, diremos que por el galvanómetro pasa hacia el sistema elegido una carga $\Delta q = q_{\text{final}} - q_{\text{inicial}}$.

$$\therefore \Delta q = 45 \mu\text{C}$$

CAP 32 ELECTRODINAMICA (PRIMERA PARTE)

32.1. Se sabe que la intensidad de corriente (i) viene dada por la relación (32.1), donde:

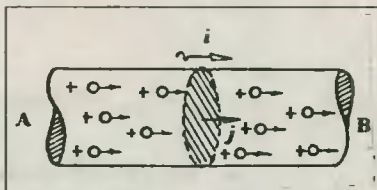
$$q = 2,5 \cdot 10^{20} e = 2,5 \cdot 10^{20} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} C \Rightarrow q = 40 C$$

Luego: $i = q/t = 40 C/40 s \quad \therefore \quad \boxed{i = 1 A}$

32.2. a. La intensidad de corriente viene dada por la relación (32.1), y como se hizo en el problema anterior, tendremos que:

$$i = q/t = (5 \cdot 10^{20}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} C)/4 s \quad \therefore \quad \boxed{i = 20 A}$$

Además, el sentido convencional, según el ítem 32.2, será de A hacia B.



32.2. b. Para el cálculo de la densidad de corriente (j), ésta viene dada por la relación (32.2).

$$j = i/A = 20 A/50 \cdot 10^{-6} m^2 \quad \therefore \quad \boxed{j = 4 \cdot 10^5 A/m^2}$$

Según se indica en el esquema, el vector j tiene el mismo sentido que la corriente convencional.

32.3. Recordando que el movimiento de una carga negativa equivale al movimiento de otra carga positiva de igual magnitud, pero de sentido contrario, diremos que a través de la sección recta del tubo pasa una carga neta positiva de A hacia B, cuyo valor es: $q = 25 C + 15 C = 40 C$. Luego, la intensidad de corriente (i) viene dada por la relación (32.1).

$$i = 40 C/8 s \quad \therefore \quad \boxed{i = 5 A (-\rightarrow)}$$

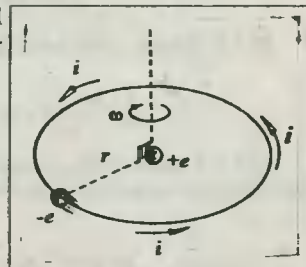
32.4. Utilizando el resultado del problema 29.26, diremos que el electrón vuelve a pasar por un punto de la trayectoria circular después de un tiempo T llamado periodo, cuyo valor viene dado por:

$$T = 2\pi/\omega \dots (1)$$

Luego, la intensidad de corriente (i) viene dada por:

$$i = q/t = e/\omega T \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2): $i = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{e}{2\pi r} \sqrt{\frac{k_e}{mr}}$



Reemplazando valores y efectuando operaciones encontramos $\boxed{i = 1,15 mA}$

32.5. a. La carga que atravesó la sección recta del conductor entre $t = 4 s$ y $t = 8 s$ viene dada por el área bajo la curva.

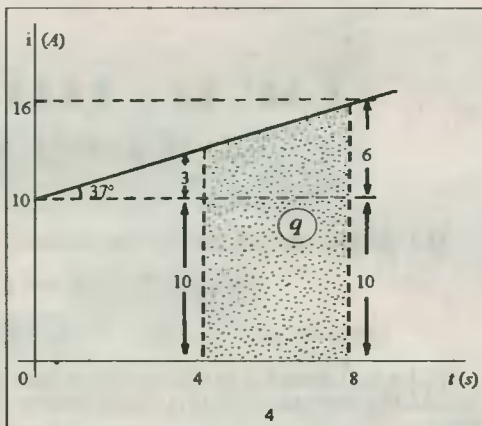
$$q = \text{AREA DEL TRAPECIO} = \frac{1}{2} (13 + 16) \cdot 4 \quad \therefore \quad \boxed{q = 58 C}$$

32.5.b. El conductor sólo deja pasar las cargas de la corriente, y en ningún caso las almacena. Luego:

$$q_e = 0 \text{ C}$$

32.6.a. Por los datos reconocemos que $N = 3$; $d = 2,7 \text{ g/cm}^3$, $A = 27$. Luego, por medio de la relación (32.3) encontraremos la densidad electrónica (n).

$$n = \frac{NdN_A}{A}$$



$$\Rightarrow n = \frac{(3 \text{ electrones/átomo})(2,7 \text{ g/cm}^3)(6,02 \cdot 10^{23} \text{ átomos})}{27 \text{ g/mol}}$$

$$\Rightarrow n = 1,81 \cdot 10^{23} \text{ electrones/cm}^3 \quad \therefore \quad n = 1,81 \cdot 10^{23} \text{ electrones/m}^3$$

32.6.b. Para el cálculo de la velocidad de desplazamiento (v_d) de los electrones aplicaremos la relación (32.5).

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{(1,10^{-6} \text{ m}^2)(1,81 \cdot 10^{29} \text{ electrones/m}^3)(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})} \quad \therefore \quad v_d = 3,45 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$$

Observación. - El valor de la velocidad con que los electrones se mueven debido a un campo eléctrico es muy pequeña. Sin embargo, la velocidad con que se propaga la energía eléctrica es muy cercana a la velocidad de propagación de la luz en el vacío.

32.7.a. Reconocemos que la sección recta tiene un área $A = \pi D^2/4 = 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$. Luego, la densidad de corriente viene dada por la relación (32.2).

$$j = i/A = 6,28 \text{ A}/3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \quad \therefore \quad j = 2 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$$

32.7.b. Ahora calculemos la velocidad de arrastre v_d utilizando la relación (32.5).

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{2 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2}{(2,3 \cdot 10^{29} \text{ electrones/m}^3)(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})} \quad \therefore \quad v_d = 5,43 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

32.8.a. Cuando sobre el conductor no actúa ningún campo eléctrico, el tiempo transcurrido entre dos choques consecutivos de los electrones viene dado por la relación (32.7).

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{(8,4 \cdot 10^{28} \text{ electrones/m}^3)(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2(1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})} \quad \therefore \quad \tau = 2,45 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

32.8.b. Para el cálculo de la distancia recorrida entre dos choques consecutivos usaremos la relación (32.4).

$$\lambda = v\tau = (1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s})(2,45 \cdot 10^{-14} \text{ s}) \quad \therefore \quad \lambda = 3,92 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Observación. - El valor de la velocidad efectiva media de los electrones cuando en los conductores no existe campo alguno es del orden de 10^{10} con relación a la velocidad de arrastre de los mismos cuando están sujetos a un campo eléctrico. De esto se deduce que los valores de v y λ se conservan

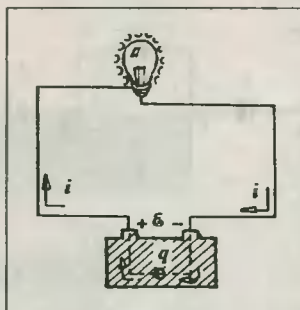
casi sin cambio cuando se aplica el campo eléctrico.

32.9.a. Para el cálculo de la carga utilizaremos la relación (32.1), del cual al despejar q tendremos:

$$q = it = (2 \cdot 10^{-3} A)(5 s) \quad \therefore \quad q = 0,01 C$$

32.9.b. Despreciando las pérdidas de energía en los conductores, diremos que la energía (W) que irradia el foco es la misma que suministra las baterías a las cargas (q) que la atraviesan desde el polo negativo al polo positivo. Luego, de la relación (32.8) tendremos que:

$$W = \epsilon q = (1,5 V)(0,01 C) \quad \therefore \quad W = 15 mJ$$



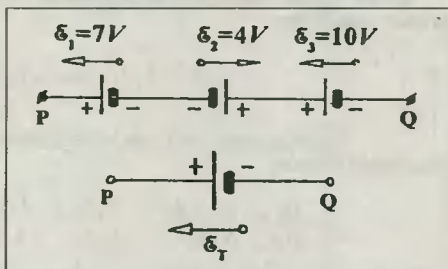
32.10. De los datos reconocemos que: $i = 2,5 mA = 2,5 \cdot 10^{-3} A$; $t = 4 h = 4 \cdot 3600 s = 14400 s$. Luego, la carga transportada a través del circuito será:

$$q = it = (2,5 \cdot 10^{-3} A)(14400 s) \Rightarrow q = 36 C$$

Seguidamente, con el dato de la energía (W) disponible de la batería, diremos que:

$$\epsilon = W/q = 21,6 J/36 C \quad \therefore \quad \epsilon = 0,6 V$$

32.11. El sistema de baterías es equivalente al señalado en el esquema adjunto. Por tratarse de un acoplamiento en serie, y teniendo en cuenta el sentido de las fuerzas electromotrices, por la relación (32.9) tendremos que:

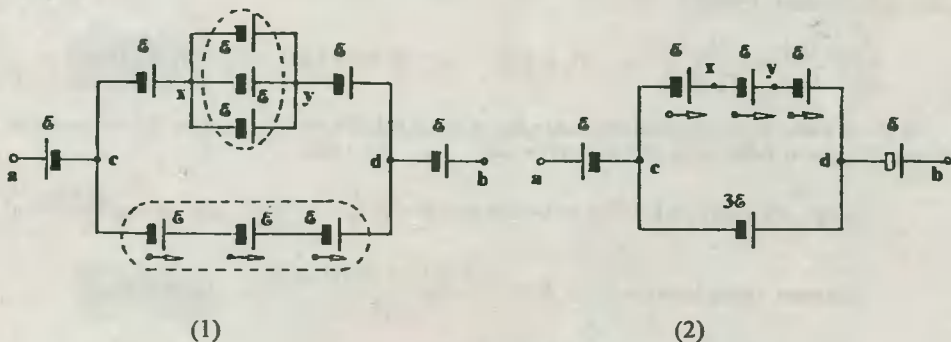


$$\epsilon_T = \sum \epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3$$

$$\epsilon_T = 7 V - 4 V + 10 V \Rightarrow \epsilon_T = 13 V$$

$$\Rightarrow V_{PQ} = \epsilon_T \quad \therefore \quad V_{PQ} = 13 V$$

32.12. Reduciendo la instalación en base al reconocimiento de las asociaciones en serie o en paralelo, tendremos los esquemas que se muestran.



Luego, del esquema (5) diremos que: $\epsilon_T = 18 V$

32.13. Por los datos podemos reconocer que en el interior del conductor se ha creado un campo

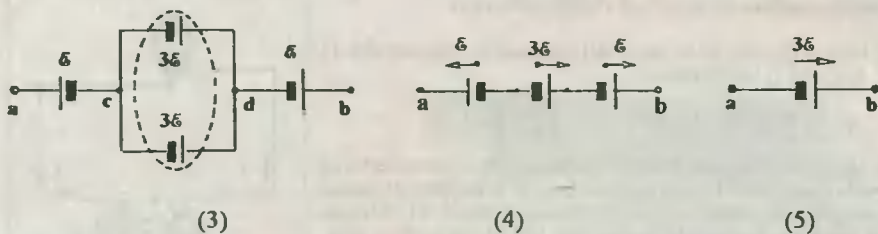


Fig. Solución Prob. 32.12 (continuación)

eléctrico (E_1), cuyo valor viene dado por la relación (30.12).

$$E = V_{ab}/L = 17 \text{ V}/2 \text{ m} \Rightarrow E = 8,5 \text{ V/m}$$

Luego, el coeficiente de resistividad (ρ) del conductor viene dado por la relación (32.11).

$$\rho = E/j = 8,5/5 \cdot 10^8 \therefore \rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

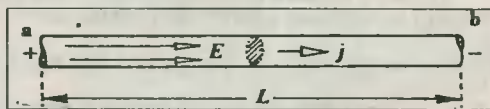


Fig. Solución Prob. 32.13

32.14. Según condición del problema, el nuevo alambre debe poseer el mismo volumen que el primer conductor.

$$L_2 A_2 = L_1 A_1 \Rightarrow A_2 = \frac{L_1 A_1}{L_2} = \frac{L A}{L/2} \Rightarrow A_2 = 2A$$

Seguidamente, utilizando la relación de Poulliet, tendremos que las resistencias están en la siguiente relación:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho L_2/A_2}{\rho L_1/A_1} = \frac{L_2 A_1}{L_1 A_2} = \frac{L/2 \cdot A}{L \cdot 2A} \Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{4} \therefore R_2 = 20 \Omega$$

32.15. En base a la condición del problema se establece que los volúmenes son iguales.

$$L_2 A_2 = L_1 A_1 \Rightarrow A_2 = L_1 A_1 / L_2 = L_1 A_1 / 5L_1 \Rightarrow A_2 = A_1 / 5$$

Seguidamente, aprovechando el resultado del problema anterior, diremos que las resistencias están en la siguiente relación:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{L_2 A_1}{L_1 A_2} = \frac{5L_1 A_1}{L_1 A_1 / 5} \Rightarrow R_2 = 25R_1 \Rightarrow R_2 = 25(5 \Omega) \therefore R_2 = 125 \Omega$$

32.16. A partir de la relación conocida para la densidad se tiene que la masa del conductor supuestamente recto viene dado por: $m = dV = dAL \Rightarrow A = m/dL$.

$$\text{Luego, por la ley de Poulliet se tendrá que: } R = \rho \frac{L}{A} = \rho \frac{L}{m/dL} \Rightarrow R = \rho \frac{dL^2}{m}$$

$$\text{Entonces, reemplazando datos: } R = \frac{(1,7 \cdot 10^{-8}) \cdot (8900) \cdot (400)^2}{17,8} \therefore R = 1,36 \Omega$$

32.17. Utilizando la relación deducida para la resistencia (R) de un conductor, obtenida en el problema anterior, tendremos lo siguiente:

$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{\rho_B d_B L_B^2 / m_B}{\rho_A d_A L_A^2 / m_A} = \frac{\rho_B d_B m_A L_B^2}{\rho_A d_A m_B L_A^2} \Rightarrow L_B = \sqrt{\left(\frac{R_B}{R_A}\right) \left(\frac{\rho_A}{\rho_B}\right) \left(\frac{d_A}{d_B}\right) \left(\frac{m_B}{m_A}\right)} L_A$$

Y reemplazando valores: $L_B = \sqrt{\frac{10 \text{ k}\Omega \cdot \rho_A \cdot d_A \cdot 90 \text{ kg}}{5 \text{ k}\Omega \cdot 2\rho_A \cdot 4d_A \cdot 10 \text{ kg}}} 200 \text{ m} \therefore L_B = 300 \text{ m}$

32.18. Las espiras enrolladas suman en total: $125 \cdot 100 = 12\,500$. La longitud de todas las espiras se halla multiplicando el número de espiras por la longitud de la "espira media". El diámetro vale: $\frac{1}{2}(94 + 14) = 54 \text{ mm}$. Por consiguiente, la longitud de la "espira media" será: $l_0 = 54\pi \text{ mm}$.

La longitud de todas las espiras será: $L = 12\,500 l_0 = 675\pi \text{ m}$

Finalmente, por la Ley de Poulliet, la resistencia de todo el conductor estará dada por:

$$R = 1,7 \cdot 10^{-8} \frac{675\pi}{\pi/4 (3 \cdot 10^{-4})^2} \therefore R = 510 \Omega$$

32.19. Utilizando la relación (32.14) tendremos que:

$$R_{120^\circ\text{C}} = R_{20^\circ\text{C}} [1 + \alpha_{20^\circ\text{C}} (120^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})] = 200 \Omega [1 + 0,0038^\circ\text{C}^{-1} (180^\circ\text{C})] \therefore R_{120^\circ\text{C}} = 276 \Omega$$

32.20. Calculemos el coeficiente de temperatura de la resistencia para la temperatura $t_1 = 60^\circ\text{C}$, utilizando para ello la relación (32.13).

$$\alpha_{60^\circ\text{C}} = \frac{1}{T + t_1} = \frac{1}{|-240^\circ\text{C}| + 60^\circ\text{C}} \Rightarrow \alpha_{60^\circ\text{C}} = (1/300)^\circ\text{C}^{-1}$$

Luego, empleando la relación (32.14) encontraremos la resistencia a la temperatura $t_2 = 60^\circ\text{C} + 10^\circ\text{C} = 70^\circ\text{C}$.

Entonces: $R_{70^\circ\text{C}} = R_{60^\circ\text{C}} [1 + \alpha_{60^\circ\text{C}} (t_2 - t_1)] = 300 [1 + (1/300) \cdot 10] \therefore R_{70^\circ\text{C}} = 310 \Omega$

32.21. A partir de la relación (32.13) encontraremos la temperatura "cero inferido" (T) del conductor, para lo cual tendremos:

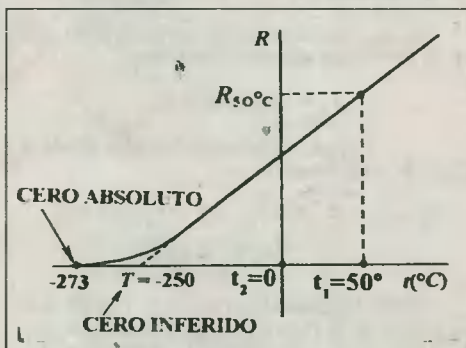
$$\alpha_{t_1} = \frac{1}{|T| + t_1} \Rightarrow |T| = \frac{1}{\alpha_{t_1}} - t_1$$

Haciendo $t_1 = 50^\circ\text{C}$ tendremos: $T = -250^\circ\text{C}$

Luego, el coeficiente de temperatura de la resistencia a la temperatura $t_2 = 0^\circ\text{C}$ viene dado por:

$$\alpha_{t_2} = \frac{1}{T + t_2} \Rightarrow \alpha_{0^\circ\text{C}} = \frac{1}{|-250^\circ\text{C}| + 0^\circ\text{C}}$$

$$\therefore \alpha_{0^\circ\text{C}} = 4 \cdot 10^{-3} ^\circ\text{C}^{-1}$$



32.22.a. La resistencia se calculará tomando la pendiente de la recta, ello de acuerdo con la relación (32.15).

$$R = \Delta V / \Delta i = 75 \text{ V} / 25 \text{ A} \therefore R = 3 \Omega$$

32.22.b. Para el cálculo de la tensión utilizaremos la Ley de Ohm en la forma:

$$V = iR = (10 \text{ A}) (3 \Omega) \therefore V = 30 \text{ voltios}$$

32.23. Bajo el criterio de que la intensidad de la corriente es la misma en cualquier sección del alambre, utilizaremos la Ley de Ohm para los siguientes segmentos:

a) **AB y AM.**- Usando la relación (32.15) y la Ley de Poulliet encontramos:

$$i = \frac{V_{AB}}{R_{AB}} = \frac{V_{AM}}{R_{AM}} \Rightarrow V_{AM} = \frac{R_{AM}}{R_{AB}} V_{AB} = \left(\frac{\rho L_{AM}/A}{\rho L_{AB}/A} \right) V_{AB} \Rightarrow V_{AM} = \frac{L_{AM}}{L_{AB}} V_{AB}$$

Reemplazando valores: $V_{AM} = (4 \text{ cm}/20 \text{ cm}) \cdot 40 \text{ V} \therefore V_{AM} = 8 \text{ V}$

b) **AB y MN.**- En base al resultado obtenido en el paso anterior, reconocemos que la tensión se divide proporcionalmente a la longitud del conductor.

$$V_{MN} = (L_{MN}/L_{AB}) V_{AB} = (13 \text{ cm}/20 \text{ cm}) \cdot 40 \text{ V} \therefore V_{MN} = 26 \text{ V}$$

32.24. Del esquema notamos que por la Ley de Ohm, la intensidad de corriente viene dada por:

$$i = \mathcal{E}/R = 12/24 \Rightarrow i = 0,5 \text{ A}$$

Ahora, utilizando la relación (32.1) encontraremos la carga eléctrica (q) transportada.

$$q = it = 0,5 \cdot 3600 \therefore q = 1800 \text{ C}$$

32.25. Considerando las caídas de tensión en cada resistencia logramos construir el esquema de la figura. Ahora, utilizando el Teorema de la Trayectoria, dada en la relación (32.16), recorriendo la rama de a hacia b encontramos:

$$V_a - 48 + 18 - 12 = V_b$$

$$\Rightarrow V_a - 42 = 8 \therefore V_a = 50 \text{ V}$$

32.26. Procediendo del mismo modo que en el problema anterior tendremos:

$$V_a + \Sigma \mathcal{E} + \Sigma iR = V_b$$

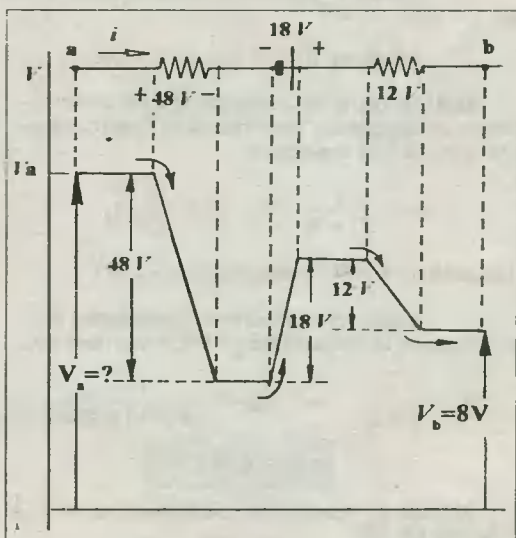
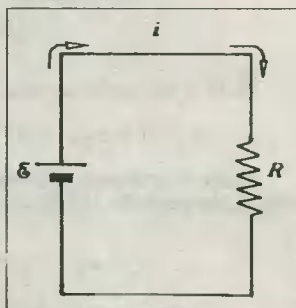
Luego, recorriendo la rama desde a hacia b establecemos:

$$V_a + 6 - 2 \cdot 4 - 9 = V_b \Rightarrow V_a - 11 = V_b$$

$$\therefore V_a - V_b = 11 \text{ V}$$

32.27. Empleando la regla de puntos y el esquema de la figura podemos reconocer que la tensión en la resistencia $R = 7 \Omega$ es exactamente la misma que ofrece la batería: $V_{ab} = \mathcal{E} = 35 \text{ V}$. Luego, por la Ley de Ohm se tiene que:

$$i = V_{ab}/R = 35/7 \therefore i = 5 \text{ A}$$



Observación.- El sentido de la corriente señalado en el gráfico original concuerda con la polaridad indicada en el esquema, lo que demuestra que es el sentido correcto de la corriente, pues ésta siempre ingresa por el lado positivo de la resistencia.

32.28. Tal como se procedió en el problema anterior, se hace uso de la regla de los puntos, en

este caso a y b. De ésto se observa que la resistencia R experimenta una diferencia de potencial exactamente igual a la tensión de la fuente: $V_{ab} = \mathcal{E} = 24 \text{ V}$. Luego, por La ley de Ohm:

$$i = V_{ab}/R = 24 \text{ V}/6 \Omega \quad \therefore \quad i = 4 \text{ A}$$

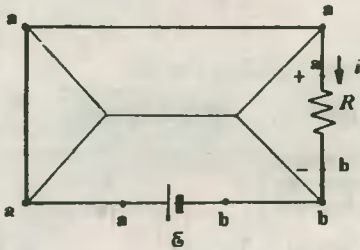


Fig. Solución Prob. 32.27

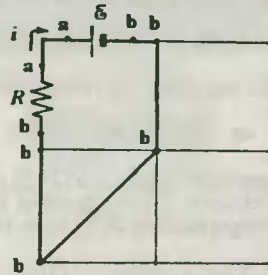


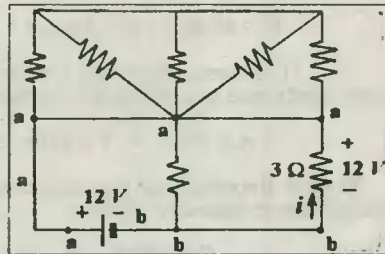
Fig. Solución Prob. 32.28

32.29. Empleando la regla de los puntos nos damos cuenta que la resistencia de 3Ω presenta una diferencia de potencial igual a la que posee la batería. Luego, por la Ley de Ohm:

$$i = V_{ab}/R = 12/3 \Rightarrow i = 4 \text{ A}$$

Lo que ahora debemos señalar es que, de acuerdo con la polaridad de la resistencia, la corriente i ingresa por el lado negativo, lo cual como se sabe no concuerda con lo estipulado en el ítem 32.15. Así pues, atendiendo a esta característica de la corriente, diremos que nuestro resultado será:

$$i = -4 \text{ A}$$



32.30. Del esquema (1) vemos que la diferencia de potencial en la resistencia R es igual a $V_1 = 2\mathcal{E}$. Luego, de la relación (32.17) tendremos que la energía W de ambas baterías se consume en el tiempo t_1 , de modo que:

$$W = (V_1^2/R)t_1 \Rightarrow W = (4\mathcal{E}^2/R)t_1 \dots (1)$$

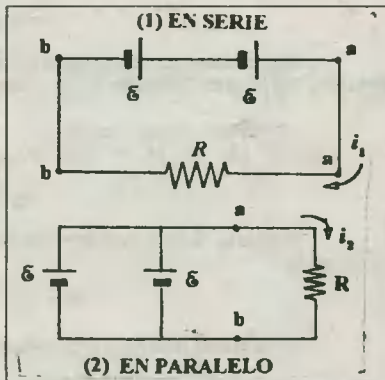
Ahora, del esquema (2), diremos que la energía W de ambas baterías se consume en el tiempo t_2 , de manera que:

$$W = (V_2^2/R)t_2 \Rightarrow W = (\mathcal{E}^2/R)t_2 \dots (2)$$

Luego, igualando las expresiones (1) y (2) tendremos:

$$(\mathcal{E}^2/R)t_2 = (4\mathcal{E}^2/R)t_1 \Rightarrow t_2 = 4t_1$$

$$\therefore \quad t_2 = 4 \text{ días}$$



32.31. A partir de los datos: $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$; $i = 2 \text{ A}$; $t_1 = 1 \text{ h}$, y luego de aplicar las relaciones (32.17) tendremos que la energía W de la batería viene dada por la expresión: $W = \mathcal{E}it_1 \dots (1)$

Ahora, de la condición del problema se tiene que la resistencia a alimentar es $R = 10 \Omega$, y siempre con la tensión $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$. Entonces, de las relaciones (32.17) para la energía W , usamos la siguiente: $W = (\mathcal{E}^2/R)t_2 \dots (2)$

Finalmente, igualando las expresiones (1) y (2) encontramos el tiempo t_2 .

$$(\mathcal{E}^2/R)t_2 = \mathcal{E}it_1 \Rightarrow t_2 = (Ri/\mathcal{E})t_1 = (10.2/12).1 h = 5/3 h \quad \therefore \quad t_2 = 1 h 40 min$$

32.32. Reconociendo que la unidad *calls* corresponde a una unidad especial de potencia, emplearemos las relaciones (32.18), de manera que para los dos casos señalados se tiene que:

$$Pot_1 = V^2/R_1; \quad y \quad Pot_2 = V^2/R_2$$

Luego, con estas dos relaciones se verifica que: $Pot_2 \cdot R_2 = Pot_1 \cdot R_1$

$$\Rightarrow Pot_2 = (R_1/R_2)Pot_1 = (5/10).120 \text{ calls} \quad \therefore \quad Pot_2 = 60 \text{ calls}$$

32.33. a. A partir de la relación (26.5) para el calor sensible tendremos que el calor (Q) que necesita absorber el agua (m) para elevar su temperatura de 20°C hasta 100°C viene dado así:

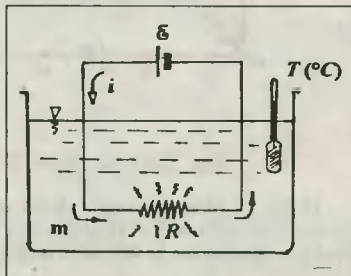
$$Q = m \cdot C_e \Delta T = 2 \text{ kg} \cdot 1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C} (100^\circ\text{C} - 80^\circ\text{C}) = 40 \text{ kcal}$$

Luego, la energía eléctrica W se consigue utilizando la equivalencia dada en el problema.

$$W = 40 \text{ kcal} \cdot 4200 \text{ kJ/kcal} = 168\,000 \text{ J}$$

Finalmente, utilizando la relación (17.5) para la potencia, tendremos que el tiempo transcurrido t vendrá dado por:

$$Pot = W/t \Rightarrow t = W/Pot = 168\,000/500 \quad \therefore \quad t = 336 \text{ s} = 5 \text{ min } 36 \text{ s}$$



32.33. b. Reconociendo que la potencia eléctrica es $Pot = 500 \text{ W}$, y la tensión $\mathcal{E} = 220 \text{ V}$, entonces utilizaremos la siguiente relación:

$$Pot = \mathcal{E}^2/R \Rightarrow R = \mathcal{E}^2/Pot = 220^2/500 \quad \therefore \quad R = 96.8 \Omega$$

32.34. En primer lugar debemos calcular la masa del cubo de hielo a partir de:

$$m = d_{hi} \cdot V = 0.9 \cdot 10^3 = 900 \text{ g}$$

Seguidamente, calculamos el calor total que necesita el hielo para calentarse desde -10°C hasta 0°C (Q_1), para fundirse (Q_2), y luego para calentarse desde 0°C hasta 100°C (Q_3).

$$Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = m \cdot C_{e,hielo} [0^\circ\text{C} - (-10^\circ\text{C})] + 80m + m \cdot C_{e,H_2O} [100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}]$$

$$\Rightarrow Q_{TOT} = 166\,500 \text{ cal}$$

Y a partir del equivalente mecánico del calor encontramos la energía eléctrica (W) absorbida por el hielo.

$$W = 166\,500 \cdot 0.24 \text{ J/cal} = 39\,960 \text{ J}$$

En seguida utilizamos la relación (32.17) para el cálculo del tiempo t .

$$W = (\mathcal{E}^2/R)t \Rightarrow t = WR/\mathcal{E}^2 = 39\,960 \cdot 40/60^2 \quad \therefore \quad t = 444 \text{ s} = 7 \text{ min } 24 \text{ s}$$

32.35. Utilizando la relación (32.18) tendremos que las resistencias R_1 y R_2 de las líneas estarán en la siguiente relación:

$$Pot_1 = Pot_2 \Rightarrow V_1^2/R_1 = V_2^2/R_2 \Rightarrow R_2/R_1 = (V_2/V_1)^2 = (20 \text{ kV}/1 \text{ kV})^2$$

$$\Rightarrow R_2/R_1 = 400 \dots (1)$$

Empleando la ley de Poulliet para la resistencia, tendremos:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho L/A_2}{\rho L/A_1} = \frac{A_1}{A_2} \dots (2)$$

Finalmente, de (1) y (2) tendremos que: $A_1/A_2 = 400$

32.36. Del esquema:

$$F = P = mg = (1\,000\text{ kg})(9,8\text{ m/s}^2) \Rightarrow F = 9\,800\text{ N}$$

Luego, de la relación (17.7) calcularemos la potencia mecánica que proporciona el motor.

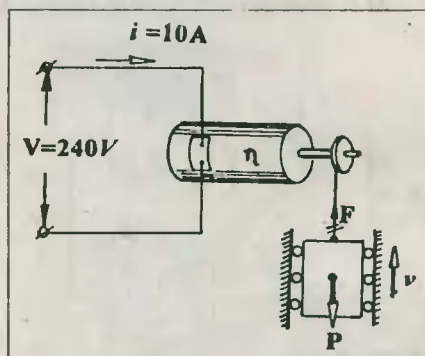
$$Pot_{\text{salida}} = Fv = 9\,800\text{ N} \cdot 6\text{ m/min} = 980\text{ W}$$

Y de la relación (32.18) tendremos que la potencia eléctrica que ingresa al motor viene dada por:

$$Pot_{\text{entrada}} = Vi = (140\text{ V})(10\text{ A}) = 1\,400\text{ W}$$

Finalmente, la eficiencia (η) del sistema se calculará por la relación (32.19).

$$\eta = \frac{Pot_{\text{salida}}}{Pot_{\text{entrada}}} \cdot 100 = \frac{980}{1\,400} \cdot 100 \therefore \eta = 70\%$$



32.37. Aprovechando la solución del problema (30.29) diremos que los electrones presentan una energía cinética (E_c) que viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = eV \Rightarrow V = mv^2/2e$$

Luego, la potencia que debe mantenerse está dada por:

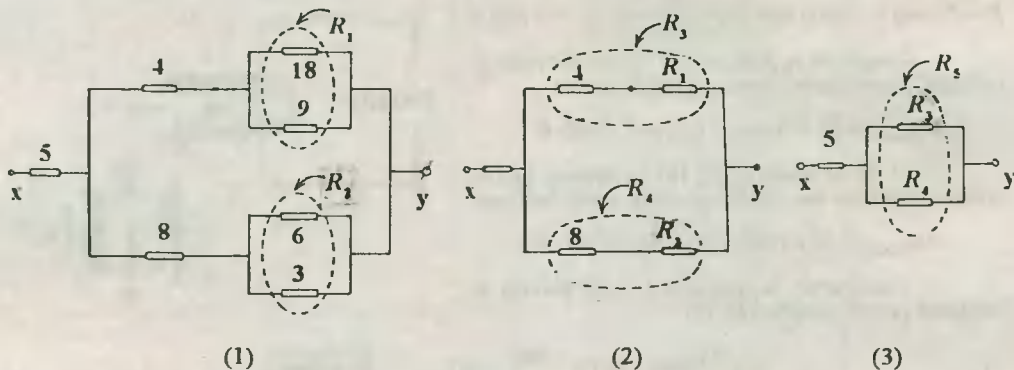
$$Pot = Vi = V(q/t) \Rightarrow Pot = mv^2/2e \cdot Nelt = Nm v^2/2t$$

Y reemplazando datos:

$$Pot = 10^{16} \cdot (9,1 \cdot 10^{-31}) \cdot (10^6)^2 / 2 \cdot 1 \therefore Pot = 4,55 \cdot 10^{-3}\text{ W} = 4,55\text{ mW}$$

CAP 33 ELECTRODINAMICA (SEGUNDA PARTE)

33.1. Reduciendo el circuito a través de los esquemas mostrados tenemos:



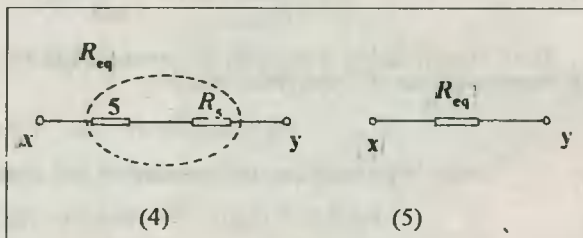
Del esquema (1): $R_1 = \frac{18 \cdot 9}{18 + 9} = 6 \Omega$

$R_2 = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = 2 \Omega$

Del esquema (2): $R_3 = 4 + R_1 = 10 \Omega$

$R_4 = 8 + R_2 = 10 \Omega$

Del esquema (3): $R_5 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 5 \Omega$



Finalmente, del esquema (4): $R_{eq} = 5 + R_5 \therefore R_{eq} = 10 \Omega$

33.2. Del esquema (1): $R_1 = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = 4 \Omega$

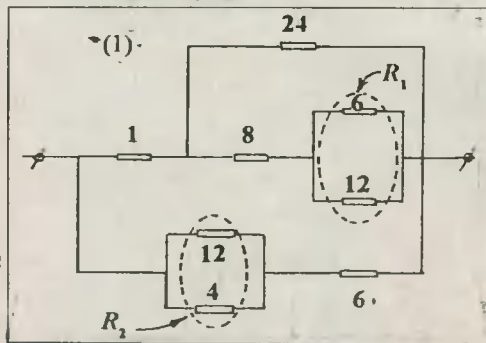
$R_2 = \frac{12 \cdot 4}{12 + 4} = 3 \Omega$

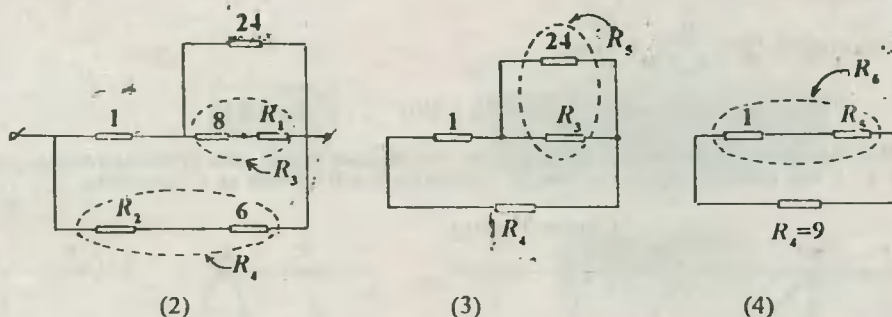
Del esquema (2): $R_3 = 8 + R_1 = 12 \Omega$

$R_4 = R_2 + 6 = 9 \Omega$

Del esquema (3): $R_5 = \frac{24 R_3}{24 + R_3} = 8 \Omega$

Del esquema (4): $R_6 = 1 + R_5 = 9 \Omega$

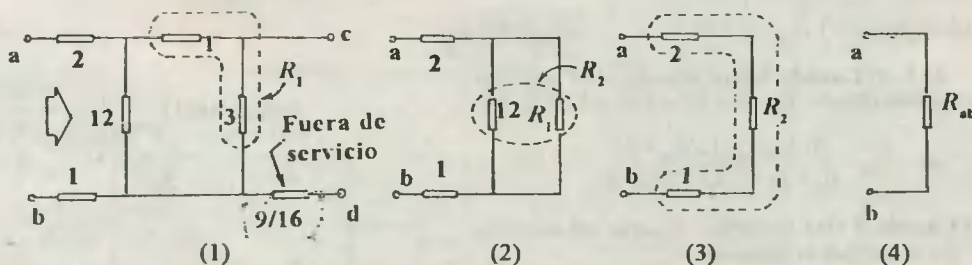
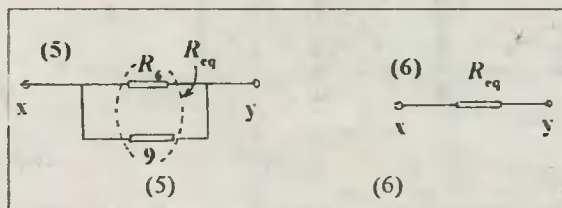




Del esquema (5): $R_{eq} = \frac{9R_6}{9 + R_6}$

$\therefore R_{eq} = 4,5 \Omega$

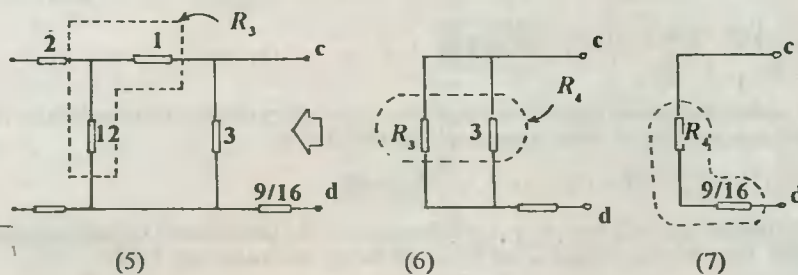
33.3.a. Cálculo de la resistencia equivalente entre a y b. - En este caso la resistencia de $9/16 \Omega$ queda fuera del circuito, dado que los bornes c y d se encuentran desconectados entre sí.



Del esquema (1): $R_1 = 1 + 3 = 4 \Omega$; Del esquema (2): $R_2 = \frac{12R_1}{12 + R_1} = 3 \Omega$

Del esquema (3): $R_{ab} = 2 + R_2 + 1 \therefore R_{ab} = 6 \Omega$

33.3.b. Cálculo de la resistencia equivalente entre c y d. - En este caso las resistencias de 2Ω y 1Ω quedan fuera de servicio, por encontrarse desconectadas entre sí.

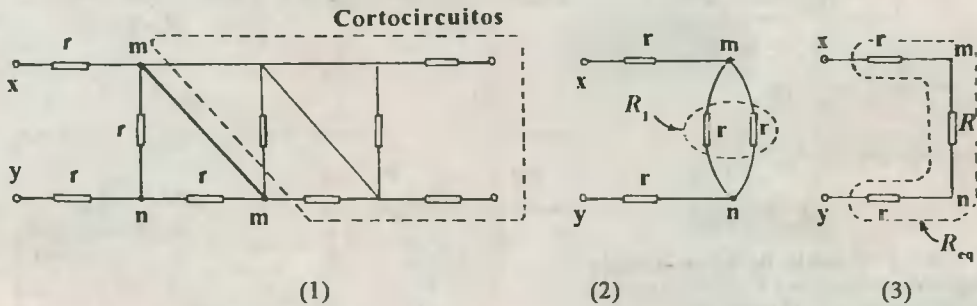


Del esquema (5): $R_3 = 1 + 12 = 13 \Omega$

Del esquema (6): $R_4 = \frac{R_3 \cdot 3}{R_3 + 3} = \frac{39}{16} \Omega$

Finalmente, del esquema (7): $R_{cd} = R_4 + 9/16 \therefore R_{cd} = 3 \Omega$

33.4. Haciendo uso de la regla de los puntos encontramos que la resistencia equivalente vista desde x - y solo contiene cuatro resistencias, quedando la red opuesta en cortocircuito.



Del esquema (2): $R_1 = \frac{r \cdot r}{r + r} = \frac{r}{2}$

Del esquema (3): $R_{eq} = r + R_1 + r \therefore R_{eq} = 5/2 r$

33.5. a) Cuando S está abierto.- Del esquema (1) se observa que: $R_1 = 4 + 8 = 12 \Omega$, y $R_2 = R_x + 4$.

$$\Rightarrow R_{ab} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{12(R_x + 4)}{12 + (R_x + 4)} \dots (1)$$

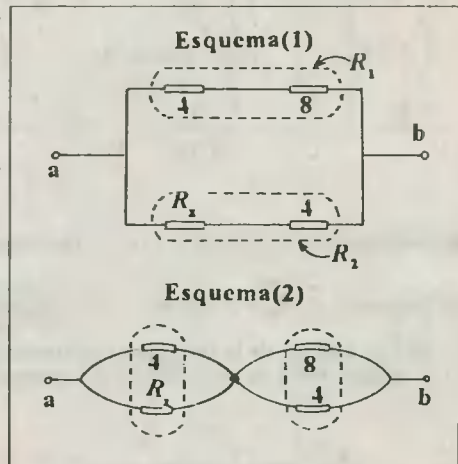
b) Cuando S está cerrado.- A partir del esquema (2) se verifica lo siguiente:

$$R_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \text{ y } R_4 = \frac{8 \cdot 4}{8 + 4} = \frac{8}{3} \Omega$$

$$\Rightarrow R_{ab} = R_3 + R_4 = \frac{4R_x}{4 + R_x} + \frac{8}{3} \dots (2)$$

Finalmente, igualamos (1) y (2):

$$\frac{12(R_x + 4)}{16 + R_x} = \frac{4R_x}{4 + R_x} + \frac{8}{3} \therefore R_x = 2 \Omega$$



33.6. Usando la regla de los puntos x - y, encontramos que las tres resistencias presentan los mismos bornes, y por consiguiente se encuentran acopladas en paralelo.

Del esquema (2): $1/R_{eq} = 1/r + 1/r + 1/r \therefore R_{eq} = r/3$

33.7. Utilizamos aquí los puntos x - y - z, y ordenaremos todas las resistencias comprendidas entre dichos puntos, sin perder de vista que los bornes de acceso al circuito son x e y.

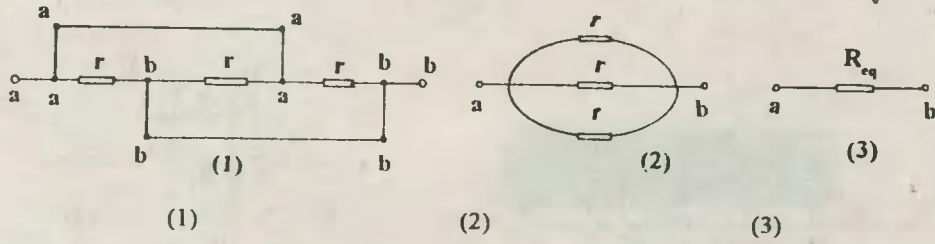


Fig. Solución Prob. 33.6

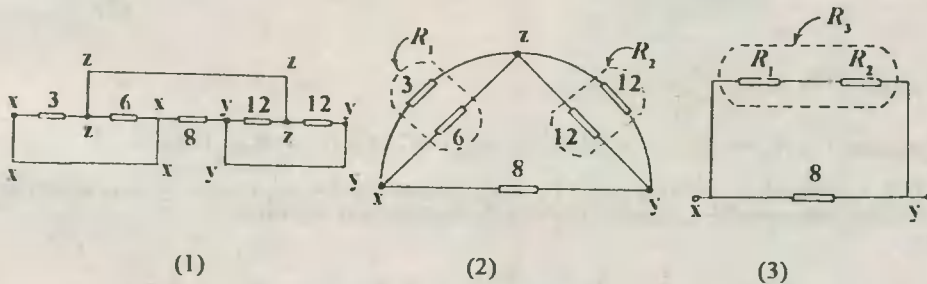


Fig. Solución Prob. 33.7

Del esquema (1): $R_1 = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \Omega$

Del esquema (2): $R_2 = \frac{12 \cdot 12}{12 + 12} = 6 \Omega$

Del esquema (3): $R_3 = R_1 + R_2 = 8 \Omega$

Del esquema (4): $R_{eq} = \frac{8 \cdot R_3}{8 + R_3}$

$\therefore R_{eq} = 4 \Omega$

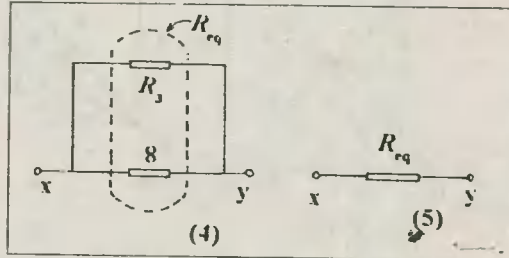
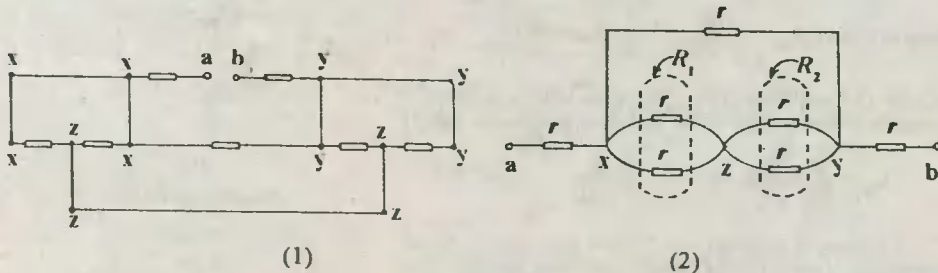


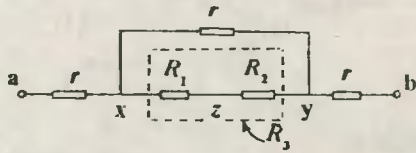
Fig. Solución Prob. 33.7 (continuación)

33.8. Hacemos uso de los puntos a, x, z, y, b, entre los cuales colocaremos las resistencias del sistema.

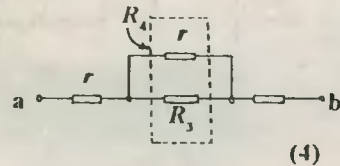


Del esquema (2): $R_1 = R_2 = r/2$

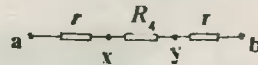
Del esquema (3): $R_3 = R_1 + R_2 = r$



(3)



(4)

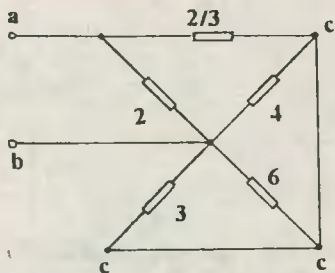


(5)

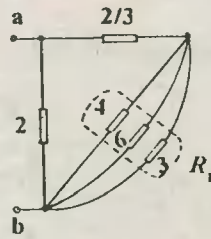
Del esquema (4): $R_4 = \frac{r \cdot R_3}{r + R_3} = \frac{r}{2}$

Del esquema (5): $R_{eq} = r + R_4 + r = 5/2 r \Rightarrow R_{eq} = 5/2 (4 \Omega) \therefore R_{ad} = 10 \Omega$

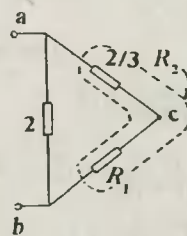
33.9. Si utilizamos un tercer punto C, observaremos que las resistencias se acomodan en asociaciones más conocidas, según se muestra en los esquemas siguientes.



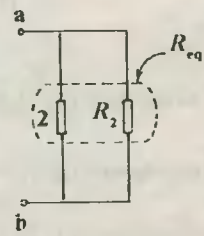
(1)



(2)



(3)



(4)

Del esquema (2): $1/R_1 = 1/4 + 1/6 + 1/3 \Rightarrow R_1 = 4/3 \Omega$

Del esquema (3): $R_2 = 2/3 + R_1 = 2 \Omega$

Del esquema (4): $R_{eq} = \frac{2 \cdot R_2}{2 + R_2} \therefore R_{eq} = 1 \Omega$

33.10. Del esquema (1) reconocemos que la resistencia equivalente inicial y final viene dada por la relación (33.7).

$$R_{0e} = \frac{R_{01} \cdot R_{02}}{R_{01} + R_{02}}, \text{ y } R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \dots (*)$$

Luego, al sustituir en (*) cada una de estas resistencias por la relación (32.14), considerando α_e el coeficiente de temperatura para la resistencia equivalente final (R_e), se tendrá lo siguiente:

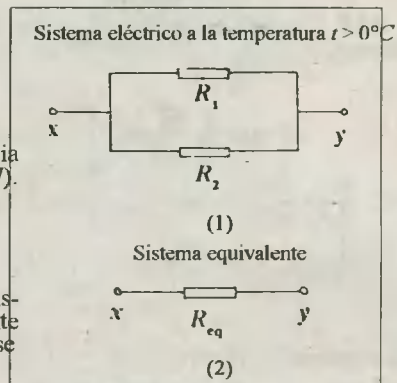


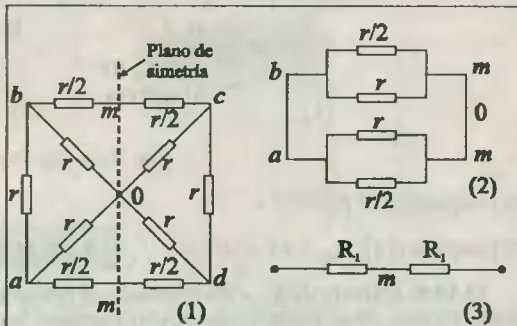
Fig. Solución Prob. 33.10

$$R_o (1 + \alpha_e \cdot \Delta t) = \frac{R_{o_1}(1 + \alpha_1 - \Delta t)R_{o_2}(1 + \alpha_2 \cdot \Delta t)}{R_{o_1}(1 + \alpha_1 \cdot \Delta t) + R_{o_2}(1 + \alpha_2 \cdot \Delta t)}$$

Efectuando operaciones y reduciendo términos obtenidos lo siguiente:

$$\alpha_e = \frac{\alpha_1 \cdot R_{o_1} + \alpha_2 \cdot R_{o_2}}{R_{o_1} + R_{o_2}} \quad \therefore \quad \alpha_e = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

33.11. a. Cálculo de R_{ab} . En este caso trazamos un plano de simetría vertical que pase por O de modo que los puntos de corte presenten el mismo potencial. Luego, del esquema mostrado, sólo reducimos la mitad izquierda del sistema.

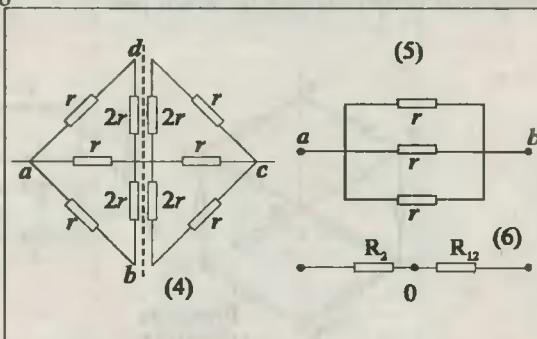


Del esquema (2): $R_1 = 4/15r$

Del esquema (3): $R_{ab} = 2R_1 = 8/15 r$

$$\therefore \quad R_{ab} = 8 \Omega$$

33.11. b. Cálculo de R_{ac} . Para este caso reorientamos el circuito de modo que el plano de simetría quede en posición vertical y pase por los nudos d - o - d. A continuación, reducimos la mitad izquierda del sistema. Veamos:



Del esquema (4) vemos que se anulan las resistencias ubicadas en el plano de simetría, por presentar el mismo potencial.

Del esquema (5): $R_2 = r/3$

Del esquema (6): $R_{ad} = 2R_2 = 2/3 r$

$$\therefore \quad R_{ad} = 10 \Omega$$

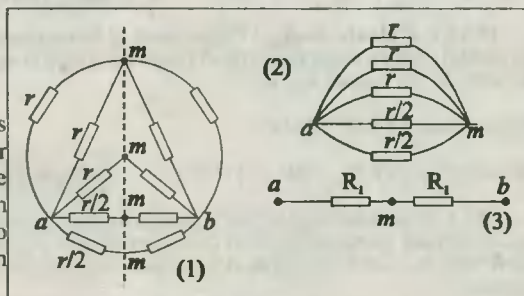
33.12. Hagamos uso de un plano de simetría equidistante de los bornes a - b. Asimismo, procedemos a cortocircuitar la resistencia contenida en el plano de simetría (equipotencial). Luego, tomando la mitad izquierda del sistema, lo reducimos según se muestra en los esquemas adjuntos.

Del esquema (2): $R_1 = r/7$

Del esquema (3): $R_{ab} = 2R_1 = 2/7 r$

$$\therefore \quad R_{ab} = 2\Omega$$

33.13. a. Cálculo de R_{ad} . Reconocemos que el plano de simetría es el plano que pasa por O, equidista de los bornes a y d. Al hacer este trazo, todos los puntos de corte quedarán cortocircuitados, por encontrarse al mismo potencial. Luego, procedemos como se hizo en los problemas anteriores.



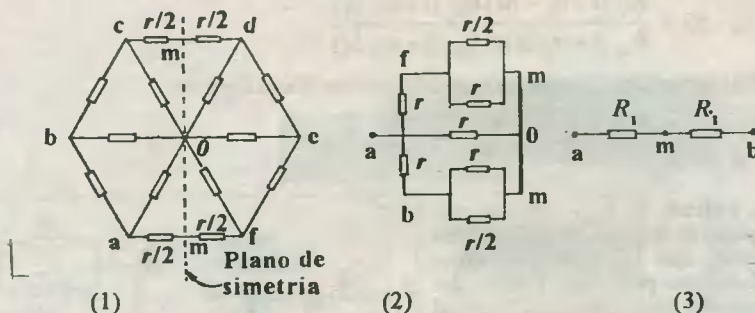
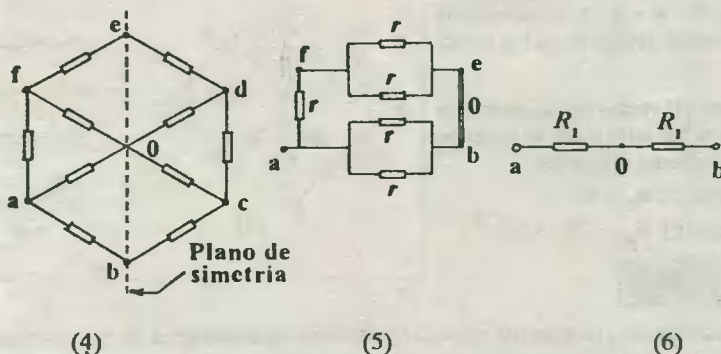


Fig. Solución Prob. 33.13

Del esquema (2): $R_1 = 2/5 r$

Del esquema (3): $R_{ab} = 2R_1 = 4/5 r \quad \therefore \quad R_{ab} = 16 \Omega$

33.13.b. Cálculo de R_{ac} . Reorientando el hexágono hasta que el plano de simetría quede en posición vertical, observaremos que al cortocircuitar los puntos e-o-b anulamos automáticamente las resistencias comprendidas entre dichos puntos.



Del esquema (5): $R_1 = 3/8 r$

Del esquema (6): $R_{ac} = 2R_1 = 3/4 r \quad \therefore \quad R_{ac} = 15 \Omega$

33.13.c. Cálculo de R_{ab} . Orientemos el hexágono de manera que el lado ab quede en posición horizontal. Así se observará que el plano de simetría será vertical, pasando por el punto O, y equidistante de los bornes a y b.

Del esquema (8): $R_1 = 11/40 r$

Del esquema (9): $R_{ab} = 2R_1 = 11/20 r \quad \therefore \quad R_{ab} = 11 \Omega$

33.14. Tomando un plano de simetría equidistante de los bornes a y b encontramos que la resistencia vertical queda anulada al cortocircuitar los puntos de igual potencial m y n. Seguidamente, reducimos la mitad izquierda del sistema original, tal como se hizo en los ejercicios anteriores. Veamos.

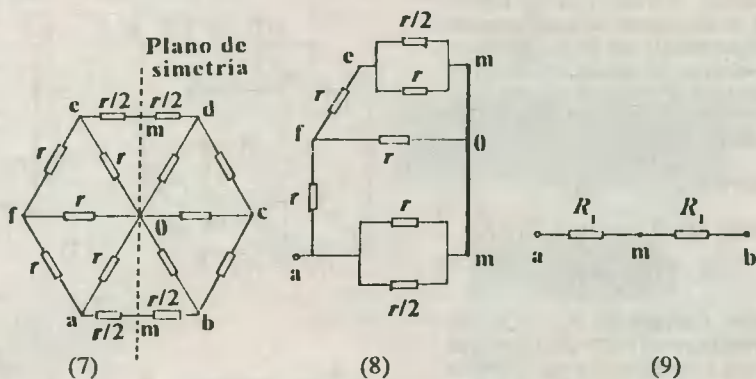


Fig. Solución Prob. 33.13.c

Del esquema (2): $R_1 = 3/5 r$

Del esquema (3): $R_{ab} = 2R_1 = 6/5 r$

$\therefore R_{ab} = 6 \Omega$

33.15. Trazando el plano de simetría vertical, equidistante de los bornes a y b, encontramos que las resistencias ubicadas en dicho plano quedan cortocircuitadas. Luego, procediendo como en los ejercicios anteriores, tenemos:

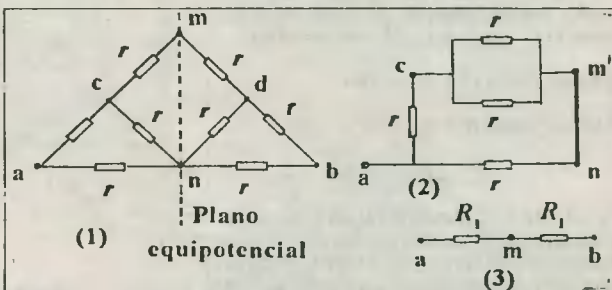
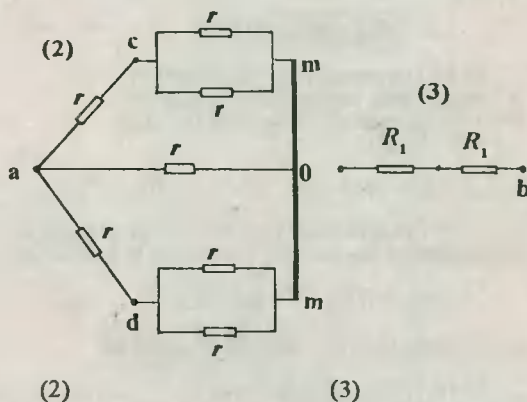
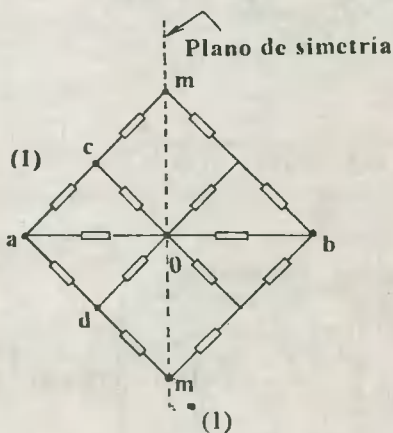


Fig. Solución Prob. 33.14



Del esquema (2): $R_1 = 3/7 r$

Del esquema (3): $R_2 = 2R_1 = 6/7 r \therefore R_2 = 6 \Omega$

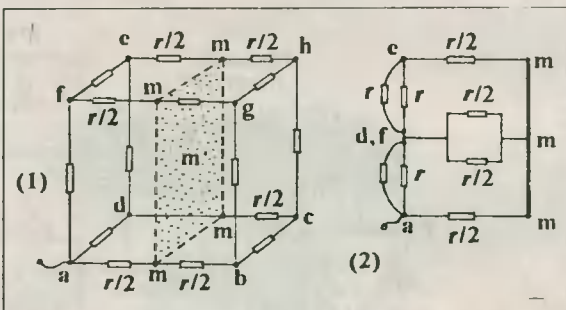
33.16.a. Debemos reconocer que el plano de simetría es vertical y equidistante de los bornes a

y b. Asimismo, se observa que los bornes d-f y c-d se encuentran respectivamente al mismo potencial, por lo que podemos cortocircuitarlos sin riesgo de alterar la resistencia total del sistema original. Examinando y reduciendo la mitad izquierda del hexaedro tenemos:

Del esquema (2): $R_1 = 7/24 r$

Del esquema (3): $R_{ab} = 2R_1 = 7/12 r$

$\therefore R_{ab} = 7 \Omega$

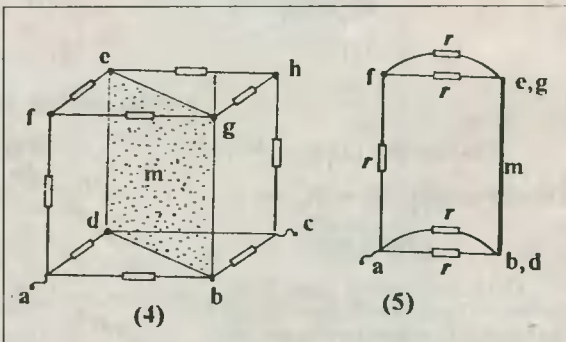


33.16.b. Cálculo de R_{ac} - En este caso se aprecia que el plano de simetría es equidistante a los bornes a y c. Además es vertical, y contiene a los bornes b-d-e-g. Así, las resistencias verticales quedan cortocircuitadas, y por tanto fuera de servicio. A continuación, procederemos del mismo modo que en el caso anterior.

Del esquema (5): $R_2 = 3/8 r$

Del esquema (6): $R_{ac} = 2R_2 = 3/4 r$

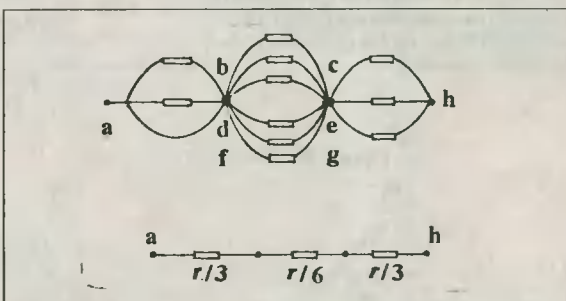
$\therefore R_{ac} = 9 \Omega$



33.16.c. Cálculo de R_{ah} - Procederemos en base al mismo fundamento que se empleó para el problema 31.44.b, de modo que las resistencias quedan acopladas según se muestra en el respectivo esquema.

Del esquema (7): $R_{ah} = r/3 + r/6 + r/6$

$\therefore R_{ah} = 5/6 r = 10 \Omega$



33.17. Del circuito (1) podemos aplicar la Ley de Ohm, considerando que la resistencia equivalente viene dada por: $R_{eq} = r + R_1$. Luego:

$\mathcal{E} = i_1(r + R_1) \Rightarrow \mathcal{E} = 3(r + 10) \dots (1)$

Del circuito (2) reconocemos que la resistencia equivalente es $R_2 = r + R_2$. Luego, por la Ley de Ohm:

$\mathcal{E} = i_2(r + R_2) \Rightarrow \mathcal{E} = 2(r + 16) \dots (2)$

Resolviendo (1) y (2): $\mathcal{E} = 36 \text{ V}, r = 2 \Omega$

33.18. Utilizando el teorema de la trayectoria encontraremos la fuerza electromotriz (\mathcal{E}) de la batería y su resistencia interna (r).

Del esquema (1).- Recorriendo la rama de b hacia a:

$V_b + \mathcal{E} - i_1 r = V_a \Rightarrow \mathcal{E} - i_1 r = V_a - V_b \Rightarrow \mathcal{E} - 3r = 8,5 \dots (1)$

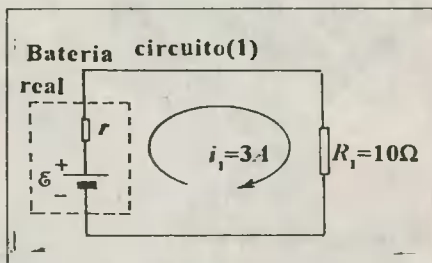


Fig. (1). Solución Prob. 33.17

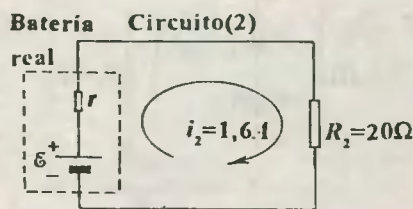


Fig. (2). Solución Prob. 33.17

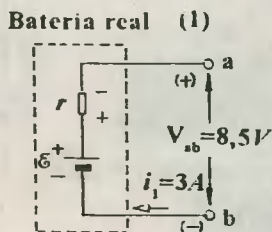


Fig. (1). Solución Prob. 33.18

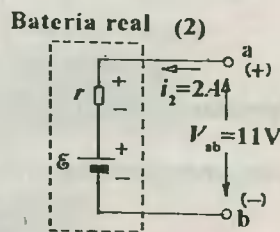


Fig. (2). Solución Prob. 33.18

Del esquema (2).- Recorriendo la rama de b hacia a:

$$V_b + \epsilon + i_2 r = V_a \Rightarrow \epsilon + i_2 r = V_a - V_b \Rightarrow \epsilon + 2r = 11 \dots (2)$$

Finalmente, resolvemos las ecuaciones (1) y (2), obteniendo los siguientes resultados:

$$\epsilon = 10 \text{ V}; r = 0,5 \Omega$$

33.19. Del esquema (1) se observa que la fem total viene dada por: $\epsilon_{t1} = \epsilon_1 + \epsilon_0 = 5 + \epsilon_0$. Luego, de acuerdo con la Ley de Ohm se tiene que:

$$\epsilon_{t1} = i_1(R + r) \Rightarrow 5 + \epsilon_0 = 1(1 + r) \dots (1)$$

Del esquema (2) se verifica que la fem total es ahora: $\epsilon_{t2} = \epsilon_2 + \epsilon_0 = 20 + \epsilon_0$. Aplicando entonces la Ley de Ohm se tendrá que:

$$\epsilon_{t2} = i_2(R + r) \Rightarrow 20 + \epsilon_0 = 2(1 + r) \dots (2)$$

Finalmente, resolviendo (1) y (2) encontramos que:

$$\epsilon_0 = 10 \text{ V}; r = 14 \Omega$$

Luego, en la caja existe una fuente de tensión de 10 V y una resistencia de 14 Ω

33.20. Reconocemos que la corriente (i) es la misma que recorre a las resistencias de 1 Ω, 4 Ω y 5 Ω, ya que ellas están conectadas en serie, y el resto de las resistencias se encuentran cortocircuitadas. Luego, por la Ley de Ohm se tendrá lo siguiente:

$$i = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{30 \text{ V}}{(1 + 4 + 5) \Omega} \therefore i = 3 \text{ A}$$

33.21. Del esquema (1) se tiene que la potencia consumida por R_1 viene dada por:

$$Pot_1 = i_1^2 R_1 = \left(\frac{\epsilon}{r + R_1} \right)^2 R_1 \dots (1)$$

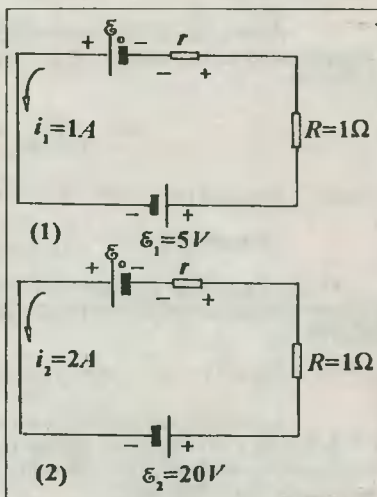
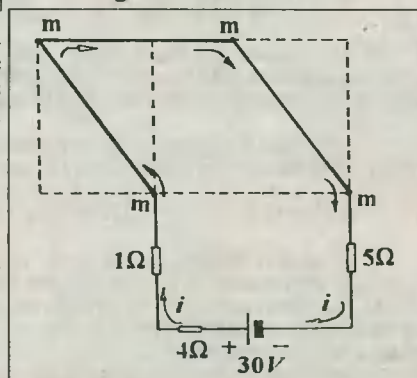


Fig. Solución Prob. 33.19



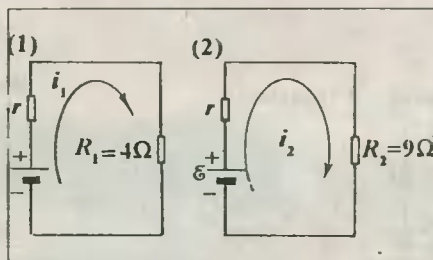
Del esquema (2) podemos calcular la potencia consumida por R_2 , a partir de la siguiente relación:

$$Pot_2 = i_2^2 R_2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{r + R_2}\right)^2 R_2 \dots (2)$$

Igualando (1) y (2): $\mathcal{E}^2 \frac{R_1}{(r + R_1)^2} = \mathcal{E}^2 \frac{R_2}{(r + R_2)^2}$

Efectuando operaciones encontramos que: $r = \sqrt{R_1 R_2}$

$$\therefore \boxed{r = 6 \Omega}$$



33.22. De los datos podemos encontrar la resistencia de cada lámpara, para lo cual empleamos la relación (32.18).

Lámpara (1): $R_1 = V^2/Pot_1 = 120^2/60 \Rightarrow R_1 = 240 \Omega$

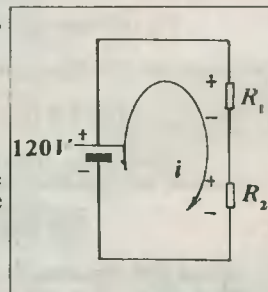
Lámpara (2): $R_2 = V^2/Pot_2 = 120^2/40 \Rightarrow R_2 = 360 \Omega$

Ahora, del circuito mostrado podemos calcular la potencia que consume cada resistencia, en base a la participación de la intensidad de corriente.

$$i = \frac{\mathcal{E}}{(R_1 + R_2)} = 0,2 A$$

Luego: Lámpara (1): $Pot_1 = i^2 R_1 = (0,2)^2 \cdot 240 \therefore \boxed{Pot_1 = 9,6 W}$

Lámpara (2): $Pot_2 = i^2 R_2 = (0,2)^2 \cdot 360 \therefore \boxed{Pot_2 = 24,4 W}$

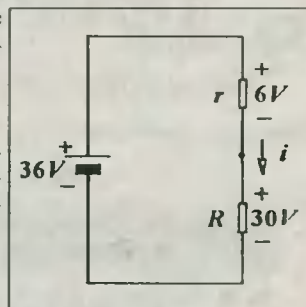


33.23. A partir de los datos del foco encontramos que él puede soportar una intensidad de corriente (i) que viene dada por la relación (32.18).

$$Pot = Vi \Rightarrow i = Pot/V = 3/6 \Rightarrow i = 0,5 A$$

Asimismo, del circuito mostrado vemos que el foco absorbe 6 V de los 36 V que ofrece la fuente. Luego, la resistencia R de protección debe consumir 30 V. Por ello, la potencia que consume esta resistencia viene dada por:

$$Pot' = Vi = 30 \cdot 0,5 \therefore \boxed{Pot' = 15 W}$$

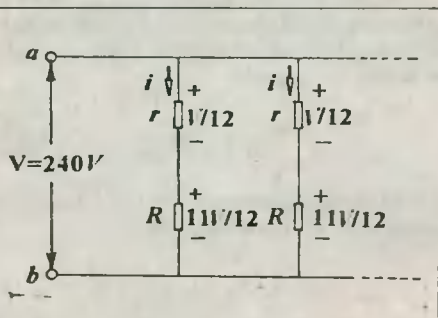


33.24. Cuando los focos están conectados en serie, experimentan una tensión $V/12$, siendo V la tensión de un domicilio, cuyo valor es 240 voltios.

Luego, la intensidad de corriente (i) que lo recorre está dada por la relación de potencia eléctrica.

$$Pot = (V/12)i \Rightarrow i = 12Pot/V \dots (*)$$

Luego, cuando los focos se instalan en serie con una resistencia R de protección y todas las demás del mismo modo pero en paralelo, experimentan en conjunto la misma tensión V , el que se reparte de modo que el foco absorbe $V/12$, y su protección $11V/12$, siendo la corriente de igual intensidad que la encontrada



en (*) para que el brillo sea el mismo. Aplicando ahora la Ley de Ohm se tiene :

$$R = \frac{11V/12}{i} = \frac{11V/12}{12Pot/V} = \frac{11V^2}{144Pot} \therefore \boxed{R = 440 \Omega}$$

33.25. Sea W la energía eléctrica que debe consumir el agua en cualquiera de los casos señalados. Luego, cuando las resistencias R_1 y R_2 actúan en el calentamiento, sometidas a la tensión V , se desprenden energías cuyos valores, según el problema, vienen dados por la relación (32.17):

Cuando R_1 actúa sólo: $W = (V^2/R_1)t_1 \Rightarrow W/t_1 = V^2/R_1 \dots (1)$

Cuando R_2 actúa sólo: $W = (V^2/R_2)t_2 \Rightarrow W/t_2 = V^2/R_2 \dots (2)$

Cuando R_1 y R_2 actúan en paralelo: $W = W_1 + W_2 = (V^2/R_1)t_3 + (V^2/R_2)t_3 \dots (3)$

Luego, reemplazando (1) y (2) en (3): $W = (W/t_1 + W/t_2)t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$

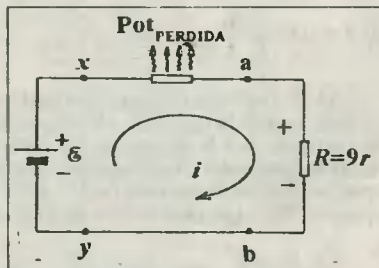
Reemplazando valores obtenemos: $t_3 = 10 \text{ minutos}$

33.26. Del esquema adjunto se reconoce que la potencia que suministra la fuente a todo el circuito a partir de x-y está dada por:

$$Pot_{\text{entrada}} = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r} \dots (1)$$

Asimismo, la potencia que se consume entre a-b viene dada por:

$$Pot_{\text{salida}} = i^2 R = \left(\frac{\mathcal{E}}{R+r}\right)^2 R \dots (2)$$



Finalmente, la eficiencia (η) del circuito viene dada por la relación (32.19). Luego, de (1) y (2):

$$\eta = \frac{Pot_{\text{salida}}}{Pot_{\text{entrada}}} = \frac{\mathcal{E}^2 \frac{R}{(R+r)^2}}{\frac{\mathcal{E}^2}{R+r}} \Rightarrow \eta = \frac{R}{R+r}$$

$$\therefore \boxed{\eta_{\text{máx}} = 90\%}$$

33.27. Del circuito adjunto se tiene que la potencia eléctrica que consume la resistencia externa (R) está dada por:

$$Pot = i^2 R = \left(\frac{\mathcal{E}}{R+r}\right)^2 R \Rightarrow Pot = \mathcal{E}^2 \frac{R}{(r+R)^2} \dots (*)$$

Si hacemos una representación gráfica de la relación (*), donde R es considerada como variable independiente, encontraremos una curva cuyo máximo se obtiene, de acuerdo con el Teorema de Máxima Potencia, -item (33.3)- cuando $R = r$. Luego, al sustituir en (*), esta potencia está dada por:

$$Pot = \mathcal{E}^2/4r$$

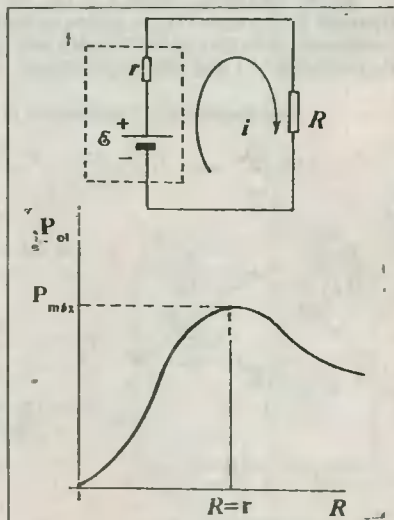


Fig. Solución Prob. 33.27

Finalmente, la intensidad de corriente (i) en estas condiciones viene dada por la Ley de Ohm.

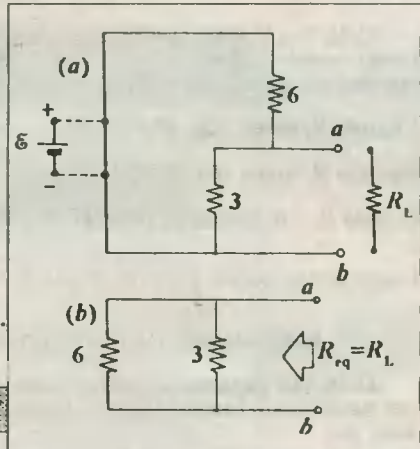
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{6}{2+0,1} \therefore i = 60 \text{ A}$$

33.28. Utilizando el Teorema de la Máxima Potencia procederemos a cortocircuitar la fuente de tensión, y calcularemos así la resistencia equivalente comprendida entre los bornes a-b. En el esquema (a) hemos retirado la fuente de tensión y abierto el circuito entre los bornes a-b, observándose en el esquema (b) que las resistencias, luego del paso anterior, quedan en paralelo. De acuerdo con el teorema señalado, la resistencia equivalente obtenida (R_{eq}) deberá ser igual a la resistencia variable R_L .

$$R_L = R_{eq} = \frac{6 \cdot 3}{6+3} \therefore R_L = 2 \Omega$$

Observación. - Puede verificarse que la potencia consumida por esta resistencia viene dada por:

$$Pot = 100 \frac{R_L}{(R_L + 2)^2} = 100 \frac{2}{(2+2)^2} \therefore Pot = 12,5 \text{ W}$$



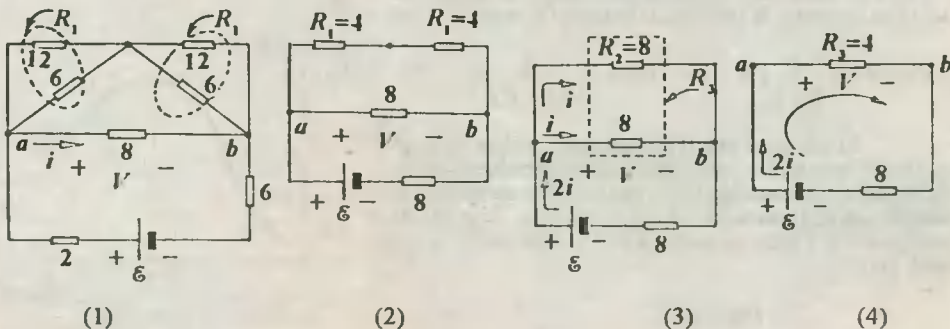
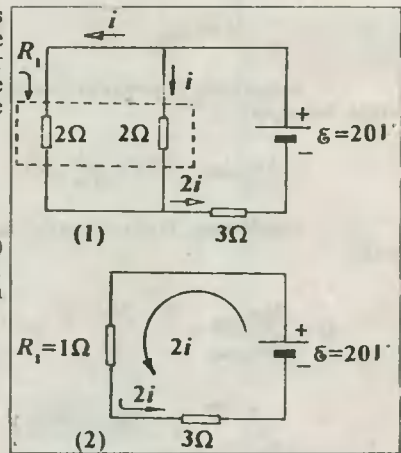
33.29. Dado que el circuito es simétrico, sólo analizaremos el lado izquierdo de la red. Del esquema (1) se observa que la corriente i es la misma en las ramas verticales, por ser éstas de igual valor. Asimismo se comprueba que la corriente que pasa por la resistencia de 3Ω es $2i$. Del esquema (2) se observa que al aplicar la Ley de Ohm se verifica que:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} \Rightarrow 2i = \frac{20}{3+1} \therefore i = 2,5 \text{ A}$$

33.30. Debemos reconocer que el amperímetro (A) marcará la corriente (i) que pasa por la resistencia de 8Ω . Asimismo, la lectura del voltímetro será igual a la diferencia de potencial (V) que ésta experimenta.

Del esquema (4) aplicamos la Ley de Ohm.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} \Rightarrow 2i = \frac{24}{4+8} \therefore i = 1 \text{ A}$$



Finalmente, calculamos la diferencia de potencial que existe entre a y b.

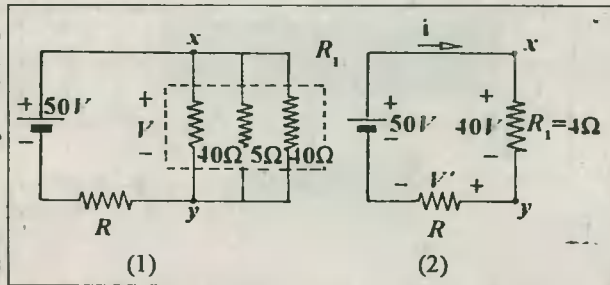
$$V = (2i)R_3 = (2.1)4 \quad \therefore \quad \boxed{V = 8 \text{ voltios}}$$

33.31. Analizando la resistencia de 5Ω , encontramos la tensión (V) que experimenta a partir de la relación (32.18), dado que se conoce la potencia disipada por ella.

$$Pot = V^2/R \Rightarrow V = \sqrt{Pot \cdot R} = \sqrt{320 \cdot 5}$$

$$\Rightarrow V = 40 \text{ voltios}$$

Seguidamente, reducimos el circuito tal como se señala en los esquemas (1) y (2).



Del esquema (2) se reconoce que la tensión de la batería ($50 V$) se reparte en $40 V$ y V' . Luego, $V' = 10 V$. Asimismo, la corriente (i) se determinará a partir de la rama x-y.

$$i = V/R_1 = 40/4 \Rightarrow i = 10 A$$

Finalmente, la resistencia R se podrá calcular de la Ley de Ohm.

$$R = V'/i = 10/10 \quad \therefore \quad \boxed{R = 1 \Omega}$$

33.32. Del circuito (1) reconocemos que: $R_1 = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \Omega$

Del circuito (2) logramos encontrar la intensidad de corriente (i).

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{60}{2 + 4} \Rightarrow i = 10 A$$

De esto se desprende que las tensiones V_1 y V_2 son:

$$V_1 = iR_1 = 10 \cdot 2 \Rightarrow V_1 = 20 V$$

$$\Rightarrow V_2 = 60 - V_1 = 60 - 20 \Rightarrow V_2 = 40 V$$

Finalmente, las potencias eléctricas que consumen las resistencias serán:

$$Pot_{(3)} = V_1^2/R_1 = 20^2/3 \quad \therefore \quad \boxed{Pot_{(3)} = 133,3 W}$$

$$Pot_{(6)} = V_1^2/R_2 = 20^2/6 \quad \therefore \quad \boxed{Pot_{(6)} = 66,7 W}$$

$$Pot_{(4)} = V_2^2/R_3 = 40^2/4 \quad \therefore \quad \boxed{Pot_{(4)} = 400 W}$$

33.33. Del circuito (1) reconocemos que la rama a-b está en paralelo con el resto de las resistencias. Luego, al trasladarlo completamente hacia abajo no alterará la corriente i_0 que buscamos, tal como se señala en el circuito (2). En el circuito (3), utilizando la Ley de Ohm encontramos la intensidad de corriente.

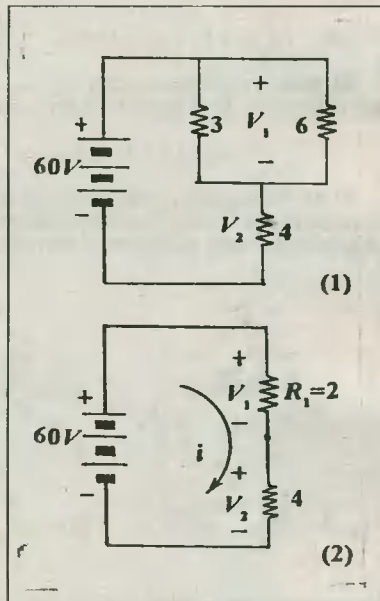


Fig. Solución Prob. 33.32

$$i_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{60}{4 + 1} \quad \therefore \quad \boxed{i_0 = 4 A}$$

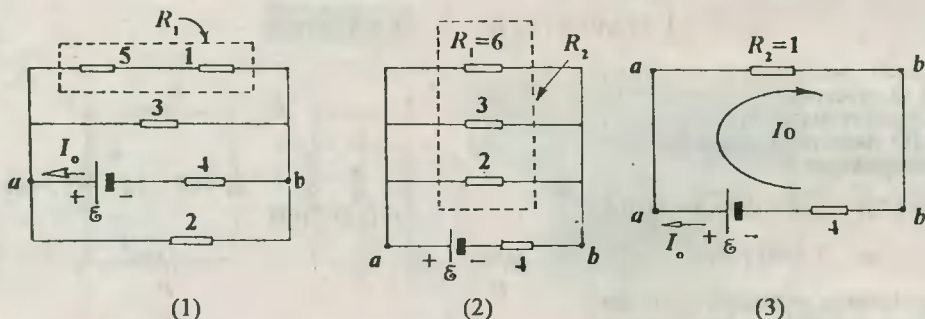


Fig. Solución Prob. 33.33

33.34.a. Del circuito (1) se calcularán las tensiones V_1 y V_2 , para lo cual se determinará el valor de la corriente (i) que es igual en ambas ramas, según se señala en el circuito (2), del cual se tiene que:

$$i = \epsilon/R = 80/10 \quad \therefore \quad \boxed{i = 8 \text{ A}}$$

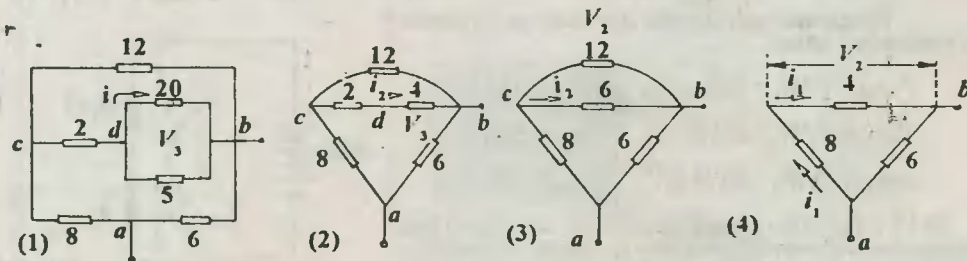
Luego:

$$V_1 = 8i = 64 \text{ V}, \text{ y } V_2 = 2i = 16 \text{ V}.$$

33.34.b. Finalmente, aplicaremos el teorema de la trayectoria en la rama $xrsy$.

$$V_x - V_1 + V_2 = V_y \Rightarrow V_x - V_y = V_1 - V_2 \quad \therefore \quad \boxed{V_x - V_y = 48 \text{ V}}$$

33.35. De acuerdo con la reducción de las resistencias según se señalan en los esquemas adjuntos, se concluye que la resistencia equivalente es $R_{eq} = 4 \Omega$. A partir de él, retrocederemos la revisión de los esquemas hasta encontrar la corriente i_0 .



Del esquema (6): $V_1 = i_0 \cdot R_{eq} = 22,5 \cdot 4 = 90 \text{ V}$

Del esquema (5): $i_1 = V_1/12 = 90/12 = 7,5 \text{ A}$

Del esquema (4): $V_2 = i_1(4 \Omega) = 7,5 \cdot 4 = 30 \text{ V}$

Del esquema (3): $i_2 = V_2/6 \Omega = 30/6 = 5 A$

Del esquema (2): $V_3 = i_2(4 \Omega) = 5 \cdot 4 = 20 V$

Del esquema (1): $i = V_3/20 \Omega = 20/20$

$\therefore i = 1 A$

33.36. Señalando con x, y, z a las intensidades de corriente que buscamos, procedemos en primer lugar a reducir las resistencias según se describe en los esquemas adjuntos, hasta llegar a $R_{eq} = 30 \Omega$.

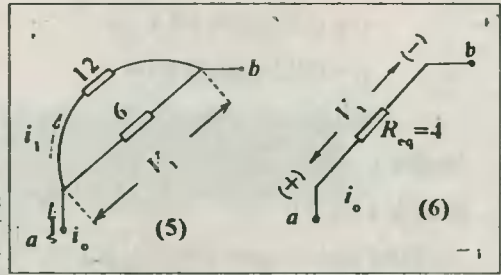
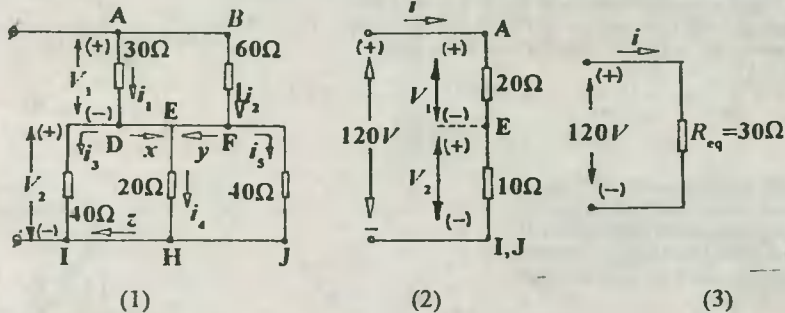


Fig. Solución Prob. 33.35 (continuación)



Del esquema (3): $i = 120/30 = 4 A$

Del esquema (2): $V_1 = i(20 \Omega) = 80 V$

Del esquema (1): $i_1 = V_1/30 = 80/30 = 8/3 A$

$i_2 = V_1/60 = 80/60 = 4/3 A$

$i_3 = i_5 = V_2/40 = 40/40 = 1 A$

$i_4 = V_2/20 = 40/20 = 2 A$

Finalmente, al analizar los nudos D, F y H tendremos:

Nudo D: $i_3 + x = i_1 \Rightarrow 1 + x = 8/3 \therefore x = 5/3 A$

Nudo F: $y + i_5 = i_2 \Rightarrow y + 1 = 4/3 \therefore y = 1/3 A$

Nudo H: $z = i_4 + i_5 = 2 + 1 \therefore z = 3 A$

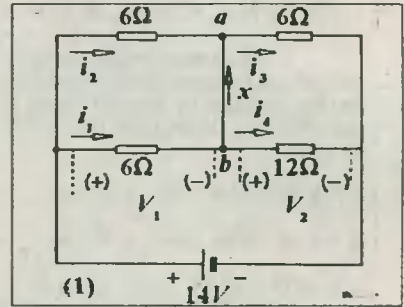


Fig. (1). Solución Prob. 33.37

33.37. Después de reducir las resistencias del circuito encontramos que $R_{eq} = 7 \Omega$. Luego, retrocediendo en el análisis de los circuitos tendremos:

Circuito (3): $i = \mathcal{E}/R_{eq} = 14/7 = 2 A$

Circuito (2): $V_1 = i(3 \Omega) = 6 V$

$V_2 = i(4 \Omega) = 8 V$

Circuito (1): $i_1 = i_2 = V_1/6 = 6/6 = 1 A$

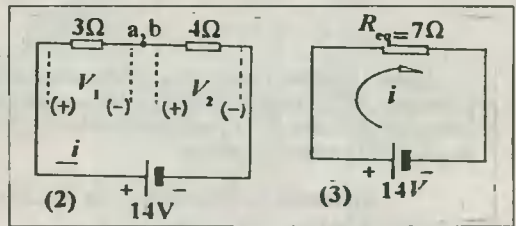


Fig. (2) y (3). Solución Prob. 33.37

$$i_3 = V_2/6 = 8/6 = 4/3 A$$

$$i_4 = V_2/12 = 8/12 = 2/3 A$$

Finalmente, al analizar los nudos a y b comprobamos lo siguiente:

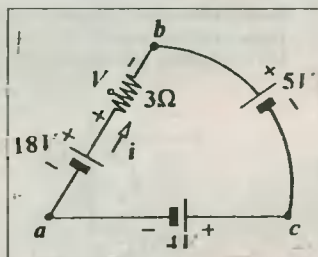
$$\text{Nudo a: } i_2 + x = i_3 \Rightarrow 1 + x = 4/3 \therefore x = 1/3 A$$

$$\text{Nudo b: } x + i_4 = i_1 \Rightarrow x + 2/3 = 1 \therefore x = 1/3 A$$

33.38. Seleccionando el trayecto abc, el cual nos ofrece el mayor número de datos, observamos que por el sentido de la corriente i , ésta polariza a la resistencia según como se ha indicado. Luego, la tensión V que soporta viene dado por la Ley de Ohm: $V_o = iR = 3i$. Seguidamente, aplicaremos la Segunda Ley de Kirchoff en el recorrido abca, tal como se señala en el ítem 33.3.b.

$$\text{abca: } \Sigma V = 0 \Rightarrow -18 + V_o + 5 + 4 = 0 \Rightarrow V_o = 9 V$$

$$\Rightarrow 3i = 9 \therefore i = 3 A$$



33.39. Del esquema adjunto podemos reconocer que todas las resistencias experimentan una tensión que es igual al de la fuente que se encuentra en paralelo con ella. De este modo, deducimos que:

$$V_1 = 12 V; V_2 = 20 V; V_3 = 32 V$$

De acuerdo con la polaridad señalada en las resistencias, se reconocen los sentidos de las corrientes, y sus valores se determinan por la Ley de Ohm

$$i_1 = V_1/3 = 12/3 \Rightarrow i_1 = 4 A$$

$$i_2 = V_2/4 = 20/4 \Rightarrow i_2 = 5 A$$

$$i_3 = V_3/16 = 32/16 \Rightarrow i_3 = 4 A$$

Finalmente, se aplicará la Primera Ley de Kirchoff en el nudo B para calcular la corriente i_x pedida.

$$\Sigma i_{\text{salen}} = \Sigma i_{\text{llegan}} \Rightarrow i_x + i_3 = i_1 + i_2$$

$$\Rightarrow i_x + 4 = 4 + 5 \therefore i_x = 5 A$$

33.40. Debemos reconocer que las intensidades de corriente i_x e i_y podrán calcularse si previamente calculamos las tensiones V_x y V_y señaladas en las resistencias de 2Ω y 3Ω respectivamente.

Aplicando la Segunda Ley de Kirchoff tendremos:

$$1) \text{ Recorrido abca: } \Sigma V = 0 \Rightarrow -12 + V_x + 8 = 0 \Rightarrow V_x = 4 V$$

$$\text{Pero: } i_x = V_x/2 \Omega = 4/2 \Rightarrow i_x = 2 A$$

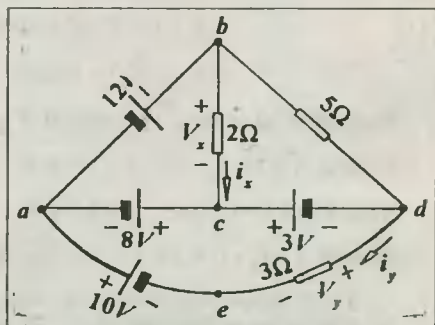
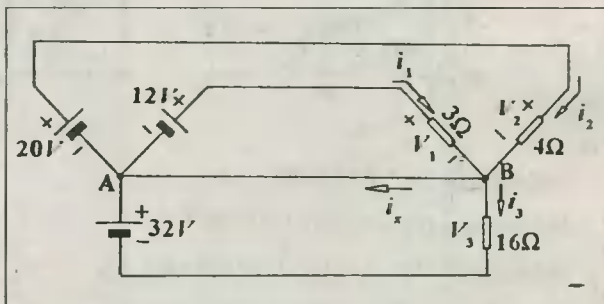


Fig. Solución Prob. 33.40

2) Recorrido acdea: $\Sigma V = 0 \Rightarrow -8 + 3 + V_y - 10 = 0 \Rightarrow V_y = 15 V$

Pero: $i_y = V_y / 3 \Omega = 15/3 \Rightarrow i_y = 5 A$

Finalmente: $i_x + i_y = 7 A$

33.41. Haciendo una modificación del circuito original, reduciendo las resistencias de 2Ω en una sola de 4Ω , por encontrarse en serie, y señalando las corrientes principales, podemos encontrar la potencia suministrada por la fuente de $6 V$, conociendo previamente la corriente i_3 que lo recorre. Aplicando la 2^{da} Ley de Kirchoff en el recorrido abca tenemos:

$\Sigma V = 0 \Rightarrow V_1 - 6 - 14 = 0 \Rightarrow V_1 = 20 V$

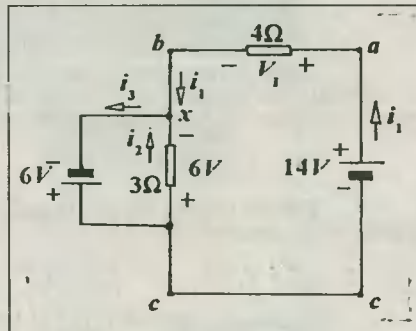
$i_1 = V_1 / 4 = 20/4 = 5 A$

También se reconoce que: $i_2 = 6/3 = 2 A$

Aplicando ahora la 1^{ra} Ley de Kirchoff en el nudo x:

$i_3 = i_1 + i_2 = 5 + 2 \Rightarrow i_3 = 7 A$

Finalmente, la potencia suministrada será: $Pot = V_{i_3} = 6 \cdot 7 \therefore Pot = 42 W$



33.42^o Dados los valores de las fuentes de tensión, asumimos los sentidos de corriente, tal como se ha señalado en el esquema. De acuerdo con estos sentidos, se han indicado también las tensiones en las resistencias cuya polaridad corresponde a los sentidos de las corrientes consideradas. Aplicando la 1^{ra} Ley de Kirchoff en el nudo b tenemos:

$\Sigma i_{llegan} = \Sigma i_{salen} \Rightarrow i_1 = i_2 + i_3 \dots (1)$

Aplicando ahora la 2^{da} Ley de Kirchoff:

Malla abca: $\Sigma V = 0 \Rightarrow +4i_1 + 2i_3 - 26 = 0$

$\Rightarrow 2i_1 + i_3 = 13 \dots (2)$

Malla bcd: $+2i_2 + 2 - 2i_3 = 0 \Rightarrow i_3 - i_2 = 1 \dots (3)$

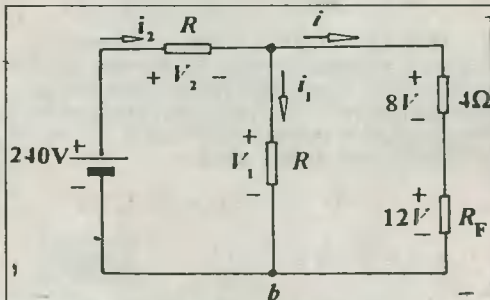
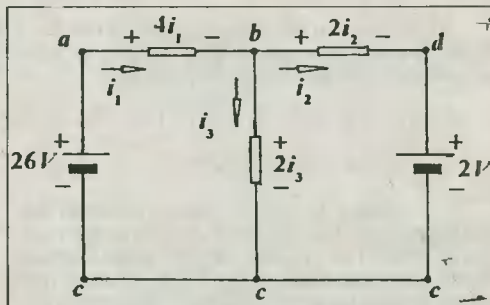
Resolviendo las ecuaciones (1), (2) y (3):

$i_1 = 5 A; i_2 = 2 A; i_3 = 3 A$

33.43. De acuerdo con los datos podemos señalar las tensiones de $8 V$ y $12 V$ en la resistencia de 4Ω y el foco respectivamente. De acuerdo con ello, la tensión en ab será: $V_1 = 8 + 12 = 20 V$. Con este resultado diremos que la tensión de la fuente ($240 V$) se reparte en V_1 y V_2 , de manera que:

$V_1 + V_2 = 240 V \Rightarrow V_2 = 220 V$

Finalmente, analizaremos el nudo a y aplicaremos la 1^{ra} Ley de Kirchoff



$$i_2 = i_1 + i \Rightarrow V_2/R = V_1/R + r \Rightarrow 220/R - 20/R = 2 \quad \therefore \quad R = 100 \Omega$$

33.44. Del esquema (a) se determina que la corriente indicada por el amperímetro será:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{90}{30 + 10 + 5} \Rightarrow i = 2 \text{ A}$$

Luego, del esquema (b) se puede calcular la tensión entre los bornes a y b, dado que se trata de la misma corriente (i), y se conoce la resistencia (10Ω).

$$V_1 = i(10 \Omega) = 20 \text{ V}$$

Esto nos permite calcular la tensión que experimenta la resistencia de 30Ω .

$$V_1 + V_2 = \mathcal{E} \Rightarrow V_2 = 70 \text{ V}$$

Finalmente, aplicando la 1ª Ley de Kirchhoff en el nudo a tenemos:

$$i_2 = i + i_1 \Rightarrow V_2/30 = i + V_1/R \\ \Rightarrow 70/30 = 2 + 20/R \quad \therefore \quad R = 60 \Omega$$

33.45. A partir del esquema se tiene que la intensidad de corriente i cuando el interruptor está abierto se consigue por la 2ª Ley de Kirchhoff.

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow +2 + 5i + 15i - 12 + 10i - \mathcal{E}_x = 0 \\ \Rightarrow i = (\mathcal{E}_x + 10)/30 \quad \dots (1)$$

Ahora, de acuerdo con la condición del problema, la lectura del voltímetro (V) será la misma al cerrar el interruptor, siempre que la diferencia de potencial entre a y b sea nula, es decir, que su presencia o ausencia debe pasar inadvertida por el voltímetro. De esto se deduce que:

$$V_{ab} = \mathcal{E}_x - 10i = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_x = 10i \quad \dots (2)$$

De (1) en (2) obtenemos: $\mathcal{E}_x = 5 \text{ V}$

33.46. El acumulador empezará a descargarse cuando la corriente i_0 empiece a ingresar por su polo positivo. Luego, en el límite, $i_0 = 0$, y la tensión que soporta la carga es justamente igual a la del acumulador (\mathcal{E}_1). Así, aplicamos la 2ª Ley de Kirchhoff en el circuito abca.

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow +ir_2 + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 0$$

$$\Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r} = \frac{14 - 12}{0,05} \quad \therefore \quad i = 40 \text{ A}$$

33.47. Colocando todas las resistencias en un mismo plano y utilizando las corrientes de malla

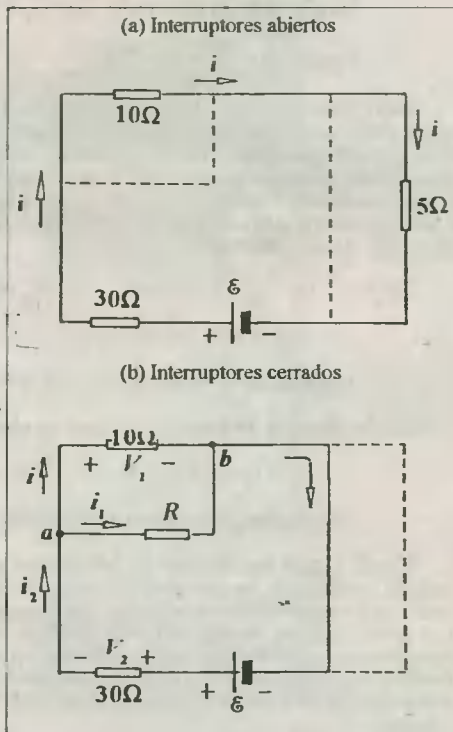


Fig. Solución Prob. 33.44

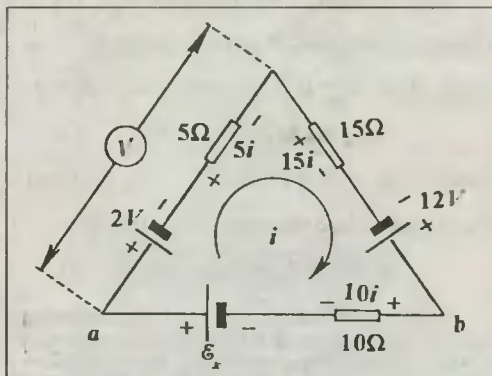


Fig. Solución Prob. 33.45

i_1 , i_2 e i_3 , procederemos a calcular sus valores a partir del análisis de cada malla.

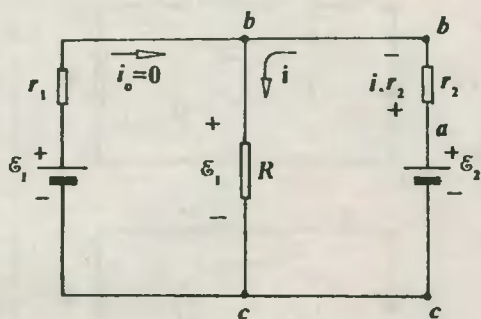


Fig. Solución Prob. 33.46

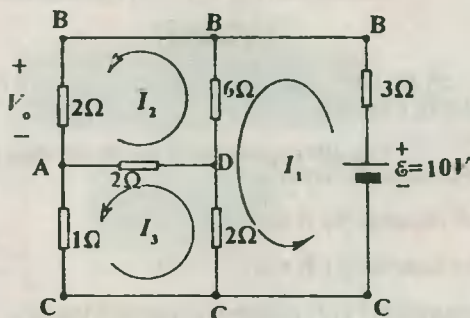


Fig. Solución Prob. 33.47

$$\text{Malla (1): } \Sigma \delta = i_1 R_{11} - i_2 R_{12} - i_3 R_{13} \Rightarrow 10 - i_1(3 + 6 + 2) - i_2 \cdot 6 - i_3 \cdot 2$$

$$\Rightarrow 11i_1 - 6i_2 - 2i_3 = 10 \dots (1)$$

$$\text{Malla (2): } \Sigma \delta = -i_1 R_{21} + i_2 R_{22} - i_3 R_{23} \Rightarrow 0 = -i_1 \cdot 6 + i_2(2 + 2 + 6) - i_3 \cdot 2$$

$$\Rightarrow -3i_1 + 5i_2 - i_3 = 0 \dots (2)$$

$$\text{Malla (3): } \Sigma \delta = -i_1 R_{31} - i_2 R_{32} + i_3 R_{33} \Rightarrow 0 = -i_1 \cdot 2 - i_2 \cdot 2 + i_3(1 + 2 + 2)$$

$$\Rightarrow -2i_1 - 2i_2 + 5i_3 = 0 \dots (3)$$

Resolviendo las ecuaciones (1), (2) y (3) encontramos que: $i_2 = 1,57 \text{ A}$

Finalmente, encontramos la diferencia de potencial entre AB: $V_0 = i_2 \cdot 2 \therefore$

$$V_0 = 3,14 \text{ V}$$

Observación. - Los términos empleados tienen el siguiente significado:

R_{ii} = Resistencia propia de la malla $i = \Sigma R_{\text{malla}}$

R_{ij} = Resistencia compartida por las mallas i y j .

33.48. Procediendo tal como se hizo en el problema anterior, encontraremos la corriente i_1 que marca el amperímetro a partir del análisis de las mallas.

$$\text{Malla (1): } \Sigma \delta = i_1 R_{11} - i_2 R_{12} - i_3 R_{13}$$

$$\Rightarrow 6i_1 - 2i_2 - 2i_3 = 5 \dots (1)$$

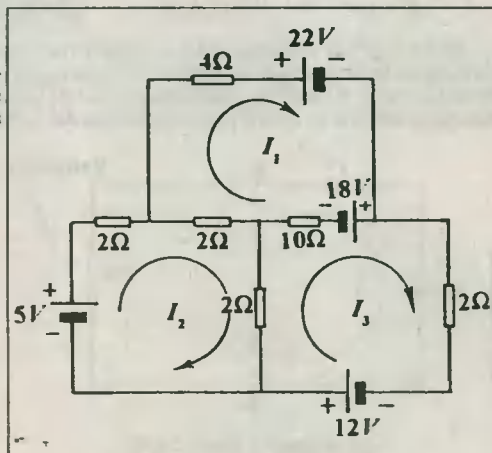
$$\text{Malla (2): } \Sigma \delta = -i_1 R_{21} + i_2 R_{22} - i_3 R_{23}$$

$$\Rightarrow -22 - 18 = -2i_1 + (2 + 4 + 10)i_2 - 10i_3$$

$$\Rightarrow -i_1 + 8i_2 - 5i_3 = -20 \dots (2)$$

$$\text{Malla (3): } \Sigma \delta = -i_1 R_{31} - i_2 R_{32} + i_3 R_{33}$$

$$\Rightarrow 18 + 12 = -2i_1 - 10i_2 + i_3(2 + 10 + 2)$$



$$\Rightarrow -i_1 - 5i_2 + 7i_3 = 15 \dots (3)$$

Resolviendo (1), (2) y (3) encontramos:

$$i_1 = 0,48 \text{ A}$$

33.49. De los datos reconocemos que $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$, $r = 0,05 \Omega$, e $i_1 = 2 \text{ A}$.

Con ellos aplicaremos la Ley de Ohm para determinar la corriente i_2 pedida.

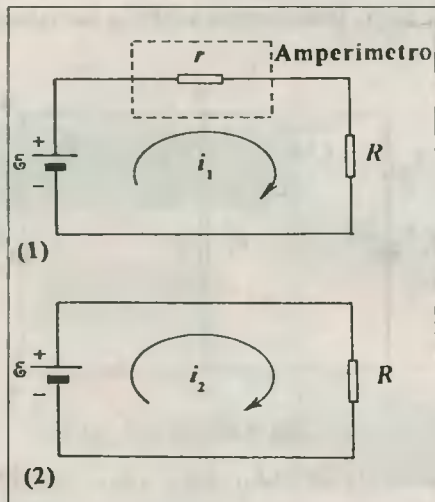
Del esquema (1): $R + r = \mathcal{E}/i_1 \dots (1)$

Del esquema (2): $R = \mathcal{E}/i_2 \dots (2)$

Restando (1) - (2) miembro a miembro tenemos:

$$r = \frac{\mathcal{E}}{i_1} - \frac{\mathcal{E}}{i_2} \Rightarrow i_2^2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E} - i_1 r} \right) i_1$$

$$\therefore i_2 = 2,02 \text{ A}$$



33.50. Procediendo del mismo modo como se hizo en el problema anterior, tendremos:

a) Cuando el amperímetro está instalado se verifica que: $\mathcal{E} = i_1(r + R) \dots (1)$

b) Cuando la batería alimenta directamente a la resistencia R tenemos: $\mathcal{E} = i_2 R \dots (2)$

Igualando (1) y (2) y despejando i_2 , encontramos: $i_2 = \left(\frac{R+r}{r} \right) i_1 \therefore i_2 = 6 \text{ A}$

33.51. De acuerdo con el esquema (2), vemos que el amperímetro se ha protegido con una resistencia R en paralelo con él, de manera que si $i_1 = 5 \text{ A}$, el amperímetro deflejará a lo máximo de su escala: $i_m = 0,01 \text{ A}$, y el resto: $i_2 = 4,99 \text{ A}$ será absorbido por la resistencia shunt (R). Luego, aplicando la Ley de Ohm se tiene que:

$$V = i_2 R = i_m r \Rightarrow R = (i_m/i_2)r \therefore R = 0,01 \Omega$$

33.52. Sea r la resistencia del voltímetro real que se va a utilizar en la medición de la tensión (V) entre los terminales ab de la fuente. Asimismo, i es la intensidad de la corriente cuando el circuito se cierra por la presencia del voltímetro.

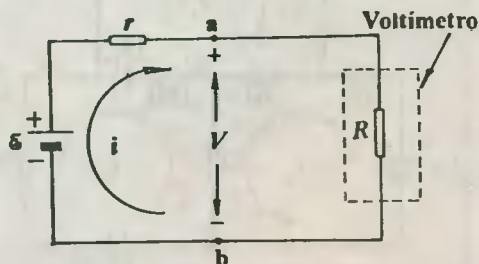


Fig. Solución Prob. 33.52

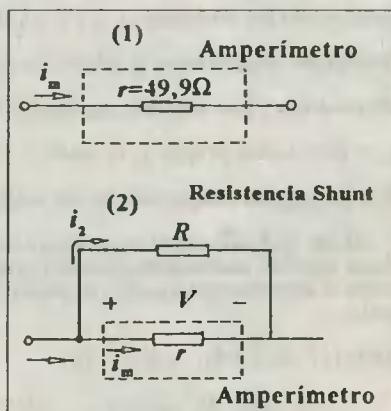


Fig. Solución Prob. 33.51

a) Cuando $R_1 = 300 \Omega$, se cumple que $V_1 = 90 \text{ V}$. Luego, aplicando la Ley de Ohm tenemos:

$$i_1 = V_1/R_1 = 90/300 \Rightarrow i_1 = 0,3 \text{ A}$$

Y de todo el circuito: $\mathcal{E} = i_1(R_1 + r) \Rightarrow \mathcal{E} = 0,3(300 + r) \dots (1)$

b) Cuando $R_2 = 500 \Omega$, se cumple que $V_2 = 100 \text{ V}$. Luego: $i_2 = V_2/R_2 = 100/500 \Rightarrow i_2 = 0,2 \text{ A}$

Entonces, para todo el circuito se verificará que:

$$\mathcal{E} = i_2(R_2 + r) \Rightarrow \mathcal{E} = 0,2(500 + r) \dots (2)$$

Finalmente, resolvemos (1) y (2), encontrando que: $\mathcal{E} = 120 \text{ V}; r = 100 \Omega$

33.53. Cuando el voltímetro marca $V_o = 9 \text{ V}$, la resistencia que presenta de acuerdo a su sensibilidad es $R_v = 18\,000 \Omega$. Ahora, del esquema (1) podemos decir que, de acuerdo con la 1ª Ley de Kirchoff se debe cumplir que

$$i_o + i_v = i_1 \Rightarrow \frac{V_o}{R} + \frac{V_o}{R_v} = \frac{\mathcal{E} - V_o}{r}$$

$$\Rightarrow R = 36\,000 \Omega$$

Ahora, del esquema (2) se cumple que

$$V_r = i_2 R = \left(\frac{\mathcal{E}}{r+R}\right)R \therefore V_r = 10,8 \text{ V}$$

33.54. Del esquema se puede observar que:

$$V_1 = i_1 R \dots (1)$$

$$V_2 = (i_1 - i_2)R \dots (2)$$

Dividiendo (2) ÷ (1): $\frac{V_2}{V_1} = \frac{i_1 - i_2}{i_1}$

$$\Rightarrow V_2 = \left(\frac{i_1 - i_2}{i_1}\right)V_1 \therefore V_2 = 0,1 \text{ V}$$

33.55. Designando por R a la resistencia de cada voltímetro, diremos:

Del tercer voltímetro: $i_3 = V_3/R$

De la rama ce: $V_3' = i_3 r = (V_3/R)r$

De la rama cbec: $V_2 = V_3 + V_3' = V_3 + V_3(r/R)$

$$\Rightarrow r/R = (V_2/V_3 - 1) \dots (1)$$

Del nudo c: $i = i_2 + i_3 = V_2/R + V_3/R$

De la rama ac: $V_2' = ir = (V_2/V_3)r/R$

De la malla acba: $V_1 = V_2' + V_2 \Rightarrow V_1 = (V_2 + V_3)r/R + V_2 \dots (2)$

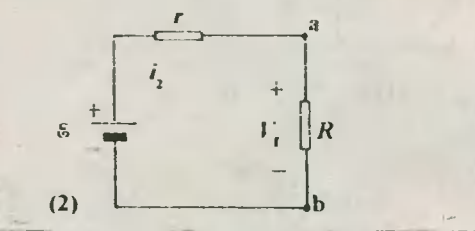
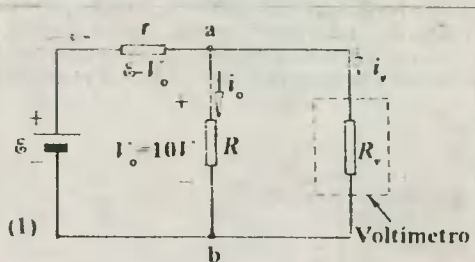


Fig. Solución Prob. 33.53

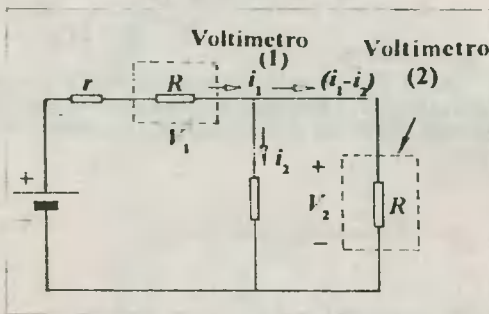


Fig. Solución Prob. 33.54

Reemplazando (1) en (2):

$$V_1 = (V_2 + V_3)(I_2/I_3 - 1) + V_2$$

$$\Rightarrow V_2^2 + V_3 V_2 - V_3(V_1 + V_3) = 0$$

Reemplazando datos: $V_2^2 + 4V_2 - 60 = 0$

De donde:

$$V_2 = 6 \text{ V}$$

33.56. Reconocida la célula resistiva que se repite a lo largo de todo el circuito, notamos que si eliminamos la primera de las células comprendida entre *a-x-y-b*, la resistencia total (R_c) del resto del circuito permanece inalterable, en virtud a que el número de células es muy grande. Luego, si entre los bornes *x-y* colocamos la resistencia equivalente señalada, la cual se verá desde *a-b*, deberá ser la misma a la observada entre *a-b*. Así pues, de los esquemas (1) y (2) diremos lo siguiente:

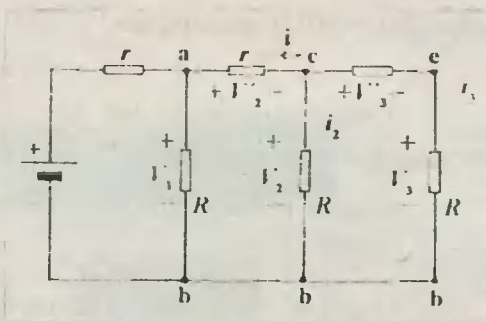
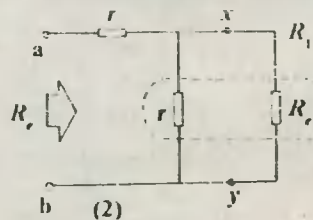
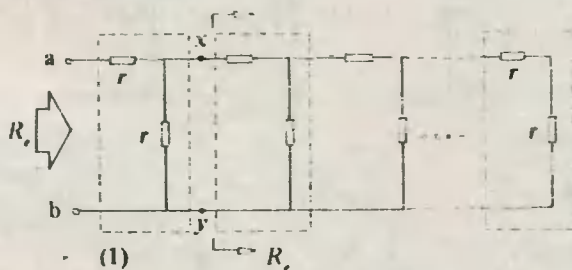


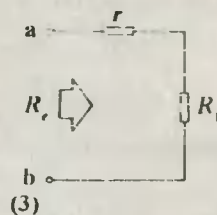
Fig. Solución Prob. 33.55



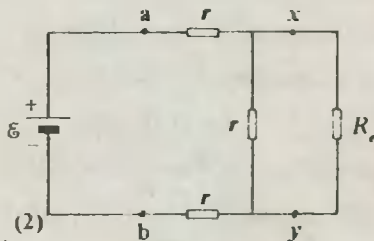
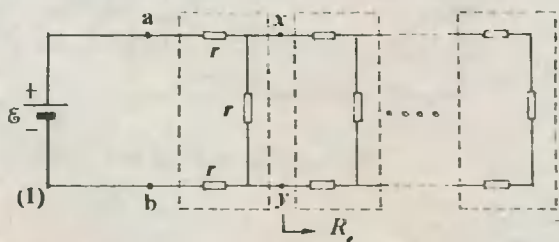
$$R_1 = \frac{rR_c}{r+R_c}, \text{ y } R_c = r + R_1 \Rightarrow R_c = r + \frac{rR_c}{r+R_c}$$

$$\Rightarrow R_c^2 - rR_c - r^2 = 0 \Rightarrow R_c = r/2 (1 + \sqrt{5})$$

$$\therefore R_c = 2 \Omega$$



33.57. Procediendo del mismo modo que en el problema anterior para el cálculo de la resistencia equivalente (R_c) de todo el circuito, diremos que se ha sustituido todo el circuito visto desde *x-y* por su equivalente, tal como se indica en el esquema (2). Y de él se consigue que:



$$R_e = 2r + \frac{rR_e}{r + R_e} \Rightarrow R_e^2 - 2rR_e - 2r^2 = 0$$

$$\Rightarrow R_e = r(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow R_e = 2 \Omega$$

Finalmente, la potencia consumida por el circuito será:

$$Pot = \varepsilon^2/R_e = 50^2/2 \quad \therefore \quad \boxed{Pot = 1250 \text{ W}}$$

33.58. Del esquema (1) reconocemos que las resistencias solo se pueden reducir si convertimos el triángulo ABC en una estrella OABC, tal como se indica en el esquema (2). Ahora, reconociendo los datos tenemos: $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$. Entonces, utilizando las relaciones del ítem (33.8.a) tendremos:

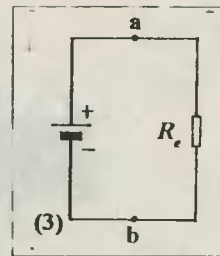
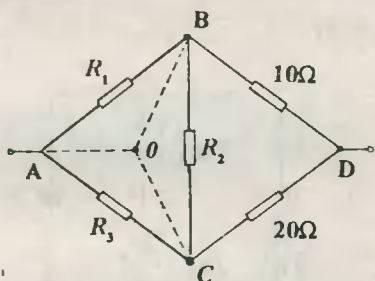
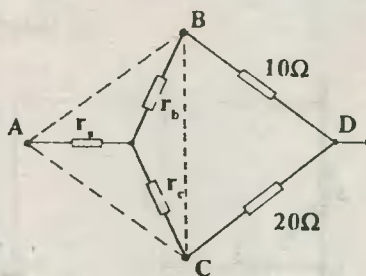


Fig. (3). Solución Prob. 33.57



(1)



(2)

$$r_a = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{20 \cdot 10}{20 + 10 + 10} \Rightarrow r_a = 5 \Omega$$

$$r_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{20 \cdot 10}{20 + 10 + 10} \Rightarrow r_b = 5 \Omega$$

$$r_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 10}{20 + 10 + 10} \Rightarrow r_c = 2,5 \Omega$$

Luego, reduciendo el circuito, encontramos que: $R_e = r_a + \frac{(r_b + 10)(r_c + 20)}{(r_b + 10) + (r_c + 20)} \quad \therefore \quad \boxed{R_e = 14 \Omega}$

33.59. Colocando todas las resistencias en un mismo plano obtenemos el esquema (1). De él podemos reconocer que la malla *acdba* constituye un puente de Wheatstone, en el cual se verifica el producto en aspa entre las resistencias que se señalan. De esto se desprende que la resistencia ubicada en la rama *cd* está fuera de servicio, por lo cual la eliminamos, y dejamos abierto el circuito entre *c* y *d*, según se señala en el esquema. De allí, luego de reducir el circuito se encuentra lo siguiente:

$$1/R_{ab} = 1/R + 1/R_1 + 1/R_2 = 1/R + 1/2R + 1/2R \Rightarrow R_{ab} = R/2 \quad \therefore \quad \boxed{R_{ab} = 6 \Omega}$$

33.60. Ordenando las resistencias tal como se indica en el esquema (1), se logra apreciar que las resistencias ubicadas en la malla *abdca* conforman un puente de Wheatstone, pues se verifica la igualdad de los productos de las resistencias colocadas en aspa, según como se señala. Luego, podemos retirar la resistencia colocada entre los bornes *bc* sin que ello altere la intensidad *i* de la corriente buscada, obteniendo un circuito como el mostrado en el esquema (2), en el cual la tensión ε de la batería se divide en partes iguales ($\varepsilon/2$), dado el paralelismo e igualdad de las resistencias. Finalmente, por la Ley de Ohm encontramos lo siguiente:

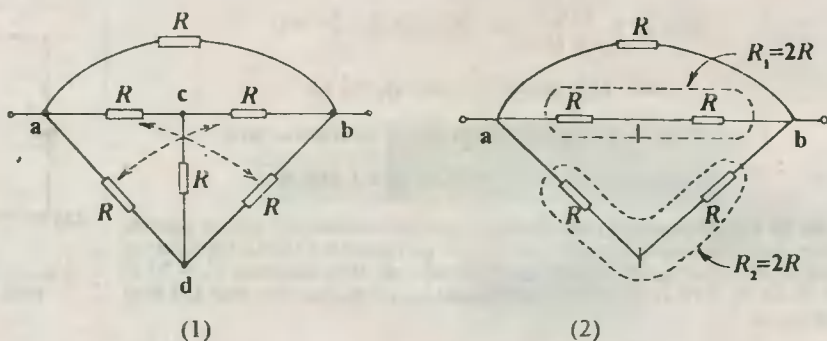


Fig. Solución Prob. 33.59

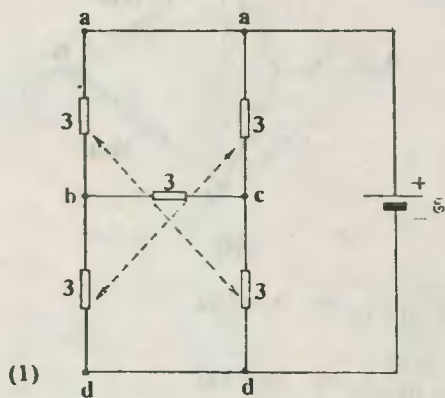


Fig. (1). Solución Prob. 33.60

$$i = \frac{\epsilon/2}{r} = \frac{\epsilon}{2r} = \frac{12}{2 \cdot 3} \quad \therefore \quad \boxed{i = 2 \text{ A}}$$

33.61. Del esquema (1) notamos que las resistencias ubicadas en la malla *acbd* forman un puente Wheatstone en el cual se verifica la igualdad: $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12$, de modo que la resistencia ubicada entre los bornes *cd* puede retirarse, sin que ello altere la intensidad (i_0) de la corriente que buscamos. Reduciendo las resistencias del esquema (2) encontramos lo siguiente:

$$R_1 = \frac{6 \cdot 9}{6 + 9} = 3,6 \Omega$$

Finalmente, del esquema (3): $i_0 = \frac{\epsilon}{R_1 + 1,4} = \frac{10}{3,6 + 1,4} \quad \therefore \quad \boxed{i_0 = 2 \text{ A}}$

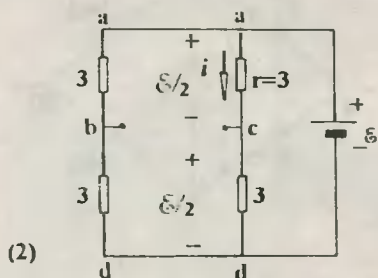


Fig. (2). Solución Prob. 33.60

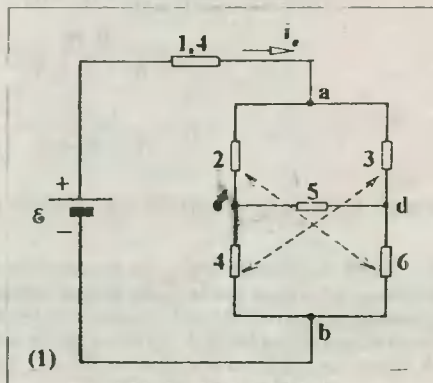


Fig. (1) Solución Prob. 33.61

33.62. Reordenando las resistencias originales del circuito, en el esquema (1) reconocemos la existencia de un puente de Wheatstone en la malla *acbd*, siendo posible la eliminación de la resistencia colocada entre *c* y *d*. A continuación procedemos a reducir las resistencias, obteniendo así la resistencia equivalente (R_e) del circuito.

$$1/R_e = 1/9 + 1/6 + 1/9 \Rightarrow R_e = 18/7 \Omega$$

Finalmente, se tiene que:

$$i_o = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{18}{18/7} \therefore i_o = 7 A$$

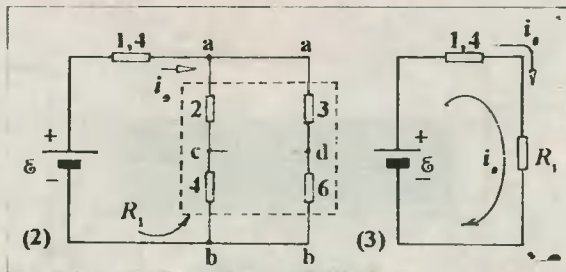


Fig. (2) y (3). Solución Prob. 33.61

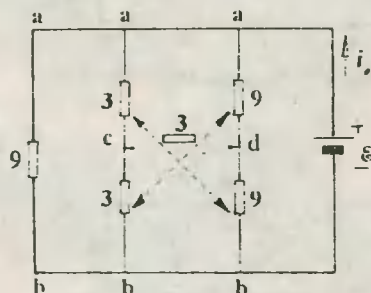


Fig. (1). Solución Prob. 33.62

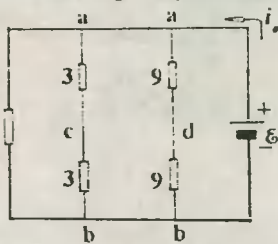


Fig. (2). Solución Prob. 33.62

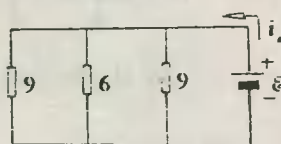
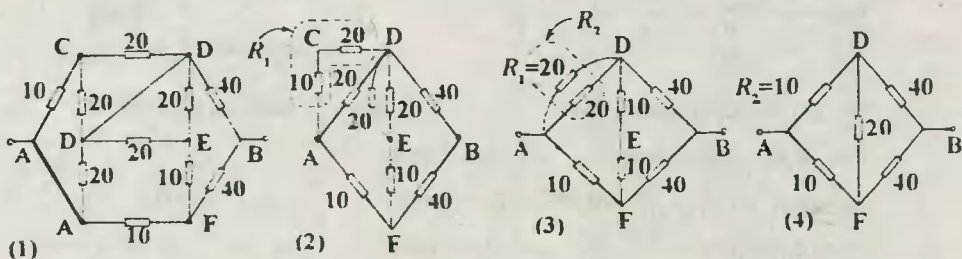


Fig. (3). Solución Prob. 33.62

33.63. A partir del uso de puntos elaboramos el circuito del esquema (2), y reduciendo hasta el esquema (4) comprobamos que se verifica la presencia de un puente de Wheatstone. Luego de eliminar la resistencia ubicada entre D y F, tendremos que la resistencia equivalente (R_e) estará dada por:



$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{10 + 40} + \frac{1}{10 + 40} \therefore R_e = 25 \Omega$$

33.64. Del esquema (1).-Pasamos de una estrella a un triángulo; y como las resistencias son todas iguales, usamos la relación (33.15).

$$r = (1.1 + 1.1 + 1.1)/1 \Rightarrow r = 3 \Omega$$

Del esquema (2): $R_1 = R_2 = \frac{1 \cdot r}{1 + r} = 3/4 \Omega$

Del esquema (3).-Pasamos de una estrella a un triángulo, para lo cual utilizaremos las relaciones del ítem 33.8.b.

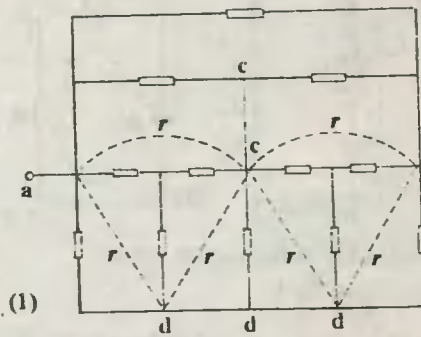


Fig. (1). Solución Prob. 33.64

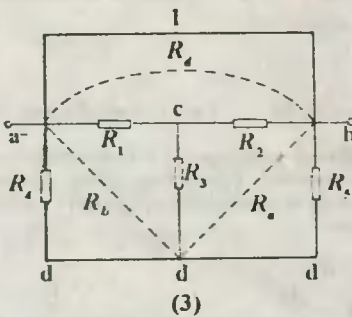


Fig. (3). Solución Prob. 33.64

$$R_a = (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / R_1 \Rightarrow R_a = 1,95 \Omega$$

$$R_b = (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / R_2 \Rightarrow R_b = 1,95 \Omega$$

$$R_d = (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / R_3 \Rightarrow R_d = 39/16 \Omega$$

Del esquema (4): $x = 55/16 \Omega$; $y = z = 117/216 \Omega$

Finalmente, del esquema (5), diremos que la resistencia equivalente será:

$$R_e = 0,824 \Omega$$

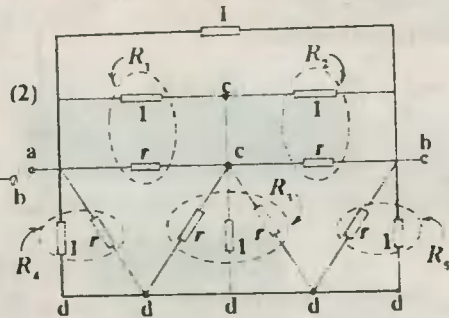


Fig. (2). Solución Prob. 33.64

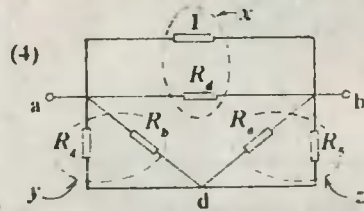


Fig. (4). Solución Prob. 33.64

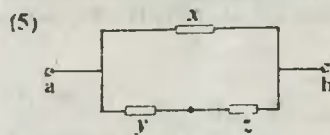


Fig. (5). Solución Prob. 33.64

CAP 34 MAGNETISMO

34.1. Dado que el medio es el vacío, la permeabilidad relativa correspondiente es $\mu_r = 1$, y por consiguiente, en (34.3) la constante magnética de Coulomb será $k_m = 10^{-7} \text{ N/A}^2$. Luego, los polos magnéticos dados se atraen con una fuerza que viene dada por la Ley de Coulomb.

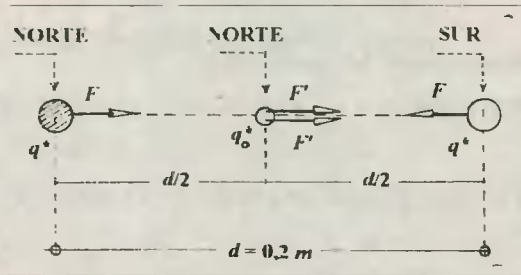
$$F = k_m \frac{q_1^* \cdot q_2^*}{d^2} = 10^{-7} \frac{900 \cdot 800}{(0,2)^2} \quad \therefore \quad \boxed{F = 1,8 \text{ N}}$$

34.2. Considerando que q^* es la carga magnética de los polos, procederemos a calcularla en base a la Ley de Coulomb, tal como se hizo en el problema anterior.

$$F = 10^{-7} \frac{q^* \cdot q^*}{d^2} \Rightarrow (q^*)^2 = 10^7 F d^2$$

$$\Rightarrow q^* = \sqrt{10^7 \cdot 10 \cdot 0,2^2} = 2\,000 \text{ A}\cdot\text{m}$$

Luego, del esquema notamos que cada polo (q^*) ejerce una fuerza F' de igual dirección e intensidad sobre q_0^* , y cuya resultante vendrá dada por:



$$F_R = 2F' = 2 \cdot 10^{-7} \frac{q^* \cdot q_0^*}{(d/2)^2} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{2\,000 \cdot 400}{(0,1)^2} \quad \therefore \quad \boxed{F_R = 16 \text{ N}}$$

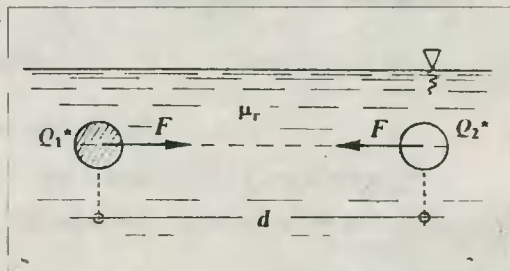
34.3. Aplicando la Ley de Coulomb, y considerando que la constante magnética (k_m) viene dada por la relación (34.3), tendremos:

$$F = 10^{-7} \mu_r \frac{Q_1^* \cdot Q_2^*}{d^2}$$

siendo μ_r la permeabilidad relativa del medio. Reemplazando valores tenemos:

$$F = 10^{-7} \cdot 1,003 \frac{(4\,000) \cdot (5\,000)}{(0,1)^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{F = 200,78 \text{ N}}$$



34.4. Al aplicar la relación (34.1) localizamos a los polos de la barra imán: $d = L/12 = 5 \text{ cm}$. Al colocar esta distancia en el esquema adjunto logramos reconocer que $\alpha = 37^\circ$ y $\beta = 53^\circ$. Luego, procediendo a calcular las fuerzas magnéticas F_1 y F_2 que ejercen respectivamente los polos sur y norte de la barra, tendremos:

$$F_1 = 10^{-7} \frac{q^* \cdot q_0^*}{d_1^2} = 10^{-7} \frac{(1\,600) \cdot (9\,000)}{(0,4)^2} \Rightarrow F_1 = 9 \text{ N}$$

$$F_2 = 10^{-7} \frac{q^* \cdot q_0^*}{d_2^2} = 10^{-7} \frac{(1\,600) \cdot (9\,000)}{(0,3)^2} \Rightarrow F_2 = 16 \text{ N}$$

Finalmente: $F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \therefore F_R = 18,4 \text{ N}$

34.5. Al construir el DCL de una de las barras observamos que ella está sujeta a dos fuerzas de atracción (F_1 y F_3) y dos fuerzas de repulsión (F_2 y F_4) por parte de la otra barra, de modo que la resultante estará dada por: $F_R = (F_2 + F_4) - (F_1 + F_3) \dots (1)$

Del esquema (1) nos damos cuenta que la atracción entre los polos N(1) y S(2), y S(1) y N(2) se realiza con la misma intensidad debido a la igualdad de cargas (q^*) y de distancias. Luego:

$$F_1 = F_3 = 10^{-7} q^* \cdot q^* / d_3^2 = 10^{-7} (3\ 000)^2 / (0,3)^2$$

$$\Rightarrow F_1 = F_3 = 10 \text{ N} \dots (2)$$

Ahora, calculemos las fuerzas de repulsión entre los polos del mismo nombre.

N(1) y N(2): $F_2 = 10^{-7} q^* \cdot q^* / d_2^2 = 10^{-7} (3\ 000)^2 / (0,1)^2$

$$\Rightarrow F_2 = 90 \text{ N} \dots (3)$$

S(1) y S(2): $F_4 = 10^{-7} q^* \cdot q^* / d_4^2 = 10^{-7} (3\ 000)^2 / (0,5)^2$

$$\Rightarrow F_4 = 3,6 \text{ N} \dots (4)$$

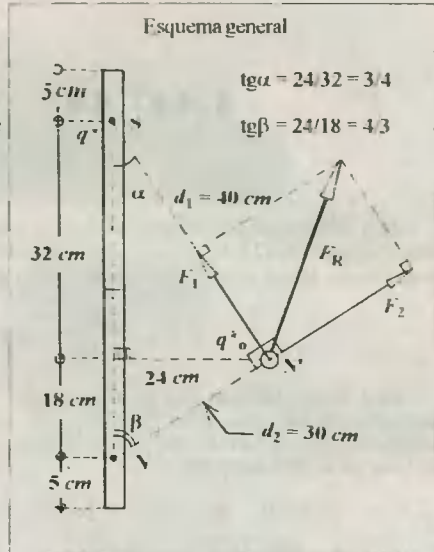


Fig. Solución Prob. 34.5

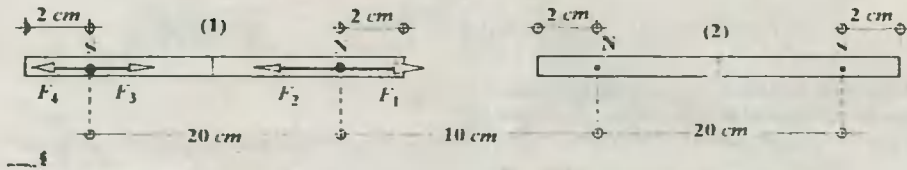


Fig. Solución Prob. 34.5

Al reemplazar (2), (3) y (4) en (1) tendremos: $F_R = 73,6 \text{ N} (\leftarrow)$

Observación. - Las barras se repelen con una fuerza neta de 73,6 N.

34.6. A partir del DCL de la barra superior (B) encontramos, que por equilibrio se verifica que:

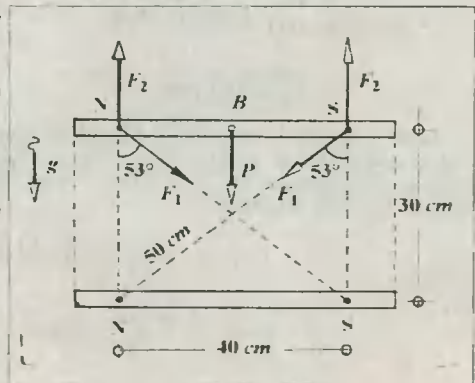
$$P + 2F_1 \cos 53^\circ = 2F_2 \dots (1)$$

Donde, de acuerdo con la Ley de Coulomb se cumple lo siguiente:

$$F_1 = k_m q^* \cdot q^* / d_1^2 = 10^{-7} (1,5 \cdot 10^{-4})^2 / (0,5)^2$$

$$\Rightarrow F_1 = 90 \text{ N} \dots (2)$$

$$F_2 = k_m q^* \cdot q^* / d_2^2 = 10^{-7} (1,5 \cdot 10^{-4})^2 / (0,3)^2$$



$$\Rightarrow F_2 = 250 \text{ N} \dots (3)$$

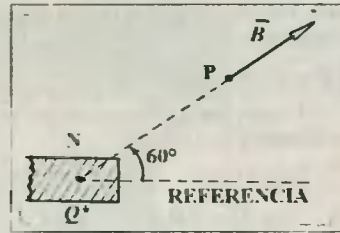
Reemplazando (2) y (3) en (1) encontramos: $P = 392 \text{ N} \therefore m = 40 \text{ kg}$

34.7. Utilizando la relación (34.5) encontramos que el campo magnético o inducción magnética (B) viene dado así:

$$B = k_m Q^*/d^2 = 10^{-7} \cdot 8 \cdot 100 / (0,3)^2 \Rightarrow B = 9 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Ahora, el vector \vec{B} estará definido del siguiente modo:

$$\vec{B} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ T} / 60^\circ$$



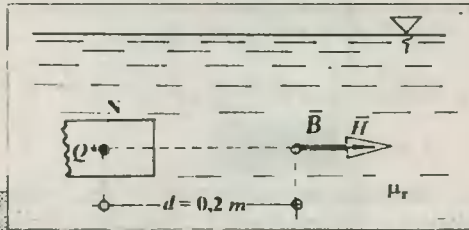
34.8. Para el cálculo de la inducción magnética (B) utilizaremos la relación (34.5), en la cual la constante de Coulomb (k_m) se expresará según se señala en la relación (34.3).

$$B = 10^{-7} \mu_r Q^*/d^2 = 10^{-7} \cdot 1,02 \cdot 8 \cdot 10^4 / (0,2)^2$$

$$\therefore B = 0,204 \text{ T}$$

Y para el cálculo del vector campo magnetizante (H) emplearemos la relación (34.10).

$$H = B/\mu_0 = 0,204 / 4\pi \cdot 10^{-7} \therefore H = 1,62 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$



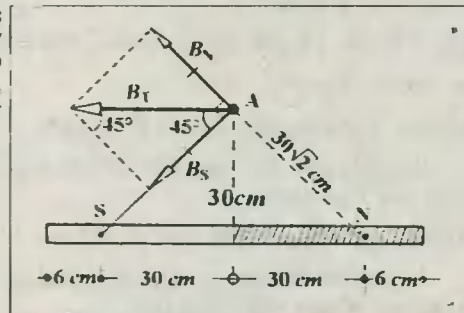
34.9. En base al esquema se reconoce que los vectores campo B_N y B_S tienen el mismo módulo y son perpendiculares entre sí, de modo que el campo total (B_T) resulta ser paralelo a la barra imán. Luego, utilizando la relación (34.5) calcularemos los campos componentes.

$$B_N = B_S = k_m Q^*/d^2 = 10^{-7} \cdot 3 \cdot 600 / (0,3\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow B_N = B_S = 2 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Finalmente, el campo total será: $B_T = B_N \cdot \sqrt{2}$

$$\therefore B_T = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \text{ T}$$



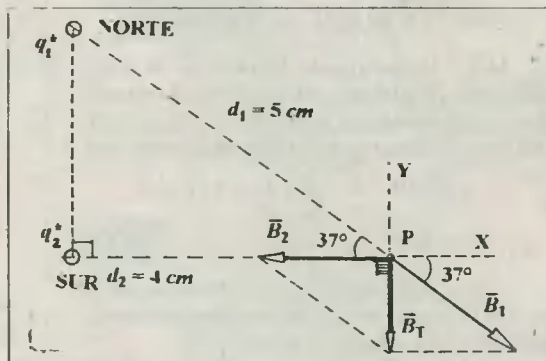
34.10. A partir del esquema adjunto podemos reconocer que el vector campo magnético total (B_T) viene dado por la Ley del Paralelogramo. Se comprobará asimismo que este vector es perpendicular al vector B_2 , lo cual se verificará al descomponer al vector B_1 . Luego, aplicando la relación (34.5) tendremos:

$$B_1 = k_m q_1^*/d_1^2 = 10^{-7} \cdot 1,25 \cdot 10^5 / (5 \cdot 10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow B_1 = 5 \text{ T}$$

$$B_2 = k_m q_2^*/d_2^2 = 10^{-7} \cdot 6,4 \cdot 10^4 / (4 \cdot 10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow B_2 = 4 \text{ T}$$



Luego, aplicando la relación (2.3) tenemos: $B_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} + 2B_1 \cdot B_2 \cdot \cos 143^\circ$

$$B_T = \sqrt{5^2 + 4^2 + 2.5.4(-4/5)} \quad \therefore$$

$$B_T = 3 T (\downarrow)$$

34.11. Dado que el campo magnético B es uniforme, los polos norte (N) y sur (S) de la barra experimentan la misma fuerza magnética (F), pero en direcciones contrarias, tal como se indica en el esquema, y cuyo valor vendrá dado por la relación (34.4).

$$F = q^* \cdot B = (800) \cdot (2.5 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

Luego, por la primera condición de equilibrio se cumplirá lo siguiente:

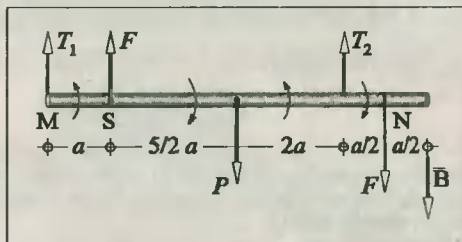
$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow T_1 + F + T_2 = P + F$$

$$\Rightarrow T_1 + T_2 = 100 \text{ N} \dots (*)$$

Ahora aplicaremos la segunda condición de equilibrio, tomando como centro de momentos el extremo M, de donde se establece que:

$$\Sigma(M_M) = 0 \Rightarrow F \cdot \frac{a}{2} - P \cdot 3a + T_2 \cdot 5a - F \cdot \frac{11}{2} a = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{3}{5} P + F \Rightarrow T_2 = 80 \text{ N}$$

$$\text{Y en } (*): T_1 = 5 \text{ N}$$



34.12. Haciendo el DCL de la barra, y suponiendo que el resorte se encuentra estirado en una longitud x , procederemos a utilizar la segunda condición de equilibrio, tomando como centro de momentos a la bisagra O.

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow +F \cdot 10a - kx \cdot 9a + P \cdot 6a - F \cdot 2a = 0$$

$$\Rightarrow 9kx = 8F + 6P \dots (*)$$

$$\text{siendo } F = q^* B = (500 \text{ A} \cdot \text{m}) (0,3 \text{ T}) = 150 \text{ N}$$

Reemplazando este resultado y el resto de los datos en (*) tendremos:

$$9(4000x) = 8 \cdot 150 + 6 \cdot 400 \Rightarrow x = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

Finalmente, diremos que la longitud final que presenta el resorte estará dada por:

$$l_f = l_0 + x = 40 + 10 \quad \therefore \quad l_f = 50 \text{ cm}$$

34.13. Construyendo el DCL de la barra observamos que la tensión (T) de la cuerda presenta dos componentes, y aplicando la primera condición de equilibrio en el eje horizontal, tendremos:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F + T \text{sen} \alpha - F = 0$$

$$\Rightarrow T \text{sen} \alpha = 0 \Rightarrow \text{sen} \alpha = 0 \quad \therefore \quad \alpha = 0^\circ$$

Y aplicando ahora la segunda condición de equilibrio, tomando como centro de momentos al polo norte (N), encontramos que:

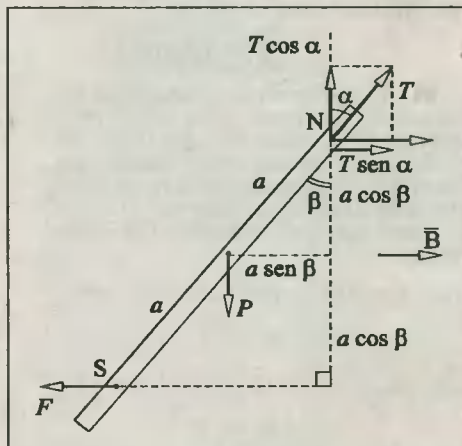
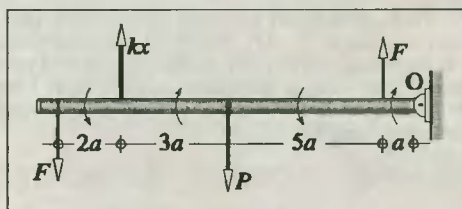


Fig. Solución Prob. 34.13

$$\Sigma M_N = 0 \Rightarrow +P.asen\beta - F.2acos\beta = 0 \Rightarrow Psen\beta = 2Fcos\beta \Rightarrow tg\beta = 2F/P \dots (*)$$

siendo F la fuerza que ejerce el campo uniforme sobre los polos, y viene dada por la relación (34.4).

$$F = q*B = 400.0,05 \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

$$\text{Reemplazando en } (*): tg\beta = 2.20/30 = 4/3 \therefore \beta = 53^\circ$$

34.14. Ubicando los polos del iman observamos que el polo norte experimenta un movimiento curvilíneo y un desplazamiento $d = 40\sqrt{3} \text{ cm}$. Asimismo, reconocemos que la fuerza externa (F_e) mínima necesaria para hacer girar a la barra deberá aplicarse en el polo norte de la misma, debiendo provocar un movimiento muy lento, tal que en todo momento se debe verificar el equilibrio de F_e con la fuerza magnética (F).

$$\Rightarrow F_e = F = q*B = 10^3.0,3$$

$$\Rightarrow F_e = 300 \text{ N}$$

Finalmente, el trabajo se calculará a partir de la relación (17.1).

$$W_e = F_e.d.\cos\theta = 300.0,4\sqrt{3}.\cos30^\circ$$

$$\therefore W_e = 180 \text{ J}$$

34.15. Del esquema se comprueba que el área proyectada normalmente (A_1) sobre las líneas del campo es la del rectángulo $abcd$: $A_1 = 0,4.0,8 = 0,32 \text{ m}^2$. Luego, utilizando la relación (34.6) encontraremos el flujo magnético.

$$\Phi_m = B.A_1 = (10 \text{ T}).(0,32 \text{ m}^2) \therefore \Phi_m = 3,2 \text{ Wb}$$

34.16. Apoyándonos en el esquema adjunto, y procediendo como se hizo en el problema anterior, diremos que el flujo magnético Φ_m a través de la superficie PQR es el mismo que atraviesa su proyección sobre el plano XZ , y que es normal a las líneas del campo magnético. Considerando los lados de los triángulos encontramos que la superficie normal PQR tiene la siguiente área: $A_1 = \frac{1}{2} 0,6.0,8 = 0,24 \text{ m}^2$. Luego, en base a la relación (34.6) para el flujo magnético, encontraremos el valor del campo magnético (B).

$$B = \Phi_m/A_1 = 2,4 \text{ Wb}/0,24 \text{ m}^2 \therefore B = 10 \text{ T}$$

34.17. En primer lugar calcularemos la intensidad del campo magnético (B), que en la posición Q genera el flujo $\Phi_m = 2.10^{-3} \text{ Wb}$, considerándola uniforme en todo punto del pedazo de cartón, por ser éste pequeño con relación a las demás dimensiones y lo "grande" del polo magnético. Entonces, de la relación (34.6) tendremos:

$$B = \Phi_m/A = 2.10^{-3}/0,1 \Rightarrow B = 0,02 \text{ T}$$

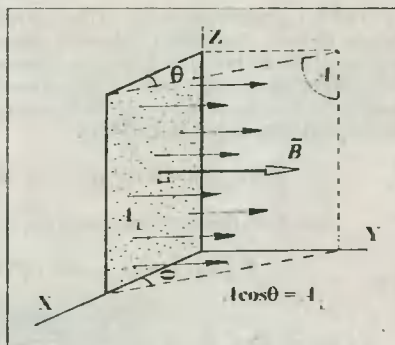
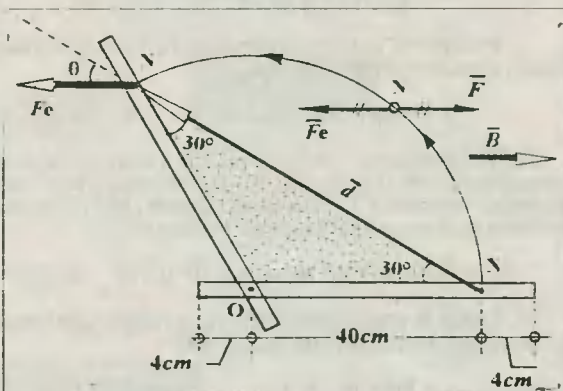


Fig. Solución Prob. 34.15

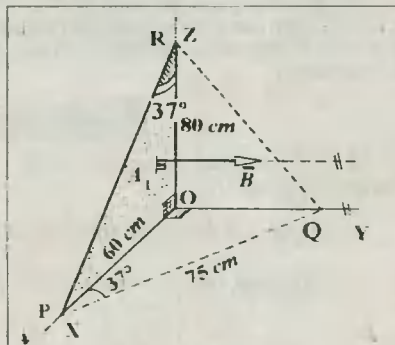


Fig. Solución Prob. 34.16

Luego, por la relación (34.5) encontramos la distancia d .

$$B = k_m Q^* / d^2 \Rightarrow 2 \cdot 10^{-2} = 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^6 / d^2 \Rightarrow d = 5 \text{ m}$$

Ahora, en base al esquema adjunto, se encuentra que el desplazamiento vertical h del cartón habrá sido:

$$h = H - d = 25 - 5 \Rightarrow h = 20 \text{ m}$$

Finalmente, de la relación (5.3) para el movimiento de caída libre encontraremos el tiempo.

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 20 = \frac{1}{2} 10 t^2 \quad \therefore \boxed{t = 2 \text{ s}}$$

34.18. De acuerdo con los esquemas, notamos que el núcleo ferromagnético tiene la propiedad de concentrar más a las líneas de fuerza del campo magnético. Utilizando la relación (34.7) encontraremos la permeabilidad magnética relativa μ_r del núcleo.

$$\mu_r = \Phi_n / \Phi_o = 9 \cdot 10^8 \text{ líneas} / 1,5 \cdot 10^8 \text{ líneas} \Rightarrow \mu_r = 6$$

Luego, la permeabilidad magnética absoluta del núcleo se encontrará utilizando la relación (34.8).

$$\mu_a = \mu_r \mu_o = 6(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2) \quad \therefore \boxed{\mu_a = 7,54 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2}$$

34.19. Consideremos una esfera de radio r en cuyo centro se ubique el polo magnético. Diremos entonces que el flujo total irradiado por dicho polo atraviesa necesariamente la superficie esférica cuya área es $A = 4\pi r^2$. Luego, como la intensidad del campo magnético B es uniforme y normal en toda la superficie, su valor vendrá dado por la relación (34.5).

$$B = k_m q^* / r^2 = (\mu_o \mu_r / 4\pi) \cdot q^* / r^2 \dots (*)$$

Luego, el flujo se conseguirá por la relación (34.6).

$$\Phi_m = BA = (\mu_o \mu_r / 4\pi) \cdot (q^* / r^2) \cdot 4\pi r^2$$

$$\therefore \boxed{\Phi_m = \mu_o \mu_r q^*}$$

34.20. Utilizando el resultado del problema anterior y el esquema adjunto, diremos que el flujo que atraviesa las caras P , Q y R del hexaedro es $1/8$ del flujo que el polo magnético irradia hacia todo el espacio. Considerando asimismo que el medio es el aire, entonces $\mu_r = 1$. Luego, el flujo buscado será:

$$\boxed{\Phi_c = 1/8 \mu_o q^*}$$

34.21. A partir del esquema se puede encontrar la inclinación magnética del lugar (i).

$$\text{tgi} = B_v / B_h = 9 \cdot 10^{-4} \text{ T} / 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 3/4 \Rightarrow i = 37^\circ; \delta i = -37^\circ \text{ (medido en sentido horario)}$$

Asimismo, podemos encontrar el campo magnético total (B_T) a partir del esquema vectorial.

$$B_T = \sqrt{B_v^2 + B_h^2} = \sqrt{(9 \cdot 10^{-4})^2 + (1,2 \cdot 10^{-3})^2} \quad \therefore \boxed{B_T = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ T}}$$

34.22. A partir del esquema podemos decir que el campo magnético terrestre que genera un flujo Φ_m

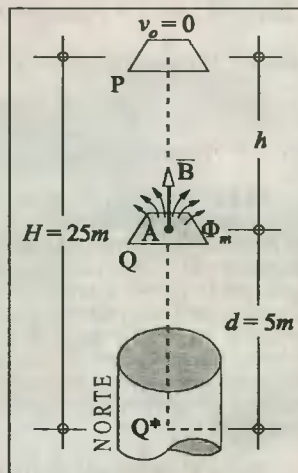


Fig. Solución Prob. 34.17

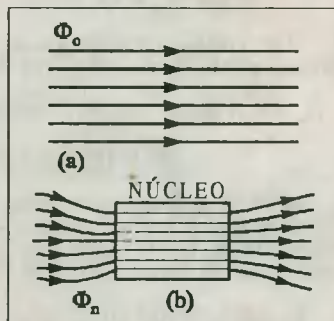


Fig. Solución Prob. 34.18

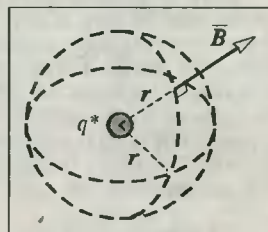


Fig. Solución Prob. 34.19

Φ_m sobre la superficie vertical A es la componente normal a la misma: $B_n = B_T \cdot \cos d$, de manera que al utilizar la relación (34.6) tendremos:

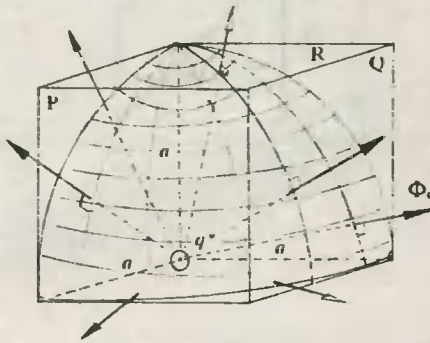
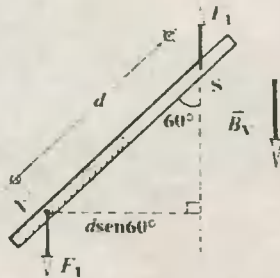


Fig. Solución Prob. 34.20

$$\begin{aligned} \Phi_m &= B_n \cdot A = (B_T \cdot \cos d) \cdot A \\ \Rightarrow 9.6 \cdot 10^4 \text{ líneas} &= B_T \cdot \cos 16^\circ \cdot (2.25) \\ 9.6 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8} \text{ Wb} &= B_T \cdot 24/25 \cdot 5 \text{ m}^2 \\ \therefore B_T &= 2.10^4 \text{ T} \end{aligned}$$

34.23. Del esquema (a) podemos apreciar que el par de fuerzas (F_1) magnéticas produce un momento cuyo valor viene dado así:

$$\begin{aligned} M_1 &= F_1 \cdot d \cdot \sin 60^\circ, \text{ siendo } F_1 = q \cdot B_v \\ \Rightarrow M_1 &= q \cdot B_v \cdot d \cdot \sin 60^\circ \dots (1) \end{aligned}$$



(a)

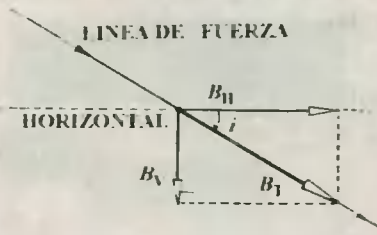


Fig. Solución Prob. 34.21

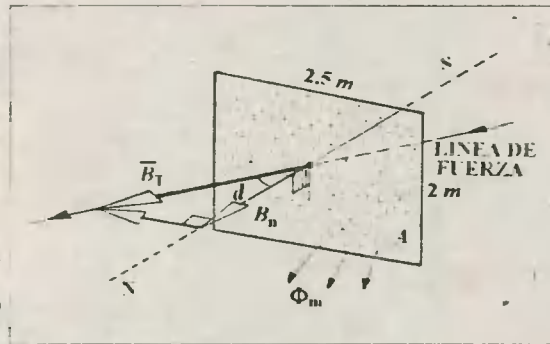
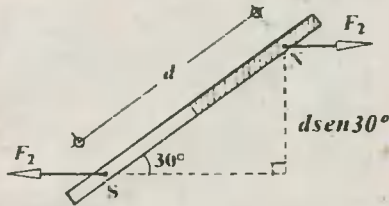


Fig. Solución Prob. 34.22



(b)

Del esquema (b) observamos que el par de fuerzas (F_2) magnéticas y horizontales produce un momento cuyo valor está dado por:

$$M_2 = F_2 \cdot d \cdot \sin 30^\circ, \text{ donde } F_2 = q \cdot B_h \Rightarrow M_2 = q \cdot B_h \cdot d \cdot \sin 30^\circ \dots (2)$$

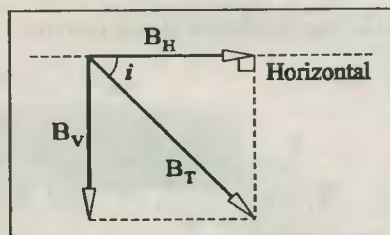
Dividiendo (1) + (2):

$$M_1/M_2 = B_v/B_h \cdot \text{sen}60^\circ/\text{sen}30^\circ \dots (B_v/B_h = \text{tg}i)$$

$$\Rightarrow M_1/M_2 = \text{tg}i \cdot \text{sen}60^\circ/\text{sen}30^\circ$$

$$\Rightarrow 300/100 = \text{tg}i \cdot \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} \Rightarrow \text{tg}i = \sqrt{3}$$

$$\therefore \boxed{i = 60^\circ}$$



CAP 35 ELECTROMAGNETISMO (PRIMERA PARTE)

35.1. Del esquema podemos reconocer las medidas de los ángulos α y β que limitan la influencia magnética de la corriente i sobre el punto A.

$$\operatorname{tg} \alpha = 12/9 = 4/3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 53^\circ$$

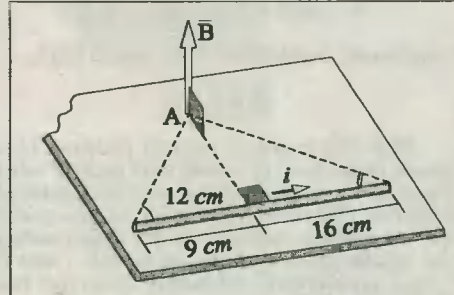
$$\operatorname{tg} \beta = 12/16 = 3/4 \quad \Rightarrow \quad \beta = 37^\circ$$

Luego, el campo magnético (B) en el punto A señalado se obtendrá aplicando la relación (35.1).

$$B = 10^{-7} i/d (\cos 53^\circ + \cos 37^\circ)$$

$$B = 10^{-7} \cdot 60/0,12 (3,5 + 4/5)$$

$$\therefore \quad B = 7 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$



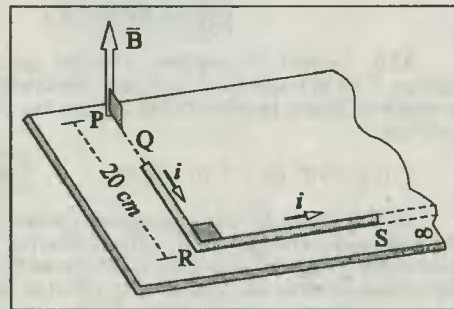
Observación. - El sentido del vector B se ha obtenido aplicando la regla de la mano derecha, de manera que el dedo pulgar se orienta en el sentido de la corriente, y al cerrar la mano, los dedos restantes envuelven al conductor y señalan hacia el vector campo B .

35.2. Podemos reconocer que el campo magnético (B) en el punto P es producido por la influencia del segmento QR y la semirrecta RS.

$$B = B_{QR} + B_{\text{semirrecta}} \dots (*)$$

De acuerdo con la relación (35.1) podemos deducir que el segmento QR no produce ningún campo en el punto P, debido principalmente a que se encuentra en la prolongación de la recta que contiene al conductor con $\alpha = 0^\circ$ y $\beta = 180^\circ$, de manera que $B_{QR} = 0$. Asimismo, el campo debido a la semirrecta lo obtendremos en base a la relación (35.2). Luego, en (*):

$$B = 0 + 10^{-7} i/d = 10^{-7} \cdot 8/0,2 \quad \therefore \quad B = 4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

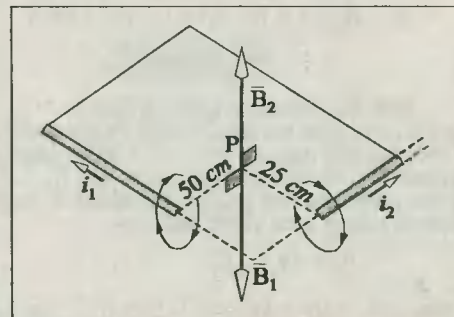


35.3. Utilizando la regla de la mano derecha encontramos que los vectores campo B_1 y B_2 creados en el punto P por cada semirrecta tienen direcciones opuestas. Por ello, diremos que el campo total vendrá dado por $B = B_2 - B_1$, donde cada campo se encontrará aplicando la relación (35.2).

$$B_1 = 10^{-7} i_1/d_1 = 10^{-7} 20/0,5 \quad \Rightarrow \quad B_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

$$B_2 = 10^{-7} i_2/d_2 = 10^{-7} 40/0,25 \quad \Rightarrow \quad B_2 = 16 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

$$\Rightarrow \quad B = 16 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-6} \quad \therefore \quad B = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$



35.4. A partir del esquema mostrado reconozcamos que el campo magnético en A se debe a la contribución del segmento PQ y de la semirrecta QS. Luego, se puede plantear lo siguiente:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_{\text{segmento}} + \vec{B}_{\text{semirrecta}} \\ \Rightarrow B &= 10^{-7} i l d (\cos\alpha + \cos\beta) + 10^{-7} i l d (\beta = 90^\circ) \\ \Rightarrow 2 \cdot 10^{-4} &= 10^{-7} \cdot 50 / 4 \cdot 10^{-2} [(\cos\alpha + 0) + 1] \\ \Rightarrow \cos\alpha &= 3/5 \Rightarrow \alpha = 53^\circ\end{aligned}$$

Finalmente, resolviendo el triángulo PQA:

$$x = 3 \text{ cm}$$

35.5. Del esquema adjunto podemos observar que el campo magnético (B) creado en el punto P sale de la página, y se debe a la contribución de los dos conductores: superior e inferior. Dada la semirrecta del sistema, podemos asegurar que los campos individuales que cada conductor crea (B_0) son iguales entre sí, tanto en módulo como en dirección. Luego, procediendo del mismo modo que en el problema anterior, tendremos:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= 2\vec{B}_0 = 2(\vec{B}_{\text{segmento OC}} + \vec{B}_{\text{semirrecta CT}}) \\ B &= 2[10^{-7} i l d (\cos 37^\circ + \cos 90^\circ) + 10^{-7} i l d] = 18/5 \cdot 10^{-7} i l d \\ \therefore B &= 1,08 \cdot 10^{-4} \text{ T}\end{aligned}$$

35.6. A partir del esquema podemos apreciar que el vector campo B en el punto A se aleja del observador. Su valor se encuentra en base a la relación (35.3) para una corriente rectilínea infinita.

$$B = 2 \cdot 10^{-7} i l d = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 210 / 0,7 \quad \therefore B = 6 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

35.7. A partir del esquema adjunto podemos afirmar que los vectores campo magnético B_1 y B_2 creados por las dos corrientes presentan la misma dirección en el punto P señalado. Luego, aplicando la suma de vectores y la relación (35.5), tendremos:

$$\begin{aligned}B_T &= B_1 + B_2 = 10^{-7} i_1 / a + 10^{-7} i_2 / 2a \\ \Rightarrow B_T &= 1,5 \cdot 10^{-7} i / a = 1,5 \cdot 10^{-7} \cdot 4 / 0,3 \\ \therefore B_T &= 2 \cdot 10^{-6} \text{ T}\end{aligned}$$

35.8. Reconocemos que el triángulo ACB es recto en C, pues los lados 9, 12 y 15 satisfacen el Teorema de Pitágoras: $15^2 = 9^2 + 12^2$. Luego, al trazar los vectores campo magnético \vec{B}_1 y \vec{B}_2 , ellos presentan una perpendicularidad de modo que el campo total viene dado por:

$$B_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \dots (1)$$

$$\text{donde: } B_1 = 10^{-7} i_1 / d_1 = 10^{-7} \cdot 27 / 9 \cdot 10^{-2} \Rightarrow B_1 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ T} \dots (2)$$

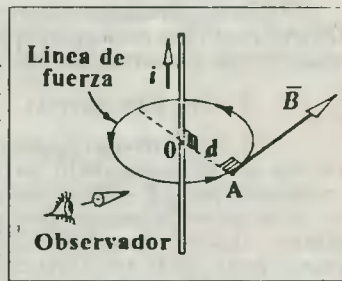
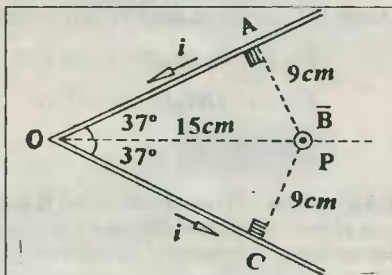
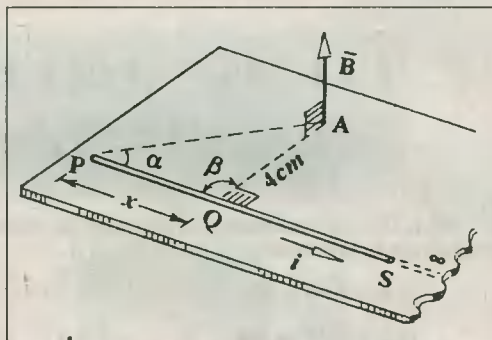


Fig. Solución Prob. 35.6

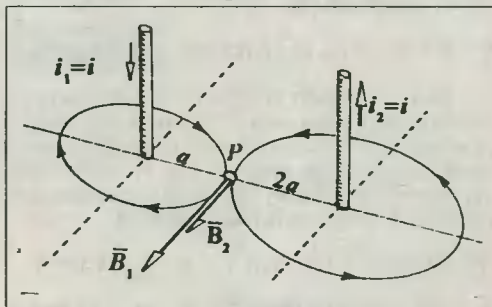


Fig. Solución Prob. 35.7

$$y: B_2 = 10^{-7} i_2/d_2 = 10^{-7} \cdot 4.8/12 \cdot 10^{-2}$$

$$\Rightarrow B_2 = 4 \cdot 10^{-5} T \dots (3)$$

Finalmente, reemplazando (2) y (3) en (1):

$$B_T = 5 \cdot 10^{-5} T$$

35.9. Luego de construir el esquema adjunto reconocemos que los vectores campo B_1 , B_2 y B_3 presentan las direcciones indicadas según la regla de la mano derecha. Utilizando la relación (35.3) tendremos:

$$B_1 = 10^{-7} i_1/d_1 = 10^{-7} \cdot 6/3 \cdot 10^{-2} \Rightarrow B_1 = 2 \cdot 10^{-5} T$$

$$B_2 = 10^{-7} i_2/d_2 = 10^{-7} \cdot 12/2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow B_2 = 6 \cdot 10^{-5} T$$

$$B_3 = 10^{-7} i_3/d_3 = 10^{-7} \cdot 13/1 \cdot 10^{-2} \Rightarrow B_3 = 13 \cdot 10^{-5} T$$

Finalmente, aplicamos la suma de vectores para encontrar el campo total.

$$B_T = B_3 - (B_1 + B_2) = [13 - (2 + 6)] \cdot 10^{-5}$$

$$\therefore B_T = 5 \cdot 10^{-5} T$$

35.10. Haciendo la construcción espacial de los vectores campo magnético, descubrimos que B_1 y B_2 son perpendiculares, y por ello el campo total vendrá dado por la siguiente expresión:

$$B_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \dots (1)$$

Ahora, aplicando la relación (35.3) tendremos:

$$B_1 = 10^{-7} i_1/d_1 = 10^{-7} \cdot 160/8 \cdot 10^{-2}$$

$$\Rightarrow B_1 = 20 \cdot 10^{-5} T \dots (2)$$

$$B_2 = 10^{-7} i_2/d_2 = 10^{-7} \cdot 180/12 \cdot 10^{-2}$$

$$\Rightarrow B_2 = 15 \cdot 10^{-5} T \dots (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1): $B_T = 2,5 \cdot 10^{-4} T$

35.11. De acuerdo con el esquema podemos reconocer que el apotema (a_p) del triángulo equilátero viene dado por: $a_p = h/3 = L\sqrt{3}/6 \Rightarrow a_p = \sqrt{3} \text{ cm}$.

Luego, utilizando la relación (35.4) podemos encontrar la inducción magnética B en el centro del triángulo.

$$B = 2 \cdot 10^{-7} i a_p \cdot n \cdot \sin(\pi/n), \text{ donde } n = 3; \text{ y } \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$$

$$\text{Reemplazando datos: } B = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 20/\sqrt{3} \cdot 10^{-2} \cdot 3\sqrt{3}/2 \therefore B = 6 \cdot 10^{-4} T$$

Observación. - Usando la regla de la mano derecha en cada conductor encontramos que cada uno contribuye con un campo hacia dentro de la página, lo cual se ha indicado con el símbolo \otimes .

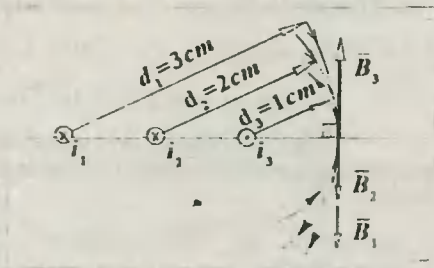
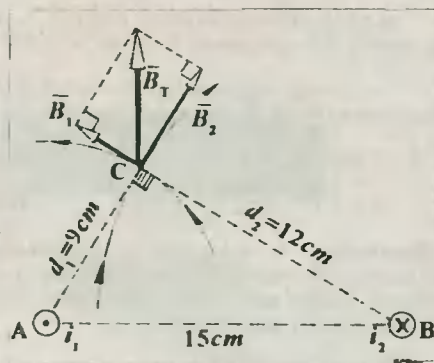


Fig. Solución Prob. 35.9

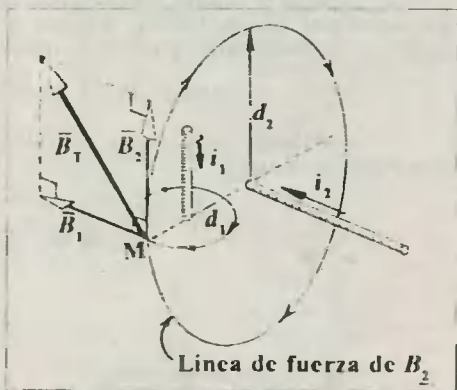


Fig. Solución Prob. 35.10

35.12. A partir del esquema mostrado se puede reconocer la medida del apotema de la figura: $a_p = L/2 = 20 \text{ cm}$.

Luego, utilizando la relación (35.4) para la inducción magnética (B) en el centro del cuadrado, tenemos:

$$B = 2 \cdot 10^{-7} i a_p \cdot n \cdot \text{sen}(\pi/n) \quad (n=4; \text{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2)$$

$$B = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 10\sqrt{2}/0.2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}/2 \quad \therefore \quad B = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Observación. - El vector inducción magnética (B) creado en el centro del cuadrado está dirigido hacia el interior de la página, lo cual está relacionado con el sentido horario de la corriente (i) que lo genera.

35.13. Utilizando directamente la relación (35.4), en la cual el número de lados es $n=6$, y $\text{sen}(\pi/6) = 1/2$.

$$B = 2 \cdot 10^{-7} i a_p \cdot n \cdot \text{sen}(\pi/n) \Rightarrow 3 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 50\sqrt{3} a_p \cdot 6 \cdot 1/2$$

$$\Rightarrow a_p = \sqrt{3}/10 \text{ m} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

Luego, del esquema se puede establecer que el apotema está relacionado con el lado (L) del hexágono del siguiente modo:

$$a_p = L\sqrt{3}/2 \Rightarrow 10\sqrt{3} = L\sqrt{3}/2 \quad \therefore \quad L = 20 \text{ cm}$$

35.14. De acuerdo con el sentido de la corriente, un observador colocado por encima de la espira circular dirá que el campo B está dirigido hacia él. El valor de la inducción magnética lo obtendremos aplicando la relación (35.5).

$$B = 2\pi \cdot 10^{-7} i/R = 2 \cdot 22/7 \cdot 10^{-7} \cdot 14/0.22 \quad \therefore \quad B = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

A continuación aplicaremos la relación (34.10) para calcular el vector magnetizante (H) en el centro de la espira.

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{4 \cdot 10^{-5}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{10^2}{22/7} \quad \therefore \quad H = 31,82 \text{ A/m}$$

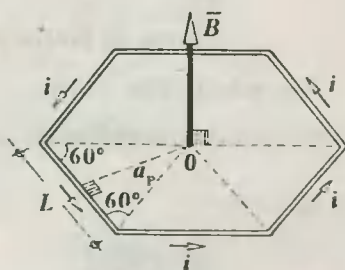


Fig. Solución Prob. 35.13

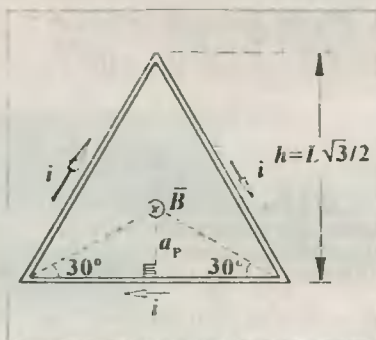


Fig. Solución Prob. 35.11

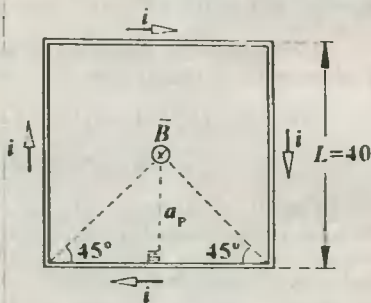


Fig. Solución Prob. 35.12

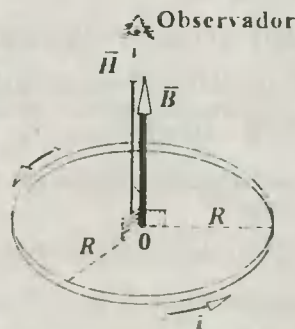


Fig. Solución Prob. 35.14

35.15. De acuerdo con los datos podemos utilizar la relación (35.5) para encontrar la intensidad de corriente i : $B = 2\pi \cdot 10^{-7} i/r \Rightarrow i = (Br/2\pi) \cdot 10^{-7} \dots (1)$

A continuación podemos utilizar la Ley de Poulliet para calcular la resistencia (R) de todo el conductor: $R = \rho L/A = \rho 2\pi r l \dots (2)$

Finalmente, aplicando la Ley de Ohm podemos encontrar la fuerza electromotriz (\mathcal{E}) de la batería (\mathcal{E}): $\mathcal{E} = iR \dots (3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3): $\mathcal{E} = 10^{-7} \rho^2 B l A = 10^{-7} (1,72 \cdot 10^{-8})(10^{-1})^2 (25 \cdot 10^{-2}) / 10^{-5}$

$\therefore \mathcal{E} = 43 \text{ voltios}$

35.16. Es evidente que el campo que genera la espira 2 debe ser tal que equilibre al campo que genera la espira 1. De este modo concluimos que B_2 apunta hacia abajo, y para que ello suceda, la corriente i_2 debe ser de sentido horario, satisfaciendo así la regla de la mano derecha. Luego, del equilibrio de vectores campo tenemos:

$B_2 = B_1 \Rightarrow 2\pi \cdot 10^{-7} i_2/R_2 = 2\pi \cdot 10^{-7} i_1/R_1$
 $\Rightarrow i_2 = (R_2/R_1)i_1 = (15/8) 16 \therefore i_2 = 30 \text{ A}$

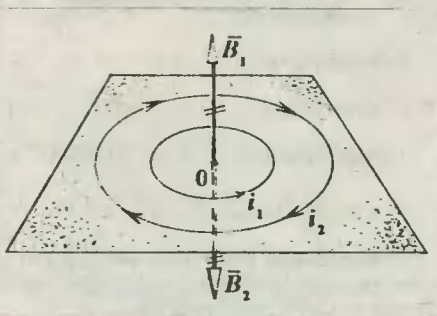


Fig. Solución Prob. 35.16

$B_1 = 2\pi \cdot 10^{-7} i_1/R = 2\pi \cdot 10^{-7} 6/10^{-1} \Rightarrow B_1 = 12\pi \cdot 10^{-6} \text{ T} \dots (1)$

$B_2 = 2\pi \cdot 10^{-7} i_2/R = 2\pi \cdot 10^{-7} 8/10^{-1} \Rightarrow B_2 = 16\pi \cdot 10^{-6} \text{ T} \dots (2)$

Finalmente, aplicando el Teorema de Pitágoras encontramos el campo total en el punto O.

$B_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \dots (3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3): $B_T = 2\pi \cdot 10^{-5} \text{ T}$

35.18. Trazando un plano de observación perpendicular a la espira notaremos que la carga total (q) del dieléctrico lo atravesará en un tiempo igual al periodo de rotación (T) de aquella. Luego, la intensidad de corriente (i) creada por esta rotación viene dada por la relación (32.1).

$i = \frac{q}{T} = \frac{q}{2\pi/\omega} \Rightarrow i = \frac{q\omega}{2\pi} \dots (1)$

Seguidamente, utilizamos la relación (35.6) para calcular la intensidad del campo (B) creado en el punto P del eje de la espira.

$B = 2\pi \cdot 10^{-7} \frac{iR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = 2\pi \cdot 10^{-7} \frac{R^2}{[(\sqrt{3}R)^2 + R^2]^{3/2}}$
 $\Rightarrow B = \pi/4 \cdot 10^{-7} iR \dots (2)$

Finalmente, de (1) en (2): $B = 1,25 \cdot 10^{-8} q\omega/R$

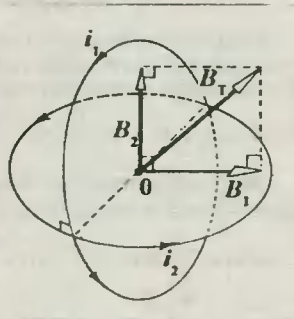
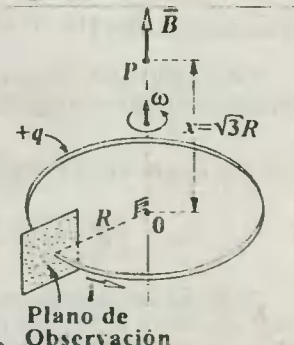


Fig. Solución Prob. 35.17



35.19. Luego de reconocer que el vector inducción magnética (B) creado por el arco de corriente es perpendicular al plano que lo contiene, y que en el centro (O) de la misma tiene un valor que viene dado por la relación (35.7), donde $\theta = \pi/3$ rad, tendremos:

$$B = 10^{-7} \frac{i\theta}{r} = 10^{-7} \frac{60\pi/6}{\pi/5} \quad \therefore \quad \boxed{B = 5.10^{-6} T}$$

35.20. De acuerdo con el esquema adjunto se puede reconocer que existen cuatro elementos conductores que superponen sus campos particulares en el centro O , los cuales se obtienen así:

1) Semirrecta ST : $B_1 = 10^{-7} i/r \dots (1)$

2) Arco TU : $B_2 = 10^{-7} i/r \cdot (\pi/2) \dots (2)$

3) Segmento UV : $B_3 = 10^{-7} i/d (\cos 45^\circ + \cos 45^\circ)$

$$\Rightarrow B_3 = 10^{-7} (i/r \sqrt{2} / 2) \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 10^{-7} i/r \dots (3)$$

4) Semirrecta VZ .- Dado que el punto O está en la prolongación de la semirrecta, el campo magnético creado por ella en dicho lugar es nulo.

Entonces: $B_4 = 0 \dots (4)$

Finalmente se tiene que el campo total (B) en el punto O viene dado por la suma de los vectores B_1, B_2 y B_3 , ya que todos ellos tienen la misma dirección. Luego, de (1), (2) y (3).

$$B = B_1 + B_2 + B_3 \quad \Rightarrow \quad B = 10^{-7} i/r + \pi/2 \cdot 10^{-7} i/r + 2 \cdot 10^{-7} i/r \quad \therefore \quad \boxed{B = 4.10^{-4} T}$$

35.21. De acuerdo con el esquema adjunto podemos decir que en el punto O se superponen los campos creados por cuatro elementos, los mismos que se indican a continuación:

1) Espira circular: $B_1 = 2\pi \cdot 10^{-7} i/r \dots (1)$

2) Arco UT : $B_2 = 10^{-7} \frac{i(\pi/2)}{r} \dots (2)$

3) Semirrectas ST y UV : $B_3 = B_4 = 10^{-7} i/r \dots (3)$

Y ahora, por tratarse de vectores codirigidos (todos salen de la página) diremos que el campo total viene dado por:

$$B_T = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 2\pi \cdot 10^{-7} \frac{i}{r} + \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-7} \frac{i}{r} + 2 \cdot 10^{-7} \frac{i}{r}$$

$$\therefore \quad \boxed{B = 3.10^{-4} T}$$

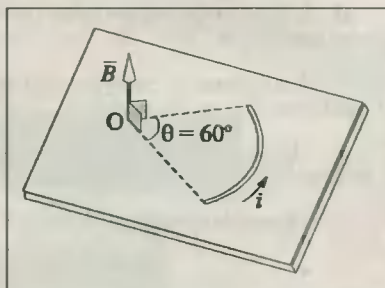
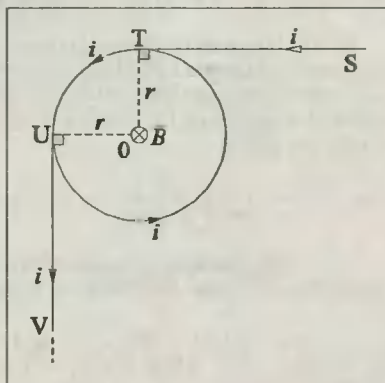
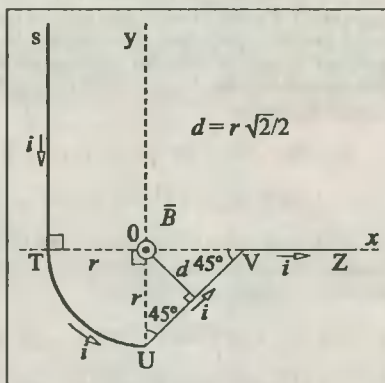


Fig. Solución Prob. 35.19



35.22. En base al esquema elaborado podemos afirmar que son sólo los arcos conductores que crean los campos B_1 y B_2 en el centro P , cuyas direcciones son iguales y saliendo de la página. Luego, utilizando la relación (35.7), tendremos que el campo B viene dado por:

$$B = B_1 + B_2 = 10^{-7} i \theta_1 / r + 10^{-7} i \theta_2 / 2r = 7/4 \pi \cdot 10^{-7} i / r$$

$$\therefore \boxed{B = 10^{-4} \text{ T}}$$

Observación. - Los segmentos *ST* y *VR* no crean campo magnético alguno en el punto *P*, por encontrarse éste en la prolongación de aquellas.

35.23. De los datos se sabe que $\Phi_m = 10^{-4} \text{ Wb}$, y el área de la sección interior del solenoide es $A = 50 \text{ cm}^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Luego, de la relación (34.6) podemos averiguar la intensidad del campo magnético *B*.

$$B = \Phi_m / A = 10^{-4} \text{ Wb} / 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \Rightarrow B = 2 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

Seguidamente, calcularemos la intensidad de corriente *i* que recorre el solenoide a partir de la relación (35.8).

$$B = \mu_0 i N / L \Rightarrow 2 \cdot 10^{-2} = 4\pi \cdot 10^{-7} i \cdot 600 / 0,3 \Rightarrow i = 25 / \pi \text{ A}$$

Finalmente, aplicamos la Ley de Ohm para calcular la fem de la batería.

$$\xi = iR = (25/\pi) \cdot (10 \pi) \quad \therefore$$

$$\boxed{\xi = 250 \text{ V}}$$

35.24. Teniendo en cuenta el esquema adjunto, construido en base a los datos del problema, y en una vista espacial que nos permite afirmar que el campo magnético creado por toda carga móvil tiene unas líneas de fuerza que envuelven la dirección del movimiento, y que se ubican en plano perpendiculares a dicha dirección. Asimismo, podemos apreciar que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \text{ m}$$

$$\text{tg } \theta = y/x = 3/4$$

$$\therefore \boxed{\theta = 37^\circ}$$

Luego, de la relación (35.10) podemos afirmar que el campo magnético en el punto *O* es nulo, y en el punto *P* viene dado así:

$$BP = 10^{-7} qv \text{ sen } 37^\circ / r^2 = 10^{-7} 5 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot (3/5) / 5^2$$

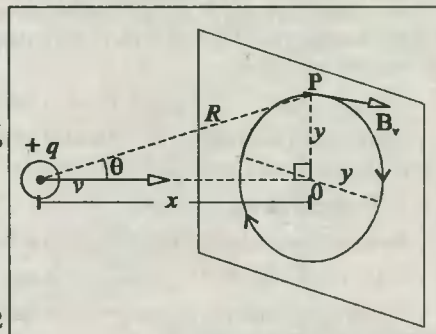
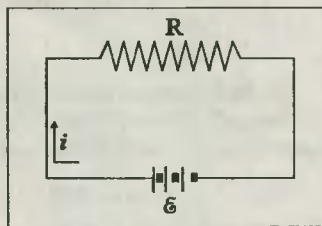
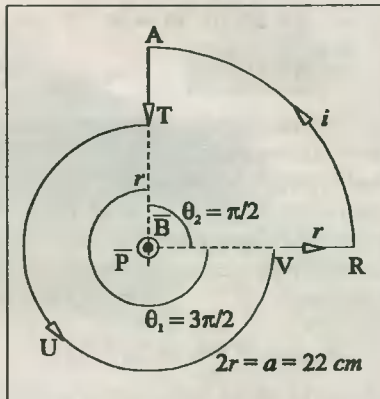
$$\therefore \boxed{BP = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ T}}$$

35.24. Utilizando el resultado del problema 16.12 para un péndulo cónico, podemos encontrar la medida del ángulo θ .

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos \theta}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{g}{\omega^2 L} = \frac{10}{5^2 \cdot 0,5} = \frac{4}{5} \quad \therefore \boxed{\theta = 37^\circ}$$

Luego, resolviendo el triángulo rectángulo encontramos que el radio de giro es $r = 30 \text{ cm}$. Seguidamente, calculamos la intensidad de corriente (*i*) creada por el movimiento circular de la carga *q*, para lo cual utilizaremos la relación deducida en el problema (35.18): $i = q\omega / 2\pi$.

Finalmente, utilizando la relación (35.5) encontraremos el campo magnético creado por la corriente *i* en el centro *O*.



$$B = 2\pi \cdot 10^{-7} i/r = 2\pi \cdot 10^{-7} q\omega / r \cdot 2\pi = 10^{-7} 6.5/0.3$$

$$\therefore \boxed{B = 10^{-5} \text{ T}}$$

35.26.a. En base al esquema se puede apreciar que la partícula cargada experimenta una fuerza magnética (F_m), la cual es perpendicular tanto a la velocidad (v) como al campo magnético (B), cual se dirige hacia el punto O en todo momento, debido a que el signo de la carga es negativo. Luego, por medio de la relación (35.12) y de la Dinámica Circular tendremos:

$$\Sigma F_{\text{radiales}} = ma_c \Rightarrow F_m = mv^2/r$$

$$\Rightarrow |q| vB \text{ sen } 90^\circ = mv^2/r$$

$$r = \frac{mv}{|q|B} = \frac{(3 \cdot 10^{-5}) \cdot (10^2)}{(6 \cdot 10^{-4}) \cdot (5)} \quad \therefore \boxed{r = 1 \text{ m}}$$

35.26.b. Para calcular el tiempo de recorrido de A hasta C debemos reconocer que el movimiento es uniforme, dado que el módulo de la velocidad sólo cambia de dirección. Luego:

$$t = e/v = (\pi/2)r/v \quad \therefore \boxed{t = 0,016 \text{ s}}$$

35.27. Del esquema se puede apreciar que la partícula experimenta la acción de tres fuerzas en todo momento: El peso (P), la tensión (T) y la fuerza magnética (F_m). De ellas, sólo el peso efectúa trabajo durante el movimiento de la partícula, pues los otros dos son siempre perpendiculares a la velocidad instantánea. Luego, analizando el DCL de la partícula en la parte más alta de la trayectoria, y aplicando allí la 2^{da} Ley de Newton tendremos:

$$S_{\text{Fradiales}} = ma_c \Rightarrow F_m + P + T = mv^2/R \dots (*)$$

Donde en el caso crítico de velocidad mínima, es la tensión de la cuerda la que deberá anularse. Luego, en (*):

$$qvB \text{ sen } 90^\circ + mg = mv^2/R$$

Reemplazando datos y resolviendo la ecuación encontramos:

$$8,15 v + 8 \cdot 10 = 8v^2/1 \Rightarrow v = 4 \text{ m/s}$$

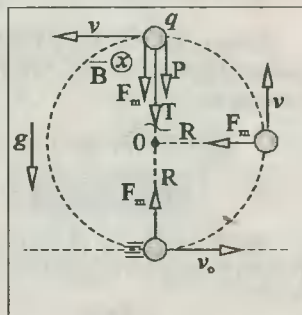
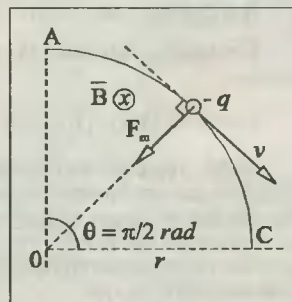
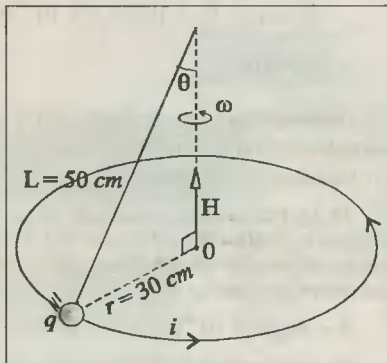
Puesto que el sistema es conservativo, aplicaremos el Teorema del Trabajo y la Energía Mecánica.

$$E_{\text{mec}}^i = E_{\text{mec}}^f \Rightarrow 1/2 mv_0^2 = 1/2 + mg(2R)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v^2 + 4gR} \quad \therefore \boxed{v = \sqrt{56} \text{ m/s}}$$

35.28. Haciendo el DCL de la partícula cargada en el punto C encontramos la fuerza magnética (F_m) en dirección hacia el centro de curvatura, la cual se ha obtenido utilizando la regla de la mano derecha, aplicando la 2^{da} Ley de Newton tendremos:

$$\Sigma F_{\text{radiales}} = ma_c \Rightarrow T + F_m - P = mv^2/R$$



$$T + qvB - mg = mv^2/R$$

$$\Rightarrow 4,2 + 2 \cdot 0,2v - 0,1 \cdot 10 = 0,1 v^2/1$$

Resolviendo encontramos que: $v = 8 \text{ m/s}$

Luego, utilizando el mismo fundamento del problema anterior aplicamos el Principio de Conservación de la Energía Mecánica.

$$E_{\text{mec}}^A = E_{\text{mec}}^C \Rightarrow 1/2 mv_0^2 + mg(2R) = 1/2 mv^2$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{v^2 - 4gR} \quad \therefore \quad \boxed{v_0 = 2\sqrt{6} \text{ m/s}}$$

35.29.- En primer lugar encontramos la intensidad del campo magnético (B) en el punto P señalado.

$$B = 10^{-7} i/d = 10^{-7} \cdot 200/4 \cdot 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad B = 5 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Ahora, a partir de la regla de la mano derecha, extenderemos la mano en la dirección de la velocidad (v) y la cerramos en dirección del campo magnético (B). Entonces, el dedo pulgar señalará en dirección de la fuerza magnética (F_m). Asimismo, reconoceremos que el ángulo θ formado por los vectores v y B es igual a 90° . Luego, aplicando la relación (35.11) encontraremos el valor de F_m .

$$F_m = qvB \sin 90^\circ = (5^\circ\text{C}) \cdot (1600 \text{ m/s}) \cdot (5 \cdot 10^{-4} \text{ T}) \quad \therefore \quad \boxed{F_m = 4 \text{ N}}$$

35.30. Analizando en primer lugar el efecto magnético del campo B sobre la carga móvil, encontramos que la fuerza magnética (F_m) tiene una dirección paralela al eje Y, que viene dada por la regla de la mano derecha, tal como se indica en el esquema. De esto se deduce que la partícula cargada deberá experimentar una fuerza eléctrica (F_e) debida al campo eléctrico (E) en dirección opuesta a F_m para lograr equilibrarlo, y así permitir que la velocidad v se mantenga constante para que la partícula no se desvíe. Luego, por equilibrio se tendrá lo siguiente:

$$F_e = F_m \Rightarrow qE = qvB \Rightarrow E = vB$$

$$\Rightarrow E = (10^4 \text{ m/s}) \cdot (0,2 \text{ T}) \quad \therefore \quad \boxed{E = 2 \cdot 10^3 \text{ N/C} (\uparrow)}$$

35.31. Utilizando el mismo fundamental utilizado en el problema anterior encontraremos que la fuerza magnética (F_m) y la fuerza eléctrica (F_e) tienen direcciones perpendiculares. Por lo tanto, su resultante vendrá dada por:

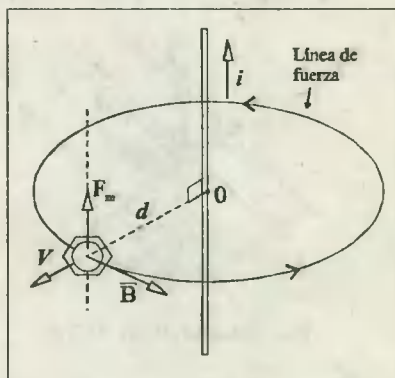
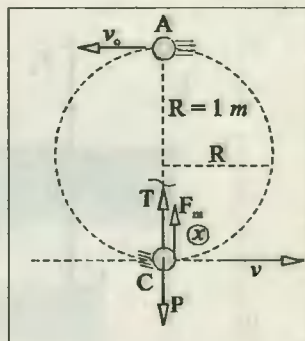
$$F_R = \sqrt{F_e^2 + F_m^2} = \sqrt{(qE)^2 + (qvB)^2} \quad \dots (*)$$

$$F_R = 5 \cdot 10^{-4} \sqrt{(3,2 \cdot 10^4 \text{ N/C})^2 + [(2 \cdot 10^4 \text{ m/s}) \cdot (1,2 \text{ T})]^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{F_R = 20 \text{ N}}$$

Observación.- La fuerza resultante (F_R) obtenida es la denominada Fuerza de Lorentz (ítem 25.13).

35.32. A partir de los esquemas se puede apreciar que los vectores F, B y la dirección de la corriente i son perpendiculares entre sí. Para calcular el valor de la corriente i recurriremos a la relación (35.13).



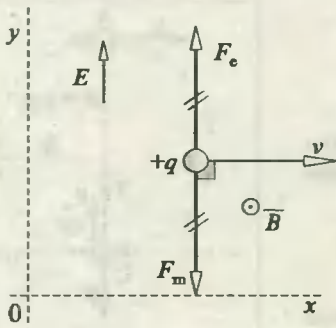


Fig. Solución Prob. 35.30

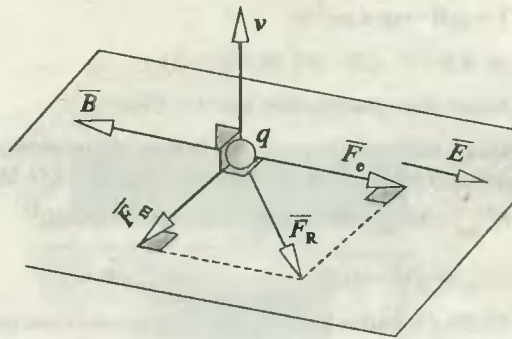


Fig. Solución Prob. 35.31

$$F = iLB\text{sen}90^\circ \Rightarrow 3 \text{ N} = i(0.1 \text{ m})(0.1 \text{ T}) \cdot 1 \quad \therefore \boxed{i = 300 \text{ A}}$$

Observación.- La regla de la mano derecha consiste en que la palma cierre la mano dirigiéndose hacia el vector B empezando en la dirección de i . Entonces, el pulgar indicará el sentido de la fuerza.

35.33. A partir del esquema de la figura vemos que es necesario calcular por separado a las fuerzas magnéticas F_1 y F_2 .

1) **Segmento AB.-** Aplicando la relación (35.13) tenemos:

$$F_1 = iL_1B\text{sen}90^\circ = (10 \text{ A})(5 \cdot 10^{-2} \text{ m})(10 \text{ T}) \Rightarrow F_1 = 5 \text{ N} \dots (1)$$

2) **Segmento BC.-** Aplicando la misma relación:

$$F_2 = iL_2B\text{sen}90^\circ = (10 \text{ A})(3 \cdot 10^{-2} \text{ m})(10 \text{ T}) \Rightarrow F_2 = 3 \text{ N} \dots (2)$$

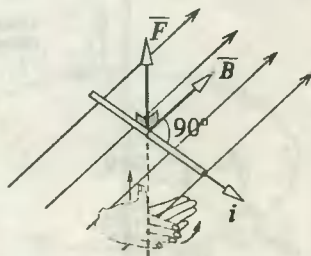
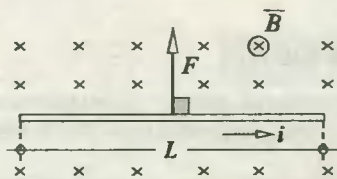


Fig. Solución Prob. 35.32

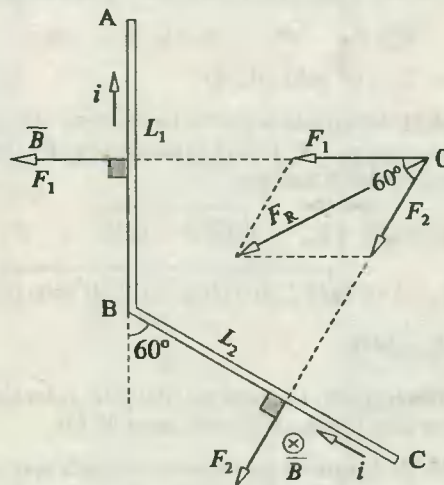


Fig. Solución Prob. 35.33

A continuación calcularemos la resultante de estas dos fuerzas utilizando el método del paralelogramo y lo obtenido en (1) y (2).

$$F_r = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos 60^\circ} \Rightarrow \sqrt{5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1/2} \therefore \boxed{F_r = 7 \text{ N}}$$

35.34. Aplicando la relación (35.15) encontraremos que los conductores se rechazan con una fuerza cuya magnitud viene a ser:

$$F = 10^{-7} i_1 i_2 L / 2d = 10^{-7} 200 \cdot 150 \cdot 25 / 2 \cdot 0.25 \therefore \boxed{F = 0,15 \text{ N}}$$

35.35. Del esquema se observa que cada conductor experimenta un par de fuerzas F_A y F_B debidas respectivamente a la atracción magnética y al campo externo B . Los valores de cada una de ellas se calculará a partir de las relaciones (35.14) y (35.15).

$$F_A = 10^{-7} i_1 i_2 / 2d = 10^{-7} 200 \cdot 300 / 2 \cdot 0,1$$

$$\Rightarrow F_A = 3 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

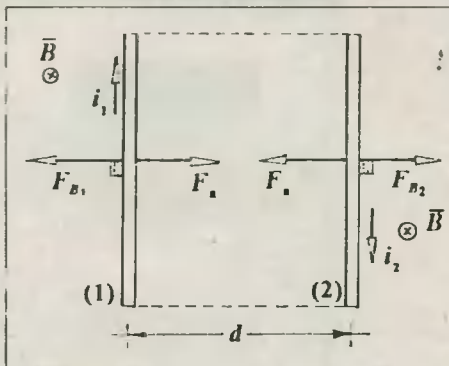
$$F_{B1} = i_1 L B \sin 90^\circ = 200 \cdot 0,5 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \Rightarrow F_{B1} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

$$F_{B2} = i_2 L B \sin 90^\circ = 300 \cdot 0,5 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \Rightarrow F_{B2} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

Finalmente, encontraremos la resultante de estas fuerzas en cada conductor.

Conductor (1): $F_{R1} = F_{B1} - F_A = 6 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-2} \therefore \boxed{F_{R1} = 0,03 \text{ N}}$

Conductor (2): $F_{R2} = F_{B2} - F_A = 9 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-2} \therefore \boxed{F_{R2} = 0,06 \text{ N}}$



35.36. A partir del esquema comprobamos que los conductores PQ y RS experimentan fuerzas netas (F) iguales, pero de direcciones contrarias debido a las corrientes que los recorren, y el campo (B) creado por el conductor vertical es horizontal. Luego, calcularemos las fuerzas sobre los conductores verticales:

1) Lado QR.- Utilizamos la relación (35.14).

$$F_1 = 10^{-7} i_1 i_2 a / 2d_1 = 10^{-7} 200 \cdot 300 \cdot 0,2 / 2 \cdot 0,05$$

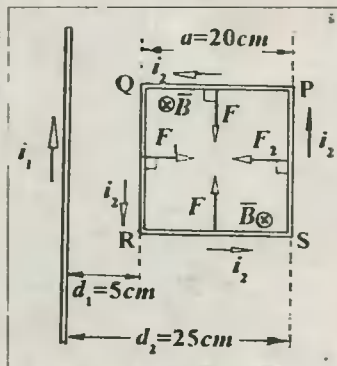
$$\Rightarrow F_1 = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ N (Repulsión)}$$

2) Lado PS.- Utilizando la misma relación tenemos:

$$F_2 = 10^{-7} i_1 i_2 a / 2d_2 = 10^{-7} 200 \cdot 300 \cdot 0,2 / 2 \cdot 0,25$$

$$\Rightarrow F_2 = 0,24 \cdot 10^{-2} \text{ N (Atracción)}$$

Finalmente, la fuerza resultante sobre la espira será: $F_R = F_1 - F_2 \therefore \boxed{F_R = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ N}}$



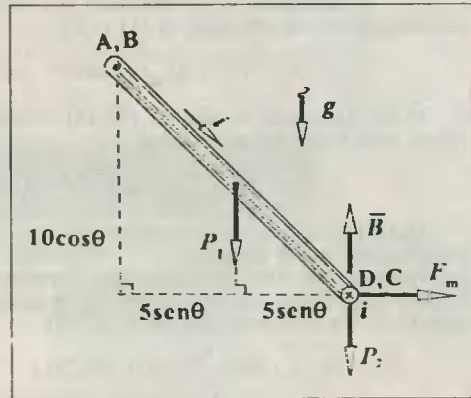
35.37. Los conductores inclinados AD y CB experimentan fuerzas magnéticas iguales pero de direcciones opuestas (perpendiculares a la página), siendo el peso neto de los dos $P_1 = 2 \text{ N}$, el cual se ha reducido en función a la equivalencia: $AD + DC + CB = 50 \text{ cm} < 5 \text{ N}$. Asimismo, en el conductor horizontal DC se observa que de acuerdo con las direcciones de la corriente i (señalada con aspa) y del campo magnético, éstas originan una fuerza magnética F_m cuya dirección será horizontal y hacia la derecha. Así también, el peso del conductor estará dado por $P_2 = 3 \text{ N}$. Luego, aplicando la 2^{da} condición de equilibrio con respecto al punto A tenemos:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -P_1(5 \sin \theta) - P_2(10 \sin \theta) + F_m(10 \cos \theta) = 0$$

donde: $F_m = iL_{DC}B = 5,0,3,2 = 3 \text{ N}$

$$\Rightarrow 2,5\text{sen}\theta + 3,10\text{sen}\theta = 3(10\text{cos}\theta)$$

$$\Rightarrow \text{tg}\theta = 3/4 \quad \therefore \theta = 37^\circ$$



$$L = AD + DC + CB = 50 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} 50 \text{ cm} \longrightarrow 5 \text{ N} \\ 1 \text{ cm} \longrightarrow k \end{array} \right\} \Rightarrow k = 1/10 \text{ N}$$

CAP 36 ELECTROMAGNETISMO (SEGUNDA PARTE)

36.1. Del dibujo original se pueden reconocer los ángulos $\beta = 90^\circ$ y $\gamma = 90^\circ$, de manera que al utilizar la relación (36.1) para la fem inducida entre los extremos de la barra, ésta estará dada del siguiente modo:

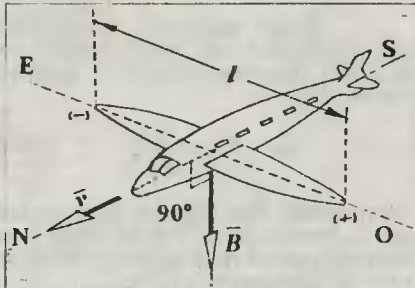
$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= vB \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}90^\circ \cdot \text{sen}90^\circ \Rightarrow 12 \text{ V} = (60 \text{ m/s}) \cdot (0,8 \text{ m}) \cdot (0,5 \text{ T}) \cdot \text{sen}\alpha \\ \Rightarrow \text{sen}\alpha &= \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha = 30^\circ \end{aligned}$$

36.2. De acuerdo con el esquema adjunto se pueden reconocer los ángulos direccionales, tales que $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Luego, por la relación (36.1) para la fem inducida, tendremos:

$$\mathcal{E} = vBl \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\gamma$$

$$\mathcal{E} = (200 \text{ m/s}) \cdot (5 \cdot 10^{-4} \text{ T}) \cdot (20 \text{ m}) \quad \therefore \mathcal{E} = 2 \text{ voltios}$$

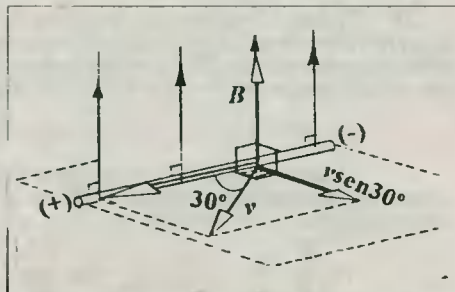
Observación. - La polaridad de las alas se consigue utilizando la regla de la mano derecha. Así, la mano se extiende en la dirección de la velocidad, y al cerrar la mano en busca del campo B, el dedo pulgar apuntará al polo positivo.



36.3. A partir del esquema adjunto comprobamos que al descomponer la velocidad, la barra sólo podrá cortar a las líneas del campo en base a la componente $v \text{sen}30^\circ$, que es simultáneamente perpendicular a la barra y a las líneas del campo. Luego, la fem inducida en la barra viene dada por la relación (36.1), siendo los ángulos direccionales $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

$$\Rightarrow \mathcal{E} = (v \text{sen}30^\circ)Bl = (2 \text{ m/s} \cdot \frac{1}{2}) \cdot (0,025 \text{ T}) \cdot (0,2 \text{ m})$$

$$\therefore \mathcal{E} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$



Nota. - Si hubiéramos aplicado la relación (36.1) sin hacer ninguna descomposición de la velocidad, reconoceríamos que los originales ángulos direccionales serían: $\alpha = \gamma = 90^\circ$, y $\beta = 30^\circ$. Luego:

$$\mathcal{E} = vB \text{sen}90^\circ \cdot \text{sen}30^\circ \cdot \text{sen}90^\circ = 5 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

36.4. En base al esquema original reconocemos que el ángulo γ formado por la barra y las líneas del campo magnético (B) es igual a 90° . Luego, utilizando la relación (36.1) encontraremos la fem inducida en los extremos de la barra.

$$\mathcal{E} = vBl \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\gamma \Rightarrow \mathcal{E} = (16 \text{ m/s}) \cdot (\sqrt{3} \text{ T}) \cdot (0,5 \text{ m}) \text{sen}30^\circ \cdot \text{sen}60^\circ \cdot \text{sen}90^\circ \quad \therefore \mathcal{E} = 6 \text{ V}$$

36.5. Calcularemos la velocidad v con la cual la barra ingresa al campo magnético horizontal, utilizando la siguiente relación:

$$v = \sqrt{2gh} \dots (v_0 = 0) \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 45} \Rightarrow v = 30 \text{ m/s}$$

Luego, del esquema reconocemos que los ángulos direccionales son $\alpha = \beta = 90^\circ$, y $\gamma = 53^\circ$, y utilizando la relación (36.1) encontraremos la fem inducida.

$$\mathcal{E} = vBl \sin 90^\circ \cdot \sin 90^\circ \cdot \sin 53^\circ$$

$$\mathcal{E} = (30 \text{ m/s}) \cdot (0,8 \text{ T}) \cdot (2 \text{ m}) \cdot 4/5 \quad \therefore \mathcal{E} = 38,4 \text{ V}$$

36.6. Dado que este problema es similar al anterior, salvo que aquí $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$, procederemos de un modo similar, ésto es, aplicando la relación (36.1) para la fem inducida en el instante del contacto.

$$\mathcal{E} = vBl(\sin 90^\circ)^3 = \sqrt{2} g_{\text{ef}} l Bl \dots (g_{\text{ef}} = g - a = 4 \text{ m/s}^2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = (\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 2 \text{ m/s}) \cdot (1,2 \text{ T}) \cdot (1 \text{ m}) \Rightarrow \mathcal{E} = 4,8 \text{ V}$$

Luego, analicemos el circuito equivalente, donde las resistencias r y R , la fem indicada forman un circuito en el cual la corriente media (i) se calculará aplicando la Ley de Ohm.

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{4,8}{4+2} \quad \therefore i = 0,8 \text{ A}$$

Observación. - Esta corriente de intensidad media $i = 0,8 \text{ A}$ está en circulación durante un tiempo relativamente corto, de modo que si R fuese la resistencia de un foco, veríamos en él un flogonazo muy breve.

36.7. En base al esquema (a) encontramos la polaridad de la fem inducida en la barra usando la regla de la mano derecha, y con la relación (36.1) determinamos el valor de la fem, reconociendo que $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Luego:

$$\mathcal{E}_2 = vBl = 12,5 \cdot 0,8 \cdot 1,2 \Rightarrow \mathcal{E}_2 = 12 \text{ V}$$

Y ahora, utilizando el esquema (b) podemos encontrar la intensidad de corriente (i) en todo el circuito, aplicando para ello la Ley de Ohm.

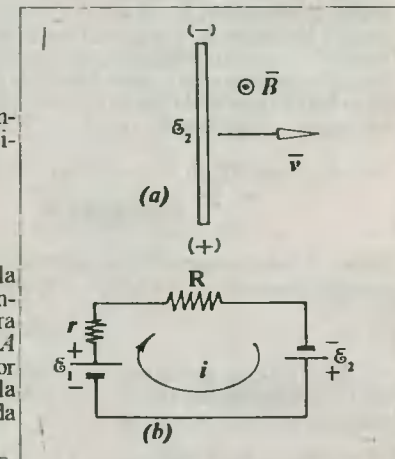
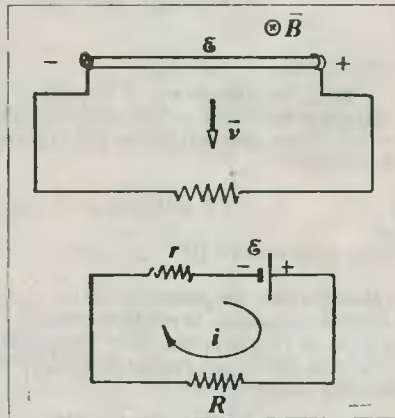
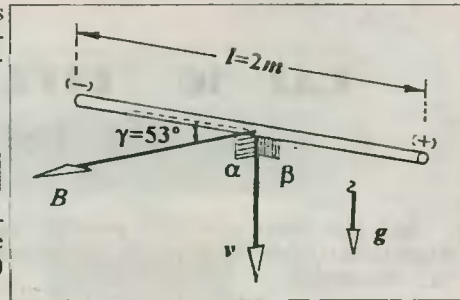
$$i = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R+r} = \frac{24 + 12}{0,5 + 2,5} \quad \therefore i = 12 \text{ A}$$

36.8.a. Centro P.- Aquí se requiere analizar el giro de la barra teniendo en cuenta que en el tiempo Δt ella gira un ángulo $\Delta \theta$ con velocidad angular ω . En este tiempo la barra logra cortar las líneas del campo en un sector cuya área es: $\Delta A = \frac{1}{2} \Delta \theta \cdot l^2$. Luego, el flujo magnético que se habrá filtrado por dicho sector será: $\Delta \phi = B \cdot \Delta A = \frac{1}{2} Bl^2 \cdot \Delta \theta$. Finalmente, de la relación (36.2), en la cual $N = 1$, tendremos que la fem inducida será:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Bl^2 \Delta \theta / \Delta t \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2} Bl^2 \omega \quad \therefore \mathcal{E} = 120 \text{ V}$$

36.8.b. Centro O.- En este caso la fem inducida es nula, dado que las dos mitades presentan la misma fem inducida, pero de polaridades contrarias.

$$\mathcal{E} = 1/8 Bl^2 \omega \quad \therefore \mathcal{E}_T = 0$$



36.8.c. Centro Q.- De acuerdo con el esquema, la fem total viene dada por:

$$\epsilon_T = \epsilon_1 - \epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_T = \frac{1}{2} B(3/4 l)^2 \omega - \frac{1}{2} B(l/4)^2 \omega \Rightarrow \epsilon_T = \frac{1}{4} B l^2 \omega \quad \therefore \boxed{\epsilon_T = 60 \text{ V}}$$

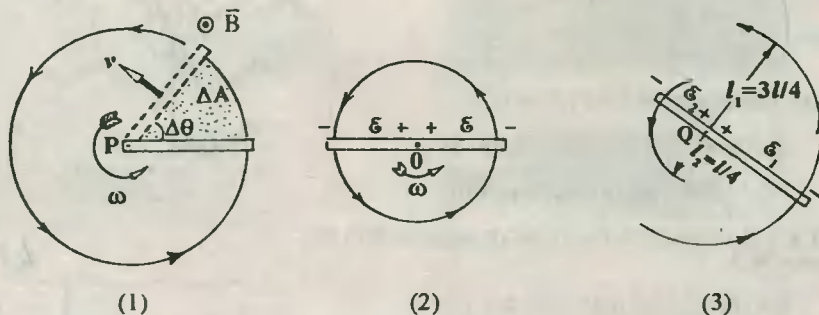


Fig. Solución Prob. 36.8

36.9. Para el cálculo de la fem inducida en la barra utilizaremos la relación (36.1), donde $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Luego:

$$\epsilon = vBl = 5,0,4,0,5 \Rightarrow \epsilon = 1 \text{ V}$$

Y del esquema respectivo calcularemos:

a) La corriente i : $i = \frac{\epsilon}{R+r} = \frac{1}{1,5+0,5} \quad \therefore \boxed{i = 0,5 \text{ A}}$

36.9.b. La fuerza externa.- Por equilibrio se deberá cumplir que:

$$F_{ext} = F_m = iBl = 0,5,0,4,0,5 \quad \therefore \boxed{F_{ext} = 0,1 \text{ N}}$$

36.9.c. La potencia consumida por el circuito se obtendrá a partir de:

$$Pot = \epsilon i = 1,0,5 \quad \therefore \boxed{Pot = 0,5 \text{ W}}$$

36.9.d. Haciendo el DCL de la barra observamos que la nueva fuerza externa F se encontrará a partir del equilibrio de la barra.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg \Rightarrow f = \mu N = \mu mg$$

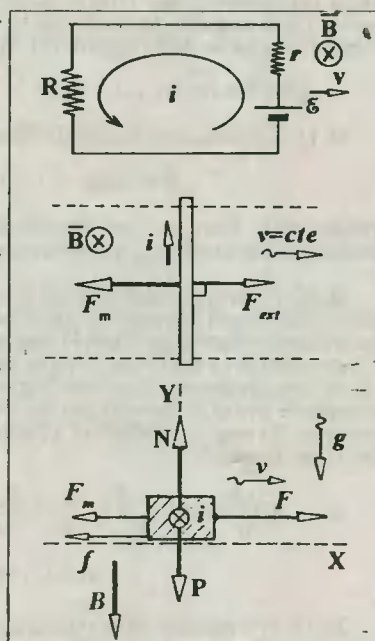
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = F_m + f = iBl + \mu mg$$

$$\Rightarrow F = 0,1 \text{ N} + 0,1(0,1 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) \Rightarrow F = 0,2 \text{ N}$$

Finalmente, la potencia mecánica externa se encontrará así:

$$Pot = Fv \cos 0^\circ = 0,2,5,1 \quad \therefore \boxed{Pot = 1 \text{ W}}$$

36.10. En base al esquema de la figura reconocemos que en la barra se induce una fem que genera una corriente i que sale de la página, de modo que al aplicar la regla de la mano derecha descubrimos que la fuerza magnética F_m está dirigida hacia arriba del plano inclinado. Luego, por equilibrio tenemos:



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = P \cos \theta$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P \sin \theta = f + F_m = \mu P \cos \theta + iBl \dots (1)$$

$$\text{Reconociendo que: } P = dgV = dglA \dots (2)$$

$$\text{Asimismo: } i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBl}{\rho l/A} = \frac{vBA}{\rho} \dots (3)$$

Finalmente, reemplazamos (2) y (3) en (1):

$$dglA \sin \theta = \mu dglA \cos \theta + vBA/\rho \cdot Bl$$

$$\therefore B = \sqrt{\rho dg/v} (\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

36.11.a. Calcularemos la fem inducida según se hizo en el problema 36.7.

$$\mathcal{E} = vBl = 12,0,5,0,2 \Rightarrow \mathcal{E} = 1,2 \text{ V}$$

Esta tensión se mantiene constante mientras el conductor permanece en movimiento uniforme, y por ello el capacitor logra cargarse de modo que el valor de su carga se conseguirá a partir de la relación (31.3).

$$q = C\mathcal{E} = (25 \mu\text{C})(1,2 \text{ V}) \therefore q = 30 \mu\text{C}$$

36.11.b. Finalmente, la energía almacenada en el condensador estará dada por la relación (31.6).

$$W = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} (25 \mu\text{C})(1,2 \text{ V})^2 \therefore W = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Observación. - Durante el movimiento del conductor no existe corriente en el circuito; sólo un reordenamiento de las cargas positivas y negativas.

36.12. A partir del esquema adjunto podemos decir que el flujo inicial (Φ_0) saliente de la página se reduce casi instantáneamente, provocando una corriente inducida (i) cuyo sentido es el indicado, el que de acuerdo con la Ley de Lenz produce un flujo inducido también saliente, tratando de evitar la disminución del flujo exterior. La fem inducida media se calculará a partir de la relación (36.2), en la cual $N = 1$.

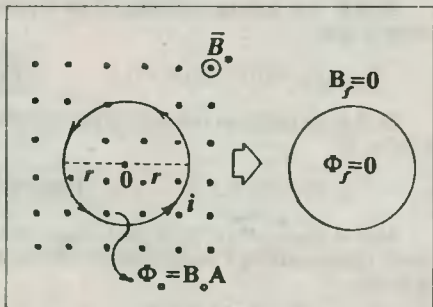
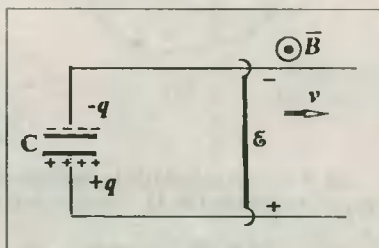
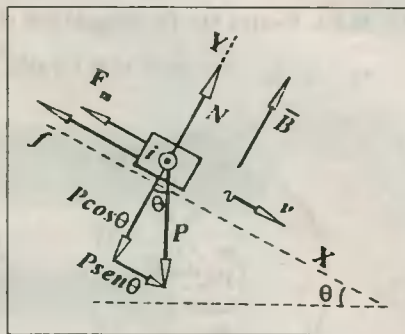
$$\mathcal{E} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -1 \frac{\Phi_f - \Phi_0}{\Delta t} = \frac{\Phi_0}{\Delta t} = \frac{B_0 A}{\Delta t} = \frac{B_0 \pi r^2}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = (0,5 \text{ T})(22/7)(0,35 \text{ m})^2 / 0,025 \text{ s} \therefore \mathcal{E} = 7,7 \text{ V}$$

36.13. Procediendo de un mismo modo análogo al problema anterior, tenemos que el flujo magnético inicial es $\Phi_0 = B_0 A = B_0 ab$, y el flujo final es $\Phi_f = B_f A = 0$. Entonces, utilizaremos la relación (36.2), siendo $N = 1$.

$$\mathcal{E} = -\Delta \Phi / \Delta t = -(\Phi_f - \Phi_0) / \Delta t = \Phi_0 / \Delta t = B_0 ab / \Delta t \Rightarrow 4,5 = B_0 \cdot 0,18 \cdot 0,5 / 0,015 \therefore B_0 = 0,75 \text{ T}$$

36.14. De acuerdo con el esquema, cada espira del cuadro de alambres en la posición I es atravesada por un flujo inicial $\Phi_0 = BA$, y en la posición II el flujo que la atraviesa es nulo ($\Phi_f = 0$). Como esta variación se produce en un tiempo $\Delta t = 0,15 \text{ s}$, tendremos que la fem inducida media estará dada por la relación (36.2).



$$\mathcal{E} = -N\Delta i/\Delta t = -N(\phi_f - \phi_o)/\Delta t = NBA/\Delta t \Rightarrow 1,6 \text{ V} = 40B(240 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)/0,15 \text{ s}$$

$$\therefore \boxed{B = 0,25 \text{ T}}$$

Observación.- Es en la posición II que el cuadro de alambres corta normalmente a las líneas del campo magnético, y por ello es en esa posición en que la fem inducida que en principio es variable, presenta su máximo valor, tal como se indica en el esquema (b), siendo $\mathcal{E}_m = NAB\omega = 2,51 \text{ V}$.

36.15.a. Utilizando la Ley de Lenz y la regla de la mano derecha encontramos que la corriente inducida (i) tiene un sentido horario visto desde arriba, de modo que el flujo inductivo (ϕ_i) es contrario al aumento del flujo externo (ϕ_{ext}), tal como se indica en el esquema (a).

36.15.b. Para calcular la carga q que circuló por el anillo utilizaremos la relación (32.1).

$$q = i \cdot \Delta t = (\mathcal{E}/R)\Delta t = (\Delta\phi/\Delta t)\Delta t/R \Rightarrow q = \Delta\phi/R$$

Reemplazando datos: $\boxed{q = 2 \text{ C}}$

26.15.c. Si el flujo magnético externo (ϕ_{ext}) disminuye, entonces la corriente (i) de inducción tendrá un sentido antihorario, de modo que el flujo inducido por ella (ϕ_i) sea de la misma dirección que ϕ_{ext} tratando así de compensar la disminución, tal como se indica en el esquema (b)

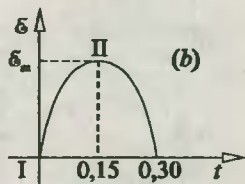
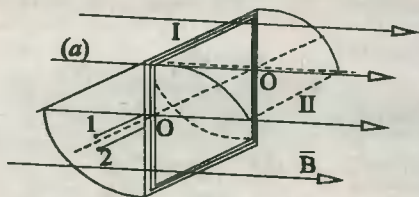


Fig. Solución Prob. 36.14

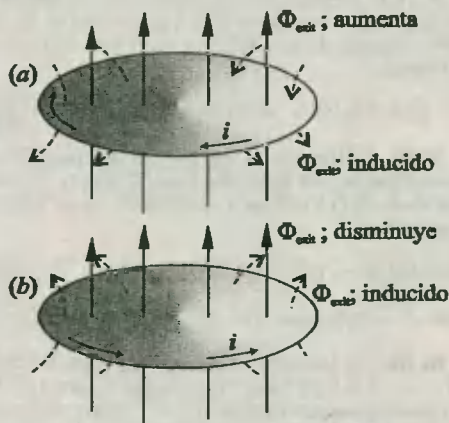


Fig. Solución Prob. 36.15

36.16.a. Del esquema de la figura podemos percibir que el número efectivo de líneas de fuerza que pasan en el esquema (b) es menor que el que pasaban (a), lo cual se debe a una disminución en el área neta del circuito. Luego, utilizando la relación (36.2) con $N = 1$, tendremos:

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{BA_f - BA_o}{\Delta t} = -\frac{B[(A_1 + A_2) - A]}{\Delta t} \dots (*)$$

Reconociendo que $A = \pi d^2/4$; $A_1 = \pi(d/4)^2/4$; $A_2 = \pi(3d/4)^2/4$, reemplazando en (*), donde luego de efectuar operaciones obtenemos:

$$\mathcal{E} = 3/32 \pi B d^2/\Delta t \quad \therefore \boxed{\mathcal{E} = 0,3 \text{ V}}$$

36.16.b. Finalmente, para el cálculo de la carga transportada utilizaremos la relación (32.1)

$$q = i \Delta t = (\varepsilon/R) \Delta t \quad \therefore \quad \boxed{q = 0,3 \pi \text{ C}}$$

36.17. Reconociendo los datos: $N = 25$ espiras, $\phi_0 = 0,098 \text{ Wb}$, $\phi_f = 0,034 \text{ Wb}$, y $\Delta t = 0,16 \text{ s}$, utilizaremos la relación (36.2) para el cálculo de la fem inducida.

$$\varepsilon = -N \Delta\phi/\Delta t = -N (\phi_f - \phi_0)/\Delta t = -25 (0,034 - 0,098) \text{ Wb}/0,16 \text{ s}$$

$$\therefore \quad \boxed{\varepsilon = 10 \text{ V}}$$

36.18. a. A partir del esquema de la figura podemos encontrar la pendiente de la recta: $m = \text{tg}\theta = \Delta\Phi/\Delta t$, lo que a su vez concuerda con el módulo de la fem inducida.

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \text{PENDIENTE} = 6 \text{ Wb}/2 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = 3 \text{ V}}$$

En vista que esta tensión también se mantiene constante (dado que la pendiente lo es), calcularemos la potencia eléctrica que consume el cuadro a partir del esquema (b) y de la relación (32.18).

$$Pot = \varepsilon^2/R = 3^2/2 \quad \therefore \quad \boxed{Pot = 4,5 \text{ W}}$$

36.18. b. Finalmente, encontraremos el campo magnético final (B_f) para $t = 8 \text{ s}$ a partir del esquema (a), en el cual $\Phi_f = 34 \text{ Wb}$. Luego, de la relación (34.6) para el flujo magnético tendremos:

$$B_f = \Phi_f/A = \Phi_f/ab = 34 \text{ Wb}/0,34 \cdot 0,2 \text{ m}^2 \quad \therefore \quad \boxed{B_f = 500 \text{ T}}$$

36.19. Utilizando el argumento del problema anterior, diremos que la fem inducida viene dada por la pendiente de la curva Φ -vs- t (Ver figura). Entonces, en $t = 8 \text{ s}$ se verificará lo siguiente:

$$\varepsilon = -\Delta\phi/\Delta t = -\text{tg}\theta = \text{tg}37^\circ = 3/4 \text{ Wb/s} \quad \therefore \quad \boxed{\varepsilon = 0,75 \text{ V}}$$

Nota. - Se verifica que: $\theta + 37^\circ = 180^\circ$, Luego; $\text{tg}\theta = -\text{tg}37^\circ$

36.20. Por los datos reconocemos que: $N = 100$ espiras, $l = 0,1 \text{ m}$, $A = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, y $\mu_a = \mu_r \cdot \mu_0 = 1,4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, pues el solenoide no tiene núcleo ($\mu_r = 1$). Luego, utilizando la relación (36.4) encontramos la inductancia del solenoide.

$$L = \mu_0 N^2 A/l = (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}) \cdot (100)^2 (5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)/0,1 \text{ m}$$

$$\therefore \quad \boxed{L = 2\pi \cdot 10^{-5} \text{ H}}$$

36.21. Reconociendo los datos tenemos que: $L = 10 \text{ mH} = 10^{-2} \text{ H}$, $N = 100$ vueltas, $i = 0,5 \text{ mA} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ A}$. Luego, utilizando la relación (36.3) encontramos el flujo magnético (ϕ) de la bobina.

$$L = N\phi/i \Rightarrow \quad \Phi = Li/N = (10^{-2} \text{ H}) \cdot (5 \cdot 10^{-4} \text{ A})/100 \quad \therefore \quad \boxed{\phi = 5 \cdot 10^{-8} \text{ T}}$$

36.22. De acuerdo con los datos tenemos: $L = 60 \text{ mH} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ H}$, $i_0 = 3,6 \text{ A}$, $i_f = 0 \text{ A}$, $\Delta t = 0,012 \text{ s}$. Luego, en base a la relación (36.5) encontramos que la fem autoinducida media viene dada por:

$$\varepsilon = -L \Delta i/\Delta t = -L(i_f - i_0)/\Delta t = -(6 \cdot 10^{-2} \text{ H}) \cdot (0 - 3,6) \text{ A}/0,012 \text{ s} \quad \therefore \quad \boxed{\varepsilon = 18 \text{ V}}$$

36.23. Por los datos se puede reconocer que: $L = 240 \text{ mH} = 0,24 \text{ H}$; $i_0 = 0 \text{ A}$; $i_f = 2 \text{ A}$; $|\varepsilon| = 30 \text{ V}$. Luego, utilizando la relación (36.5) tendremos:

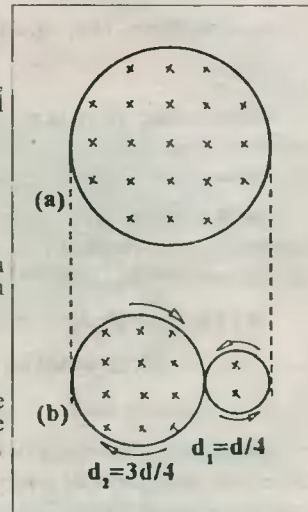


Fig. Solución Prob. 36.16

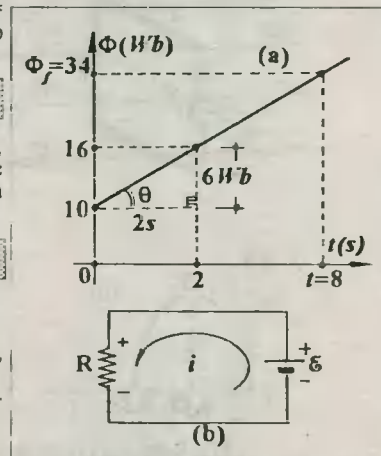


Fig. Solución Prob. 36.18

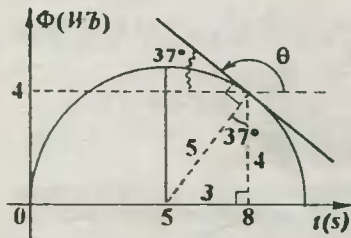


Fig. Solución Prob. 36.19



Fig. Solución Prob. 36.20

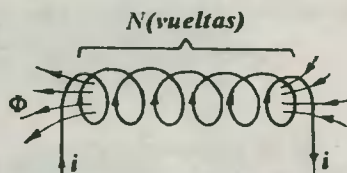


Fig. Solución Prob. 36.21

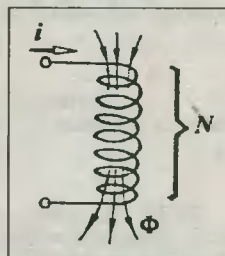
$$|\delta| = L \Delta i / \Delta t \Rightarrow \Delta t = L(i_f - i_o) / \delta = (0,24 \text{ H}) \cdot (2 - 0) \text{ A} / 30 \text{ V} \therefore \Delta t = 0,016 \text{ s}$$

36.24. A partir de los datos reconocemos que $N = 120$ espiras, $i = 7,5 \text{ A}$; $\phi = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$, con los cuales podemos encontrar la inductancia (L) de la bobina, utilizando la relación (36.3): $L = N\phi/i \dots (*)$

Para el cálculo de la energía magnética almacenada en la bobina cuando circula esta corriente, utilizaremos la relación (36.6) y la relación (*).

$$W = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} (N\phi/i) \cdot i^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} N\phi i$$

Donde al reemplazar los datos tenemos: $W = 1,125 \text{ J}$



36.25. Obteniendo los datos: $N = 200$ espiras, $i = 50 \text{ A}$, $W = 15 \text{ J}$, $A = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ procedemos a calcular el flujo magnético (ϕ) que pasa por la bobina, utilizando para ello la relación obtenida en el problema anterior para la energía.

$$W = \frac{1}{2} N\phi i \Rightarrow \phi = 2W/Ni = 2 \cdot 15 \text{ J} / 200 \cdot 50 \text{ A}$$

$$\Rightarrow \phi = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Seguidamente, utilizamos la relación (34.6) para el flujo, con la cual obtendremos la intensidad del campo magnético.

$$B = \phi/A = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} / 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \therefore B = 0,6 \text{ T}$$

36.26. a. A partir del esquema (a), en el cual la bobina ha sido sustituida por su resistencia (R), encontramos la corriente (i_o) que circulaba el circuito antes de abrir el interruptor, usando para ello la Ley de Ohm.

$$i_o = \mathcal{E}_1 / R = 48/8 \Rightarrow i_o = 6 \text{ A}$$

Seguidamente, calcularemos la energía (W) almacenada en la bobina que finalmente se liberará a través de la resistencia (R), usando para ello la relación (36.6).

$$W = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} (25 \cdot 10^{-3} \text{ H}) \cdot (6 \text{ A})^2 \therefore W = 0,45 \text{ J}$$

36.26. b. Finalmente, calcularemos la fem autoinducida en la bobina durante su desmagnetización, lo cual se determinará utilizando la relación (36.5).

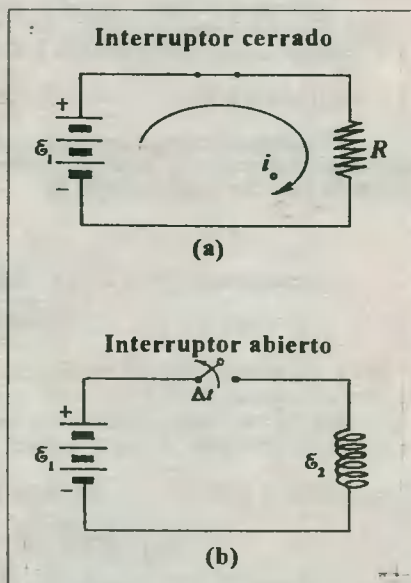


Fig. Solución Prob. 36.26

$$\epsilon_2 = -L \Delta i / \Delta t = -L(i_f - i_o) / \Delta t \Rightarrow \epsilon_2 = -(25 \cdot 10^{-3} \text{ H})(0 - 6) / 12 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad \therefore \boxed{\epsilon_2 = 12,5 \text{ V}}$$

36.27. De acuerdo con los datos se sabe que: $W = 0,01 \text{ J}$; $\Delta i = i_2 - i_1 = 2 \text{ A}$; $\frac{1}{2}(i_2 + i_1) = 5 \text{ A}$. Luego, utilizando la relación (36.8) para el cálculo de ΔW , tendremos:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} L i_2^2 - \frac{1}{2} L i_1^2 = \frac{1}{2} L (i_2^2 - i_1^2) \Rightarrow \Delta W = \frac{1}{2} L (i_2 + i_1)(i_2 - i_1) \\ \Rightarrow 0,01 \text{ J} = L \cdot (5 \text{ A}) \cdot (2 \text{ A}) \quad \therefore \boxed{L = 1 \text{ mH}}$$

36.28. Reconociendo los datos: $i_o = 2,5 \text{ A}$; $i_f = 14,5 \text{ A}$; $N = 800$ espiras; $\Delta \phi = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$, podemos expresar las relaciones (36.1) y (36.5) igualándolas y despejando el coeficiente de autoinducción L .

$$\epsilon = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -N \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \Rightarrow L = N \frac{\Delta \phi}{\Delta i} = N \frac{\Delta \phi}{i_f - i_o} \Rightarrow L = 800 \cdot \frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{14,5 - 2,5} \quad \therefore \boxed{L = 0,16 \text{ H}}$$

36.29. Reconociendo los datos, tenemos que: $i_o = 2 \text{ A}$; $\phi_o = 0,8 \text{ Wb}$; $N = 1$ espira, con los cuales podemos encontrar la inductancia (L) de la espira, utilizando para ello la relación (36.3).

$$L = N \phi_o / i_o = 1 \cdot 0,8 \text{ Wb} / 2 \text{ A} \Rightarrow L = 0,4 \text{ H}$$

A continuación, reconocemos por los datos que: $i_f = 2i_o = 4 \text{ A}$, y $\Delta t = 0,2 \text{ s}$, con los cuales podemos encontrar la fem autoinducida en la espira, empleando para ello la relación (36.5).

$$|\epsilon| = L \Delta i / \Delta t = 0,4 \text{ H} \cdot (4 - 2) / 0,2 \text{ s} \quad \therefore \boxed{|\epsilon| = 4 \text{ V}}$$

36.30. Del gráfico encontramos la pendiente (m) de la recta, el cual nos proporcionará la rapidez con que cambia la intensidad de corriente.

$$\Delta i / \Delta t = m = \text{tg} \theta = 15 \text{ A} / 3 \text{ s} \Rightarrow \Delta i / \Delta t = 5 \text{ A/s} \quad \dots (1)$$

Asimismo, podemos encontrar la inducción (L) de la espira utilizando los datos iniciales: $i_o = 10 \text{ A}$, $\phi_o = 0,8 \text{ Wb}$, y $N = 1$ espira. Luego, por la relación (36.3) tendremos:

$$L = N \phi_o / i_o = 1 \cdot 0,8 \text{ Wb} / 10 \text{ A} \Rightarrow L = 0,08 \text{ H} \quad \dots (2)$$

Finalmente, calcularemos la fem autoinducida en la espira durante el proceso de variación uniforme de corriente, empleando para ello la relación (36.5).

$$\epsilon = -L \Delta i / \Delta t \quad \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3) tenemos:

$$\epsilon = -0,08 \text{ H} \cdot (5 \text{ A/s}) \quad \therefore \boxed{\epsilon = -0,4 \text{ V}}$$

36.31. En base al esquema reconocemos que los datos son: $N = 100$ espiras, $B = 0,7 \text{ T}$, $\omega = 360 \text{ rpm} = 12\pi \text{ rad/s}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $b = \sqrt{2}/5 \text{ m}$. Luego, utilizando la relación (36.8) encontraremos la fem inducida máxima en el cuadro.

$$\epsilon_m = NBA\omega = 100 \cdot 0,7 \text{ T} \cdot (0,5 \cdot \sqrt{2}/5 \text{ m}) \cdot (12 \cdot 22/7 \text{ rad/s})$$

$$\therefore \boxed{\epsilon_m = 264\sqrt{2} \text{ V}}$$

Con este resultado y la relación (36.9) encontramos el valor eficaz de la tensión inducida en el cuadro.

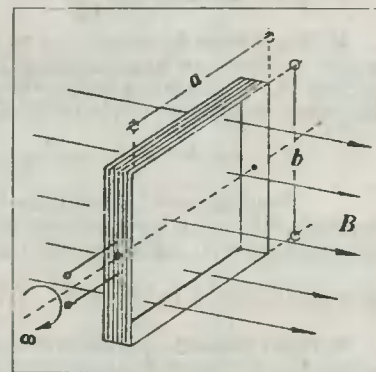
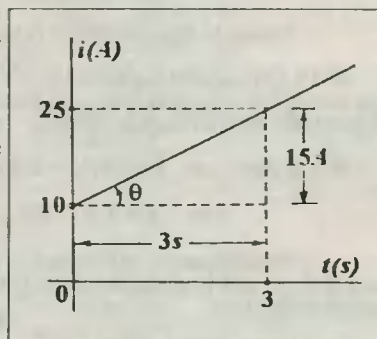


Fig. Solución Prob. 36.31

$$\epsilon = \epsilon_m / \sqrt{2} = 264\sqrt{2} \text{ V} / \sqrt{2} \quad \therefore \quad \boxed{\epsilon = 220 \text{ V}}$$

Finalmente, en base a la relación (36.7) encontraremos la relación de tensión (ϵ) en función del tiempo.

$$E = \epsilon_m \cdot \text{sen}(\omega t) \quad \therefore \quad \boxed{\epsilon = 264\sqrt{2} \cdot \text{sen}(12\pi t)}$$

36.32. Utilizando el mismo procedimiento del problema anterior encontraremos la *fem* inducida máxima (ϵ_m), y a continuación elaboraremos la ecuación $\epsilon = f(t)$.

Por los datos dados tenemos lo siguiente: $N = 1$ espira, $B = 10 \text{ T}$, $A = 0,03 \text{ m}^2$, $\omega = 10 \text{ rpm} = \pi/3 \text{ rad/s}$. Luego, utilizando la relación (36.8) encontramos ϵ_m .

$$\epsilon_m = NBA\omega = 1 \cdot (10 \text{ T}) \cdot (0,03 \text{ m}^2) \cdot (\pi/3 \text{ rad/s}) \Rightarrow \epsilon_m = \pi/10 \text{ V}$$

Luego, en base a la relación (36.7) encontramos la tensión instantánea (ϵ), donde $t = 0,5 \text{ s}$.

$$\bullet \quad \epsilon = \epsilon_m \cdot \text{sen}(\omega t) = \pi/10 \cdot \text{sen}(\pi/3 \text{ rad/s} \cdot 0,5 \text{ s}) = \pi/10 \text{ sen}30^\circ \quad \therefore \quad \boxed{\epsilon = \pi/20 \text{ V}}$$

36.33. Todo instrumento eléctrico que es sometido a una tensión alterna debe tener un aislamiento capaz de soportar la tensión máxima (ϵ_m) que se pudiera presentar. De este modo, conociendo la tensión eficaz $\epsilon = 220 \text{ V}$, y utilizando la relación (36.8), despejamos ϵ_m .

$$\epsilon_m = \sqrt{2}\epsilon = \sqrt{2} \cdot 220 \text{ V} \quad \therefore \quad \boxed{\epsilon_m = 311 \text{ V}}$$

36.34.a. Del gráfico ϵ -vs- t encontramos los siguientes datos: $\epsilon_m = 120\sqrt{2} \text{ V}$, $T = 100 \text{ ms}$. Luego: $\omega = 2\pi/T = 2\pi/0,1 = 20\pi \text{ rad/s}$.

Utilizando ahora la relación (36.7) encontramos la tensión instantánea.

$$\epsilon = \epsilon_m \cdot \text{sen}(\omega t) = 120\sqrt{2} \text{ sen}(20\pi t) \text{ voltios}$$

$$\Rightarrow V = \epsilon_m / \sqrt{2} = 120\sqrt{2} / \sqrt{2} \Rightarrow V = 120 \text{ V}$$

Y aplicando la Ley de Ohm deducimos la expresión de la corriente alterna (i).

$$I = \epsilon/R = 120\sqrt{2} \text{ sen}(20\pi t) \text{ V}/40 \Omega$$

$$\therefore \quad \boxed{I = 3\sqrt{2} \text{ sen}(20\pi t) \text{ A}}$$

36.34.b. De la respuesta obtenida en **a** encontramos la intensidad de corriente máxima: $i_m = 3\sqrt{2} \text{ A}$. Y utilizando la relación (36.10) determinamos la intensidad de corriente eficaz.

$$I = I_m / \sqrt{2} = 3\sqrt{2} / \sqrt{2} \quad \therefore \quad \boxed{I = 3 \text{ A}}$$

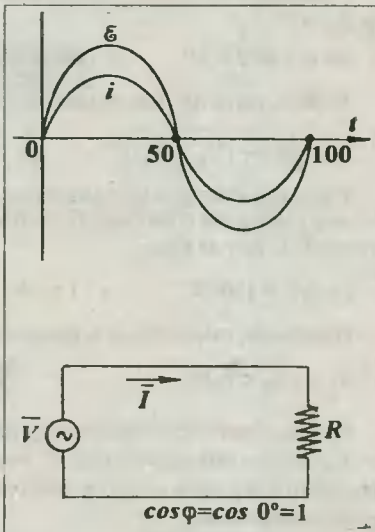
36.34.c. Finalmente, la potencia activa la encontramos por medio de la relación:

$$Pot = VI \cos\phi = 120 \cdot 3 \cdot \cos 0^\circ \quad \therefore \quad \boxed{Pot = 360 \text{ W}}$$

36.35. Reconociendo los datos: $V_L = 157 \text{ V}$, $I = 2 \text{ A}$, $f = 50 \text{ Hz}$. Entonces, aplicamos la relación (36.11) para encontrar la reactancia inductiva de la bobina.

$$X_L = V_L / I = 157/2 \Rightarrow X_L = 78,5 \Omega$$

Y en base a la relación (36.12) lograremos encontrar la inductancia L .



$$X_L = 2\pi fL \Rightarrow 78,5 = 2,314(50 \text{ Hz})L \quad \therefore \quad \boxed{L = 0,25 \text{ H}}$$

36.36. A partir de los datos encontramos que: $I = 5 \text{ A}$, $C = 50 \mu\text{F}$, $f = 60 \text{ Hz}$, con los cuales calcularemos en primer lugar la reactancia capacitiva (X_C) del condensador.

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2,314(60 \text{ Hz}) \cdot (50 \cdot 10^{-6} \text{ F})} \Rightarrow X_C \approx 53 \Omega$$

Finalmente, por la relación (36.11), que no es más que la Ley de Ohm aplicada a una bobina, encontramos la tensión eficaz que ella experimenta.

$$V_C = IX_C = 5,53 \quad \therefore \quad \boxed{V_C = 265 \text{ V}}$$

36.37. Aplicando la relación (36.16) encontramos el fasor impedancia (Z).

$$\bar{Z} = 3 + j(6 - 2) \Rightarrow \bar{Z} = 3 + j4\Omega$$

Y del diagrama fasorial adjunto reconocemos que el módulo de la impedancia viene por el Teorema de Pitágoras, el cual concuerda con la relación (36.17).

$$|\bar{Z}| = \sqrt{3^2 + 4^2} \quad \therefore \quad \boxed{|\bar{Z}| = 5 \Omega}$$

Finalmente, calculamos el factor de potencia, reconociendo que $\varphi = 53^\circ$.

$$\cos \varphi = R/V = 3/4 \quad \therefore \quad \boxed{\cos \varphi = 0,6}$$

36.38. A partir del dato de las resistencias encontramos la impedancia del circuito.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{15^2 + (26 - 6)^2} \Rightarrow Z = 25 \Omega$$

Y de la ecuación de la tensión alterna (6) podemos reconocer que su tensión máxima es $\epsilon_m = 150\sqrt{2} \text{ V}$. Luego, la tensión eficaz será: $\epsilon = 150 \text{ V}$. Seguidamente, hallaremos la intensidad de corriente eficaz a partir de la Ley de Ohm.

$$I = E/Z = 150/25 \Rightarrow I = 6 \text{ A}$$

Finalmente, calcularemos la tensión en la bobina, utilizando la relación (36.11).

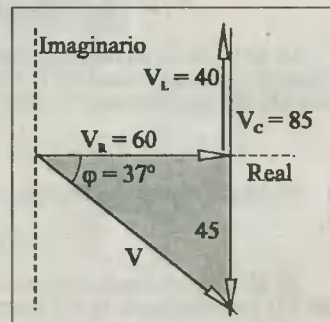
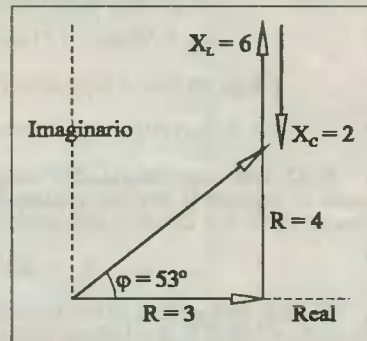
$$V_L = IX_L = 6,26 \quad \therefore \quad \boxed{V_L = 156 \text{ V}}$$

36.39.a. A partir del diagrama fasorial indicado encontraremos que V_R siempre está en el eje real, V_L hacia el lado positivo del eje imaginario, y V_C hacia el lado negativo del mismo eje. Luego, del triángulo sombreado.

$$|\bar{V}| = \sqrt{60^2 + 45^2} \quad \therefore \quad \boxed{|\bar{V}| = 75 \text{ V}}$$

36.39.b. Asimismo, el factor de potencia ($\cos \varphi$) se calculará aplicando la relación (36.18).

$$\cos \varphi = V_R/V = 60/75 \quad \therefore \quad \boxed{\cos \varphi = 0,8}$$



Observación. - El ángulo de desfase $\varphi = 37^\circ$ indica que la tensión se encuentra atrasada con relación a la corriente (I), o lo que es lo mismo, la corriente se encuentra adelantada 37° con relación a la tensión.

36.40.a. De la observación del problema anterior, elaboramos el esquema adjunto, del cual podemos deducir que la reactancia (X) neta del circuito es igual a -60Ω . Luego:

$$X = X_L - X_C \Rightarrow -60 = 40 - X_C \therefore X_C = 100 \Omega$$

36.40.b. Seguidamente, la corriente eficaz se calculará a partir de la Ley de Ohm.

$$I = I_R / R = 40 / 80 \therefore I = 0,5 A$$

36.41. Calculemos la impedancia de todo el circuito, utilizando para ello la relación (36.16).

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{3^2 + (4 - 8)^2} \Rightarrow Z = 5 \Omega$$

Entonces, de la Ley de Ohm encontraremos la corriente del circuito.

$$I = V / Z = 220 / 5 \therefore I = 44 A$$

Seguidamente, encontraremos la tensión V' indicada en el voltímetro, calculando primero la impedancia entre R y X_L .

$$Z' = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow Z' = 5 \Omega$$

Luego, aplicando la Ley de Ohm tenemos: $V' = I Z' = 44 \cdot 5 \therefore V' = 220 V$

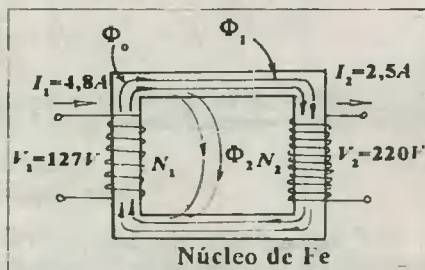
36.42. De los datos reconocemos que es posible aplicar la relación (36.20).

$$V_1 / V_2 = N_1 / N_2 \Rightarrow 120 / 30000 = V' / N_2 \therefore N_2 = 2250 \text{ espiras}$$

36.43. Del esquema vemos cómo todo el flujo variable creado en el primario se divide en dos: ϕ_1 y ϕ_2 . El primero induce una tensión V_2 en el secundario, y el otro se pierde por un efecto conocido como *dispersión*. Por ésta y otras razones, como el calentamiento del núcleo, se pierde energía y/o potencia, de modo que la eficiencia del transformador será en general menor que 100%, y se calculará a partir de la relación (36.21).

$$\eta = \frac{Pot_2}{Pot_1} = \frac{V_2 I_2}{V_1 I_1} = \frac{(220 V) \cdot (2,5 A)}{(127 V) \cdot (4,8 A)}$$

$\therefore \eta = 0,902$; o $\eta_{\%} = 90,2\%$

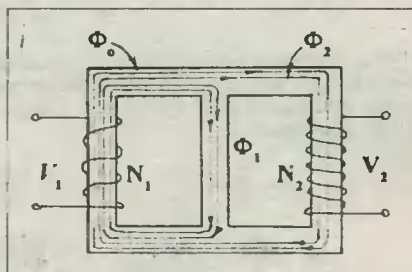


36.44. Del esquema podemos asumir que el flujo variable ϕ_0 creado en el primario se divide en dos: ϕ_1 y ϕ_2 , de modo que: $\phi_1 = \phi_2 = \frac{1}{2} \phi_0$. Luego, por la relación (36.2) podemos calcular las tensiones en el primario y secundario.

$$V_1 = N_1 \Delta \phi_0 / \Delta t, \text{ y } V_2 = N_2 \Delta \phi_2 / \Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{\Delta \phi_2 / \Delta t}{\Delta \phi_0 / \Delta t} = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{1/2 \Delta \phi_0}{\Delta \phi_0} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{N_2}{2N_1}$$

$$\Rightarrow V_2 = 200 \cdot \frac{200}{2 \cdot 100} \therefore V_2 = 200 V$$



CAP 37 ONDAS ELECTROMAGNETICAS - ONDAS LUMINOSAS

37.1. Comparando la ecuación de onda dada con la relación (37.2) podemos reconocer que:

$$B = 4 \cdot 10^{-6} \text{sen}[(2\pi/4 \cdot 10^{-7})x - 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14}t] = B_m \text{sen}(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow B_m = 4 \cdot 10^{-6} \text{ T}; k = 2\pi/4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}; \omega = \pi \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$$

a) La frecuencia estará dada por la relación cinemática: $f = 2\pi/\omega = \pi \cdot 10^{15}/2\pi \therefore f = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

b) La longitud de onda la obtendremos a partir del número de onda (k).

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi \cdot 10^{15}}{2\pi/4 \cdot 10^{-7}} \therefore \lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

c) Y ahora, encontraremos la velocidad de propagación de la onda electromagnética empleando la relación (37.9).

$$c = \lambda f = (4 \cdot 10^{-7} \text{ m}) \cdot (5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}) \therefore c = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

37.2. Utilizando las relaciones (37.13) y (37.10) podemos encontrar la intensidad de radiación o vector de Poynting

$$S_m = \frac{1}{2\mu_0} E_m \cdot B_m = \frac{1}{2\mu_0} E_m \left(\frac{E_m}{c} \right) = \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{\mu_0 c} \dots (*)$$

Ahora, de la ecuación de onda reconocemos que el campo eléctrico máximo (E_m) es $E_m = 120\sqrt{\pi} \text{ N/C}$, y la velocidad de onda es $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Luego, reemplazando estos datos en (*) tenemos:

$$S_m = \frac{1}{2} \frac{(120\sqrt{\pi} \text{ N/C})^2}{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2) \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \therefore S_m = 60 \text{ W/m}^2$$

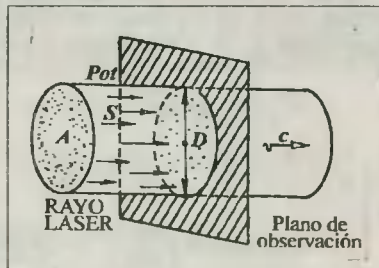
37.3. Reconociendo como datos $U = 520 \text{ J}$, $A = 4 \text{ m}^2$, $t = 20 \text{ s}$, emplearemos la relación (37.11) para encontrar la intensidad de radiación (S).

$$S = \frac{U}{At} = \frac{520 \text{ J}}{4 \text{ m}^2 \cdot 20 \text{ s}} \therefore S = 6,5 \text{ W/m}^2$$

37.4. Podemos reconocer que la intensidad de radiación es $S = 8 \text{ W/m}^2$, y la rapidez del transporte de energía o potencia a través del área A es $Pot = 50\pi \text{ W}$. Luego, de la relación (37.11) tendremos:

$$S = \frac{U}{At} = \frac{Pot}{A} \Rightarrow A = \frac{Pot}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi D^2}{4} = \frac{50\pi \text{ W}}{8 \text{ W/m}^2} \therefore D = 5 \text{ m}$$



37.5. De acuerdo con la solución del problema anterior, y reconociendo que la rapidez de salida de

la energía de la superficie esférica de radio $R = 2 \text{ km}$ es exactamente la misma que irradia la antena en todo instante, podemos decir que:

$$S = \text{Pot}/A \Rightarrow \text{Pot} = SA = S(4\pi R^2)$$

$$\Rightarrow \text{Pot} = (5/\pi \text{ W/m}^2) \cdot [4\pi \cdot (2 \cdot 10^3 \text{ m})^2]$$

$$\therefore \text{Pot} = 80 \text{ MW (megawatts)}$$

37.6. Procediendo de un modo similar al problema anterior tendremos que la intensidad de radiación (S) viene dada por $S = \text{Pot}/A$, donde $A = 2\pi R^2$.

$$\Rightarrow S = \frac{\text{Pot}}{2\pi R^2} \dots (1)$$

Ahora, utilizando la relación deducida en el problema 37.2 diremos que el campo eléctrico máximo viene dado por:

$$S = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_m^2}{c} \Rightarrow E_m = \sqrt{2\mu_0 c S} \dots (2)$$

Luego, reemplazando (1) en (2) obtendremos:

$$E_m = \sqrt{2\mu_0 c (\text{Pot}/2\pi R^2)}$$

$$\Rightarrow E_m = 1/R \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 (1,2 \cdot 10^6/\pi)} = 12 \cdot 10^3 / 10 \cdot 10^3 \therefore E_m = 1,2 \text{ V/m}$$

Finalmente, empleando la relación (37.10) encontramos la intensidad del campo magnético máximo.

$$B_m = E_m/c = 1,2/3 \cdot 10^8 \therefore B_m = 4 \cdot 10^{-9} \text{ T}$$

37.7. Se sabe que la diferencia de potencial entre los extremos de la lámpara debe estar relacionada con el campo eléctrico a lo largo del tubo del siguiente modo:

$$E_m = 17l = 220/1,1 \Rightarrow E_m = 200 \text{ V/m}$$

Luego, utilizando la relación deducida en el problema anterior encontraremos la distancia R de la habitación a la estación de radio.

$$E_m = \frac{1}{R} \sqrt{2\mu_0 c \text{Pot}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2\mu_0 c \text{Pot}}}{E_m} = \frac{\sqrt{2(4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot 5 \cdot 10^{12}}}{200} \therefore R \approx 17,7 \text{ m}$$

37.8. Según los datos se tiene que aplicar la relación cinemática:

$$e = vt \Rightarrow 2\pi R_T = ct \Rightarrow R_T = ct/2\pi$$

Así, reemplazando datos tenemos:

$$R_T = 3 \cdot 10^8 \cdot 0,139/2,3,14 \Rightarrow R_T = 66,4 \cdot 10^5 \text{ m} \therefore R_T \approx 6,640 \text{ km}$$

37.9. Para el cálculo de la longitud de onda correspondiente a las frecuencias dadas usaremos la relación (37.9): $\lambda = c/f$.

(*) Para la menor frecuencia encontramos la mayor longitud de onda.

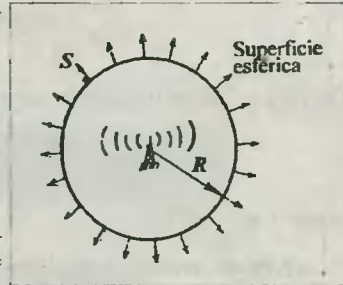
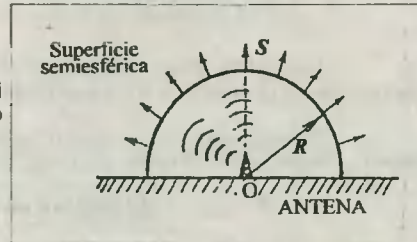


Fig. Solución Prob. 37.5



$$\lambda_{\max} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} \quad \therefore \quad \lambda_{\max} \approx 0,75 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 7500 \text{ \AA}$$

(*) Para la mayor frecuencia encontramos la menor longitud de onda

$$\lambda_{\min} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} \quad \therefore \quad \lambda_{\min} \approx 0,75 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 4000 \text{ \AA}$$

Nota: $1 \text{ m} = 10^{10} \text{ \AA}$

37.10. En primer lugar, debemos reconocer que es conveniente expresar la longitud de onda dada en *angstrom* (\AA), para lo cual debemos recordar que $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$.

$$\lambda = 316 \text{ nm} = 316 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 316 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{10} \text{ \AA} \Rightarrow \lambda = 3160 \text{ \AA}$$

En segundo lugar, comparamos el valor de esta longitud de onda con el intervalo de valores encontrado en el problema anterior, donde $4000 \text{ \AA} \leq \lambda_{\text{visible}} \leq 7500 \text{ \AA}$.

De esta comparación comprobamos que la longitud de onda de la radiación dada no se encuentra comprendida en dicho intervalo, por lo cual concluimos que ésta no es visible.

\therefore **El hombre no percibe esta radiación como luz**

37.11. De acuerdo con el ítem 37.10, sabemos que la longitud de onda para la máxima sensibilidad es $\lambda = 5550 \text{ \AA}$. Luego, utilizando la relación (37.9) encontraremos la frecuencia y el periodo de esta radiación.

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 5550 \cdot 10^{-10} \quad \therefore \quad f = 5,4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Finalmente, el periodo se encontrará por la relación:

$$T = f^{-1} = (5,4 \cdot 10^{14} \text{ Hz})^{-1} \quad \therefore \quad T = 1,85 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

37.12. Reconociendo el cambio de la longitud de onda debido al efecto Doppler, extraemos los siguientes datos del sistema: Observador - Foco móvil; $v_{\text{foco}} = 0,2c$; $\lambda_0 = 5000 \text{ \AA}$; $v_{\text{onda}} = c$. Luego, empleando la relación (23.16) obtendremos la longitud aparente λ' vista desde la Tierra:

$$\lambda' = \left(\frac{v_{\text{onda}} - v_{\text{foco}}}{v_{\text{onda}}} \right) \lambda_0 = \frac{c - 0,2c}{c} 5000 \text{ \AA} \Rightarrow \lambda' = 4000 \text{ \AA}$$

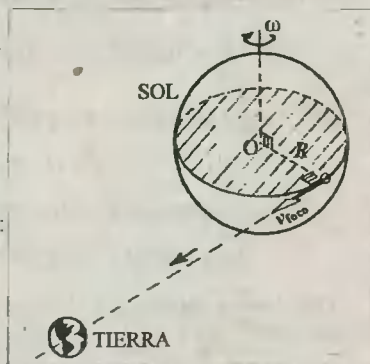
Luego, ubicando el lugar que le corresponde a esta longitud de onda en la tabla de datos del ítem 37.12, encontramos que ésta corresponde a la radiación de color:

VIOLETA

37.13. En primer lugar encontraremos la velocidad tangencial en el ecuador del Sol, dado que su borde se constituye en un foco emisor móvil. Luego, por la relación cinemática:

$$v_{\text{foco}} = v_{\text{tang}} = \omega R = 2\pi R/T$$

$$v_{\text{foco}} = \frac{2 \cdot (3,14) \cdot 7 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{24,786400 \text{ s}} \Rightarrow v_{\text{foco}} = 2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$



Luego, tal como se hizo en el problema anterior, obtendremos la variación experimentada por la longitud de onda.

$$\lambda' = \left(\frac{v_{\text{onda}} - v_{\text{foco}}}{v_{\text{onda}}} \right) \lambda_0 = \left(1 - \frac{v_{\text{foco}}}{v_{\text{onda}}} \right) \lambda_0 = \lambda_0 - \frac{v_{\text{foco}} \lambda_0}{v_{\text{onda}}} \Rightarrow \Delta \lambda = \frac{v_{\text{foco}} \lambda_0}{v_{\text{onda}}} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ m/s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \cdot 5 \ 500 \text{ \AA}$$

$$\therefore \Delta \lambda = 0,037 \text{ \AA}$$

37.14. A partir de la relación (37.13) podemos encontrar la cantidad de movimiento que la radiación electromagnética transmite al disco, y recordando la relación dinámica para la cantidad de movimiento y fuerza: $P = Ft$, tendremos:

$$P = U/c = Ft \Rightarrow F = U/ct \dots (1)$$

Y utilizando la relación (37.11) para la intensidad de radiación (S) tendremos que:

$$U = SA t \dots (2)$$

Luego, reemplazando (2) en (1): $F = SA/c = \pi SR^2/c$

Finalmente, sustituimos los datos correspondientes.

$$F = \frac{3,14 \cdot 1 \ 400 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2}{3 \cdot 10^8} \therefore F = 6 \cdot 10^9 \text{ N}$$

37.15. De los datos reconocemos que: $m = 1 \ 460 \text{ kg}$; $Pot = 10^4 \text{ W}$; $t = 1 \text{ día} = 86 \ 400 \text{ s}$. Luego, utilizando la relación para la fuerza utilizada en el problema anterior, tendremos:

$$F = U/ct = Pot/c \dots (1)$$

Y recordando la relación dinámica para la fuerza y la cantidad de movimiento:

$$Ft = P = mv \Rightarrow v = Ft/m \dots (2)$$

A continuación, reemplazamos (1) en (2):

$$v = \frac{Pot \cdot t}{mc} = \frac{10^4 \cdot 86 \ 400}{1 \ 500 \cdot (3 \cdot 10^8)} \therefore v = 1,92 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

CAP 38 OPTICA GEOMETRICA

REFLEXION DE LA LUZ

38.1. A partir del esquema vemos que las distancias que se nos piden son x e y .

Del Δ rectángulo ABC: $b = a \cdot \text{tg}60^\circ$

$$\Rightarrow b = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 15 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow c = b - 6 = 9 \text{ cm}$$

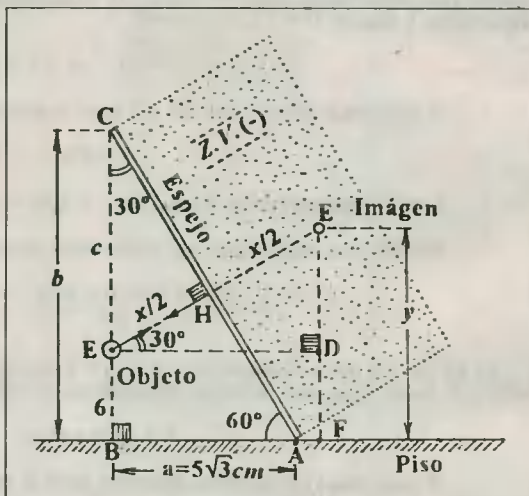
Del Δ rectángulo EHC: $x/2 = c \cdot \text{sen}30^\circ$

$$\therefore x = 9 \text{ cm}$$

Del Δ rectángulo EDE': $ED = x \cdot \text{sen}30^\circ = 4,5 \text{ cm}$

$$\Rightarrow DF = BE = 6 \text{ cm}$$

Luego: $y = ED + DF \therefore y = 10,5 \text{ cm}$



38.2. De acuerdo con el esquema, el rayo extremo (CB) que sale de la cabeza del hombre llegará al borde del charco y se reflejará llegando a los ojos (O) del niño, el cual verá la imagen de la cabeza en el punto C' que se encuentra directamente debajo de C. Luego, resolviendo diremos:

$\Delta BAC' \sim \Delta BPO$: $L/a = H/h$
($H = 1,73 \text{ m} \approx \sqrt{3} \text{ m}$)

$$\Rightarrow L = (H/h)a = (\sqrt{3}/0,5) \cdot (0,5 \sqrt{3})$$

$$\therefore L = 3 \text{ m}$$

38.3. El hombre podrá ver sus pies si los rayos (R.I) que salen de sus pies producen rayos reflejados (RR) luego de incidir en el espejo, los cuales logran llegar hasta sus ojos (M). Al trazar la normal (ON) al espejo, vemos que se forman los ángulos α iguales de acuerdo con la 2ª ley de la reflexión. Ahora, del Δ rectángulo MPO se cumple:

$$\text{tg}2\alpha = H'/x = (1,7 - 0,1)/1,2 = 4/3 \Rightarrow 2\alpha = 53^\circ \Rightarrow \alpha = 26,5^\circ$$

Y del esquema vemos que también se verifica: $\alpha + \theta = 90^\circ \therefore \theta = 63,5^\circ$

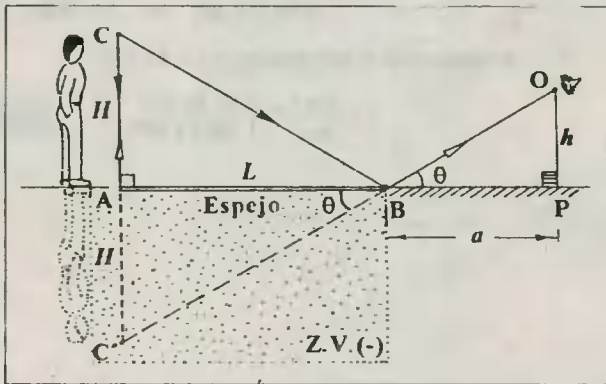


Fig. Solución Prob. 38.2

38.4. A partir del esquema se observa que el espejo (EM) se ubica en la bisectriz del ángulo CAC' .

El espejo mínimo se consigue mediante el uso de los rayos reflejados P'O y C'O, que permiten apreciar los pies y la cabeza de la imagen P'C' respectivamente. Del borde E se puede decir que:

$$\alpha + \theta = 90^\circ \Rightarrow \cos\alpha = \text{sen}\theta$$

Y: $\cos 2\alpha = -\cos 2\theta \dots (*)$

Δ rectángulo OPC: $\text{tg}\beta = \frac{H}{a(1 + \sec 2\alpha)} = \frac{H \cos 2\alpha}{2a \cos^2 \alpha} \dots (1)$

En el Δ OEM aplicamos la Ley de Senos:

$$\frac{x}{\text{sen}\beta} = \frac{a \sec 2\alpha}{\text{sen}[\pi - (\theta + \beta)]}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}(\theta + \beta)}{\text{sen}\beta} = \frac{a \sec 2\alpha}{x}$$

$$\Rightarrow \text{sen}\theta / \text{tg}\beta + \cos\theta = a/x \cos 2\alpha \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) y utilizando las relaciones (*) despejamos x, obteniendo:

$$x = \frac{Ha}{2a \text{sen}^3 \theta - H \cos 2\theta \cdot \cos \theta}$$

Y sustituyendo los valores: $H = \sqrt{3} \text{ m}$, $a = 1 \text{ m}$, $\theta = 60^\circ$, encontramos:

$$x = \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}/2)^3 - \sqrt{3} \cdot (-1/2) \cdot 1/2}$$

$$\therefore \boxed{x = 1 \text{ m}}$$

Observación. - Cuando $\theta = 90^\circ$, el espejo es vertical, y $x = H/2$.

38.5. A partir del esquema de la figura podemos reconocer que el borde inferior (A) del espejo AM se encuentra a una distancia del piso igual a 100 cm. Luego:

$$m + y = 100 \dots (1)$$

De acuerdo con la semejanza de los triángulos PAC y PHO, se verifica que:

$$OH/AC = HP/CP \Rightarrow OH/m = 2d/d \Rightarrow OH = 2m$$

En el esquema también se verifica que: $2m + y = OR \Rightarrow 2m + y = 152 \dots (2)$

De (1) y (2): $y = 48 \text{ cm}$

A continuación encontramos la altura visible (x) de la imagen a partir de:

$$x + y = H \Rightarrow x + 48 = 160 \Rightarrow x = 112 \text{ cm}$$

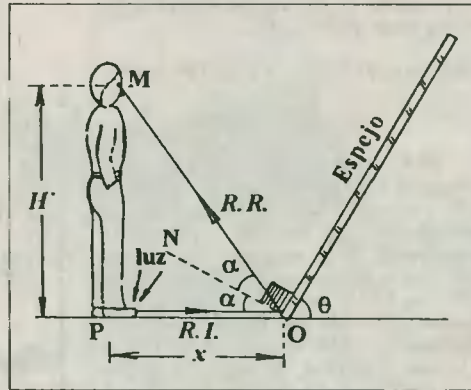


Fig. Solución Prob. 38.3

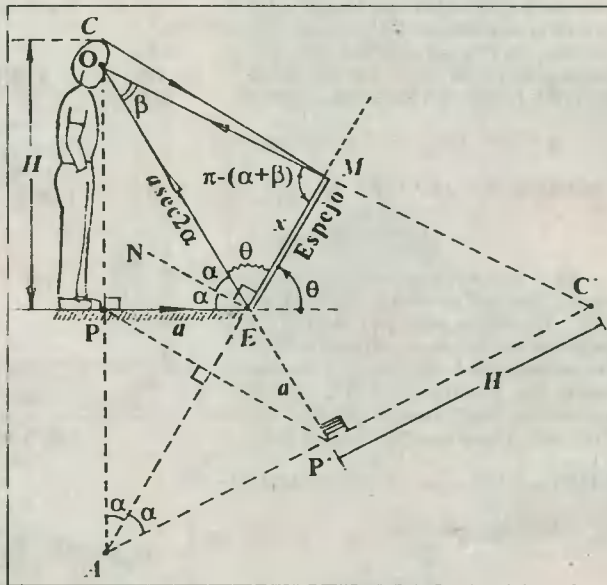


Fig. Solución Prob. 38.4

Finalmente, el porcentaje visible (%V) viene dado por:

$$\%V = (x/H) \cdot 100\% = (112/160) \cdot 100\%$$

$$\therefore \%V = 70\%$$

38.6. En el esquema adjunto se ha señalado a la modelo con el segmento CP, y el punto O es el lugar donde se ubican sus ojos. Sea NP' = x la altura observable de la imagen en el espejo AB. De acuerdo con los datos: OA = 150 cm, PM = 90 cm, y la altura de la mesita AM = 40 cm. Resolviendo el Δ rectángulo OHA encontramos: OH = 120 cm. También, la distancia de los ojos (O) hasta el borde superior (C) de la cabeza: OC = 10 cm. Se han trazado dos rayos reflejados que llegan a los ojos de la modelo: uno que permite apreciar los pies P'O y el otro NO, que justamente pasa por el borde superior del espejo (B). Luego, del esquema tenemos:

$$y + 70 = 120 \Rightarrow y = 50 \text{ cm}$$

Finalmente: $x + 2y = 120 + 40$

$$\therefore x = 60 \text{ cm}$$

38.7. Sea x el lado del cuadrado luminoso formado en el piso desde M hasta N. Ubicando la imagen (I) del foco (F) podemos ver los rayos reflejados desde los extremos del espejo (AC). Demostrando que los triángulos IBC y CHM son iguales, encontramos que HM = IB = 40 cm. A continuación vemos que:

$$\Delta AHN \sim \Delta ABI \Rightarrow HN/IB = AH/AB$$

$$\Rightarrow \frac{40 + x}{40} = \frac{40 + 60}{20} \Rightarrow x = 160 \text{ cm}$$

$$\therefore x = 1,6 \text{ m}$$

38.8. Sea B la posición de la mosca en el instante en que su distancia hasta la imagen B' es 60 cm. Entonces, resolviendo el triángulo AHB, tendremos que la distancia recorrida por la mosca es $d = AB = 450 \text{ cm}$. Luego, el tiempo transcurrido para este movimiento estará dado por:

$$t = d/v = 450/50 \therefore t = 9 \text{ s}$$

38.9. Cuando el espejo está en la posición E₁ produce la imagen I₁, y cuando está en la posición E₂ produce la imagen I₂. Calcule-

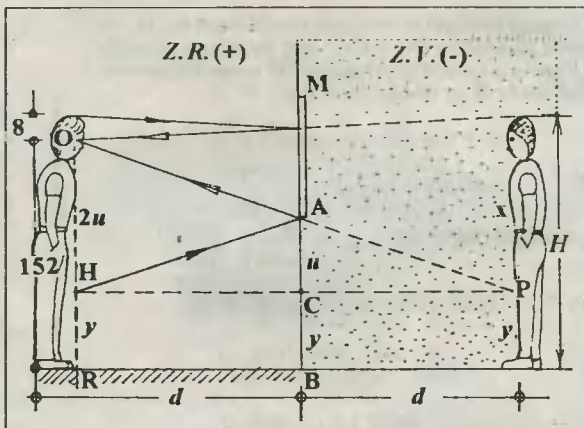


Fig. Solución Prob. 38.5

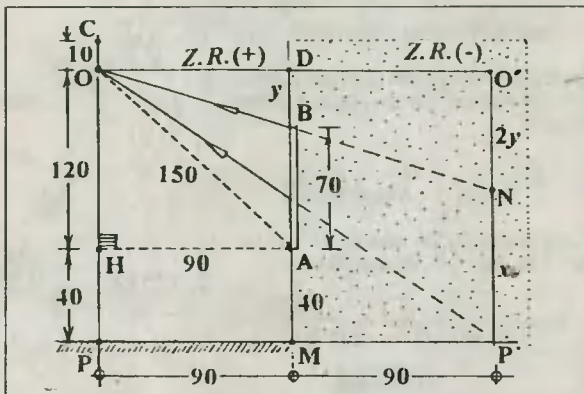


Fig. Solución Prob. 38.6

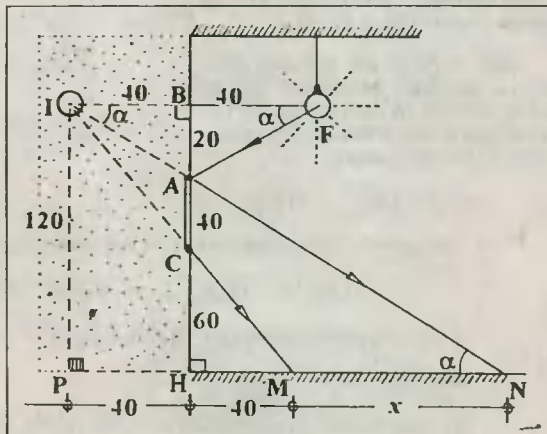


Fig. Solución Prob. 38.7

mos ahora el desplazamiento del espejo, sabiendo que su movimiento es uniforme.

$$d_e = v_e \cdot t = 20.6 = 120 \text{ cm}$$

Luego, del esquema podemos establecer que los desplazamientos del espejo (d_e) y de la imagen (d_i) se encuentran relacionadas del siguiente modo:

$$2x + d_i = 2(d_e + x) \Rightarrow d_i = 2d_e$$

$$\therefore d_i = 240 \text{ cm} = 2.4 \text{ m}$$

38.10. Haciendo uso de los rayos reflejados RR_1 y RR_2 podemos apreciar que el ángulo entre ellos (θ) es el que nos permitirá determinar la rapidez con que giran los rayos reflejados, y así poder averiguar la velocidad tangencial de los puntos iluminados en la superficie cóncava. Según el esquema vemos que el espejo (E) ha pasado de la orientación E_1 a la orientación E_2 , girando para ello un ángulo α . Luego, trazando las normales N_1 y N_2 respectivamente, se observa que ellas también forman el ángulo α . Luego, del esquema:

$$\theta + 2x = 2y \Rightarrow \theta = 2(y - x) \dots (1)$$

$$x + \alpha = y \Rightarrow \alpha = y - x \dots (2)$$

De (2) en (1): $\theta = 2\alpha$

De este resultado podemos asegurar que la velocidad angular con la cual giran los rayos reflejados (ω') es el doble de la velocidad angular (ω) con la cual gira el espejo ($\omega' = 2\omega$). Finalmente, diremos que el roedor deberá correr con una velocidad mínima v igual a la velocidad tangencial de los puntos periféricos.

$$v = v_t = \omega'R = 2\omega R$$

$$\therefore v = 12 \text{ m/s}$$

38.11. Aprovechando el resultado del problema anterior, diremos que de acuerdo con el esquema se verifica que: $\theta = 2\alpha$. Y ubicando la marca de 20.4 en la escala SC encontraremos que la distancia que corresponde a esta lectura es: $20(7.5 \text{ mm}) = 150 \text{ mm} = 15 \text{ cm}$. Luego, del triángulo rectángulo se verifica que:

$$\text{tg}\theta = 15/20 = 3/4 \Rightarrow \theta = 37^\circ$$

$$\text{Finalmente: } 2\alpha = 37^\circ \therefore \alpha = 18.5^\circ$$

38.12. De acuerdo con la relación (38.2) podemos predecir el número (N) de imágenes completas que se formarán entre los espejos E_1 y E_2 .

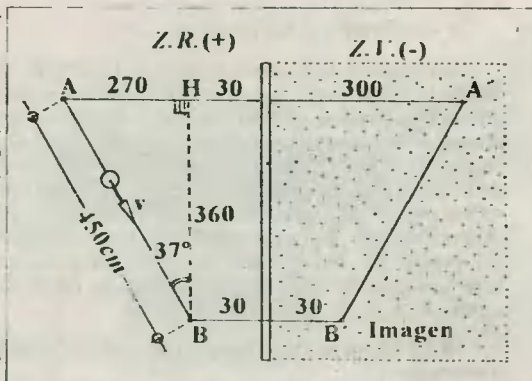


Fig. Solución Prob. 38.8

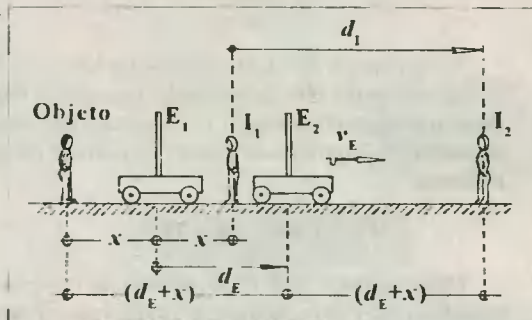


Fig. Solución Prob. 38.9

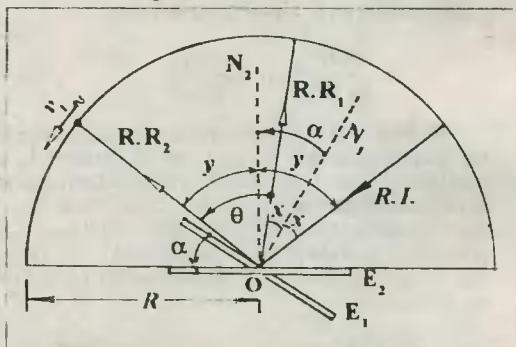


Fig. Solución Prob. 38.10

$$N = 360^\circ/60^\circ - 1 = 5 \text{ imágenes}$$

Al construir la primera imagen A_1B_1 , detrás del espejo E_1 observamos que él se encuentra subtendido por un ángulo igual a $\theta = 60^\circ$, lo cual se verificará para el resto de imágenes. La segunda imagen A_2B_2 se forma detrás del espejo E_2 ; la tercera imagen A_3B_3 se forma detrás de la prolongación del espejo E_1 , y se forma por reflexión de A_2B_2 . Igualmente, la cuarta imagen A_4B_4 es la reflexión A_1B_1 formada detrás de la prolongación del espejo E_2 . Finalmente, la quinta imagen es la superposición de dos reflexiones de A_3B_3 detrás del espejo E_2 y A_4B_4 detrás del espejo E_1 .

38.13. Despejando el ángulo θ de la relación (38.2) tendremos:

$$\theta = \frac{360^\circ}{N+1}$$

Al reemplazar $N = 4$, obtenemos $\theta = 72^\circ$, y con $N = 5$ se obtiene $\theta = 60^\circ$, de aquí deducimos que si θ es menor o igual que 60° , el número de imágenes compuestas es siempre 4, y sólo cuando $\theta < 60^\circ$ aparecerán 5 o más imágenes.

$$\therefore N = 4 \Leftrightarrow 60^\circ < \theta < 72^\circ$$

Observación.- Si N es el número de imágenes completas entre dos espejos planos que forman ángulo diedro (θ), ésta tendrá un valor que estará comprendida en el siguiente intervalo.

$$\frac{360^\circ}{N+2} < \theta \leq \frac{360^\circ}{N+2}$$

38.14.a. Del esquema adjunto comprobamos que las trayectorias del móvil y de su imagen I_3 son paralelas. Luego, la distancia (x) entre estas rectas será la mínima distancia a la cual se encontrarán los dos móviles durante sus movimientos, lo cual a su vez se presentará cuando el objeto pase por M y su imagen (I_3) se encuentre en M' . Resolviendo el ΔOMA encontramos:

$$x/2 = 60 \cos 53^\circ \quad \therefore \quad x = 96 \text{ cm}$$

38.14.b. También:

$$d = AM = 60 \cos 53^\circ \Rightarrow d = 36 \text{ cm}$$

Luego, el tiempo (t) después del cual se presentará la distancia mínima estará por:

$$t = d/v = 36/6 \quad \therefore \quad t = 6 \text{ s}$$

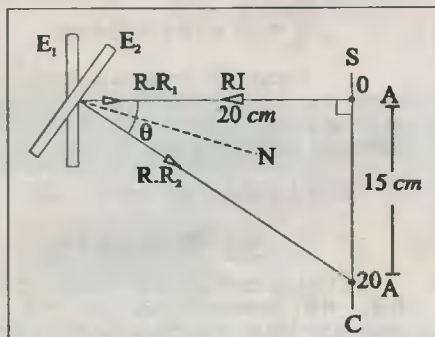


Fig. Solución Prob. 38.11

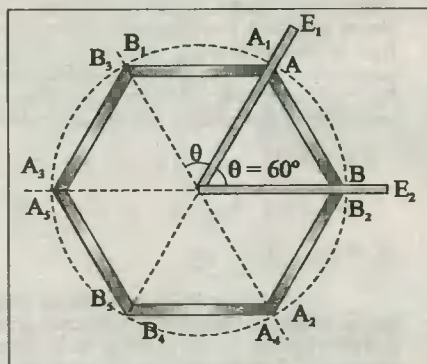
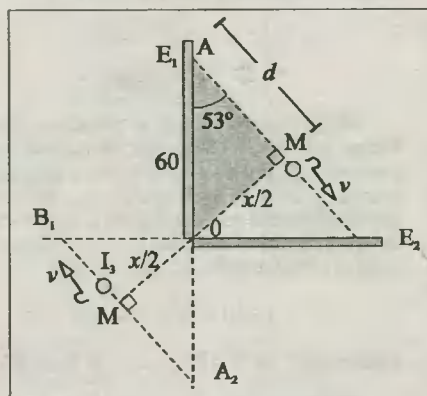


Fig. Solución Prob. 38.13



38.15. Sea x la distancia buscada. Luego, la distancia (d) entre los espejos estará dada por: $d = 20 + x$. Seguidamente aplicaremos la relación (38.3) para la distancia (D) entre las imágenes de la misma serie, siendo $n = 5$, y $D = 2,5 m = 250 cm$.

$$D = 2nd \Rightarrow 250 = 2.5(20 + x) \quad \therefore \quad \boxed{x = 5 cm}$$

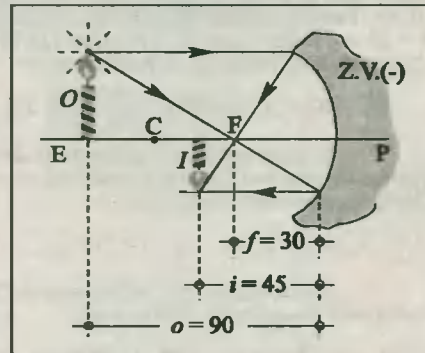
38.16. De los datos reconocemos que: $f = +30 cm$, $o = +90 cm$. Luego, utilizando la ecuación de Descartes encontraremos la distancia (i) de la imagen al espejo.

$$1/f = 1/i + 1/o \Rightarrow 1/30 = 1/i + 1/90 \quad \therefore \quad \boxed{i = 45 cm}$$

A continuación utilizamos la relación (38.6) para encontrar el aumento.

$$A = -i/o = -45/90 \quad \therefore \quad \boxed{A = -0,5}$$

Observación.- La interpretación del resultado es que de acuerdo con el signo de A se trata de una imagen ubicada en la zona real: Por consiguiente es invertida, y su altura es la mitad del objeto



38.17. De los datos encontramos lo siguiente: $o = 10 cm$, $f = 20 cm$; $O = 8 cm$. Luego, utilizando la ecuación de Descartes encontraremos la distancia (i) de la imagen al espejo.

$$1/f = 1/i + 1/o \Rightarrow 1/20 = 1/i + 1/10$$

$$\therefore \quad \boxed{i = -20 cm}$$

Este resultado nos indica que la imagen se ubica en la zona virtual y a 20 cm del espejo. Ahora, podemos averiguar el aumento (A) y la altura de la imagen usando las relaciones (38.6) y (38.7) respectivamente.

$$A = -i/o = -(-20)/10 \Rightarrow A = +2$$

$$Y: |A| = I/O \Rightarrow |2| = I/8 \Rightarrow I = 16 cm$$

Finalmente diremos que la distancia entre el objeto y la imagen viene dada por:

$$d = o + |i| = 10 + |-20| \quad \therefore \quad \boxed{d = 30 cm}$$

Conclusión: La imagen es virtual, derecha, visible directamente y de doble tamaño (altura).

38.18. Desde que la imagen es real, diremos que el aumento (A) es negativo. Luego, según datos: $A = -4$. Ahora, usando la relación (38.6) encontramos la distancia (i) de la imagen al espejo.

$$i = -A.o = -(-4)o \Rightarrow i = 4o \quad \dots(*)$$

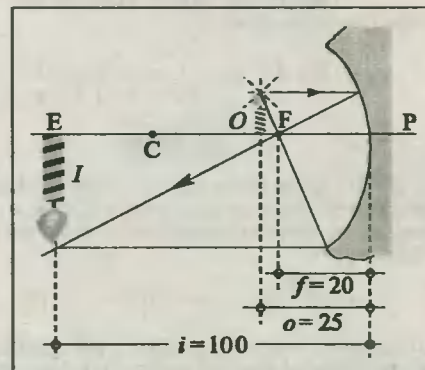
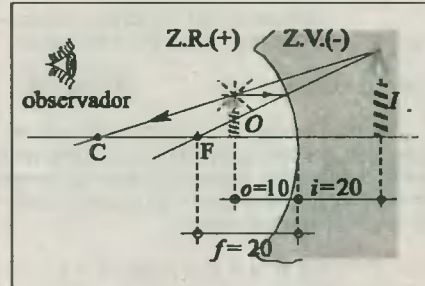


Fig. Solución Prob. 38.18

Finalmente aplicamos la Ecuación de Descartes, teniendo en cuenta a (*) y que $f = +20 \text{ cm}$.

$$1/f = 1/i + 1/o \Rightarrow 1/20 = 1/40 + 1/o \quad \therefore \quad \boxed{o = 25 \text{ cm}}$$

38.19. De acuerdo con los datos se tiene que $R = 120 \text{ cm}$. Luego, por la relación (38.4) la distancia focal del espejo cóncavo será $f = +R/2 = +60 \text{ cm}$. También se sabe que $O = h_o = 30 \text{ cm}$; $I = h_i = 20 \text{ cm}$. Luego, usando la relación (38.7) encontraremos el aumento correspondiente.

$$|A| = I/O = 20/30 = 2/3 \Rightarrow A = -2/3$$

El signo menos del aumento se debe a que la imagen es real. Entonces, usando la relación (38.6) despejaremos la distancia i .

$$i = -A \cdot o = -(-2/3)o \Rightarrow i = 2/3 o \dots (*)$$

Ahora, empleamos la Ecuación de Descartes para encontrar la distancia o .

$$1/f = 1/i + 1/o \Rightarrow 1/60 + 1/(2/3 o) + 1/o$$

$$\Rightarrow o = 150 \text{ cm}$$

Y en (*): $i = 2/3 (150) = 100 \text{ cm}$

Finalmente, del esquema encontramos la distancia entre el objeto y la imagen.

$$d = o - i = 150 - 100 \quad \therefore \quad \boxed{d = 50 \text{ cm}}$$

38.20. En base al esquema podemos señalar que el objeto proyecta una imagen real que se coloca sobre la pared que hace las veces de una pantalla. Asimismo, se pueden reconocer las siguientes distancias:

$$f = +1,2 \text{ m}; o = x - 1,8 \text{ m}; i = +x$$

Luego, aplicando la Ecuación de Descartes tendremos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o} \Rightarrow \frac{1}{1,2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1,8}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 3,6 \text{ m}}$$

38.21. De acuerdo con los datos podemos decir que el objeto se coloca entre el espejo y la imagen, tal como se muestra en el esquema adjunto, donde:

$$i - o = d \Rightarrow i - o = 20 \text{ cm} \dots (1)$$

Además, por el tipo de imagen y por condición del problema, el aumento es $A = -3$. Luego, utilizando la relación (38.6) tendremos lo siguiente:

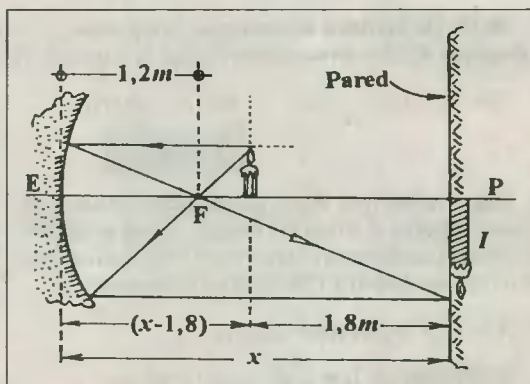
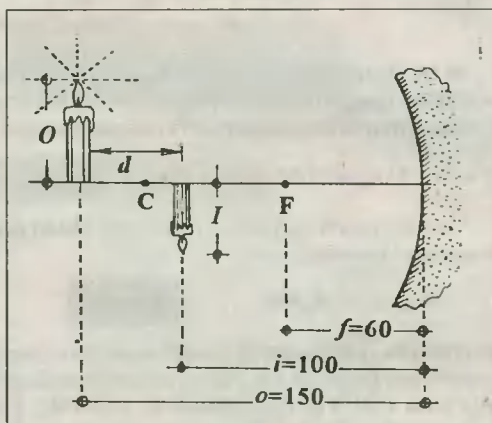


Fig. Solución Prob. 38.20

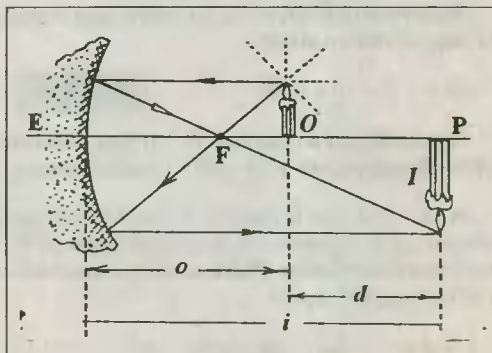


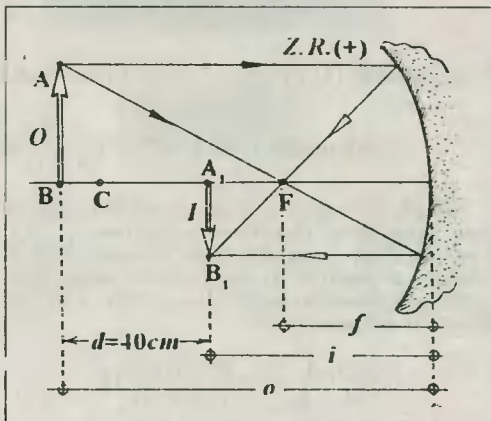
Fig. Solución Prob. 38.21

$$i = -A.o = -(-3)o \Rightarrow i = 3o \dots (2)$$

Luego, resolviendo (1) y (2) encontramos $i = 30 \text{ cm}$, y $o = 10 \text{ cm}$. Finalmente, utilizando la Ecuación de Descartes tenemos:

$$1/f = 1/i + 1/o = 1/30 + 1/10 \quad \therefore \quad \boxed{f = +7,5 \text{ cm}}$$

38.22. Desde que la imagen $I = A_1B_1$ es invertida, podemos decir que ella está en la zona real, y siendo su altura menor que la del objeto ($O = AB$), diremos que se ubica entre el centro de curvatura (C) y el foco principal (F); es decir, ella estará entre el objeto y el espejo. Luego, éste está colocado en el lado derecho, tal como se indica en el esquema adjunto. Ahora, calculamos el aumento a partir de la relación (38.7).



$$|A| = I/O = 9 \text{ cm} / 15 \text{ cm} = 3/5$$

$$\Rightarrow A = -3/5 \dots (\text{imagen real})$$

Luego, por la relación (38.6) tenemos:

$$o = -iA = -i(-3/5) \Rightarrow o = 5/3 i \dots (1)$$

Y del esquema: $o - i = 40 \text{ cm} \dots (2)$

Resolviendo (1) y (2): $\boxed{o = 100 \text{ cm}}$; $i = 60 \text{ cm}$

Finalmente, de la Ecuación de Descartes tenemos:

$$1/f = 1/i + 1/o = 1/60 + 1/100 \quad \therefore \quad \boxed{f = +17,5 \text{ cm, Espejo Cóncavo}}$$

38.23. Sea $o_1 = 60 \text{ cm}$ la distancia inicial del objeto al espejo, e i la distancia de la imagen al espejo. Luego, por la Ecuación de Descartes se obtiene:

$$i_1 = \frac{f.o_1}{o_1 - f} = \frac{60f}{60 - f} \dots (1)$$

Al acercar el objeto al espejo, la nueva distancia del objeto al espejo es: $o_2 = o_1 - l = 60 - 10 = 50 \text{ cm}$. Entonces, la nueva distancia (i_2) de la imagen al espejo será:

$$i_2 = \frac{f.o_2}{o_2 - f} = \frac{50f}{50 - f} \dots (2)$$

Y de la condición del problema se establece que: $i_2 = 5/3 i_1 \dots (3)$

A continuación, reemplazamos (1) y (2) en (3): $\frac{50f}{50 - f} = \frac{5}{3} \cdot \frac{60f}{60 - f} \quad \therefore \quad \boxed{f = 40 \text{ cm}}$

38.24. Lo que encontraremos será la distancia focal (f) del espejo. Aprovechando la relación (38.6) para el aumento (A) y la Ecuación de Descartes tendremos:

a) Para la primera posición: $A_1 = i_1/o_1 \Rightarrow i_1 = A_1.o_1 \dots (\text{Trabajando sólo con los módulos})$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{i_1} + \frac{1}{o_1} = \frac{1}{A_1.o_1} + \frac{1}{o_1} \Rightarrow o_1 = \left(\frac{A_1 + 1}{A_1}\right)f \dots (1)$$

b) Para la segunda posición: $A_2 = i_2/o_2 \Rightarrow i_2 = A_2 \cdot o_2$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{i_2} + \frac{1}{o_2} = \frac{1}{A_2 \cdot o_2} + \frac{1}{o_2} \Rightarrow o_2 = \left(\frac{A_2 + 1}{A_2} \right) f \dots (2)$$

De acuerdo con la condición del problema, y teniendo en cuenta que $o_2 > o_1$, tendremos:

$$o_2 - o_1 = d \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3) encontramos que: $\left(\frac{A_2 + 1}{A_2} \right) f - \left(\frac{A_1 + 1}{A_1} \right) f = d \Rightarrow f = \left(\frac{A_1 \cdot A_2}{A_1 - A_2} \right) d$

Sustituyendo datos: $f = R/2 = \left(\frac{3 \cdot 1/2}{3 - 1/2} \right) 80 \therefore \boxed{R = 96 \text{ cm}}$

38.25. Dado que la imagen es real en el primer caso, entonces el aumento será negativo: $A_1 = -3$, y es virtual en el segundo caso, entonces, aquí el aumento es positivo: $A_2 = +3$. Ahora, empleando la relación obtenida en el problema anterior encontramos la distancia focal.

$$f = \left(\frac{A_1 \cdot A_2}{A_1 - A_2} \right) d = \left(\frac{(+3)(-3)}{+3 - (-3)} \right) 18$$

$$\Rightarrow f = -27 \text{ cm (espejo cóncavo)}$$

Luego, la posición de cada imagen será:

$$\begin{aligned} (*) A_1 = -3 &\Rightarrow 1/f = 1/i_1 + 1/o_1 = 1/i_1 + 1/(i_1/3) \\ &\Rightarrow i_1 = 4f \dots (1) \end{aligned}$$

$$(*) A_2 = +3 \Rightarrow 1/f = 1/i_2 + 1/o_2 = 1/i_2 + 1/(-i_2/3) \Rightarrow i_2 = 2f \dots (2)$$

A partir del esquema encontramos que la distancia entre las imágenes es:

$$d = |i_1| + |i_2| \dots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3) encontramos: $d = |6f| = 6 \cdot 27 \therefore \boxed{d = 162 \text{ cm}}$

38.26. Reconociendo que los espejos convexos solo proyectan imágenes virtuales, entonces el aumento es positivo.

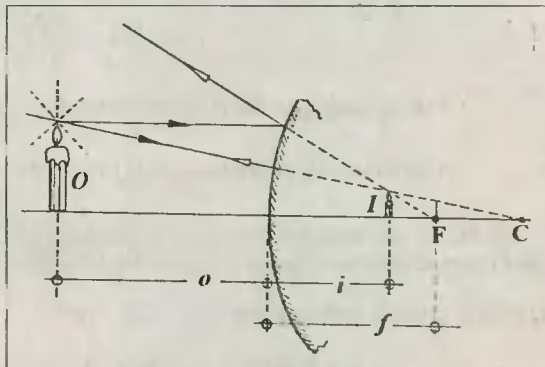
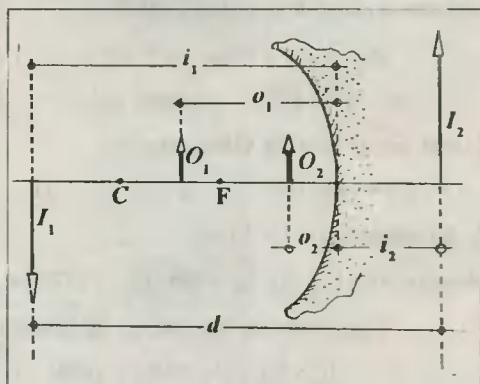
$$\begin{aligned} A = +1/10 = -i/o &\Rightarrow i = -o/10 = -180/10 \\ &\Rightarrow i = -18 \text{ cm} \end{aligned}$$

Luego, utilizando la Ecuación de Descartes encontraremos la distancia focal del espejo.

$$\begin{aligned} 1/f = 1/i + 1/o &= 1/-18 + 1/180 \\ &\Rightarrow f = -20 \text{ cm} \end{aligned}$$

Finalmente, el radio de curvatura será:

$$\boxed{R = 2f = -40 \text{ cm}}$$



38.27. De acuerdo con los datos podemos reconocer que el espejo es convexo, dado que es el único en el cual la imagen siempre es virtual y más pequeña. Ahora podemos establecer que los aumentos son de signo positivo: $A_1 = + 1/2$, y $A_2 = + 1/5$. Luego, utilizando la relación obtenida en el problema 38.24 obtendremos directamente la distancia focal.

$$f = \left(\frac{A_1 A_2}{A_2 - A_1} \right) d = \left(\frac{1/2 \cdot 1/5}{1/5 - 1/2} \right) 30 \quad \therefore \quad \boxed{f = 10 \text{ cm}}$$

Observación. - Hemos hecho un cambio en el orden de los términos del denominador de la fórmula, por el hecho de emplear la relación $i = -A \cdot o$ en su demostración.

CAP. 39 REFRACCION DE LA LUZ

39.1. Calculemos la longitud del onda del medio 1 (vacío) utilizando la relación (37.9).

$$\lambda_1 f = c \Rightarrow \lambda_1 = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{6 \cdot 10^{14} \text{ m/s}} \Rightarrow \lambda_1 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \dots (1)$$

$$\text{ó: } \lambda_1 = 5000 \text{ \AA}$$

A continuación, utilizamos la relación (39.2) para calcular la variación experimentada por la longitud de onda al pasar al medio 2 (vidrio).

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_2} \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_1 \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \dots (2)$$

Ahora, reemplazando (1) en (2) tendremos:

$$\Delta\lambda = 5000 \text{ \AA} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \therefore \Delta\lambda = -2500 \text{ \AA}$$

Observación. - El signo negativo del resultado nos indica que la longitud de onda ha disminuido a la mitad al pasar del vacío al vidrio.

39.2. Reconocemos los siguientes datos: $f_1 = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, y $v_1 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ km/s} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ en el agua, con los cuales podemos calcular la longitud de onda (λ_1) en dicho medio, utilizando para ello la relación (37.9).

$$\lambda_1 f = v_1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} \Rightarrow \lambda_1 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 5000 \text{ \AA} \dots (1)$$

A continuación utilizamos la relación (39.2) para el cálculo de la variación de la longitud de onda cuando pasa al vacío ($v_2 = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{v_2 - v_1}{v_1} \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_1 \left(\frac{v_2}{v_1} - 1 \right) \dots (2)$$

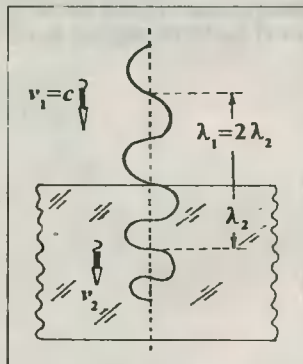
$$\text{Reemplazando (1) en (2): } \Delta\lambda = 5000 \text{ \AA} \left(\frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}} - 1 \right) \therefore \Delta\lambda = 1000 \text{ \AA}$$

39.3. Utilizando la relación (2) obtenida en el problema anterior tendremos:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 \left(\frac{v_2}{v_1} - 1 \right) = \frac{v_1}{f} \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1} \right) \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\Delta v}{f} \Rightarrow \Delta v = f \Delta\lambda = (6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}) (2 \cdot 10^{-7} \text{ m})$$

$$\therefore \Delta v = 1,2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

39.4. Utilizando las relaciones (39.1) y (39.2) podemos calcular el índice de refracción de cada sustancia, así como la longitud de onda de la luz amarilla en dichos medios.



a) Para el agua.- Tenemos que el índice de refracción será:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,25 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \quad \therefore \quad n_1 = 1,33$$

Y la longitud de onda en el agua (medio 1) será:

$$\lambda_1/\lambda_o = v_1/v_o \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_o(v_1/v_o) = 5 \ 800 \ \text{Å} (2,25 \cdot 10^8/3 \cdot 10^8) \quad \therefore \quad \lambda_1 = 4 \ 350 \ \text{Å}$$

b) Para el vidrio crown.- Procedemos del mismo modo.

$$n_2 = \frac{c}{v_2} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \quad \therefore \quad n_2 = 1,5$$

Y la longitud de onda en el vidrio (medio 2) será:

$$\lambda_2/\lambda_o = v_2/v_o \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_o(v_2/v_o) = 5 \ 800 \ \text{Å} (2 \cdot 10^8/3 \cdot 10^8) \quad \therefore \quad \lambda_2 = 3 \ 867 \ \text{Å}$$

Observación.- En lo sucesivo para los siguientes problemas, todas las radiaciones luminosas se considerarán de color amarillo, salvo que se especifique lo contrario.

39.5.a. Radiación roja.- Para la luz de este color, cualquiera sea la fuente que lo genera, tendremos que al atravesar un trozo de cristal ligero, encuentra que ésta posee una densidad óptica (n_r) que se calculará por medio de la relación (39.1).

$$n_r = c/v_r = 3 \cdot 10^8/1,852 \cdot 10^8 \quad \therefore \quad n_r = 1,62$$

Con relación a la frecuencia de este color, diremos que ella es la misma para todos los medios de propagación de acuerdo con el principio de invariabilidad de la frecuencia. Luego del cuadro mostrado en el ítem (37.12):

$$f_{\text{rojo}} = 4,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

39.5.b. Radiación violeta.- Utilizando el mismo fundamento encontramos el índice de refracción (n_v) del cristal ligero para el color violeta.

$$n_v = c/v_v = 3 \cdot 10^8/1,818 \cdot 10^8 \quad \therefore \quad n_v = 1,65$$

Asimismo, diremos que la frecuencia de esta radiación es la misma en todos los medios. Luego:

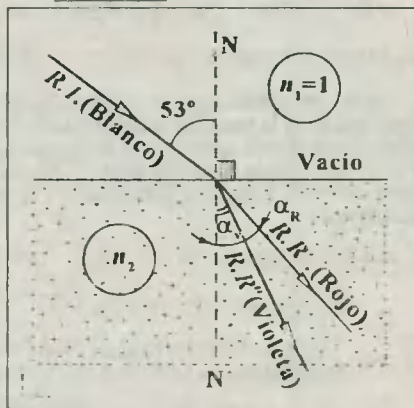
$$f_{\text{violeta}} = 7,3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Observación.- De acuerdo con los resultados se confirma que a mayor frecuencia corresponde un mayor índice de refracción.

39.6. Para reconocer el ángulo α de refracción de los rayos recurriremos a la Ley de Snell, ya que se conocen los índices de refracción de los medios, así como el ángulo de incidencia $\alpha_1 = 53^\circ$. Para ello debemos reconocer que el índice de refracción de todos los colores en el vacío es igual a la unidad ($n_1 = 1$).

a) Para el color rojo.- De acuerdo con el resultado del problema anterior se sabe que el índice de refracción del cristal ligero para el color rojo es $n_r = 1,62$. Luego, se tendrá lo siguiente:

$$n_1 \cdot \text{sen} \alpha_1 = n_r \cdot \text{sen} \alpha_r \Rightarrow \text{sen} \alpha_r = (n_1/n_r) \text{sen} \alpha_1 \Rightarrow \text{sen} \alpha_r = (1/1,62) \cdot 4/5 = 0,494 \quad \therefore \quad \alpha_r = 29,6^\circ$$



b) **Para el color violeta.** - Para este color se sabe que $n_v = 1,65$. Luego, se tendrá lo siguiente:

$$n_1 \cdot \text{sen} \alpha_1 = n_v \cdot \text{sen} \alpha_v \Rightarrow \text{sen} \alpha_v = (n_1/n_v) \text{sen} \alpha_1$$

$$\Rightarrow \text{sen} \alpha_v = (1/1,65) \cdot 4/5 = 0,4848 \quad \therefore \alpha_v = 29^\circ$$

Observación. - Durante la refracción de la luz blanca se produce una separación de las radiaciones componentes, desviándose más el violeta que el rojo.

39.7. Designando por α_2 al ángulo de refracción en el medio 2, diremos entonces que el ángulo θ de desviación del rayo incidente (R.I.) estará dada por: $\theta = \alpha_1 - \alpha_2 \dots (*)$

Utilizando la Ley de Snell y la relación (39.2) para el índice de refracción encontraremos α_2 .

$$n_1 \cdot \text{sen} \alpha_1 = n_2 \cdot \text{sen} \alpha_2 \Rightarrow \text{sen} \alpha_2 = (n_1/n_2) \cdot \text{sen} \alpha_1$$

$$\Rightarrow \text{sen} \alpha_2 = (v_2/v_1) \text{sen} \alpha_1 = (6 \cdot 10^7 / 8 \cdot 10^7) \cdot \text{sen} 53^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sen} \alpha_2 = 3/5 \Rightarrow \alpha_2 = 37^\circ$$

Luego, en (*): $\theta = 16^\circ$

Observación. - De acuerdo con el resultado podemos afirmar que cuando un rayo de luz pasa de un medio a otro de mayor densidad óptica, su velocidad disminuye, y el rayo refractado (R.R') se acerca a la normal.

39.8. Aplicando directamente la Ley de Snell, haciendo $\alpha_1 = \alpha$, y $\alpha_2 = \alpha + 37^\circ$, tendremos:

$$n_1 \cdot \text{sen} \alpha_1 = n_2 \cdot \text{sen} \alpha_2 \Rightarrow 4 \text{sen} \alpha = 1,4 \text{sen}(\alpha + 37^\circ)$$

$$\Rightarrow 20 \text{sen} \alpha = 7 \text{sen}(\alpha + 37^\circ) = 7(\text{sen} \alpha \cdot \cos 37^\circ + \text{sen} 37^\circ \cdot \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow 20 \text{sen} \alpha = 28/5 \text{sen} \alpha + 21/5 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 24 \text{sen} \alpha = 7 \cos \alpha \Rightarrow \text{tg} \alpha = 7/24 \quad \therefore \alpha = 16^\circ$$

39.9. De acuerdo con el esquema podemos decir que S' es la posición aparente del Sol cuando éste se encuentre dentro del agua, y S es la posición real del mismo. Según los datos, $\alpha_2 = 37^\circ$. Luego, aplicando la Ley de Snell tendremos:

$$n_1 \cdot \text{sen} \alpha_1 = n_2 \cdot \text{sen} \alpha_2 \Rightarrow 1 \cdot \text{sen} \alpha_1 = 4/3 \cdot 3/5$$

$$\Rightarrow \text{sen} \alpha_1 = 4/5 \Rightarrow \alpha_1 = 53^\circ$$

Luego, el ángulo θ en que cambia la dirección de propagación de la luz está dado por:

$$\theta = \alpha_1 - \alpha_2 = 53^\circ - 37^\circ \quad \therefore \theta = 16^\circ$$

39.10. Con la ayuda del esquema podemos reconocer que el ángulo de refracción de la luz

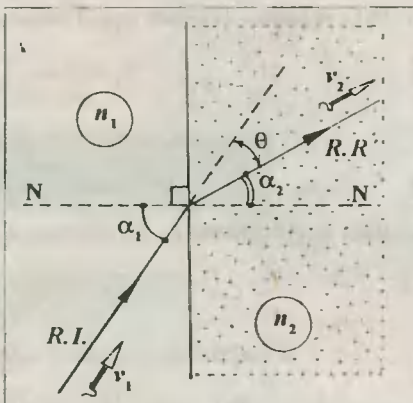


Fig. Solución Prob. 39.7

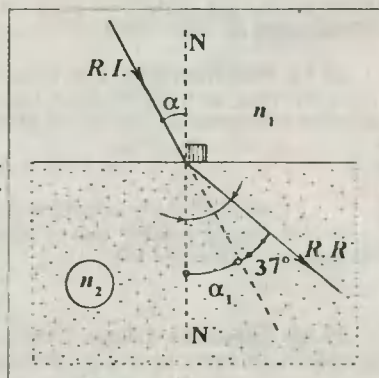
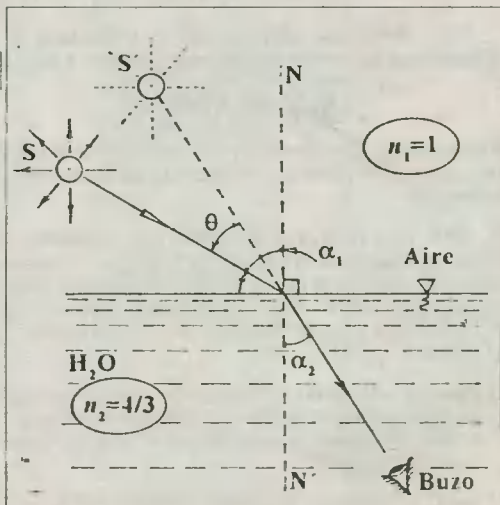


Fig. Solución Prob. 39.8



al salir del agua es $\alpha_2 = 53^\circ$. Asimismo, se puede apreciar que el ángulo que forman las dos mitades del palo es θ , cuya medida está dada por:

$$\theta = \alpha_1 + 90^\circ + 37^\circ \dots (1)$$

Ahora, utilizando la Ley de Snell tenemos:

$$n_1 \cdot \text{sen} \alpha_1 = n_2 \cdot \text{sen} \alpha_2 \Rightarrow 4/3 \cdot \text{sen} \alpha_1 = 1 \cdot 4/5$$

$$\Rightarrow \text{sen} \alpha_1 = 3/5 \Rightarrow \alpha_1 = 37^\circ \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1): $\theta = 164^\circ$

39.11. Según el esquema podemos decir que la posición aparente de la piedra es el punto B. Luego, los rayos que provienen de la piedra (A) inciden con un ángulo α_1 y se refractan con un ángulo $\alpha_2 = 53^\circ$, ángulo que el palo forma con la vertical. Utilizando la Ley de Snell en el punto O tendremos:

$$n_1 \cdot \text{sen} \alpha_1 = n_2 \cdot \text{sen} \alpha_2 \Rightarrow 4/3 \cdot \text{sen} \alpha_1 = 1 \cdot \text{sen} 53^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sen} \alpha_1 = 3/5 \Rightarrow \alpha_1 = 37^\circ$$

Luego, del Δ rectángulo OHA tenemos:

$$HA = 36 \text{tg} \alpha_1 = 27 \text{ cm}$$

Y del Δ rectángulo OHB: $HB = 36 \text{tg} \alpha_2 = 48 \text{ cm}$

Finalmente, el palo golpeará en B de modo que su distancia a la piedra A está dada por x, el cual, de acuerdo con el esquema, viene dado por:

$$x = HB - HA = 48 - 27 \therefore x = 21 \text{ cm}$$

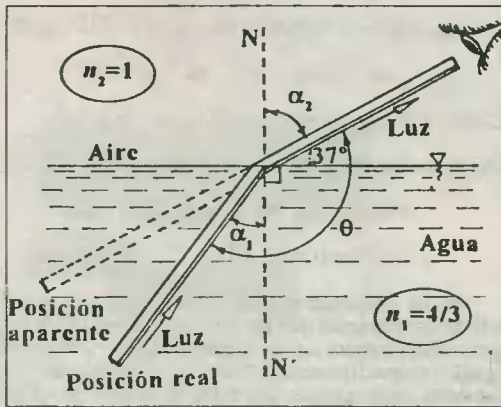
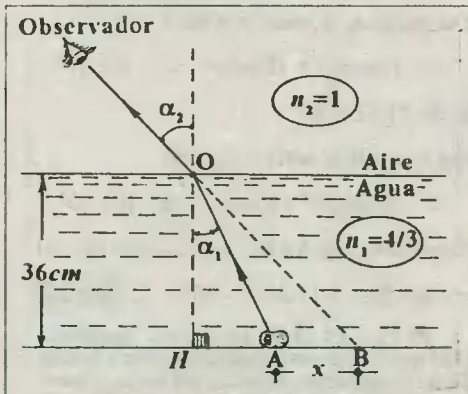


Fig. Solución Prob. 39.10



39.12. Utilizando el esquema adjunto, vemos que el primer ángulo de refracción (α_1) en el hielo se repite como ángulo de incidencia en la segunda refracción, siendo α_2 el ángulo de refracción buscado. Para el cálculo de estos ángulos emplearemos dos veces la Ley de Snell.

a) Punto P: $n_A \cdot \text{sen} 53^\circ = n_h \cdot \text{sen} \alpha_1 \dots (1)$

b) Punto Q: $n_h \cdot \text{sen} \alpha_1 = n_v \cdot \text{sen} \alpha_2 \dots (2)$

Luego, igualando (1) y (2):

$$n_v \cdot \text{sen} \alpha_2 = n_A \cdot \text{sen} 53^\circ \Rightarrow 1,6 \text{sen} \alpha_2 = 1 \cdot 4/5$$

$$\Rightarrow \text{sen} \alpha_2 = 1/2 \therefore \alpha_2 = 30^\circ$$

39.13. De acuerdo con el ítem 39.6, sabemos que los rayos incidente (RI) y emergente (RE) son paralelos entre sí. Luego de construir el esquema adjunto vemos que es necesario calcular el ángulo θ y el lado PQ.

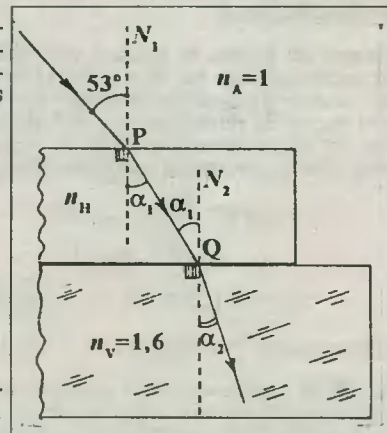


Fig. Solución Prob. 39.12

Utilizando la Ley de Snell en P, tendremos:

$$n_{\text{aire}} \cdot \text{sen} 53^\circ = n \cdot \text{sen} \alpha \Rightarrow 1 \cdot 4/5 = 4/3 \cdot \text{sen} \alpha$$

$$\Rightarrow \text{sen} \alpha = 3/5 \Rightarrow \alpha = 37^\circ$$

Luego: $\theta = 53^\circ - \alpha = 53^\circ - 37^\circ \Rightarrow \theta = 16^\circ$

Del Δ rectángulo PHQ: $PQ = d \cdot \text{sen} \alpha = 20 \cdot 5/4 = 25 \text{ cm}$

Finalmente, del Δ rectángulo PRQ:

$$x = PQ \cdot \text{sen} \theta = 25 \cdot 7/25 \quad \therefore \quad \boxed{x = 7 \text{ cm}}$$

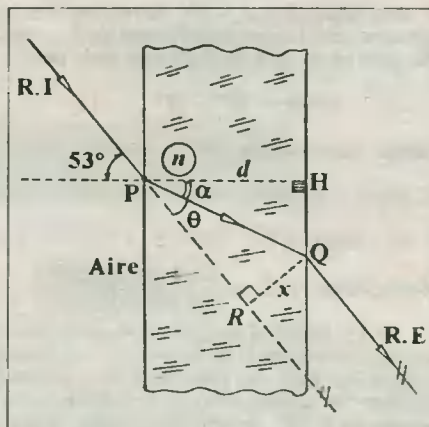


Fig. Solución Prob. 39.13

39.14. Haciendo el análisis de las refracciones en A y B demostraremos que los rayos incidente (RI) y emergente (RE) forman con las normales ON_1 y ON_2 ángulos iguales respectivamente. Asimismo, los ángulos ω y Ω también serán iguales, por estar en la base de un triángulo isósceles. Entonces: $\omega = \Omega \dots (*)$

Del punto A: $n_o \cdot \text{sen} \alpha = n \cdot \text{sen} \omega$

$$\Rightarrow 1 \cdot \text{sen} 45^\circ = \sqrt{2} \cdot \text{sen} \omega \Rightarrow \omega = 30^\circ$$

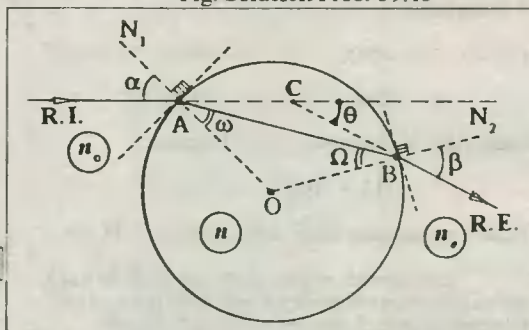
Y de (*): $\Omega = 30^\circ$

Del punto B: $n \cdot \text{sen} \Omega = n_o \cdot \text{sen} \beta$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot \text{sen} 30^\circ = 1 \cdot \text{sen} \beta \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

Finalmente, del ΔABC : $\theta = (\alpha - \omega) + (\beta - \Omega)$

$$\Rightarrow \theta = 2(\alpha - \omega) = 2(45^\circ - 30^\circ) \quad \therefore \quad \boxed{\theta = 30^\circ}$$



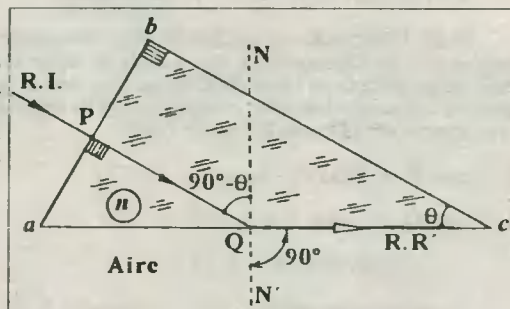
39.15. Los rayos luminosos incidentes (RI) que llegan perpendicularmente a la cara ab no se refractan, es decir, los rayos no cambian de dirección; esto se debe a que el ángulo de incidencia es 0° .

Dentro del prisma se produce otro fenómeno de refracción, esta vez en el punto Q de la cara ac . Aquí, el ángulo de incidencia es $\alpha_1 = 90^\circ - \theta$, y el ángulo de refracción $\alpha_2 = 90^\circ$, de manera que los rayos refractados (RR') se pegan a la cara. Ahora, aplicando la Ley de Snell tendremos:

$$n \cdot \text{sen}(90^\circ - \theta) = n_{\text{aire}} \cdot \text{sen} 90^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sen}(90^\circ - \theta) = 1/n$$

$$\Rightarrow \cos \theta = 1/1,25 = 4/5 \quad \therefore \quad \boxed{\theta = 37^\circ}$$



Observación.- Para ángulos $\theta \leq 37^\circ$, los rayos se reflejan totalmente en ac .

39.16. Designando por L al ángulo límite, y aprovechando el esquema (1), diremos que todos los rayos que salen del foco (F) e inciden con un ángulo $i < L$ salen del líquido y pasan al aire; ello ocurre en la región comprendida entre las normales N_1 y N_2 , de manera que cualquier observador ubicado dentro del líquido observará una mancha oscura en forma de disco de radio r . Todos los rayos que inciden con un ángulo $i > L$ se reflejan totalmente y regresan al líquido, de manera que la interfase líquido-aire queda como un espejo.

Cuando los rayos luminosos inciden con un ángulo $i = L$, se refractan de modo que se pegan a la interfase, su medida se calculará con la relación (39.4), donde $n_1 = n_2$, $v n_2 = 1$ (aire). Luego:

$$\text{sen} L = n_2/n_1 = 1/n_1 = 3/5 \Rightarrow L = 37^\circ$$

Luego, del Δ rectángulo HOF: $r = h \text{tg} L = 16 \cdot 3/4$

$$\therefore \boxed{r = 12 \text{ cm}}$$

39.17. De acuerdo con el esquema adjunto notamos que se producen dos refracciones: Una en P y la otra en Q. Además, por condición del problema, los rayos luminosos deben experimentar reflexión total en la cara bc, y ello ocurrirá si y sólo si el ángulo de incidencia es igual al ángulo límite (L) que forman la normal N_2N y el rayo PQ. Luego, aplicando la Ley de Snell en P y la relación (39.4) en Q tendremos:

Punto P $n_{\text{aire}} \text{sen} \theta = n \text{sen} \alpha \Rightarrow \text{sen} \alpha = \text{sen} \theta / n \dots (1)$

Punto Q $\text{sen} L = 1/n$

Pero: $L + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \text{sen} L = \text{cos} \alpha$

$$\Rightarrow \text{cos} \alpha = 1/n \dots (2)$$

A continuación, elevamos al cuadrado las relaciones (1) y (2), y sumando miembro a miembro tendremos:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = (\text{sen} \theta / n)^2 + (1/n)^2$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\text{sen}^2 \theta + 1}{n^2} \Rightarrow \text{sen} \theta = \sqrt{n^2 - 1} = \sqrt{(\sqrt{7}/2)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \text{sen} \theta = \sqrt{3}/2 \therefore \boxed{\theta = 60^\circ}$$

39.18. De acuerdo con el ítem (39.7) se elabora el esquema adjunto, en el cual se pueden reconocer los siguientes datos:

$$n_1 = 1; n_2 = 4/3; h_0 = 1.2 \text{ m}$$

Luego, utilizando la relación (39.5) calcularemos la distancia h_1 a la cual se forma la imagen (I) del foco (F) con relación a la interfase agua-aire.

$$h_1/h_0 = n_2/n_1 \Rightarrow h_1/1.2 \text{ m} = (4/3)/1 \Rightarrow h_1 = 1.6 \text{ m}$$

Finalmente, la distancia del observador a la imagen del foco estará dada por:

$$x = 0.6 + h_1 = 0.6 + 1.6 \therefore \boxed{x = 2.2 \text{ m}}$$

39.19. Sea x la profundidad o espesor de la capa de agua, O la posición del observador, e I la posición de su imagen detrás del espejo. En primer lugar diremos que para el observador el espejo (E) se encuentra aparentemente en la posición E' a la distancia h_1 con relación a la interfase, y cuyo valor se encontrará utilizando la relación (39.5)

$$h_1/h_0 = n_2/n_1 \Rightarrow h_1/x = 1/(4/3) \Rightarrow h_1 = 3/4 x \dots (1)$$

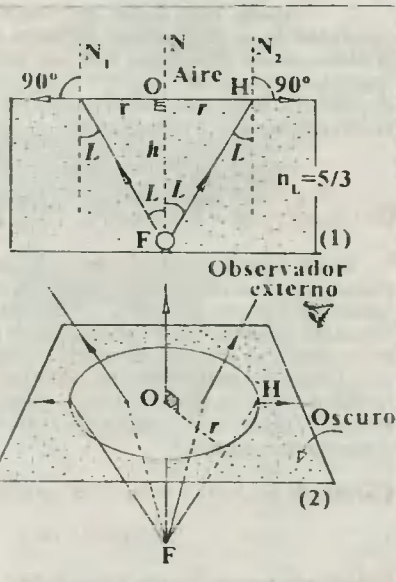


Fig. Solucion Prob. 39.16

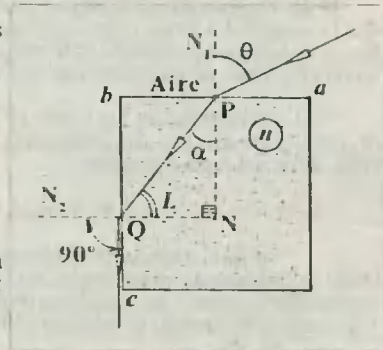


Fig. Solucion Prob. 39.17

Ahora, recordando que un objeto y su imagen equidistan de un espejo plano, entonces se debe cumplir que la distancia del observador (O) con relación a la posición aparente del espejo (E') es $(h_1 + 5)$ cm, y ésta de acuerdo con el problema debe estar relacionada con la distancia (d) de visión óptima del siguiente modo:

$$d = 2(h_1 + 5) \text{ cm} \dots (2)$$

De (1) en (2): $25 = 2(3/4 x + 5) \therefore x = 10 \text{ cm}$

39.20. La imagen (I) del foco (F) que ve el observador ubicado en la interfase es la que se forma detrás del espejo "aparente" ubicado en la posición E'. Para determinar la distancia (x) del observador a la imagen (I) procederemos de un modo similar al desarrollado en el problema anterior. Ésto es, calcularemos la profundidad (h_1) del espejo aparente (E') utilizando la relación (39.5), y luego, en base a la propiedad de la equidistancia objeto-imagen al espejo (E') calcularemos la distancia solicitada x.

Cálculo de h_1 : $h_1/h_o = n_2/n_1 \Rightarrow h_1/20 = 1/(4/3)$

$$\Rightarrow h_1 = 15 \text{ cm}$$

Cálculo de x: $(x + 30) \text{ cm} = 2(h_1 + 30) \therefore x = 60 \text{ cm}$

39.21. De acuerdo con el esquema de la figura, diremos que la imagen del fondo que proyecta el espejo se puede ubicar utilizando un observador B, el cual recibe la luz del fondo (F) luego de experimentar dos refracciones.

Desde el medio 2 el fondo (F) tiene una imagen (F_1) que se encuentra a una profundidad aparente h_1 , que viene dada del siguiente modo:

$$h_1/h_1 = n_2/n_1 \Rightarrow h_1 = (n_2/n_1)h_1 \dots (1)$$

Desde el medio aire el observador B dirá que el fondo del recipiente se encuentra en la posición F_2 a la profundidad aparente h_2 , siendo su profundidad "real" $h_1 + h_2$. Luego, utilizando la relación (39.5) tendremos:

$$\frac{h_2}{h_1 + h_1} = \frac{n_o}{n_2} \Rightarrow h_2 = \frac{n_o}{n_2}(h_1 + h_1) \dots (2)$$

Finalmente, diremos que la distancia entre la imagen (F) del fondo y su correspondiente imagen (I) detrás del espejo y que es visto por el observador A viene dado por:

$$d = (h_o + h_2) + h_o + h_2 + h_1 \Rightarrow d = 2h_o + (1 + n_o/n_1)h_1 + (1 + n_o/n_2)h_2 \therefore d = 79 \text{ cm}$$

39.22.a. Considerando un observador en el avión. - Desde aquí se sabe que el submarino está a una profundidad aparente h_3 que viene dada por:

$$h_3 = 309 - h_A = 309 - 300 \Rightarrow h_3 = 9 \text{ m}$$

Luego, utilizando la relación (39.5) tendremos:

$$h_3/h = n_{\text{aire}}/n_{\text{agua}} \Rightarrow 9 \text{ m}/h = 1/(4/3) \therefore h = 12 \text{ m}$$

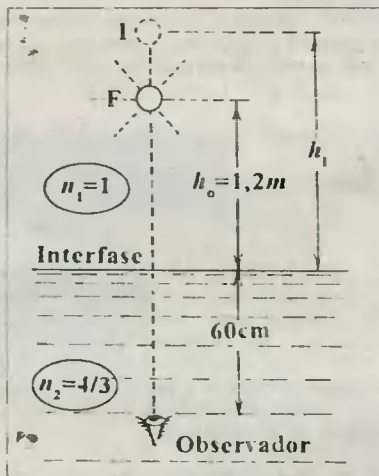


Fig. Solución Prob. 39.18

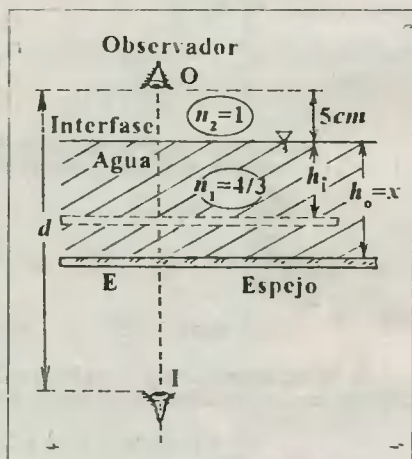


Fig. Solución Prob. 39.19

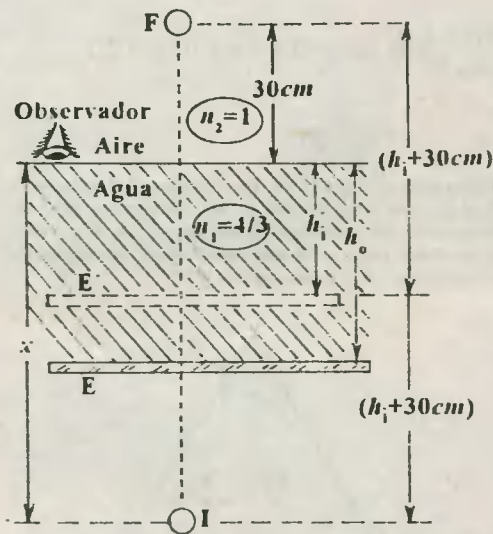


Fig. Solución Prob. 39.20

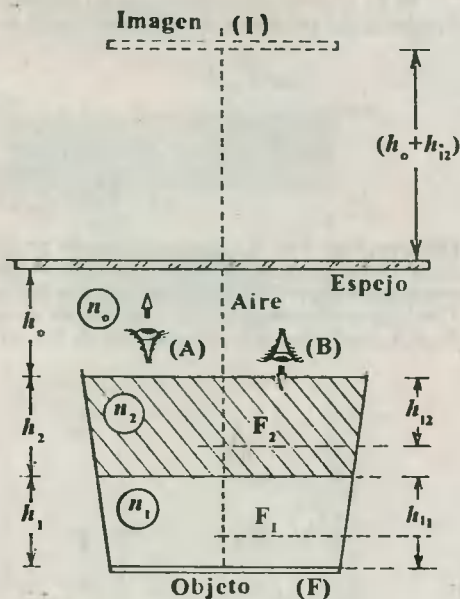


Fig. Solución Prob. 39.21

39.22.b. Considerando como observador al buzo (P).- Desde el agua, el avión se encontrará a la distancia h_A con relación a la interfase, siendo la distancia real $h_o = 300 \text{ m}$. Luego, utilizando la relación (39.5) tenemos:

$$h_A/h_o = n_{\text{agua}}/n_{\text{aire}} \Rightarrow h_A/300 \text{ m} = (4/3)/1$$

$$\Rightarrow h_A = 400 \text{ m}$$

Finalmente, la imagen del avión (I.A.) se observará a la distancia H , que de acuerdo con el esquema viene dado por:

$$H = h_A + h = 400 + 12 \quad \therefore \boxed{H = 412 \text{ m}}$$

39.23. Es fácil observar que la distancia aparente (d_a) recorrida por el móvil está relacionada con la distancia real (d_r), del mismo modo como están relacionadas la profundidad real y aparente.

$$d_a/d_r = n_o/n_1 \Rightarrow n_1 = (d_r/d_a)n_o \dots (1)$$

De los datos se tiene que la velocidad aparente es $v_a = 4 \text{ m/s}$, y el tiempo empleado es $t = 2 \text{ s}$. Luego, la distancia aparente (d_a) recorrida estará dada por la siguiente relación cinemática:

$$d_a = v_a \cdot t = (4 \text{ m/s}) \cdot (2 \text{ s}) \Rightarrow d_a = 8 \text{ m} \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1): $n_1 = (16 \text{ m}/8 \text{ m}) \cdot 1$

$$\therefore \boxed{n_1 = 2}$$

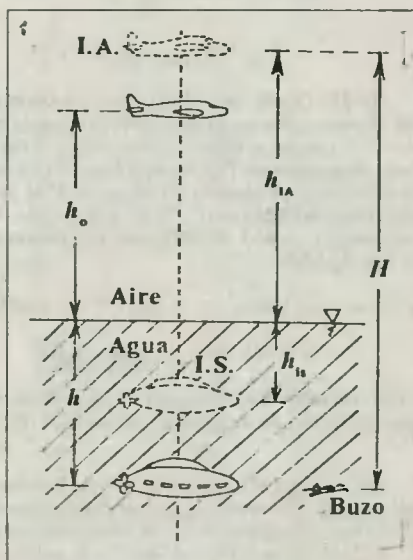


Fig. Solución Prob. 39.22

39.24. Considerando que el medio que rodea al prisma es el aire ($n_o = 1$), y que el ángulo de refringencia del prisma es $A = 60^\circ$, utilizaremos la relación (39.6).

$$n = n_o \frac{\text{sen}\left(\frac{A + d_m}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)} \Rightarrow \sqrt{2} = 1 \frac{\text{sen}(30^\circ + d_m/2)}{\text{sen } 30^\circ} \Rightarrow \sqrt{2}/2 = \text{sen}(30^\circ + d_m/2)$$

$$\Rightarrow 30^\circ + d_m/2 = 45^\circ \quad \therefore \quad d_m = 30^\circ$$

Observación. - Por el esquema mostrado se establece que el ángulo de desviación mínima se presenta cuando el ángulo de incidencia (i) es igual al ángulo de emergencia (e). Asimismo, en estas condiciones se verifica que el rayo interior PQ es perpendicular a la bisectriz del ángulo A del prisma. También se observará que la bisectriz de A contiene a los puntos de intersección de las normales N_1 y N_2 , así como a la intersección de los rayos incidente (RI) y emergente (RE).

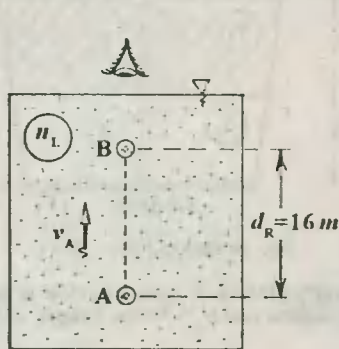


Fig. Solución Prob. 39.23

39.25. Desde que el prisma es rectangular, diremos que su ángulo de refringencia es $A = 90^\circ$. Luego, al trazar su bisectriz y el rayo refractado interior PQ , comprobamos que en la refracción producida en el punto P el ángulo de incidencia es $\alpha_1 = 53^\circ$, y el ángulo de refracción $\alpha_2 = 45^\circ$. A continuación aplicamos la Ley de Snell.

$$n_1 \cdot \text{sen} \alpha_1 = n_2 \cdot \text{sen} \alpha_2 \Rightarrow 1 \cdot \text{sen} 53^\circ = n \cdot \text{sen} 45^\circ$$

$$\Rightarrow n = 4/5 \sqrt{2} \quad \therefore \quad n \approx 1,13$$

Observación. - Del esquema es fácil deducir que el ángulo de desviación mínima es $d_m = 16^\circ$.

39.26. Reconocemos que el rayo luminoso no cambia de dirección cuando atraviesa la cara plana del prisma, dado que incide perpendicularmente con ángulo de incidencia $\alpha_1 = 0^\circ$. Luego, el ángulo de refracción será $\alpha_2 = 0^\circ$. A continuación estudiamos la refracción en el punto A , donde el ángulo de incidencia es 30° , y el ángulo de refracción es θ . Entonces, por la Ley de Snell tendremos:

$$n_{\text{aire}} \cdot \text{sen} \theta = n \cdot \text{sen} 30^\circ \Rightarrow 1 \cdot \text{sen} \theta = \sqrt{2} \cdot 1/2 \Rightarrow \text{sen} \theta = \sqrt{2}/2 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

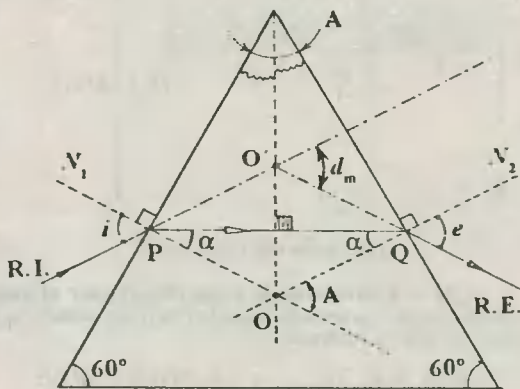
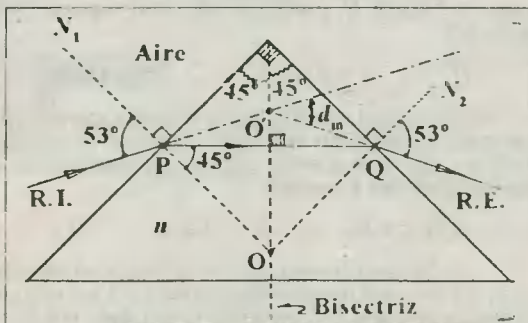


Fig. Solución Prob. 39.24



39.26. Reconocemos que el rayo luminoso no cambia de dirección cuando atraviesa la cara plana del prisma, dado que incide perpendicularmente con ángulo de incidencia $\alpha_1 = 0^\circ$. Luego, el ángulo de refracción será $\alpha_2 = 0^\circ$. A continuación estudiamos la refracción en el punto A , donde el ángulo de incidencia es 30° , y el ángulo de refracción es θ . Entonces, por la Ley de Snell tendremos:

De este resultado y del gráfico se deduce que $\beta = 45^\circ$. Ahora, del $\triangle ABC$ utilizamos la relación geométrica para el ángulo exterior a C.

$$60^\circ = \alpha + \beta \quad \therefore \quad \alpha = 15^\circ$$

39.27. Analizando por separado las refracciones en el punto P de ingreso al sistema prismático y en el punto Q de salida encontraremos los ángulos de incidencia (α) y de emergencia (β) respectivamente. Finalmente calcularemos el ángulo de desviación θ de los rayos incidente (RI) y emergente (RE).

Punto P: $n_o \cdot \text{sen} \alpha = n_1 \cdot \text{sen} 30^\circ$

$$\Rightarrow 1 \cdot \text{sen} \alpha = 1,6 \cdot 1/2 \Rightarrow \text{sen} \alpha = 4/5$$

$$\Rightarrow \alpha = 53^\circ \dots (1)$$

Punto Q: $n_2 \cdot \text{sen} 37^\circ = n_o \cdot \text{sen} \beta$

$$\Rightarrow 5\sqrt{3}/6 \cdot 3/5 = 1 \cdot \text{sen} \beta \Rightarrow \text{sen} \beta = \sqrt{3}/2$$

$$\Rightarrow \beta = 60^\circ \dots (2)$$

Finalmente, del $\triangle PQR$ aplicaremos la relación geométrica para el ángulo exterior a R.

$$\theta = (\alpha - 30^\circ) + (\beta - 37^\circ) \dots (3)$$

Finalmente, de (1) y (2) en (3):

$$\theta = 46^\circ$$

39.28. Sea R el radio de curvatura de ambas caras, y asimismo la longitud de la distancia focal (f) de la lente. Dado que los radios generan caras convexas, entonces, de acuerdo con la regla de signos establecida en el ítem 39.10, éstos serán positivos (+), lo mismo la distancia focal, por ser una lente convergente. A continuación utilizamos la relación (39.7), donde tendremos:

$$\frac{1}{f} = (n_1 - 1) \left(\frac{1}{+R} + \frac{1}{+R} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{+R} = (n_1 - 1) \left(\frac{1}{+R} + \frac{1}{+R} \right)$$

$$\Rightarrow 1 = (n_1 - 1) \cdot 2 \quad \therefore \quad n_1 = 1,5$$

39.29.a. En el aire.- Se tienen los siguientes datos: $R_1 = -0,25 \text{ m}$; $R_2 \rightarrow \infty$; $n_o = 1$; $n_1 = 1,54$, con lo cual podemos encontrar la distancia focal f, y por ende, el poder óptico del mismo en base a las relaciones (39.7) y (39.11). Veamos.

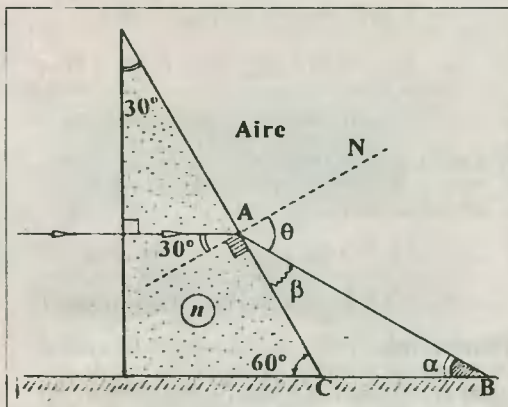


Fig. Solución Prob. 39.26

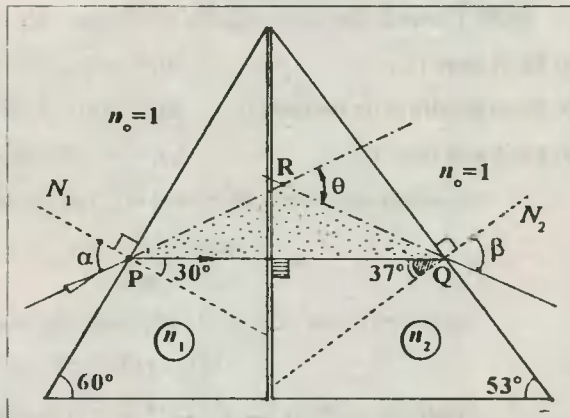


Fig. Solución Prob. 39.27

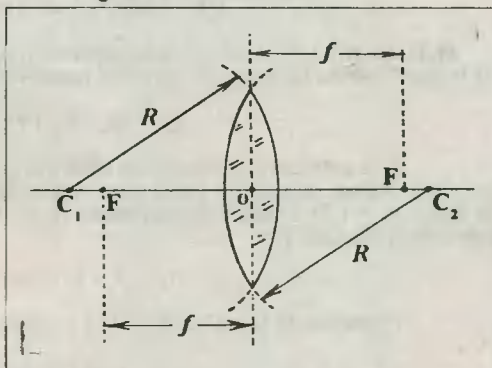


Fig. Solución Prob. 39.28

$$C_1 = 1/f_1 = (n/n_0 - 1) \cdot (1/R_1 + 1/R_2)$$

$$C_1 = (1,54/1 - 1) \cdot (1/(-0,25) + 1/\infty)$$

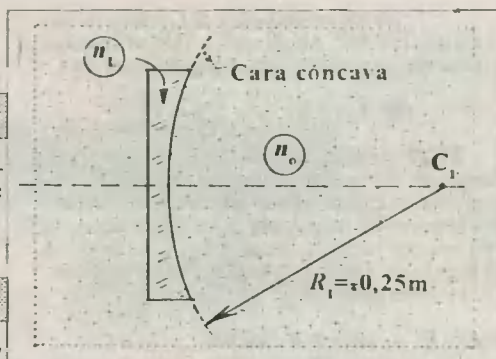
$$\therefore C_1 = -2,16 \text{ optrias (lente divergente)}$$

- b) **En el líquido.**- De acuerdo con los datos anteriores, y teniendo en cuenta el cambio de índice de refracción del medio ($n_0 = 2$), tendremos:

$$C_2 = 1/f_2 = (1,54/2 - 1) \cdot (1/(-0,25) + 1/\infty)$$

$$\therefore C_2 = +0,92 \text{ optrias (lente convergente)}$$

Observación.- Hemos supuesto que la cara plana de la lente es generada por un radio (R_2) de longitud infinitamente grande. Es fácil deducir las distancias focales en ambos casos: $f_1 = -0,46 \text{ m}$, y $f_2 = +1,09 \text{ m}$.



39.30. Haciendo uso de la relación (39.7) para cada medio, tendremos:

a) En el agua (n_1): $1/f_1 = (n_1/n_1 - 1) \cdot (1/R_1 + 1/R_2) \dots (1)$

b) En el bisulfuro de carbono (n_2): $1/f_2 = (n_2/n_2 - 1) \cdot (1/R_1 + 1/R_2) \dots (2)$

c) En el aire ($n_0 = 1$): $1/f_3 = (n_1 - 1) \cdot (1/R_1 + 1/R_2) \dots (3)$

Dividiendo miembro a miembro (1) y (2) encontramos el índice de refracción (n_1) de la lente.

$$n_1 = \frac{n_2 n_2 (f_2 - f_1)}{n_1 f_2 - f_1 n_2} \Rightarrow n_1 = 1,637 \dots (*)$$

Sustituyendo este valor en (1) despejamos la suma de inversas de los radios, encontrando:

$$1/R_1 + 1/R_2 = 9/2 \dots (**)$$

Finalmente, sustituimos (*) y (**) en (3), y obtenemos:

$$1/f_3 = (1,637 - 1) \cdot (9/2) \therefore f_3 \approx 34,9 \text{ cm}$$

39.31. Sean R_1 y R_2 los radios de las caras convexas de las lentes individuales. Entonces, la potencia de la lente cuando las caras planas están juntas estará dada por la relación (39.7).

$$1/f_1 = (n_v - 1) \cdot (1/R_1 + 1/R_2) \dots (1)$$

Esta potencia es exactamente igual a la que poseen las lentes cuando se tocan por sus caras convexas. Ahora, cuando el espacio entre ellas se llena de agua, equivale a agregar una nueva lente de índice $n_a = 1,33$ y radios de curvatura $-R_1$ y $-R_2$, dado que sus caras son cóncavas. Luego, su potencia viene dada por:

$$1/f_2 = (n_a - 1) \cdot (-1/R_1 - 1/R_2) \dots (2)$$

Combinando las relaciones (1) y (2) para eliminar los radios de curvatura, encontramos:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} \left(\frac{n_a - 1}{n_v - 1} \right) \dots (*)$$

Finalmente, utilizando la relación (39.13) para sistemas de lentes delgadas en contacto, diremos que la distancia focal (f_3) del sistema de lentes formado estará dado así:

$$1/f_3 = 1/f_1 + 1/f_2 \dots (**)$$

Reemplazando (1) y (*) en (**): $f_3 = \left(\frac{n_v - 1}{n_v - n_a}\right) f_1 \therefore f_3 = 80 \text{ cm}$

39.32. Desde que la imagen es real, es invertida. Luego, ella aparecerá en la zona real (ZR). Además, la lente es convergente, dado que sólo ellas pueden proyectar imágenes reales. También, diremos que el objeto se encuentra más allá de $2f$ (doble de la distancia focal), dado que la imagen es más pequeña y real. Luego, utilizando las relaciones del aumento (39.9) y (39.10) encontraremos la relación entre las distancias i y o . Veamos.

$$|A| = 1/2 \Rightarrow A = -1/2 \text{ (imagen real)}$$

$$\Rightarrow -1/2 = -i/o \Rightarrow o = 2i \dots (*)$$

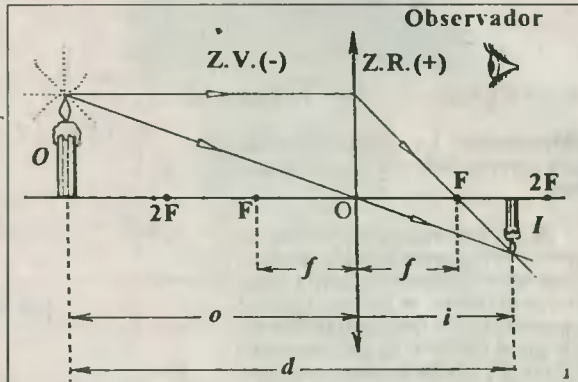
Ahora, utilizando la ecuación de los focos conjugados tendremos:

$$1/f = 1/i + 1/o \Rightarrow 1/10 = 1/i + 1/2i \Rightarrow i = 15 \text{ cm}$$

Y en (*): $o = 30 \text{ cm}$

Finalmente, la distancia solicitada es: $d = o + i = 30 + 15 \therefore d = 45 \text{ cm}$

Observación. - El observador no podrá ver la imagen directamente (I), y sólo lo logrará si colocamos una pantalla en el lugar donde se formará la imagen. Este es el principio del cinematógrafo.



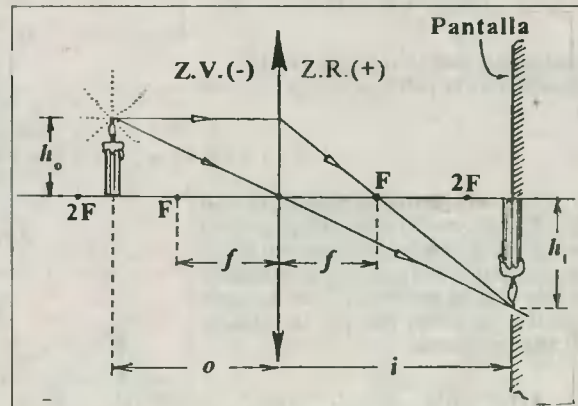
39.33. Por las características de la imagen podemos establecer que se trata de una lente convergente y de una imagen real, invertida y mayor, lo cual sucede si y sólo si se ubica entre $2f$ y f , siendo f el foco principal. Luego, por los datos se tiene que $o = +30 \text{ cm}$, $h_o = 10 \text{ cm}$ y $h_i = 15 \text{ cm}$. entonces, utilizando la relación (39.9) para el aumento se tiene que:

$$|A| = h_i/h_o = 15 \text{ cm}/10 \text{ cm} = 3/2$$

$$\Rightarrow A = -3/2 \dots \text{(imagen real)}$$

Y de la relación (39.10): $-i/o = -3/2$

$$\Rightarrow i = 3/2 o = 45 \text{ cm}$$



A continuación aplicamos la ecuación de los focos conjugados para calcular la distancia focal.

$$1/f = 1/i + 1/o = 1/45 + 1/30 \therefore f = 18 \text{ cm}$$

39.34. De acuerdo con la condición del problema se tiene una imagen directa (derecha) y de mayor altura que el objeto, lo cual sucede sólo en las lentes convergentes y cuando el objeto se ubica entre el foco (F) y la lente. Además, la imagen (I) es virtual; por lo tanto aparecerá en la zona virtual.

Según estos datos se ha elaborado el esquema adjunto, siendo $l = 4 \text{ cm}$, $o = f - l$, e $i = -(f + l)$. Luego, utilizando la ecuación de los focos conjugados tendremos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{-(f+l)} + \frac{1}{f-l}$$

$$\Rightarrow f = l(1 + \sqrt{2}) \quad \therefore \boxed{f \approx +9,66 \text{ cm}}$$

Observación. - La disposición señalada corresponde al esquema de una lupa.

39.35. Reconociendo que solo las lentes convergentes pueden producir imágenes virtuales de un mayor tamaño que el objeto, se ha construido el esquema adjunto, donde se puede apreciar que el objeto se ha colocado entre el foco (F) y la lente como una lupa. Ahora, de la relación (39.10) tendremos que: $A = +5$ (imagen virtual).

$$\Rightarrow A = -i/o \Rightarrow i = -A \cdot o$$

Y por la ecuación de los focos conjugados:

$$1/f = 1/i + 1/o = 1/(-A \cdot o) + 1/o$$

$$\Rightarrow f = \left(\frac{A}{A-1}\right)o = 25 \text{ cm}$$

Finalmente, por la relación (39.11) encontramos la potencia óptica.

$$C = 1/f = 1/0,25 \text{ m} \quad \therefore \boxed{C = +4 \text{ dioptrías}}$$

39.36. a) Cuando la imagen es real (I_1). - En este caso el objeto (O_1) se ubica entre F y 2F, desde donde se trazan los rayos central y focal para ubicar la imagen. en este caso el aumento (A) es de signo negativo, de modo que por la relación (39.10) tendremos:

$$-A = -i_1/o_1 \Rightarrow i_1 = A \cdot o_1$$

Ahora, por la ecuación de los focos conjugados:

$$1/f = 1/i_1 + 1/o_1 = 1/A \cdot o_1 + 1/o_1$$

$$\Rightarrow o_1 = \left(\frac{-A+1}{A}\right)f \dots (1)$$

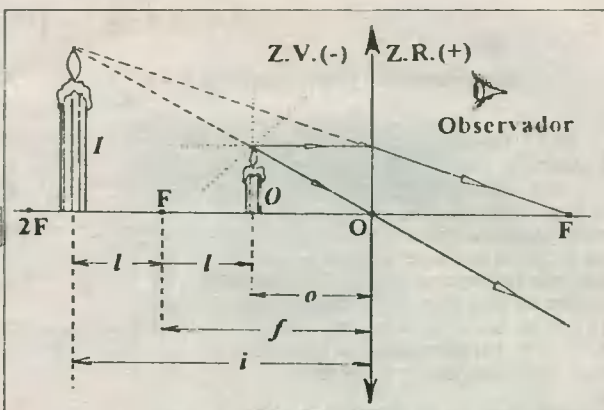


Fig. Solución Prob. 39.34

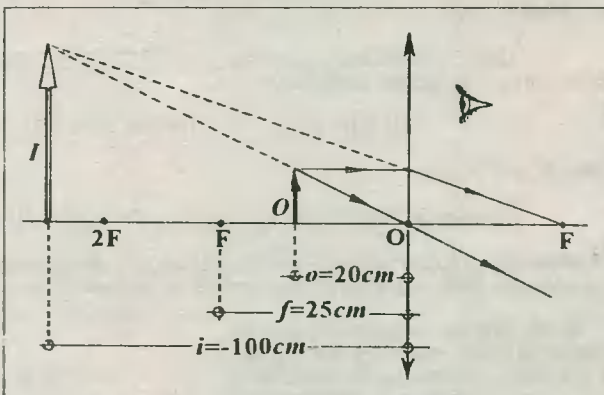


Fig. Solución Prob. 39.35

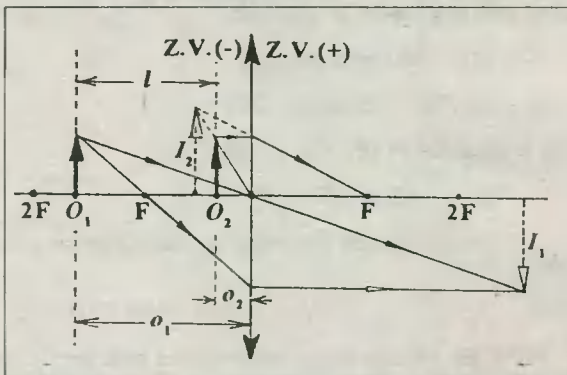


Fig. Solución Prob. 39.36

b) Cuando la imagen es virtual (I_2).- En virtud del relativismo del movimiento, asumimos que la lente es fija, y desplazamos al objeto hasta una posición O_2 ubicada entre el foco (F) y aquel. En este caso, el aumento (A) es de igual magnitud, pero de signo positivo. De modo que por la relación (39.10) se tiene:

$$+A = -i_2/o_2 \Rightarrow i_2 = -A.o_2$$

Y utilizando la ecuación de los focos conjugados:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i_2} + \frac{1}{o_2} = \frac{1}{-A.o_2} + \frac{1}{o_2} \Rightarrow o_2 = \left(\frac{A-1}{A}\right)f \dots (2)$$

Finalmente, del esquema: $o_1 - o_2 = l \dots (3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3) obtenemos: $f = Al/2 \therefore f = 9 \text{ cm}$

39.37. Asumiendo que la distancia del objeto a la lente es $o = x$, y la distancia entre el objeto y su imagen es d , diremos que la distancia de la imagen a la lente es $i = d - x$. Ahora, utilizando la ecuación de los focos conjugados tendremos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{d-x} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{d}{dx-x^2} \Rightarrow d = \frac{x^2}{x-f} \dots (*)$$

Del esquema (1) reconocemos que $x > f$. Luego, en (*), d no tiene valores reales para $x \leq f$. Además, cuando x tiende al valor de f , d toma valores muy grandes. Al graficar d en función de x encontramos que el mínimo valor de d es $4f$, y se alcanza cuando $x = 2f$ (Ver gráfico 2). Y así, la distancia pedida es:

$$x = 2f = 40 \text{ cm}$$

39.38. En base a los datos se han elaborado los esquemas que se muestran en la página siguiente, en donde se puede apreciar que el desplazamiento (l) de la lente está dado por:

$$o_2 - o_1 = l \dots (1)$$

En cualquiera de los esquemas se verifica la ecuación de los focos conjugados.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o} = \frac{1}{d-o} + \frac{1}{o} \Rightarrow o^2 - do + fd = 0 \Rightarrow o = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}{2}$$

Reemplazando el dato para $d = 1 \text{ m}$ encontramos las dos soluciones.

$$o_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4f}}{2}; \text{ y } o_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4f}}{2}$$

Sustituyendo las relaciones obtenidas para o_1 y o_2 tendremos:

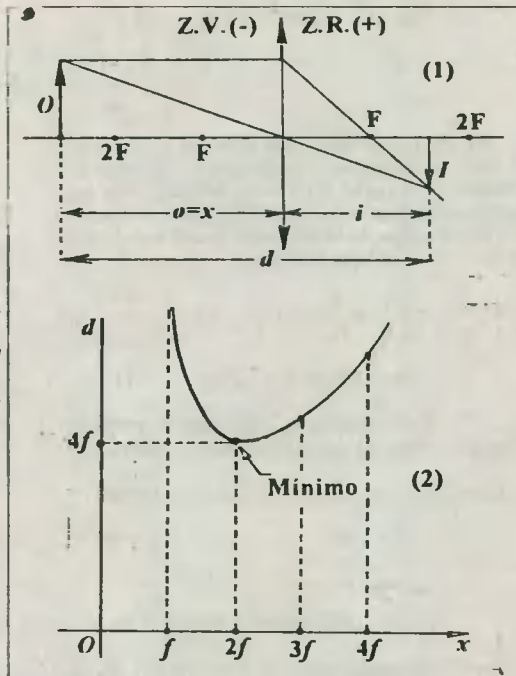


Fig. Solución Prob. 39.37

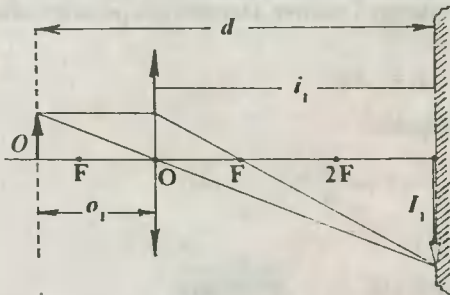


Fig. (1). Solución Prob. 39.38

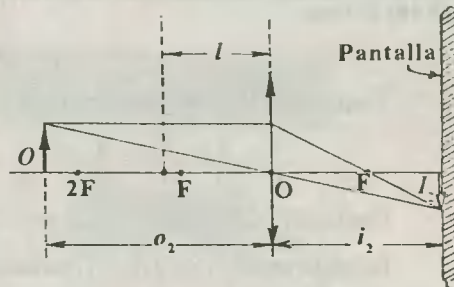


Fig. (2). Solución Prob. 39.38

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4f}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1 - 4f}}{2} = 0,2 \text{ m} \quad \therefore \quad \boxed{f = 0,24 \text{ m}}$$

39.39. Desde un punto de vista geométrico, la lente es divergente, dado que sus bordes son gruesos y su parte central es angosta. Sin embargo, utilizando la relación (39.7) encontraremos el valor y signo de la distancia focal, con lo cual deduciremos el tipo de lente.

$$\frac{1}{f} = (n_1 - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \left(\frac{1,5}{1} - 1 \right) \left(\frac{1}{-20} + \frac{1}{+30} \right)$$

$$\Rightarrow f = -120 \text{ cm} = -1,2 \text{ m} \dots (1)$$

Este resultado confirma lo previsto. Ahora, en base al dato del aumento tenemos:

$$|A| = 1/3 \Rightarrow A = +1/3 \text{ (imagen virtual)}$$

$$\Rightarrow A = -i/o \Rightarrow -i/o = +1/3$$

$$\Rightarrow i = -o/3 \dots (2)$$

Ahora, utilizamos la ecuación de los focos conjugados: $1/f = 1/i + 1/o \dots (3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3): $1/(-1,2) = 1/(-o/3) + 1/o \Rightarrow o = 2,4 \text{ m}, i = -0,8 \text{ m}$

Finalmente, del esquema encontramos la distancia d entre el objeto y la imagen.

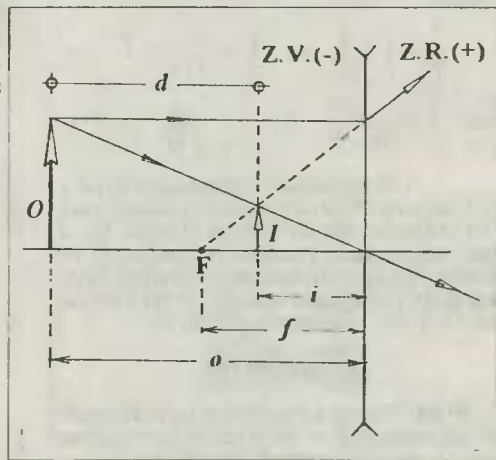
$$d = o - |i| = 2,4 - |-0,8| \quad \therefore \quad \boxed{d = 1,6 \text{ m}}$$

39.40. Sabemos que un objeto proyecta una imagen virtual y menor sólo en las lentes divergentes; por ello, hemos elaborado el esquema adjunto, donde la distancia focal es $f = -60 \text{ cm}$. Asimismo, reconocemos que $h_o = 10 \text{ cm}$, y $h_i = 2 \text{ cm}$. Luego, utilizando las relaciones (39.9) y (39.10) tendremos:

$$|A| = h_i/h_o = 2 \text{ cm}/10 \text{ cm} = 1/5 \Rightarrow A = +1/5 \text{ (imagen virtual)}$$

$$\Rightarrow A = -i/o \Rightarrow +1/5 = -i/o \Rightarrow i = -o/5 \dots (*)$$

Ahora, utilizamos la ecuación de los focos conjugados.



$$1/f = 1/i + 1/o \Rightarrow 1/-60 + 1/(-0,5) + 1/o$$

$$\therefore \boxed{o = 240 \text{ cm}}$$

Observación. - El observador colocado al otro lado de la lente no ve el objeto, sino a su correspondiente imagen (I), pero de manera directa (sin ayuda de pantalla).

39.41. El ojo de un miope se caracteriza porque los rayos que ingresan al ojo concurren en un punto anterior a la retina (R), que es el lugar del ojo sensible a la luz. Para corregir este defecto se utiliza una lente divergente (L), que colocado delante del ojo separa a los rayos de modo que el punto de concurrencia de los rayos refractados se desplace hasta R, tal como se indica en el esquema 2. De aquí se tiene que $i = -80 \text{ cm} = -0,8 \text{ m}$ es la distancia máxima visible de cualquier objeto colocado incluso a una gran distancia ($o = \infty$). Luego, por la ecuación de los focos conjugados, tendremos:

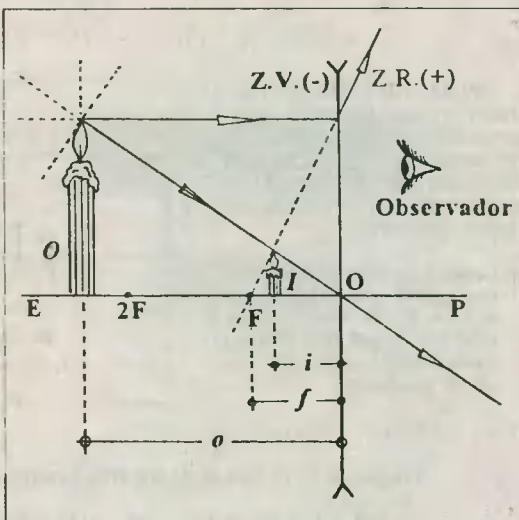


Fig. Solución Prob. 39.40

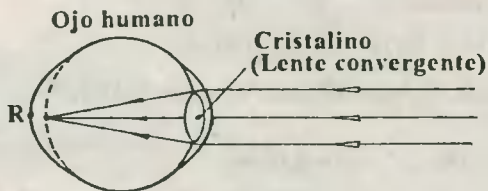


Fig. (1). Solución Prob. 39.40

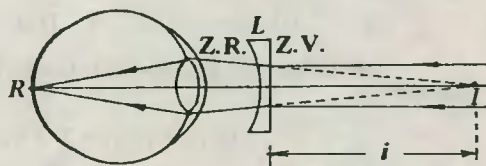


Fig. (2). Solución Prob. 39.41

$$1/f = 1/i + 1/o = 1/-0,8 + 1/\infty \Rightarrow f = -0,8 \text{ m}$$

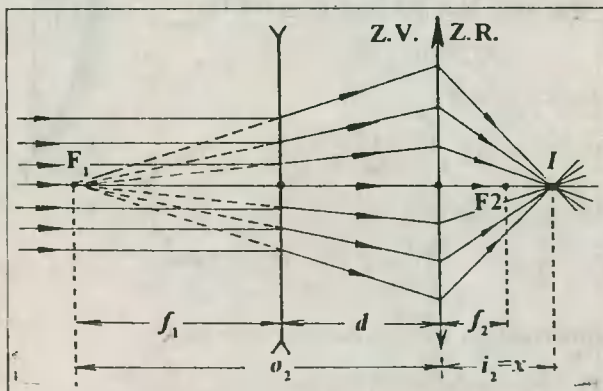
Y por la relación (39.11) encontramos la potencia óptica.

$$C = 1/f = 1/-0,8 \text{ m}$$

$$\therefore \boxed{C = -1,25 \text{ dioptrías}}$$

39.42. Analizando la lente divergente, notamos que la prolongación de los rayos refractados concurren en el foco F_1 , el cual es una imagen para este sistema, pero para la lente convergente se trata de un objeto luminoso ubicado a la distancia $o_2 = |f_1| + d = |-35| + 25 = 60 \text{ cm}$.

Considerando que la imagen se forma en I, entonces tendremos que: $i_2 = x$, $y f_2 = +10 \text{ cm}$. A continuación utilizamos la ecuación de los focos conjugados para la lente convergente.

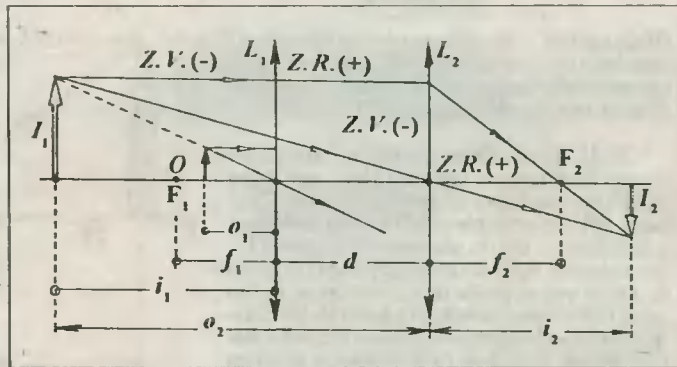


$$1/f_2 = 1/i_2 + 1/o_2 \Rightarrow 1/10 = 1/x + 1/60 \therefore x = 12 \text{ cm}$$

39.43. Haciendo la construcción respectiva de las imágenes notamos que la imagen I_1 proyectada por la lente L_1 es el objeto para la lente L_2 . Luego, estudiando por separado las lentes tendremos:

a) **Lente L_1 .** - Aquí se tiene que el objeto O se encuentra entre el foco F y la lente. Luego, ella proyectará una imagen virtual I_1 colocada detrás de sí, de modo que:

$$o_1 = 27 \text{ cm}, f_1 = +36 \text{ cm}$$



Luego, de la ecuación de los focos conjugados establecemos:

$$1/f_1 = 1/i_1 + 1/o_1 \Rightarrow 1/36 = 1/i_1 + 1/27 \Rightarrow i_1 = -108 \text{ cm}$$

b) **Lente L_2 .** - Para este caso se tiene que: $o_2 = |i_1| + d = |-108| + 12 = 120 \text{ cm}$, y $f_2 = +72 \text{ cm}$. Luego, por la ecuación de los focos conjugados conseguimos:

$$1/f_2 = 1/i_2 + 1/o_2 \Rightarrow 1/72 = 1/i_2 + 1/120 \Rightarrow i_2 = 180 \text{ cm}$$

Finalmente, diremos que la distancia desde el objeto (O) hasta la imagen final (I_2) viene dada por:

$$d = o_1 + d + i_2 = 27 + 12 + 180 \therefore d = 2,19 \text{ m}$$

39.44. El sistema óptico se compone de una lente convergente y de un espejo cóncavo, los cuales poseen independientemente sus distancias focales f_l y f_e . Reconocemos que todos los rayos luminosos al entrar y salir del sistema atraviesan dos veces a la lente, y se refleja una vez en el espejo. Luego, el sistema óptico presenta una distancia focal (f_s) cuyo valor viene dado por la relación (39.13).

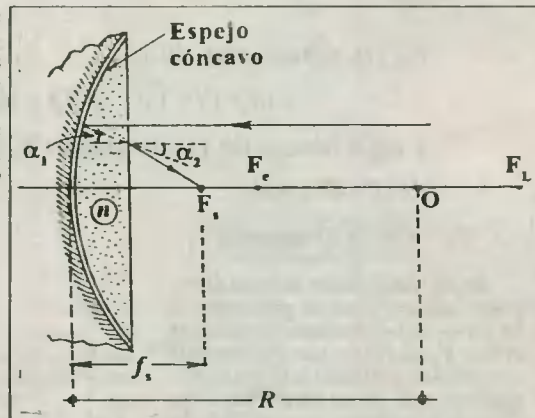
$$1/f_s = 1/f_e + 2/f_l \dots (1)$$

donde: $f_e = +R/2 \dots (2)$

$$Y: \frac{1}{f_l} = (n-1) \left(\frac{1}{+R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{n-1}{R} \dots (3)$$

De (2) y (3) en (1):

$$\frac{1}{f_s} = \frac{2}{R} + \frac{2(n-1)}{R} = \frac{2+2n-2}{R} \Rightarrow f_s = R/2n \therefore f_s = 10 \text{ cm}$$



Observación. - En el esquema se tiene que:

F_e = Foco principal del espejo.

F_1 = Foco principal de la lente
 F_s = Foco principal del sistema óptico

39.45.a. Utilizando el resultado del problema anterior encontraremos la distancia focal (f_s) del sistema óptico formado

$$f_s = R/2n = 60/2 \cdot 1.5 \Rightarrow f_s = 20 \text{ cm}$$

A continuación, utilizamos la ecuación de los focos conjugados para encontrar la distancia de la imagen al espejo (i).

$$1/f_s = 1/i + 1/o \Rightarrow 1/20 = 1/i + 1/10$$

$$\Rightarrow i = -10 \text{ cm (imagen virtual y derecha)}$$

Luego, la distancia entre el objeto y su imagen está dada por:

$$d = |i| + o = |-10| + 10 \quad \therefore \quad d = 20 \text{ cm}$$

39.45.b. Finalmente, el aumento se obtendrá utilizando la relación (39.10)

$$A = -i/o = -(-10)/10 \quad \therefore \quad A = +1$$

39.46.a. Teniendo en cuenta que por tratarse de un espejo convexo y una lente divergente, procedemos a utilizar la relación obtenida en el problema (39.44), con el agregado del signo negativo del radio de curvatura. Así entonces, la distancia focal del sistema óptico constituido será:

$$f_s = -R/2n = -80/2 \cdot 1.6 \Rightarrow f_s = -25 \text{ cm}$$

A continuación hallaremos la distancia i de la imagen al espejo.

$$1/f_s = 1/i + 1/o \Rightarrow -1/25 = 1/i + 1/75$$

$$\therefore \quad i = -18,75 \text{ cm (imagen virtual)}$$

39.46.b. Finalmente, el aumento se obtendrá de la relación:

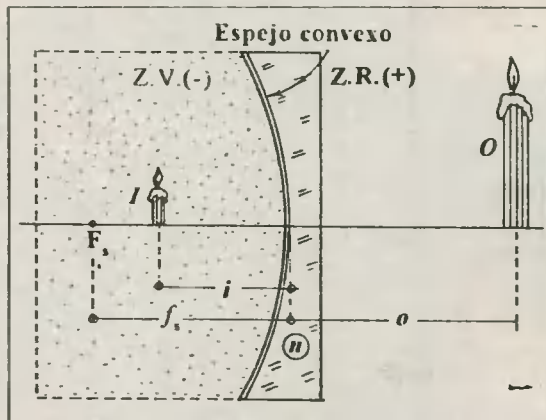
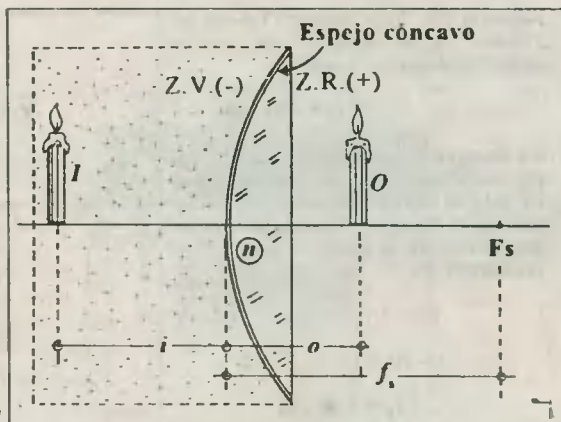
$$A = -i/o = -(-18,75)/(+100) \quad \therefore \quad A \approx 0,1875$$

39.47. El esquema muestra un sistema óptico formado por una lente plano cóncava (divergente) y un espejo plano. Este sistema proyecta tres imágenes, las que se obtienen analizando por separado a los elementos señalados.

a) La imagen I_1 .- Esta es la que proyecta la lente divergente, cuya ubicación se determina por la ecuación de los focos conjugados:

$$1/f = 1/i_1 + 1/o_1 \Rightarrow 1/(-20) = 1/i_1 + 1/30 \Rightarrow i_1 = -12 \text{ cm (delante de la lente)}$$

b) La imagen I_2 .- Esta imagen se forma considerando como objeto a la imagen I_1 , y se obtiene por reflexión de los rayos en el espejo plano sin tener en cuenta el paso de los rayos a través de la lente por



segunda vez. Esta imagen (I_2) con el "objeto" (I_1) se ubican simétricamente respecto al espejo. Luego:

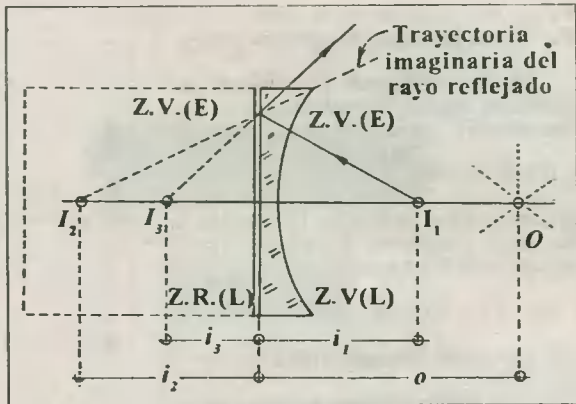
$$i_2 = -|i_1| \quad \therefore \quad \boxed{i_2 = -12 \text{ cm}}$$

- c) La imagen I_3 .- Esta imagen es la que proyecta la lente tomando como "objeto" a I_1 , el cual se forma por la prolongación de los rayos refractados por segunda vez por la lente. Su posición se encuentra así:

$$1/f = 1/i_3 + 1/i_1$$

$$\Rightarrow 1/-20 = 1/i_3 + 1/-12$$

$$\therefore \quad \boxed{i_3 = +30 \text{ cm}}$$



CAP 40 FOTOMETRIA

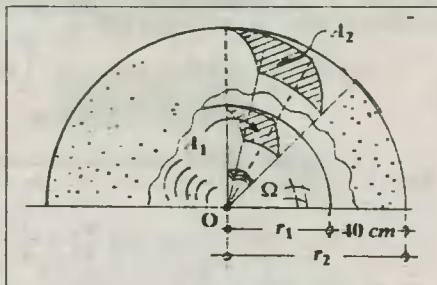
40.1. Dado que los casquetes de áreas A_1 y A_2 son subtendidos por el mismo ángulo sólido (Ω), procederemos a utilizar la relación (40.1).

$$\Omega = A_1/r_1^2 = A_2/r_2^2 \Rightarrow A_2 = A_1(r_2/r_1)^2 \dots (*)$$

De los datos: $r_1 = 50 \text{ cm}$, $r_2 = (r_1 + 40 \text{ cm}) = 90 \text{ cm}$; $A_1 = 1\,200 \text{ cm}^2$. Luego, reemplazando en (*):

$$A_2 = 1\,200 \text{ cm}^2 (90 \text{ cm}/50 \text{ cm})^2$$

$$\therefore \boxed{A_2 = 3\,888 \text{ cm}^2}$$



40.2.a. Cálculo de la intensidad del foco.- Por los datos tenemos: $\Phi_{L1} = 600 \text{ lm}$; $A_1 = 3 \text{ m}^2$; $r = 0,7 \text{ m}$, con los cuales podemos encontrar el ángulo sólido que subtende a la superficie de área A_1 . Seguidamente, encontraremos la intensidad del foco luminoso utilizando la relación (40.2).

$$\Phi_{L1} = I\Omega = LA_1/r^2 \Rightarrow I = \Phi_{L1}r^2/A_1$$

$$\text{Reemplazando datos: } I = 600 \text{ lm} \cdot (0,7 \text{ m})^2 / 3 \text{ m}^2 \quad \therefore \boxed{I = 98 \text{ cd}}$$

40.2.b. Cálculo del flujo total que sale de la esfera.- Aquí necesitamos reconocer que el flujo luminoso es directamente proporcional con el área que atraviesa. Luego, si aplicamos una regla de tres simple tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{L1} \longrightarrow A_1 \\ \Phi_{L2} \longrightarrow A_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi_{L2} = (A_2/A_1)\Phi_{L1} = (4\pi r^2/A_1)\Phi_{L1}$$

Y sustituyendo datos obtenemos: $\Phi_{L2} = 4 \cdot 22/7 \cdot (0,7 \text{ m})^2 / 3 \text{ m}^2 \cdot 600 \text{ lm}$

$$\therefore \boxed{\Phi_{L2} = 1\,232 \text{ lm}}$$

40.3. Con los datos: $Y = 9\,500 \text{ lx}$ y $A = 1,6 \text{ m}^2$ podemos emplear la relación (40.7) para calcular el flujo luminoso que "baña" la superficie dada.

$$Y = \Phi_L/A \Rightarrow \Phi_L = YA = 9\,500 \text{ lx} \cdot 1,6 \text{ m}^2 \quad \therefore \boxed{\Phi_L = 15\,200 \text{ lm}}$$

40.4. De acuerdo con el esquema dado en el enunciado del problema podemos reconocer que en ambos casos la iluminación se realiza a través del mismo foco y ángulo sólido, lo que nos permite afirmar que el flujo luminoso que "baña" las dos láminas es la misma. Luego, empleando la relación (40.7) despejamos el flujo luminoso (Φ_L) para establecer una relación entre ambas iluminaciones.

$$\Phi_L = Y_1 A_1 = Y_2 A_2 \Rightarrow Y_2 = Y_1 \cdot A_1/A_2 = 20 \text{ lx} \cdot A/4A \quad \therefore \boxed{Y_2 = 5 \text{ lx}}$$

40.5. Recordando que el ángulo sólido que subtende una esfera (todo el espacio) es igual a 4π estereoradianes, calcularemos la intensidad luminosa de la lámpara foco a partir de la relación (40.2).

$$\Phi_L = I\Omega = I \cdot 4\pi \Rightarrow I = \Phi_L/4\pi$$

$$\text{Reemplazando datos: } I = \frac{110 \text{ lm}}{4 \cdot 22/7 \text{ sr}} \therefore I = 8,75 \text{ cd}$$

40.6. Utilizando el esquema adjunto podemos decir que la energía eléctrica que se suministra al foco (R) se convierte en energía radiante (calor + luz), de manera que la rapidez con que se envía al espacio es igual a $Pot = 120 \text{ W}$. Siendo la eficiencia del foco $\eta = 13 \text{ lm/W}$, encontraremos el flujo luminoso (Φ_L) emitido a partir de la relación (40.3).

$$\begin{aligned} \eta &= \Phi_L / Pot \Rightarrow \Phi_L = \eta \cdot Pot = 11 \text{ lm/W} \cdot 120 \text{ W} \\ &\Rightarrow \Phi_L = 1320 \text{ lm} \end{aligned}$$

Y ahora, para el cálculo de la intensidad luminosa del foco (I) utilizaremos la relación deducida en el problema anterior.

$$I = \frac{\Phi_L}{4\pi} = \frac{1320 \text{ lm}}{4 \cdot 22/7 \text{ sr}} \therefore I = 105 \text{ cd}$$

40.7. A partir del esquema adjunto podemos reconocer que nuestro foco luminoso, al cambiar su posición, su distancia hasta la superficie iluminada no ha cambiado, sólo los ángulos θ de incidencia que forman los rayos luminosos con la normal. Seguidamente aplicamos la Ley de D'Alambert.

$$\begin{aligned} Y_A &= I d^2 \cdot \cos\theta_1 ; Y_B = I d^2 \cdot \cos\theta_2 \\ \Rightarrow Y_B / Y_A &= \cos\theta_2 / \cos\theta_1 \Rightarrow Y_B = \cos 53^\circ / \cos 37^\circ \cdot Y_A \\ \Rightarrow Y_A &= \frac{3/5}{4/5} \cdot 1600 \text{ lx} \therefore Y_B = 1200 \text{ lx} \end{aligned}$$

40.8. De acuerdo con la Ley de D'Alambert diremos que la iluminación es máxima en el centro A de la mesa, y es mínima en cualquier punto de su borde (B). Por los datos tenemos: $I = 160 \text{ cd}$; $h = 0,8 \text{ m}$; $r = 0,6 \text{ m}$. Y del esquema se puede deducir que: $d = 1 \text{ m}$, y $\theta = 37^\circ$.

a) Cálculo de la iluminación en A.-

$$Y_A = I h^2 = 160 \text{ cd} / (0,8 \text{ m})^2 \therefore Y_A = 250 \text{ lx}$$

b) Cálculo de la iluminación en B.-

$$Y_B = I d^2 \cdot \cos\theta = 160 \text{ cd} / (1 \text{ m})^2 \cdot 4/5 \therefore Y_B = 128 \text{ lx}$$

40.9. Sea d la distancia inicial, y x el desplazamiento de la posición del foco. Luego, por condición del problema se verifica que las iluminaciones en los casos (a) y (b) son iguales. Entonces, al utilizar la relación (40.8) tendremos:

$$Y_a = Y_b \Rightarrow \frac{I_1}{d^2} = \frac{I_2}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{90}{d^2} = \frac{40}{(d-x)^2}$$

$$\Rightarrow x = d/3 \therefore \text{La distancia debe disminuir en su tercera parte}$$

Observación. - En los cálculos no se han señalado los ángulos de incidencia (θ) de los rayos luminosos

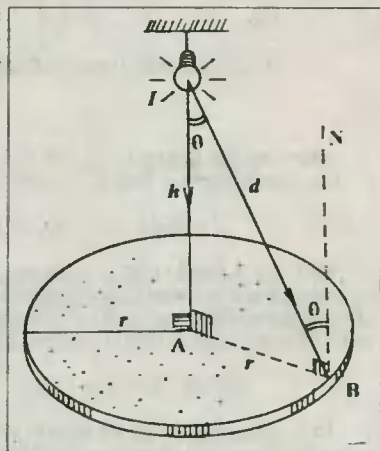
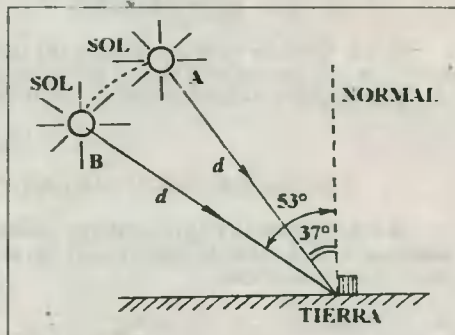
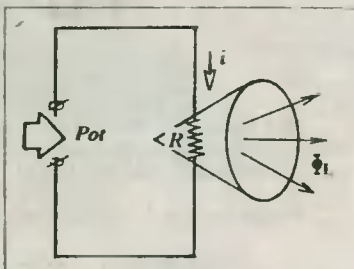


Fig. Solución Prob. 40.8

con la normal, ya que su medida es 0°. Luego, el factor $\cos\theta$ es igual a 1, por lo que fué preferible no incluirlo.

40.10. Sea I la intensidad luminosa de cada vela. Entonces, en los casos (a) y (b) los focos tendrán intensidades $16I$ y $9I$ respectivamente. Sea $d = 1,2\text{ m}$ la distancia inicial entre las velas y la pantalla, y x la distancia que debe acercarse la pantalla para que las iluminaciones en ambos casos sean iguales. Seguidamente, aplicamos el principio de D'Alambert.

$$Y_a = Y_b \Rightarrow \frac{16I}{d^2} = \frac{9I}{(d-x)^2} \Rightarrow x = \frac{d}{4} = \frac{1,2\text{ m}}{4}$$

$$\therefore \boxed{x \approx 0,3\text{ m}}$$

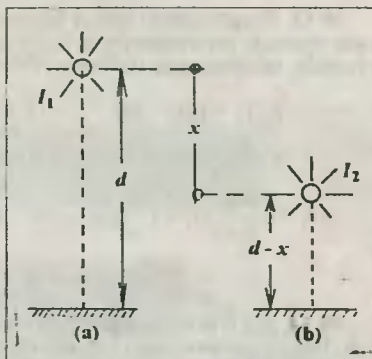


Fig. Solución Prob. 40.9

40.11. De acuerdo con los datos se tiene que: $I_1 = 30\text{ cd}$, $I_2 = 240\text{ cd}$; $d_1 = 25\text{ cm}$. Además:

$$Y_{\text{tot}} = Y_1 + Y_2 = 3Y_1 \Rightarrow Y_2 = 2Y_1 \dots (*)$$

Luego, utilizando la Ley de D'Alambert, en (*) se tiene:

$$\frac{I_2}{d_2^2} = 2 \frac{I_1}{d_1^2} \Rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{I_2}{2I_1}} d_1 \Rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{240\text{ cd}}{2 \cdot 30\text{ cd}}} \cdot 25\text{ cm} \therefore \boxed{d_2 = 50\text{ cm}}$$

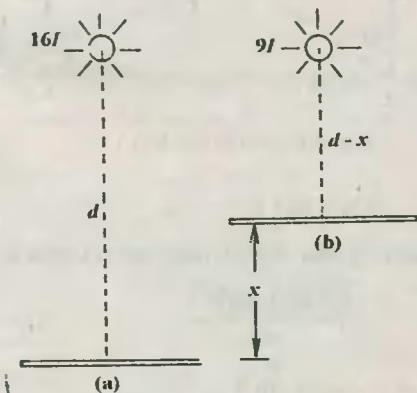


Fig. Solución Prob. 40.10

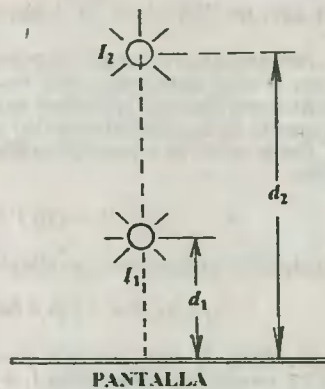


Fig. Solución Prob. 40.11

40.12. Calcularemos la iluminación que produce un foco sobre el centro O del cubo suponiendo que por dicho punto pasa una superficie infinitamente pequeña, pero perpendicular al rayo de luz proveniente de cada foco, de modo que la iluminación que produce en dicho lugar vendrá dada por la Ley de D'Alambert.

$$Y_O = I/x^2, \text{ donde } x = a\sqrt{3}/2 \Rightarrow Y_O = \frac{I}{(a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{4I}{3a^2} \dots (*)$$

Seguidamente, calcularemos la iluminación total que producen los ocho focos por un efecto de superposición. Luego: $Y_{\text{tot}} = 8Y_O = 32/3 I/a^2$. Finalmente, reemplazamos los datos para obtener:

$$Y_{\text{tot}} = \frac{32}{3} \cdot \frac{120\text{ cd}}{(2\text{ m})^2} \therefore \boxed{Y_{\text{tot}} = 320\text{ lx}}$$

40.13. Reconociendo que el tiempo de exposición de cada copia depende inversamente de la iluminación a la cual se vea sometida, tendremos la siguiente relación:

$$Y_2/Y_1 = t_1/t_2 \Rightarrow t_2 = (Y_1/Y_2)t_1 \dots (*)$$

Y utilizando la ley de D'Alambert en (*) tendremos:

$$t_2 = \left(\frac{I/d_1^2}{I/d_2^2}\right) t_1 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 t_1 \Rightarrow t_2 = \left(\frac{30 \text{ cm}}{20 \text{ cm}}\right)^2 8 \text{ s}$$

$$\therefore t_2 = 18 \text{ s}$$

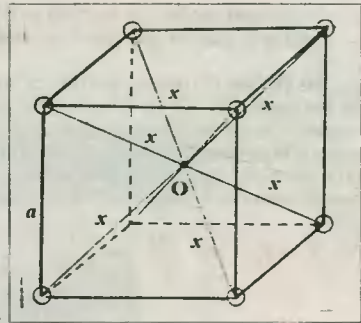


Fig. Solución Prob. 40.12

40.14. Sea I_2 la intensidad luminosa de la lámpara desconocida. Luego, reconociendo los datos tenemos: $I_1 = 16 \text{ cd}$, $d_1 = 125 \text{ cm}$, $d_2 = 175 \text{ cm}$, decidimos utilizar la condición del problema:

$$Y_2 = Y_1 \Rightarrow I_2/d_2^2 = I_1/d_1^2 \Rightarrow I_2 = (d_2/d_1)^2 I_1$$

$$\Rightarrow I_2 = (175 \text{ cm}/125 \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cd} \Rightarrow I_2 = 19,6 \text{ cd}$$

Ahora, calculemos el flujo luminoso total que irradia la lámpara, utilizando para ello la solución del problema 40.5.

$$\Phi_L = 4\pi \cdot I = 4 \cdot 22/7 \text{ sr} \cdot 19,6 \text{ cd} \Rightarrow \Phi_L = 246,4 \text{ lm}$$

A continuación calcularemos la potencia irradiada, para lo cual asumiremos que toda la potencia eléctrica que consume la lámpara se convierte íntegramente en energía radiante (luz y calor). Luego, por la relación electrodinámica de Joule tenemos:

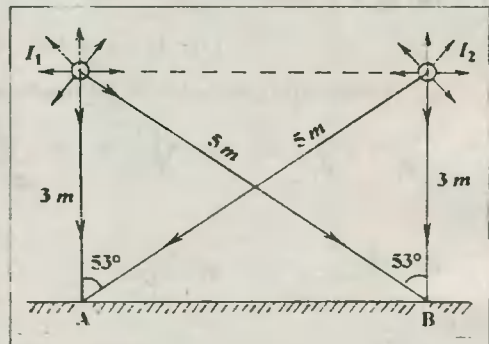


Fig. Solución Prob. 40.15

$$Pot = Vi = 110 \text{ V} \cdot 0,85 \text{ A} \Rightarrow Pot = 93,5 \text{ W}$$

Finalmente, utilizaremos la relación (40.3) para calcular el rendimiento de la lámpara.

$$\eta = \Phi_L/Pot = 246,4 \text{ lm}/93,5 \text{ W} \therefore \eta = 2,63 \text{ lm/W}$$

40.15. Por efecto de superposición encontraremos las intensidades luminosas I_1 e I_2 de los focos.

a) Iluminación total de A: $Y_A = Y_{1A} + Y_{2A}$

$$\Rightarrow 358 = I_1/3^2 + I_2/5^2 \cdot \cos 53^\circ$$

$$\Rightarrow 134 \ 250 = 125I_1 + 27I_2 \dots (1)$$

b) Iluminación total de B: $Y_B = Y_{1B} + Y_{2B}$

$$554 = I_1/5^2 \cdot \cos 53^\circ + I_2/3^2$$

$$\Rightarrow 63 \ 250 = 27I_1 + 125I_2 \dots (2)$$

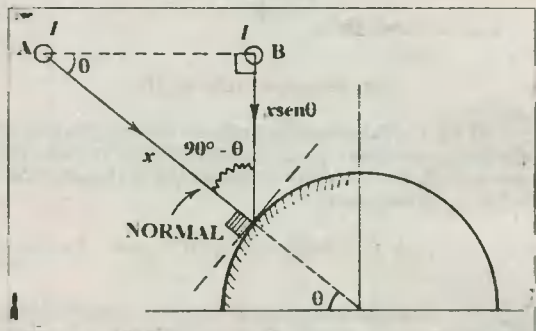


Fig. Solución Prob. 40.16

Resolviendo (1) y (2) encontramos: $I_1 = 2 \ 250 \text{ cd}$, $I_2 = 4 \ 500 \text{ cd}$

40.16. Utilizando el esquema de la figura y la condición del problema establecemos que:

$$Y_{\text{tot}}^P = Y_A^P + Y_B^P \Rightarrow 3Y_A^P = Y_A^P + Y_B^P \Rightarrow 2Y_A^P = Y_B^P \Rightarrow 2 \frac{I}{x^2} = \frac{I}{(x \cdot \text{sen}\theta)^2} \cdot \cos(90^\circ - \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{\text{sen}\theta}{x^2 \cdot \text{sen}^2\theta} \Rightarrow \text{sen}\theta = 1/2 \therefore \theta = 30^\circ$$

40.17. De acuerdo con la condición del problema se debe cumplir que:

$$Y_1^P = Y_2^P \Rightarrow Ilx^2 = Ily^2 \cdot \cos\theta \dots (*)$$

Del esquema: $y = (d - x)\text{sec}\theta$

Luego, en (*): $[(d - x)\text{sec}\theta]^2 = x^2\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{(d - x)}{\cos\theta} = x \cdot \sqrt{\cos\theta} \Rightarrow x = \frac{d}{1 + (\cos\theta)^{3/2}}$$

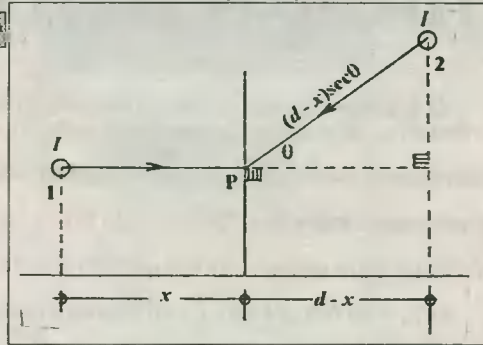


Fig. Solución Prob. 40.17

Y sustituyendo datos: $x = \frac{3,5 \text{ m}}{[1 + (4/9)^{3/2}]}$

$$\therefore x = 2,7 \text{ m}$$

40.18. Al colocar un espejo detrás del foco se provoca que todos los rayos que no llegaban originalmente a la pared se reflejen en aquel y refuercen la iluminación. Ahora, en el sistema así establecido se presentan dos focos F (objeto) y F' (imagen) de igual intensidad, alineados perpendicularmente a la pared.

De acuerdo con los datos se tiene:

(*) Al inicio: $Y_i = Ila^2 = 18 \text{ lux} \dots (1)$

(**) Al final: $Y_f = Ila^2 + I(3a)^2 = 10/9 Ila^2 \dots (2)$

Reemplazando (1) en (2): $Y_f = 10/9 \cdot 18 \text{ lux} \therefore Y_f = 20 \text{ lux}$

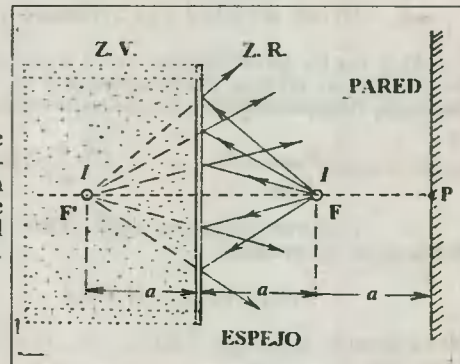


Fig. Solución Prob. 40.18

40.19. Por condición del problema, y utilizando el esquema adjunto establecemos lo siguiente:

a) Iluminación inicial: $Y_i = Id_i^2 \Rightarrow 125 \text{ lx} = I(2 \text{ m})^2$

$$\Rightarrow I = 500 \text{ cd}$$

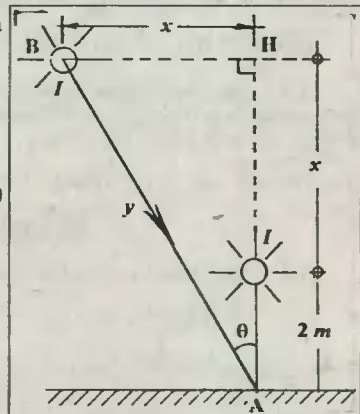
b) Iluminación final: $Y_f = \frac{I}{d_f^2} \cdot \cos\theta \Rightarrow 4 \text{ lx} = \frac{500}{y^2} \cdot \frac{(x+2)}{y}$

$$\Rightarrow y^3 = 125x + 250 \dots (1)$$

Ahora, aplicamos en Teorema de Pitágoras en el ΔAHB :

$$y^2 = (x+2)^2 + x^2 \dots (2)$$

Resolviendo (1) y (2) encontramos: $x = 6 \text{ m}, y = 10 \text{ m}$



CAP 41 ÓPTICA FÍSICA

FENÓMENOS ONDULATORIOS DE LA LUZ

41.1. Para reconocer el tipo de interferencia bastará comparar la diferencia de los caminos recorridos ($x_2 - x_1 = \Delta x$) con la longitud de onda (λ), utilizando para ello las relaciones (41.1) y (41.5).

Interferencia constructiva: $\Delta x/\lambda = n$: Número entero.

Interferencia destructiva: $\Delta x/\lambda = \frac{1}{2}(2n + 1)$ = Número impar/2

a) Por los datos tenemos: $\Delta x = 9 \mu\text{m} = 90\,000 \text{ \AA}$, y $\lambda_1 = 450 \text{ nm} = 4\,500 \text{ \AA}$. Luego:

$$\Delta x/\lambda_1 = 90\,000 \text{ \AA}/4\,500 \text{ \AA} = 20 \text{ (Número entero)} \quad \therefore \quad \text{La interferencia es constructiva}$$

b) De los datos: $\lambda_2 = 720 \text{ nm} = 7\,200 \text{ \AA}$. Luego:

$$\Delta x/\lambda_2 = 90\,000 \text{ \AA}/7\,200 \text{ \AA} = 12,5 \text{ (Número impar/2)} \quad \therefore \quad \text{La interferencia es destructiva}$$

41.2. Por los datos tenemos: $\Delta x = 1,8 \mu\text{m} = 18\,000 \text{ \AA}$; $\lambda_0 = 600 \text{ nm} = 6\,000 \text{ \AA}$; $n_{\text{agua}} = 4/3$; $n_{\text{vidrio}} = 1,5$. Con esta información buscaremos el nuevo valor que presenta la longitud de onda dentro de un medio transparente, para lo cual utilizaremos la relación (39.2).

a) En el agua: $\frac{n_{\text{vacío}}}{n_{\text{agua}}} = \frac{\lambda_a}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_a = \left(\frac{1}{4/3}\right) \cdot 6\,000 \text{ \AA} \Rightarrow \lambda_a = 4\,500 \text{ \AA}$

Y utilizando el mismo procedimiento del problema anterior reconoceremos el tipo de interferencia que se produce.

$$\Delta x/\lambda_a = 18\,000 \text{ \AA}/4\,500 \text{ \AA} \quad \therefore \quad \text{La interferencia es constructiva}$$

b) En el vacío: $n_{\text{vacío}}/n_{\text{vidrio}} = \lambda_v/\lambda_0 \Rightarrow \lambda_v = (1/1,5) \cdot 6\,000 \text{ \AA} \Rightarrow \lambda_v = 4\,000 \text{ \AA}$

$$\text{Ahora: } \Delta x/\lambda_v = 18\,000 \text{ \AA}/4\,000 \text{ \AA} = 4,5 \quad \therefore \quad \text{La interferencia es destructiva}$$

41.3. a. Según los datos: $\lambda = 7\,000 \text{ \AA}$; $\Delta x = 8\,750 \text{ nm} = 87\,500 \text{ \AA}$. Luego, utilizando el mismo criterio empleado en los problemas anteriores determinaremos el tipo de interferencia.

$$\Delta x/\lambda = 87\,500 \text{ \AA}/7\,000 \text{ \AA} = 12,5 \Rightarrow \text{La interferencia es destructiva (franja oscura)}$$

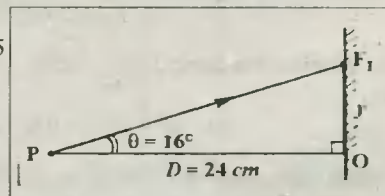
41.3. b. Para determinar la medida del ángulo θ que define la dirección en la cual debemos mirar para ubicar la primera franja luminosa, utilizaremos la relación (41.3), en la cual haremos $n = 1$, y $d = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 25\,000 \text{ \AA}$.

$$d \cdot \text{sen} \theta = n\lambda \Rightarrow \text{sen} \theta = n\lambda/d = 1 \cdot 7\,000 \text{ \AA}/25\,000 \text{ \AA} = 7/25$$

$$\therefore \quad \theta = 16^\circ$$

41.3. c. Empleando el esquema adjunto encontramos:

$$y = D \cdot \text{tg} 16^\circ = 24 \cdot 7/24 \quad \therefore \quad y = 7 \text{ cm}$$



Nota. - Para el cálculo de y se ha preferido utilizar el gráfico adjunto, dado que el ángulo θ es

relativamente grande para estos fenómenos; pero de haber utilizado la relación (41.4), el resultado hubiera sido $y = 6,72 \text{ cm}$

41.4. Reconociendo los datos tenemos: $\lambda = 480 \text{ nm} = 4800 \text{ \AA}$, $d = 120 \mu\text{m} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ \AA}$, y $D = 3,6 \text{ m} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ mm}$.

a) Calcularemos la interfranja empleando la relación (41.8).

$$\Delta y = \lambda D/d = 4800 \text{ \AA} \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ mm} / 1,2 \cdot 10^6 \text{ \AA} \quad \therefore \quad \Delta y = 14,4 \text{ mm}$$

b) Para el cálculo de la nueva interfranja determinaremos el valor de la longitud de onda en el agua tal como se hizo en el problema 41.2.

$$\lambda_a = \left(\frac{n_{\text{viduo}}}{n_{\text{agua}}} \right) \lambda_v = \left(\frac{1}{4/3} \right) 4800 \text{ \AA} \Rightarrow \lambda_a = 3600 \text{ \AA}$$

$$\Rightarrow \Delta y = \lambda_a D/d = 3600 \text{ \AA} \cdot 1,6 \cdot 10^3 \text{ mm} / 1,2 \cdot 10^6 \text{ \AA} \quad \therefore \quad \Delta y = 10,8 \text{ mm}$$

41.5. De acuerdo con el problema, se sabe que: $d = 200 \mu\text{m} = 2 \cdot 10^6 \text{ \AA}$; $\lambda = 600 \text{ nm} = 6000 \text{ \AA}$; $n = 2$; $y = 15 \text{ mm}$. Ahora, con estos datos podemos utilizar la relación (41.4) para calcular la distancia D de los focos a la pantalla.

$$y = n \lambda D/d \Rightarrow D = y d / n \lambda = 15 \text{ mm} \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ \AA} / 2 \cdot 6000 \text{ \AA} \quad \therefore \quad D = 2,5 \cdot 10^3 \text{ mm} = 2,5 \text{ m}$$

41.6. Según los datos deducimos que la interfranja se consigue así: $\Delta y = 4 \text{ cm} / 12 = 1/3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. A continuación, calcularemos la distancia d entre rendijas a partir de la relación (41.8).

$$\Delta y = \lambda D/d \Rightarrow d = \lambda D / \Delta y = 520 \text{ nm} \cdot 2,50 \text{ m} / (1/3 \cdot 10^{-2} \text{ m}) \quad \therefore \quad d = 3,9 \cdot 10^5 \text{ nm} = 0,39 \text{ mm}$$

41.7. Utilizando la relación (41.4) encontraremos la posición y de las franjas de color rojo y violeta de orden $n = 2$ respectivamente, empleando para cada uno su correspondiente longitud de onda. Luego, la distancia entre estas franjas la encontraremos por:

$$\Delta y = y_r - y_v \dots (1)$$

a) Para el color rojo:

$$y_r = \frac{n \lambda_r D}{d} = \frac{2 \cdot 760 \text{ nm} \cdot 3,2 \text{ m}}{0,32 \text{ mm}}$$

$$\Rightarrow y_r = 15,2 \text{ mm} \dots (2)$$

b) Para el color violeta:

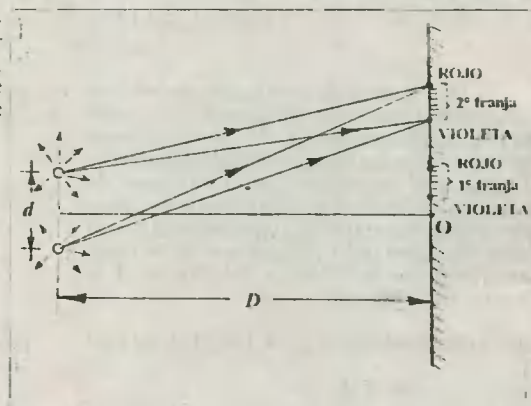
$$y_v = \frac{n \lambda_v D}{d} = \frac{2 \cdot 400 \text{ nm} \cdot 3,2 \text{ m}}{0,32 \text{ mm}} \Rightarrow y_v = 8 \text{ mm} \dots (3)$$

Finalmente, reemplazando (2) y (3) en (1): $\Delta y = 7,2 \text{ mm}$

41.8. De acuerdo con el esquema podemos decir que las imágenes F_1 y F_2 del foco F sobre los espejos E_1 y E_2 respectivamente harán las veces de las dos rendijas en el experimento de Young.

Del Δ rectángulo FHF_1 : $F_1H = 2h \cdot \text{sen}(\alpha/2) \dots (*)$

Pero, dado que α es un ángulo muy pequeño, se verifica que: $\text{sen}(\alpha/2) \approx \alpha/2$. Luego, en (*):



$$F_1 H = b \alpha \Rightarrow d = 2F_1 H = 2b \alpha \dots (1)$$

También: $FH = 2x = 2b \frac{\cos(\alpha/2)}{\approx 1}$

$$\Rightarrow x \approx b \dots (**)$$

Luego: $D = a + x \Rightarrow D \approx a + b \dots (2)$

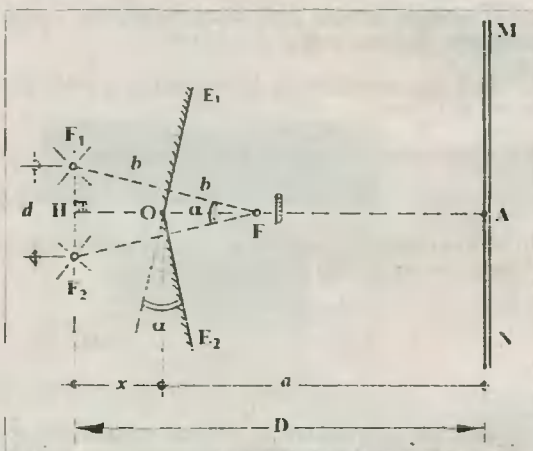
Y de la relación (41.8) encontramos la interfranja

$$\Delta y = \lambda D / d \dots (3)$$

Finalmente, reemplazamos (1) y (2) en (3):

$$\Delta y = \frac{\lambda(a+b)}{2b\alpha}$$

$$\Delta y = \frac{600 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot (0,2 + 199,8) \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2,0 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 0,05 \text{ rad}} \therefore \Delta y = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



41.9. De acuerdo con el esquema propuesto resulta evidente que el foco F_1 y su imagen F_2 se constituyen en dos focos coherentes similares a los que se presentan en el experimento de Young, reconociéndose los siguientes datos: $d = 2a = 2 \text{ mm}$; $D = b = 1,5 \text{ m}$; $\lambda = 500 \text{ nm}$, y $n = 1$. Luego, utilizando la relación (41.4) encontraremos la posición y de la primera franja

$$y = \frac{n\lambda D}{d} = \frac{1 \cdot 500 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \therefore y = 0,375 \text{ mm}$$

41.10. Por efecto de la refracción de la luz en cada cara del prisma se producen dos focos virtuales F_1 y F_2 , equidistantes del foco F . Estos focos hacen las veces de las dos rendijas en el experimento de Young, produciéndose un fenómeno de interferencia debido a la coherencia de los focos. Para la solución se procederá a prolongar el prisma hacia abajo para poder ubicar a uno de los focos, encontrando así la distancia $d/2$, siendo d la separación entre ellos.

Del Δ rectángulo FHA : $i = \alpha$; $FH = HA \cdot \text{tg} i \approx a \cdot i$
 $\Rightarrow FH = a\alpha \dots (1)$

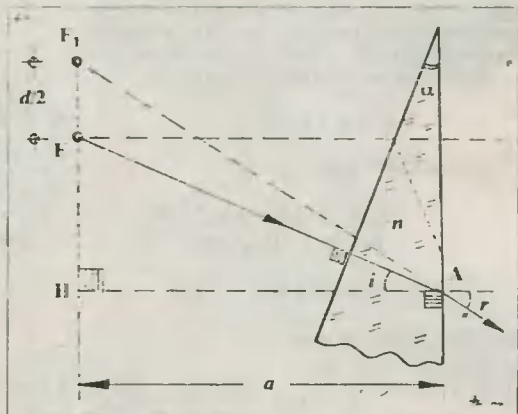
De la refracción en A : $1 \cdot \text{sen} r = n \cdot \text{sen} i$
 $\Rightarrow r \approx n\alpha \dots (2)$

Del Δ rectángulo AHF_1 : $F_1 H = a \cdot \text{tg} r \Rightarrow d/2 + FH \approx ar \dots (3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3): $d/2 + a\alpha \approx an\alpha \Rightarrow d = 2a\alpha(n - 1)$

Finalmente, el número N de franjas contenidas en la pantalla lo obtendremos por la relación $L/\Delta y$, siendo y la interfranja.

$$N = \frac{L}{\lambda D / d} = \frac{L}{\lambda D} d = \frac{2acL(n-1)}{\lambda(a+b)} \therefore N = 200 \text{ franjas}$$



41.11. Cuando los rayos de luz pasan a través de la ranura A'B' y la lente producen imágenes virtuales S_1 y S_2 que hacen las veces de dos focos coherentes similares a las rendijas del experimento de Young. Su ubicación (i) con relación a la lente se encontrará utilizando la ecuación de los focos conjugados.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o} \Rightarrow i = \frac{of}{o-f} = \frac{15 \cdot 10}{15-10}$$

$$\Rightarrow i = 30 \text{ cm}$$

Para calcular la distancia d entre los focos S_1 y S_2 haremos uso de la semejanza de triángulos.

$$\Delta SAB' \sim \Delta SS_1S_2: \frac{d}{h} = \frac{o+i}{o} \Rightarrow d = 0,15 \text{ cm}$$

Y para calcular la longitud L de la zona de interferencia utilizamos:

$$\Delta SAB' \sim \Delta SAB: \frac{L}{h} = \frac{o+a}{o} \Rightarrow L = 0,25 \text{ cm}$$

Ahora, calcularemos la interfranja en base a la relación (41.8).

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d} = \frac{500 \cdot 10^{-9} \text{ m} (60 - 30) \text{ cm}}{0,15 \text{ cm}} = 10^{-2} \text{ cm}$$

Finalmente, el número de franjas contenidas en AB se determinará por la relación:

$$N = L/\Delta y = 0,25 \text{ cm}/10^{-2} \text{ cm} \therefore \boxed{N = 25 \text{ franjas}}$$

41.12. Reconociendo los datos: $n = 1,54$; $\lambda = 750 \text{ nm}$ (longitud de onda del color rojo), procederemos a utilizar las relaciones (41.9) y (41.10), considerando que el espesor mínimo (d) se presentará cuando el número k sea también el mínimo, es decir, cero.

a) Para ver franjas de luz roja aplicaremos la relación (41.9), y haremos $k = 0$.

$$2nd - \lambda/2 = 0 \Rightarrow d = \lambda/4n = 750 \text{ nm}/4 \cdot 1,54 \therefore \boxed{d_{\min} = 0,12 \mu\text{m}}$$

b) Para ver todo oscuro aplicaremos la relación (41.10), y haremos $k = 0$.

$$2nd - \lambda/2 = \lambda/2 \Rightarrow d = \lambda/2n = 750 \text{ nm}/2 \cdot 1,54$$

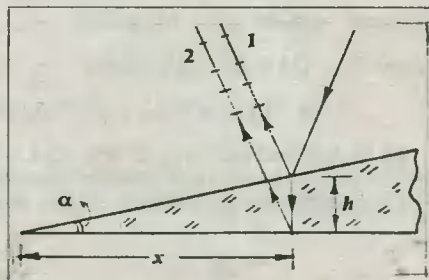
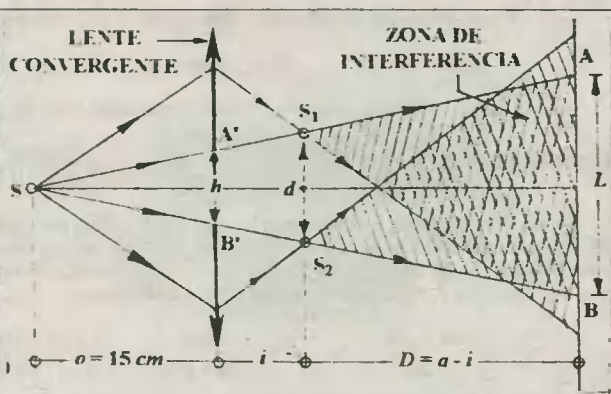
$$\therefore \boxed{d_{\min} = 0,24 \mu\text{m}}$$

41.13. Los rayos reflejados 1 y 2 tendrán un mínimo (franja) si se verifica la relación:

$$2nh - \lambda/2 = k\lambda$$

donde para cada h existe un k , siendo éste el orden de la franja. Luego:

$$\Delta h = \lambda/2n \dots (1)$$



Y del esquema se reconoce la posición x de cada franja de interferencia sobre la cuña.

$$h = x \cdot \operatorname{tg} \alpha \approx x \alpha \Rightarrow x = h/\alpha$$

Luego, la distancia entre franjas viene dada por: $\Delta x = \Delta h/\alpha \dots (2)$

Reemplazando (1) en (2): $\Delta x = \frac{\lambda}{2n\alpha} \Rightarrow \Delta x = \frac{600 \text{ nm}}{2(1,54) \cdot 2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}} \therefore \Delta x \approx 9,7 \text{ mm}$

41.14. Por tratarse de una interferencia por reflexión, utilizaremos directamente la relación (41.12) para determinar el radio R de la cara convexa de la lente, conociéndose que el anillo brillante es de orden $k=4$, su radio $r_k = 4,5 \text{ mm} = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, el índice de refracción de la sustancia en la holgura es $n = 1$ (aire), y $\lambda = 520 \text{ nm} = 5,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, tendremos:

$$r_k^2 = \frac{(2k-1)\lambda R}{2n} \Rightarrow R = \frac{2nr_k^2}{(2k-1)\lambda} = \frac{2 \cdot 1 \cdot (4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{(2 \cdot 4 - 1) \cdot 5,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \therefore R \approx 11,13 \text{ m}$$

41.15.a. De acuerdo con los datos se tiene: $\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$; $d = 0,6 \text{ mm} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$; $n = 4$ (orden), y $D = 2 \text{ m}$. Luego, procederemos a calcular $\operatorname{sen} \theta$ utilizando la relación (41.13).

$$d \cdot \operatorname{sen} \theta = n\lambda \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = n\lambda/d = 4 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \text{ m} / 6 \cdot 10^{-4} \text{ m} \therefore \operatorname{sen} \theta = 4 \cdot 10^{-3}$$

41.15.b. Y ahora, para el cálculo de la posición de esta franja oscura utilizaremos la relación (41.14).

$$y = n\lambda D/d = 4 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot 2 \text{ m} / 6 \cdot 10^{-4} \text{ m} \therefore y = 8 \text{ mm}$$

41.16. Sean d y θ la anchura de la rendija y la dirección en la cual se ubican las franjas oscuras de interferencia que coinciden en posición. Además, por los datos se tiene: $\lambda_1 = ?$; $n_1 = 3$ (orden), $\lambda_2 = 480 \text{ nm}$; $n_2 = 4$ (orden). Luego, utilizando la relación (41.13) tendremos:

$$d \operatorname{sen} \theta = n_1 \lambda_1 = n_2 \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = (n_2/n_1) \lambda_2 = (4/3) \cdot 480 \text{ nm} \therefore \lambda_1 = 640 \text{ nm}$$

41.17. En virtud de que el foco luminoso F se encuentra bastante alejado de la rendija, los rayos llegarán paralelamente a él, por lo que la mancha luminosa debería tener el ancho $AB = d$, pero debido a la difracción en los bordes, los rayos se desvían el ángulo θ , tal como se indica, de modo que la mancha luminosa se extiende desde C hasta D , que son los lugares en donde se presentan los primeros mínimos (oscuridad). Para la ubicación de estos mínimos utilizaremos la relación (41.13), en la cual haremos $n = 1$.

$$\Rightarrow d \operatorname{sen} \theta = n\lambda = \lambda$$

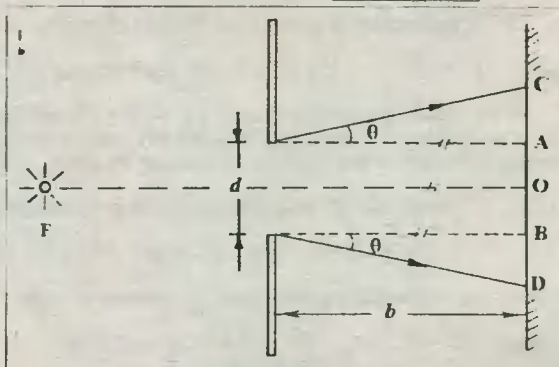
Pero: $\operatorname{sen} \theta \approx AC/b \Rightarrow AC \approx b\lambda/d$

Luego: $OC = OA + AC \approx d/2 + b\lambda/d \Rightarrow CD = 2OC \Rightarrow CD \approx d + 2b\lambda/d$

$$\Rightarrow CD = 4,5 \text{ mm} + 2 \cdot 6,75 \text{ m} \cdot 500 \cdot 10^{-9} \text{ m} / 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \therefore CD \approx 6 \text{ mm}$$

41.18. Según el problema se conocen: $\lambda = 700 \text{ nm} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$; $n = 2$ (orden de la franja luminosa), $\theta = 16^\circ$ (dirección en la cual debemos observar para apreciar la franja). Luego, utilizando la relación (41.15) despejaremos la distancia a entre rendijas.

$$a \operatorname{sen} \theta = n\lambda \Rightarrow a = \frac{n\lambda}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{7/25} \Rightarrow a = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$



Finalmente, la constante r de la red vendrá dada por la expresión:

$$r = 1/a = 1/5 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad \therefore \quad r = 200 \text{ líneas/mm}$$

41.19. Por los datos reconocemos que $r = 100 \text{ líneas/mm}$; $a = 1/r = 10^{-5} \text{ m}$; $n = 4$; $y = 14 \text{ cm}$; $D = 25 \text{ cm}$. Con esta información elaboramos el esquema adjunto, de donde obtenemos la medida de θ .

$$\text{tg} \theta = 14 \text{ cm} / 48 \text{ cm} = 7/24 \Rightarrow \theta = 16^\circ$$

Luego, aplicando la relación (41.15) tendremos:

$$a \text{sen} \theta = n \lambda \Rightarrow 10^{-5} \text{ m} \cdot 7/25 = 4 \lambda$$

$$\therefore \quad \lambda = 7 \,000 \text{ \AA}$$

41.20. Sea a la distancia entre los hilos, el mismo que hará las veces de la distancia entre rendijas en la red (pañuelo). También, se sabe que: $\lambda = 5 \,890 \text{ \AA} = 589 \cdot 10^{-9} \text{ m}$; $D = 2,5 \text{ m}$; $y = 0,50 \text{ cm} / 2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, y $n = 1$. Luego, utilizando la relación (41.4) tendremos:

$$y = n \lambda D / a \Rightarrow a = n \lambda D / y$$

$$\Rightarrow a = 1.589 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m} / 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \therefore \quad a = 0,589 \text{ nm}$$

41.21. Utilizando la relación (41.15) tendremos que n y $\text{sen} \theta$ son directamente proporcionales entre sí, de modo que n será máximo si y solo si $\text{sen} \theta$ es máximo. Además, reconocemos que $\lambda = 5 \,000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$; $r = 500 \text{ líneas/mm}$; $a = 1/r = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Luego, tendremos:

$$n \lambda = a \text{sen} \theta \Rightarrow n_{\text{máx}} \cdot \lambda = a (\text{sen} \theta)_{\text{máx}} \Rightarrow n_{\text{máx}} \cdot 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 1 \quad \therefore \quad n_{\text{máx}} = 4$$

41.22. Utilizando directamente la Ley de Brewster tendremos que el ángulo i de incidencia que genera la polarización viene dado así:

$$\text{tgi} = n = 4/3 \quad \therefore \quad i = 53^\circ$$

41.23. Reconociendo que la polarización por reflexión se produce en el instante en que los rayos reflejado (RR) y refractado (RR') se orientan perpendicularmente entre sí, luego, del esquema adjunto planteamos:

$$i + r' = 90^\circ \Rightarrow \text{sen} r' = \text{cos} i \dots (1)$$

Y aplicando la Ley de Snell:

$$n_1 \cdot \text{sen} i = n_2 \cdot \text{sen} r' \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$\text{sen} i / \text{cos} i = n_2 / n_1 \Rightarrow \text{tgi} = 2/1,5 = 4/3$$

$$\therefore \quad i = 53^\circ$$

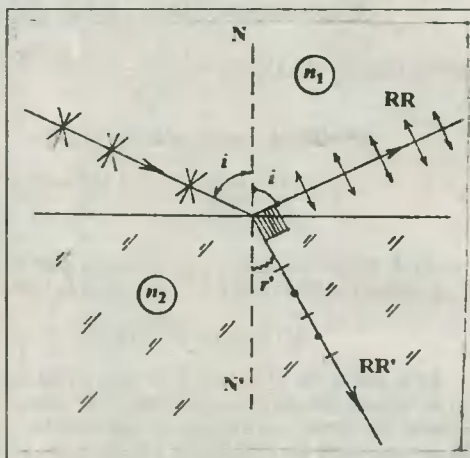
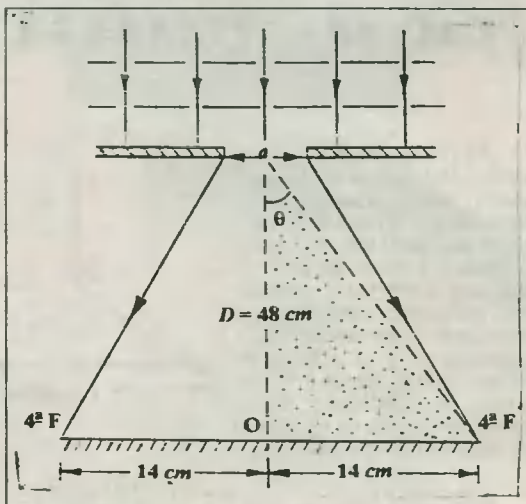
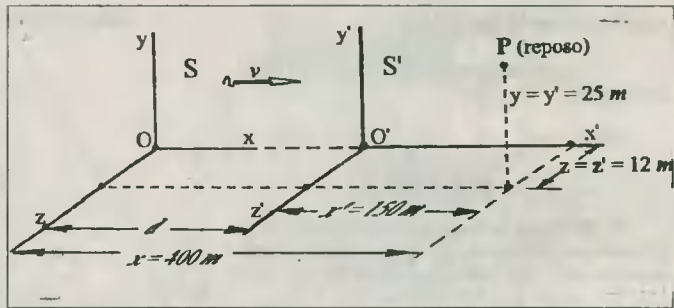


Fig. Solución Prob. 41.23

CAP 42 TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

42.1. De acuerdo con los datos se ha elaborado el esquema adjunto, en el cual podemos apreciar que el punto P se mantiene en reposo con relación al sistema S , y en movimiento con relación al sistema S' . Asimismo, podemos reconocer que el sistema S' se ha desplazado la distancia $d = x - x' = 250 \text{ m}$ en el intervalo de tiempo $t = 50 \text{ s}$. Luego, la velocidad v con la cual este sistema de referencia se desplaza estará dada por:



$$v = d/t = 250 \text{ m}/50 \text{ s} \quad \therefore \quad \boxed{v = 5 \text{ m/s}}$$

Observación. - Podemos determinar la velocidad v del sistema S' utilizando directamente la relación (42.1) de las transformaciones clásicas de Galileo.

$$x' = x - vt \Rightarrow 150 \text{ m} = 400 \text{ m} - v(50 \text{ s}) \quad \therefore \quad \boxed{v = 5 \text{ m/s}}$$

42.2. Utilizando los datos: $x = 3 \cdot 10^8 \text{ m}$, $y = z = 0$, $t = 5 \text{ s}$, $v_x = 0,8c$, y teniendo en cuenta que los ejes Y, Y' , así como Z y Z' se mueven paralelamente entre sí, y los ejes X y X' lo hacen colinealmente, entonces podemos utilizar las ecuaciones de transformación de Lorentz.

De las relaciones (42.2) y (42.3): $\boxed{y' = z' = 0}$

$$\text{De la relación (42.1): } x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} - 0,8(3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot 0,5 \text{ s}}{\sqrt{1 - (0,8c)^2/c^2}} \quad \therefore \quad \boxed{x' = -1,5 \cdot 10^8 \text{ m}}$$

Finalmente, de la relación (42.4):

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{5 \text{ s} - 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot (0,8 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) / (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}{\sqrt{1 - (0,8c)^2/c^2}} \quad \therefore \quad \boxed{t' = 7 \text{ s}}$$

42.3. Según los datos, reconocemos que la longitud propia de la barra en estado de reposo es L_0 , y cuando se mueve es $L = L_0 - 20/100 L_0 = 4/5 L_0$. Luego, aplicando la relación (42.5) tendremos:

$$4/5 L_0 = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} \Rightarrow 16/25 = 1 - (v/c)^2 \quad \therefore \quad \boxed{v = 3/5 c}$$

42.4. Dado que el lado CD es transversal al movimiento, éste no experimentará ningún cambio en su tamaño debido al movimiento de la placa, razón por la cual lo utilizaremos para relacionar los estados de reposo y de movimiento de aquella, y a su vez emplearemos la multiplicidad de la medida de este lado con los números 3 y 4. Así pues, le designamos un valor: $CD = 12k$. Luego, analizando sólo el cambio del lado AD (o BC) tendremos que este presenta una longitud propia $b_0 = 16k$, y cuando está en movimiento es $b = 9k$. Entonces, utilizando la relación (42.5) para calcular la velocidad v de la placa, tenemos:

$$b = b_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} \Rightarrow 9k = 16k \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

$$\Rightarrow 81/256 = 1 - (v/c)^2 \therefore v \approx 0,83c$$

42.5. De acuerdo con el esquema de la figura podemos decir que un fotón de luz que sale de la estrella en A debe recorrer la distancia de 4,2 años luz para ser vista en la Tierra. De ello deducimos que la luz emplea 4,2 años en llegar a nosotros.

Podemos apreciar también que cuando el fotón de luz llega a la Tierra, la estrella se encuentra en la posición B. Entonces, al observar por un telescopio astronómico de gran poder, lo que en realidad estamos apreciando de la estrella Alpha Centauri en la posición A es el lugar donde se encontraba, y como era ella hace 4,2 años. Por lo tanto:

Estamos observando su pasado

42.6. Teniendo en cuenta que 1 año luz = $ct = c(1 \text{ año})$, entonces deducimos que la distancia propia entre la Tierra y la estrella viene dada por: $d = 16 \text{ años luz} = 16c \text{ años}$.

Ahora, utilizando la relación para el MRU encontraremos el tiempo propio t_0 que dura el viaje para un observador fijo en Tierra.

$$d = vt \Rightarrow 16c \text{ años} = 0,8c t_0 \Rightarrow t_0 = 20 \text{ años}$$

a) Veamos ahora lo que ocurre para los tripulantes: Ellos observarán que la distancia que separa a la Tierra de la estrella viene dada por la relación (42.5).

$$d = d_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 16 \text{ años luz} \sqrt{1 - (0,8c/c)^2}$$

$$\therefore d \approx 9,6 \text{ años luz}$$

b) Luego, para los tripulantes el viaje tiene una duración que viene dada por:

$$t = d/v = 9,6c \text{ años} / 0,8c \therefore t = 12 \text{ años}$$

Observación. - Para los tripulantes han transcurrido 12 años desde que salieron de la Tierra hasta que llegaron a la estrella. Sin embargo, para los observadores de la Tierra, el viaje dura 20 años. Esto permite asegurar desde la Tierra que el tiempo transcurrió más lentamente en la nave espacial.

42.7. Resolvamos el problema eligiendo un observador fijo en la Tierra, dado que a ella la podemos considerar como un sistema de referencia inercial, y en base a ello aplicar las relaciones relativistas de tiempo y distancia.

1) Para el gemelo A, que se quedó en la Tierra, la nave que conduce al gemelo B emplea un tiempo Δt_0 en ir y volver, el cual tiene un valor que viene dado por la relación cinemática para el MRU.

$$\Delta t_0 = 2dlv = 2.39 \text{ años luz} / (12/13 c) = 78c \text{ años} / (12/13 c) \Rightarrow \Delta t_0 = 84,5 \text{ años}$$

Luego, la edad que tiene el gemelo A cuando el otro retorna a la Tierra viene dado por:

$$\text{Edad (A)} = 20 \text{ años} + 84,5 \text{ años} \therefore \text{Edad (A)} = 104,5 \text{ años}$$

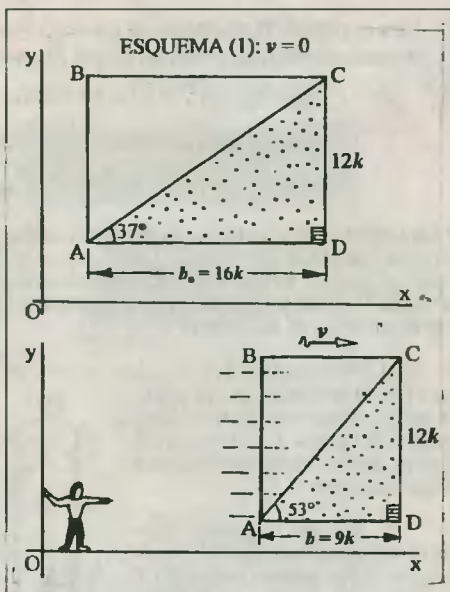


Fig. Solución Prob. 42.4

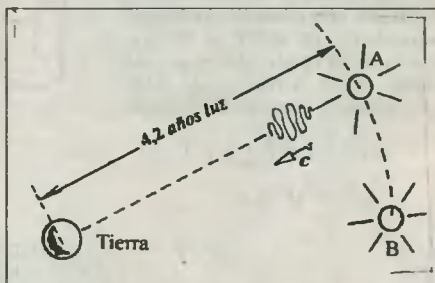


Fig. Solución Prob. 42.5

- 2) Para el gemelo B, el tiempo Δt transcurrido en su nave durante el viaje es menor (en virtud a su movimiento) que el tiempo propio Δt_0 medido por A; luego de la relación (42.6) tendremos:

$$\Delta t = \Delta t_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 84,5 \text{ años} \cdot \sqrt{1 - (12/13)^2} \Rightarrow \Delta t = 32,5 \text{ años}$$

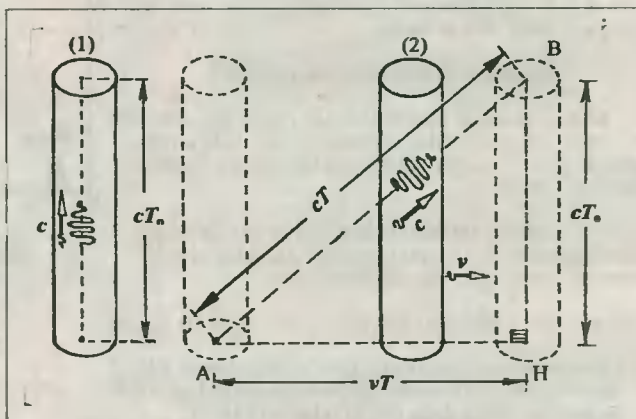
A continuación, diremos que la edad que presenta B al volver a la Tierra será:

$$\text{Edad (B)} = 20 \text{ años} + 32,5 \text{ años} \quad \therefore \quad \boxed{\text{Edad (B)} = 52,5 \text{ años}}$$

PARADOJA: "Para el gemelo B, su nave está en reposo, y quien se mueve respecto a él es la Tierra, con una velocidad $v = 12/13 c$. Luego, opina que al volver la Tierra a él, han transcurrido 84,5 años, y para el gemelo A que viaja con la Tierra sólo pasaron 32,5 años". ¿Cuál de los dos gemelos tiene la razón?? Esta paradoja la puedes resolver respondiendo esta pregunta: ¿Es la nave que conduce a B un sistema de referencia inercial?.

42.8. De acuerdo con el esquema (1) reconocemos que el pulso de luz que viaja con la velocidad c emplea el tiempo T_0 para recorrer el tubo, de modo que esta longitud viene dada por: cT_0 .

Cuando el reloj se desplaza horizontalmente con la velocidad v , la luz emplea el tiempo T para recorrer el mismo tubo. Sin embargo, ella que viaja ahora en la dirección AB presenta la misma velocidad c , en virtud al 2^{do} postulado de la relatividad especial. Luego, en el Δ rectángulo AHB aplicamos el Teorema de Pitágoras.



$$(cT)^2 = (vT)^2 + (cT_0)^2$$

$$(c^2 - v^2)T^2 = c^2 T_0^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{6 \cdot 10^{-9} \text{ s}}{\sqrt{1 - (5/13)^2}} \quad \therefore \quad \boxed{T = 6,5 \cdot 10^{-9} \text{ s}}$$

Observación. - Los pulsos de luz emplean mayor tiempo cuando el reloj se mueve; esto se interpreta como un atraso del tiempo para un observador en reposo, el cual considerará que el tiempo se dilata en el reloj en movimiento.

42.9.a. Para el observador que viaja en la nave 2, el reloj de la nave 1 se encuentra en reposo, dado que su velocidad relativa es nula. Luego, los relojes en ambas naves marcan el mismo paso del tiempo.

$$\therefore \quad \boxed{\Delta T_{(2)} = \Delta T_{(1)} = 8 \text{ h}}$$

42.9.b. Para un observador en reposo en la Tierra, el tiempo ΔT_0 medido viene dado por la relación (42.6).

$$\Delta T_0 = \frac{\Delta T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{8 \text{ h}}{\sqrt{1 - (0,6c/c)^2}} \quad \therefore \quad \boxed{\Delta T_0 = 10 \text{ h}}$$

Observación. - Mientras que para un tripulante de la nave el suceso dura 8 h, para un observador en reposo en la Tierra el suceso tiene una duración de 10 h.

42.10.a. De ser falso que el tiempo se dilata, los piones se desintegrarían "casi" automáticamente,

dado que su tiempo de vida media es muy corto. Sin embargo, debido que al viajar con una gran velocidad, su tiempo de vida se dilata; ello le permite desplazarse aún la distancia x durante la prolongación de su vida. Utilizando los datos: $T = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ s}$; $v = 0,6c$, emplearemos la relación (42.6) para calcular el tiempo T_0 de vida media para un observador en reposo en el laboratorio.

$$T_0 = \frac{T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1,8 \cdot 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1 - (0,6c/c)^2}} \quad \therefore \quad T_0 = 2,25 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

42.11.b. Y ahora encontraremos la distancia x que recorre el pión, empleando la relación cinemática del MRU.

$$x = vT_0 = 0,6cT_0 = 0,6 \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot 2,25 \cdot 10^{-8} \text{ s} \quad \therefore \quad x = 4,05 \text{ m}$$

42.11.a. Cuando se mueven en la misma dirección.- Los móviles tienen una velocidad relativa que viene dada por la relación (42.7).

$$v_{1/2} = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 \cdot v_2/c^2} = \frac{0,8c - 0,6c}{1 - 0,8c \cdot 0,6c/c^2} \quad \therefore \quad v_{1/2} \approx 0,38c$$

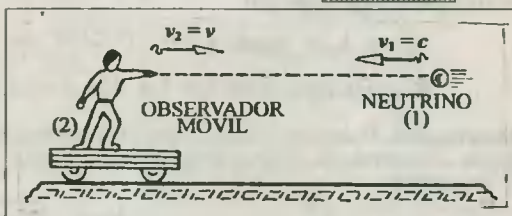
42.11.b. Cuando se mueven en direcciones opuestas y al encuentro.- La velocidad relativa de los móviles viene dada por la relación (42.8).

$$v_{1/2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 \cdot v_2/c^2} = \frac{0,8c + 0,6c}{1 + 0,8c \cdot 0,6c/c^2} \quad \therefore \quad v_{1/2} \approx 0,95c$$

42.11.c. Cuando se mueven en direcciones perpendiculares.- Utilizaremos la relación (42.9) para el cálculo de la velocidad relativa.

$$v_{1/2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - (v_1 \cdot v_2/c)^2} = \sqrt{(0,8c)^2 + (0,6c)^2 - (0,8c \cdot 0,6c/c)^2} \quad \therefore \quad v_{1/2} \approx 0,88c$$

42.12. De acuerdo con los datos tenemos: $v_1 = c$, $v_2 = v$, y moviéndose en direcciones opuestas, y según estas condiciones vemos que es necesario aplicar directamente la relación (42.8) para encontrar la velocidad de (1) respecto a (2).



$$v_{1/2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 \cdot v_2/c^2} = \frac{c + v}{1 + c \cdot v/c^2}$$

$$\Rightarrow v_{1/2} = \left(\frac{c + v}{c + v}\right)c \quad \therefore \quad v_{1/2} = c$$

Observación.- Este resultado es independiente de la velocidad con la cual se mueve el observador.

42.13. De los datos se tiene que: $v_1 = 1\,800 \text{ km/h}$; $v_2 = 2\,700 \text{ km/h}$; y $c = 300\,000 \text{ km/s}$. Luego, utilizando la relación (42.8) obtendremos la velocidad relativa de 1 respecto a 2.

$$v_{1/2} = \frac{(1\,800 + 2\,700) \text{ km/h}}{1 + \frac{(1\,800 \cdot 2\,700) (\text{km/h})^2}{(300\,000)^2 (\text{km/s})^2}} = \frac{4\,500 \text{ km/h}}{1 + 4,166 \cdot 10^{-12}} \Rightarrow v_{1/2} \approx 4\,499,99 \text{ km/h}$$

42.14. Designemos por 1 al observador ubicado en el sistema S' , y por 2 al móvil visto desde los sistemas S y S' . Luego, de acuerdo con estas designaciones y los datos proporcionados, las velocidades quedarán así:

$$v_1 = v_x = 0,8c; \quad v_{2/1} = v_x' = 0,5c$$

Ahora, utilizando la relación (42.7) despejaremos la velocidad del cuerpo 2 vista desde el sistema en reposo S.

$$v_{2/1} = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 \cdot v_2 / c^2} \Rightarrow 0,5c = \frac{0,8c - v_2}{1 - 0,8c \cdot v_2 / c^2}$$

$$\therefore \boxed{v_2 = 0,5c}$$

42.15. Calcularemos en primer lugar la velocidad relativa (v') de A respecto a B, para lo cual utilizaremos la relación (42.8).

$$v' = v_{A/B} = \frac{v_A + v_B}{1 + v_A \cdot v_B / c^2}$$

$$= \frac{2 \cdot (0,6c)}{1 + 0,6c \cdot 0,6c / c^2}$$

$$\therefore \boxed{v' \approx 0,88c}$$

Ahora, calcularemos la longitud aparente L de la regla A con respecto a B, siendo su longitud propia $L_0 = 1 \text{ m}$. Entonces, por la relación (42.5) tendremos:

$$L = 1 \text{ m} \cdot \sqrt{1 - (0,88c/c)^2} \quad \therefore \boxed{L \approx 0,48 \text{ m}}$$

42.16. Reconociendo que las dimensiones transversales a la dirección del movimiento no experimentan ningún cambio, diremos que el volumen del sólido cuando se encuentra en movimiento viene dado por:

$$V = a_o \cdot b_o \cdot h, \text{ donde } h = h_o \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \Rightarrow V = a_o \cdot b_o \cdot h_o \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \dots (*)$$

$$\text{Reemplazando datos: } V = 3 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} \cdot \sqrt{1 - (\sqrt{3}/2)^2} \quad \therefore \boxed{V = 30 \text{ m}^3}$$

Observación. - Debemos reconocer que el volumen propio del sólido viene dado por: $V_o = a_o \cdot b_o \cdot h_o$. Luego, al sustituir en (*) encontramos una expresión para la contracción relativista del volumen de un cuerpo:

$$V = V_o \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

42.17. A partir de la relación de densidad: $d = m/V$, y utilizando las relaciones (42.10) para la masa (m) y la obtenida para el volumen en el problema anterior tendremos:

$$d = \frac{m_o \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{V_o \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_o}{V_o} \cdot \frac{1}{(1 - v^2/c^2)} \quad \therefore d = \frac{d_o}{1 - v^2/c^2} \Rightarrow 4 \text{ g/cm}^3 = \frac{3 \text{ g/cm}^3}{1 - v^2/c^2}$$

$$\Rightarrow 1 - v^2/c^2 = 3/4 \Rightarrow v/c = 1/2 \quad \therefore \boxed{v = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$$

42.18. Por los datos reconocemos que: $E_o = 495 \text{ MeV}$, y $E_c = 330 \text{ MeV}$. Luego, procedemos a calcular:

a) La energía total del mesón, utilizando la relación (42.15), de la cual despejamos E_T .

$$E_T = E_o + E_c = 495 \text{ MeV} + 330 \text{ MeV} \quad \therefore \boxed{E_T = 825 \text{ MeV}}$$

b) La masa en reposo, encontraremos utilizando al relación (42.11) para la energía en reposo, de donde despejamos m_o .

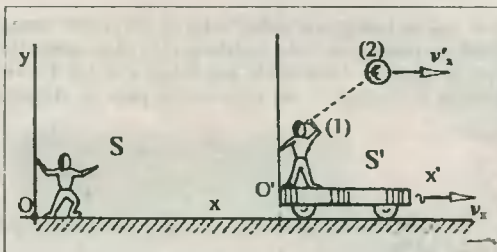


Fig. Solución Prob. 42.14

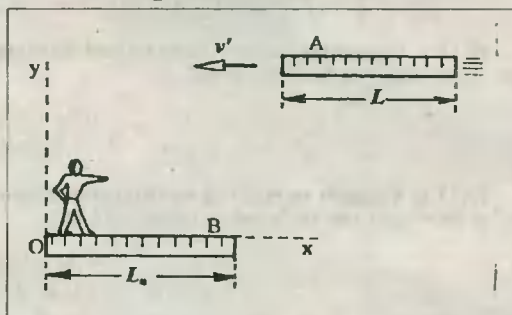


Fig. Solución Prob. 42.15

$$m_0 = E_0/c^2 = 495(1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J})(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \quad \therefore \quad m_0 = 8,8 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

c) La velocidad (v) del mesón, la que obtendremos calculando primero la masa (m) del mesón en movimiento, empleando para ello la relación (42.12), y a continuación utilizaremos la relación (42.10), de la cual despejaremos v .

$$m = E_T/c^2 = 825(1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J})(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \Rightarrow m = 14,7 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

$$\text{Luego: } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0}{m} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{8,8 \cdot 10^{-28} \text{ kg}}{14,7 \cdot 10^{-28} \text{ kg}}\right)^2 \quad \therefore \quad v = 0,8c$$

d) Para el cálculo del tiempo de vida media relativa a un observador en reposo, cuando los mesones se encuentran en movimiento, éste viene dado por la relación (42.6).

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1 - (0,8c/c)^2}} \quad \therefore \quad \Delta t_0 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

42.19. De acuerdo con los datos se tiene: $E_c = 35 \text{ MeV}$, $E_0 = 140 \text{ MeV}$. Luego, podemos calcular la masa en reposo (m_0) y la masa en movimiento (m) en base a las relaciones (42.11) y (42.12).

$$\frac{m}{m_0} = \frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{E_T}{E_0} = \frac{E_c + E_0}{E_0} = \frac{35 + 140}{140} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = 5 \dots (*)$$

$$\text{Ahora, de la relación (42.10) observamos que: } \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \dots (**)$$

Finalmente, de la relación (42.6), de (*) y de (**) diremos que: $\Delta t_0 = 5\Delta t$

\therefore **El tiempo de vida media del pión se ha quintuplicado**

42.20. Utilizando la relación obtenida en el problema anterior, tendremos:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{E_c + E_0}{E_0} = \frac{48 \text{ MeV} + 720 \text{ MeV}}{720 \text{ MeV}} \quad \therefore \quad \frac{m}{m_0} = 16$$

42.21. A partir de los datos tenemos: $E_c = 10^9 \text{ J}$, y $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Luego, calcularemos la energía en reposo del protón utilizando para ello la relación (42.11).

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \Rightarrow E_0 = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Seguidamente, empleamos el mismo procedimiento del problema anterior.

$$\frac{m}{m_0} = \frac{E_c + E_0}{E_0} = \frac{10^9 \text{ J} + 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{1,5 \cdot 10^{-10} \text{ J}} \quad \therefore \quad \frac{m}{m_0} \approx 7,67$$

42.22. Según condición del problema se tiene que:

$$E_T = 11E_0 \Rightarrow E_c + E_0 = 11E_0 \Rightarrow E_c = 10E_0$$

Y según la relación (42.11) tendremos:

$$E_c = 10m_0 \cdot c^2 = 10,9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \Rightarrow E_c = 8,19 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Ahora, recordando que en un campo electromagnético uniforme se verifica que el trabajo eléctrico del campo que comunica una energía cinética (E_c) a un electrón viene dado por qV , siendo q la carga del electrón, y V la diferencia de potencial, de modo que:

$$qV = E_c \Rightarrow V = E_c/q = 8,19 \cdot 10^{-13} \text{ J} / 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad \therefore \quad \boxed{V = 5,1 \text{ kV}}$$

42.23. De acuerdo con la relación (42.15) se tiene que la energía cinética viene dada por:

$$E_c = E_T - E_o = mc^2 - m_o c^2 = (m - m_o)c^2 \dots (*)$$

Ahora, utilizamos la relación (42.10) para la masa relativista, y la reemplazamos en (*).

$$E_c = \left[\frac{m_o}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - m_o \right] c^2 = \{ [1 - (v/c)^2]^{-1/2} - 1 \} m_o c^2 \dots (\alpha)$$

Es en esta parte de la demostración en la cual debemos utilizar la siguiente aproximación:

$$[1 - (v/c)^2]^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} (v/c)^2 \Leftrightarrow v/c \ll 1 \dots (\beta)$$

Seguidamente, sustituimos (\beta) en (\alpha), y obtenemos:

$$E_c = (1 + \frac{1}{2} v^2/c^2 - 1) m_o c^2 = \frac{1}{2} m_o v^2 c^2/c^2 \quad \therefore \quad \boxed{E_c = \frac{1}{2} m_o v^2 \text{ (Lqud)}}$$

42.24. Según condición del problema se establece que:

$$E_c = E_o \Rightarrow E_T - E_o = E_o \Rightarrow E_T = 2E_o \dots (*)$$

Y utilizando las relaciones (42.11) y (42.12) en (*) encontramos:

$$mc^2 = 2m_o c^2 \Rightarrow m = 2m_o \dots (**)$$

Finalmente, emplearemos la relación (42.10) para la masa relativista, que al sustituirla en (*) obtendremos la velocidad (v) de la partícula.

$$\frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2m_o \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \quad \therefore \quad \boxed{v = \frac{\sqrt{3}}{2} c}$$

42.25. Según los datos podemos reconocer que la energía total en 10 g de carbón viene dada por la relación (42.12), en la cual $m = 10 \text{ g} = 10^{-2} \text{ kg}$ (masa en reposo).

$$E_T = mc^2 = 10^{-2} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \quad \therefore \quad \boxed{E_T = 9 \cdot 10^{14} \text{ J}}$$

Ahora, haciendo uso de una regla de tres simple encontraremos la energía desprendida por combustión.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ g} \longrightarrow 7 \text{ kcal} = 2,93 \cdot 10^4 \text{ J} \\ 10 \text{ g} \longrightarrow E' \end{array} \right\} E = 2,93 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot 10 \text{ g} / 1 \text{ g} \Rightarrow E' = 2,94 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Finalmente, encontramos la relación en la cual se encuentran la energía total y la energía por combustión.

$$E_T/E' = 9 \cdot 10^{14} \text{ J} / 2,93 \cdot 10^5 \text{ J} \quad \therefore \quad \boxed{E_T/E' \approx 3 \cdot 10^9}$$

42.26. A partir de la relación (42.17) tendremos:

$$E = c\sqrt{(m_o c)^2 + P^2} \Rightarrow (mc^2)^2 = c^2[(m_o c)^2 + P^2] \Rightarrow m^2 c^2 = m_o^2 c^2 + P^2 \Rightarrow P = \sqrt{m^2 - m_o^2} \cdot c$$

$$\text{Y reemplazando valores: } P = \sqrt{(5 \cdot 10^{-3} \text{ kg})^2 - (3 \cdot 10^{-3} \text{ kg})^2} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \therefore \quad \boxed{P = 1,2 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

42.27. Utilizando el Teorema del Trabajo y la Energía Cinética podemos establecer que el bloque experimenta un aumento en su energía (ΔE) que viene dado por:

$$\Delta E = W = Fd \cos 37^\circ = 45 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} \cdot 4/5 \Rightarrow \Delta E = 180 \text{ J}$$

Luego, utilizando la relación (42.14) encontraremos el cambio relativístico experimentado por la masa del bloque, producido por el incremento de su energía.

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = 180 \text{ J}/(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \quad \therefore \quad \Delta m = 2 \cdot 10^{-7} \text{ kg}$$

Observación. - Este aumento de masa, por el orden de su magnitud, pasa desapercibido.

42.28. Analizando el equilibrio del sistema bloque - resorte, encontramos que el peso del bloque es equilibrado por la fuerza restauradora del resorte. Luego:

$$F_i = P \Rightarrow kx = Mg \Rightarrow x = \frac{Mg}{k} = \frac{3,6 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2}{4 \cdot 10^3 \text{ N/m}} \Rightarrow x = 9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Luego, en base a la deformación del resorte encontraremos el aumento producido en su energía potencial elástica.

$$\Delta E = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^3 \text{ N/m} (9 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \Rightarrow \Delta E = 0,162 \text{ J}$$

Finalmente, utilizando la relación (42.14) encontraremos el incremento que experimentó la masa del resorte.

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = 0,162 \text{ J}/(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \quad \therefore \quad \Delta m = 1,8 \cdot 10^{-14} \text{ kg}$$

42.29. Calculemos el aumento de energía del agua debido a la absorción de calor, el mismo que produce la elevación de temperatura $\Delta T = 100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 80^\circ\text{C}$. Utilizando entonces la relación para el calor sensible tendremos:

$$\Delta E = m \cdot C_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta T = 200 \text{ g} \cdot 1 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C} \cdot 80^\circ\text{C} \Rightarrow \Delta E = 16 \text{ 000 cal} = 6,7 \cdot 10^4 \text{ J}$$

A continuación calcularemos el incremento de masa, utilizando la relación (42.14).

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = 6,7 \cdot 10^4 \text{ J}/(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \quad \therefore \quad \Delta m = 7,5 \cdot 10^{-13} \text{ kg}$$

42.30. Recordando que la energía de un fotón está dado indistintamente por las relaciones (42.12) y (42.19). Lo que haremos es igualar dichas expresiones.

$$E = mc^2 = hf \Rightarrow m = hf/c^2$$

Reemplazando datos encontraremos la masa en movimiento del fotón.

$$m = (6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}) \cdot 7,2 \cdot 10^{14} \text{ Hz}/(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \quad \therefore \quad m = 5,3 \cdot 10^{-36} \text{ kg}$$

Observación. - Es debido a la existencia de esta masa inercial de la luz que ella puede verse afectada por poderosos campos gravitatorios, lo que justifica la deflexión de la luz al pasar cerca de la superficie de las estrellas.

$$42.31. \text{ Utilizando la relación (42.21) tendremos: } v = \frac{at}{\sqrt{1 - a^2 t^2/c^2}} \Rightarrow v^2(1 - \frac{a^2 t^2}{c^2}) = a^2 t^2$$

$$\Rightarrow v^2 = (\frac{v^2}{c^2} + 1)a^2 t^2 \Rightarrow t = \frac{v}{a \cdot \sqrt{1 + v^2/c^2}}$$

$$\text{Reemplazando datos: } t = \frac{(3/4) \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{10^2 \text{ m/s}^2 \cdot \sqrt{1 + (3/4)^2}} \quad \therefore \quad t = 1,8 \cdot 10^6 \text{ s} = 2 \text{ días, } 2 \text{ h}$$

42.32. Haciendo uso de la relación (42.20) para la frecuencia relativista, tendremos:

$$f = \left(\frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) f_0 \Rightarrow \sqrt{1 - (v/c)^2} = (1 - v/c) f_0 / f \dots (*)$$

Y ahora, hacemos un cambio de variable, de modo que: $v/c = x$. Luego, reemplazando en (*), así como colocando los valores correspondientes de las frecuencias, tendremos:

$$\sqrt{1 - x^2} = (1 - x) \cdot 5/3 \Rightarrow 1 - x^2 = 25/9 (1 - x)^2$$

De donde, luego de resolver se obtiene un único valor físicamente aceptable: $x = 8/17$.

$$\Rightarrow v/c = 8/17 \quad \therefore \boxed{v = 8/17 c}$$

42.33. En primer lugar, calcularemos la velocidad relativa $v_{2/1}$ de la fuente (2) con respecto al observador (1), para lo cual utilizaremos la relación (42.7).

$$v_{2/1} = \frac{v_2 - v_1}{1 - v_1 v_2 / c^2} = \frac{3/4 c - 1/2 c}{1 - 3/4 c \cdot 1/2 c / c^2} \Rightarrow v_{2/1} = 2/5 c$$

A continuación encontraremos la frecuencia percibida por el observador (considerado fijo), aplicando para ello la relación (42.20).

$$f = \left(\frac{1 - \frac{2/5 c}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2/5 c}{c}\right)^2}} \right) f_0 \quad \therefore \boxed{f \approx 0,65 f_0}$$

Problemas Propuestos

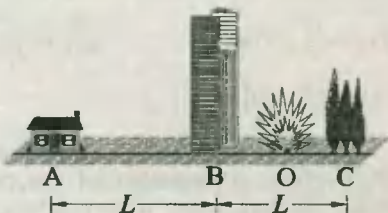
MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

1. Las partículas 1 y 2 desarrollan velocidades constantes \bar{v}_1 y \bar{v}_2 . Sus vectores posición inicial son iguales a \bar{r}_1 y \bar{r}_2 . ¿Con qué relación entre estos cuatro vectores las partículas chocarán inevitablemente?

- A) $(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) / (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = 1$
 B) $(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = 1$
 C) $(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) / |\bar{r}_1 - \bar{r}_2| = (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) / |\bar{v}_2 - \bar{v}_1|$
 D) $(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) / |\bar{r}_1 + \bar{r}_2| = (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) / (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$
 E) N.A.

2. Tres micrófonos, situados en una recta en los puntos A, B y C, registraron en los instantes $t_A = 6:03$; $t_B = 6:02$; $t_C = 6:01$; el sonido de cierta explosión que ocurrió en el punto O contenido en AC. Hállese la distancia AO, si $AB = BC = L$. El momento de la puesta en marcha del reloj no corresponde al momento de la explosión.

- A) L
 B) $1,5L$
 C) $\frac{5}{3}L$
 D) $1,8L$
 E) $2L$



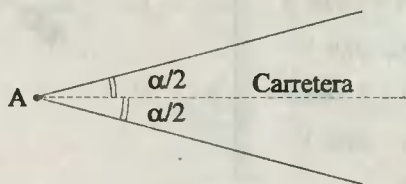
3. Unos deportistas corren formando una columna de longitud L con la misma velocidad v . Al encuentro de la columna corre el entrenador a la velocidad u ($u < v$). Cada uno de los deportistas, al encontrarse con el entrenador, da la vuelta y corre hacia atrás con la misma rapidez v . ¿Qué longitud tendrá la columna cuando todos los deportistas den la vuelta?

- A) $L v/u$ D) $L(v-u)/(v+u)$
 B) $L u/v$ E) $L(v+u)/(v-u)$
 C) $L(u-v)/v$

4. Un submarino que va sumergiéndose uniformemente emite impulsos sonoros con intervalos de tiempo $T_0 = 3s$. Los impulsos reflejados del fondo se perciben con intervalos de tiempo $T = 1s$. La velocidad del sonido en el agua es v_s . ¿Con qué velocidad v va sumergiéndose el submarino?

- A) $v_s/2$ B) $v_s/3$ C) $v_s/4$
 D) $2v_s/3$ E) $2v_s/5$

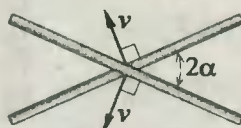
5. Por una carretera recta se mueve un autobús y Ud. puede correr con una velocidad dos veces menor que la del autobús. Ud. vió el autobús en el punto A. ¿Desde qué zona definida por el ángulo α y en las proximidades de la carretera .tendrá tiempo para tomar el autobús?



- A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) N.A.

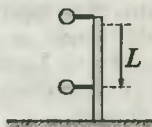
6. Dos barras se cruzan bajo el ángulo 2α se mueven con iguales velocidades y perpendiculares a sí mismas. ¿Cuál será la rapidez del punto de cruce de las barras?

- A) $u = v \text{ sen } \alpha$
 B) $u = v \text{ sen}^2 \alpha$
 C) $u = v \text{ cos } \alpha$
 D) $u = \frac{v}{\text{cos } \alpha}$
 E) $u = \frac{v}{\text{sen } \alpha}$



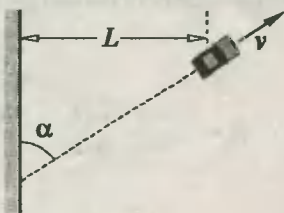
7. Un avión supersónico vuela horizontalmente. Dos micrófonos, que están en reposo a una distancia L el uno del otro y en la misma vertical, han registrado la llegada del sonido del supersónico con un intervalo T . La velocidad del sonido en el aire es v_s . ¿Qué velocidad desarrollaba el avión supersónico al sobrevolar los micrófonos?

- A) $v_s L / (L - v_s T)$
- B) $v_s (L + v_s T) / L$
- C) $v_s L / T^2$
- D) $v_s L / \sqrt{L^2 - v_s^2 T^2}$
- E) $v_s (L - v_s T) / (L + v_s T)$



8. Un automóvil se aleja a la velocidad v de una pared larga bajo cierto ángulo α respecto a ella. Cuando la distancia hasta la pared era $L = 247,5m$; el automóvil dio una señal sonora corta. ¿Qué distancia en metros recorrerá el automóvil hasta el momento que el chofer oiga el eco? La velocidad del sonido en el aire es: $v_s = 10v$; $\alpha = 37^\circ$

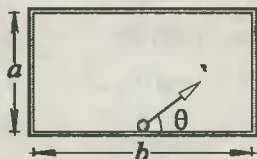
- A) $3(1 + 2\sqrt{69})$
- B) $5(2 + \sqrt{69})$
- C) $4(1 + 3\sqrt{69})$
- D) $2(1 + \sqrt{69})$
- E) N.A.



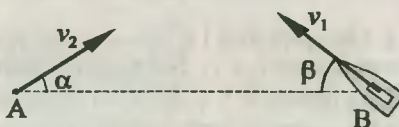
9. En un billar de barandas a y b , se lanza una bola desde el centro del lado b . ¿Para qué ángulos θ ella vuelve al mismo punto de la baranda del que empezó su movimiento?

Nota.- $m, n \in \mathbb{Z}$

- A) $\cos \theta = 2ma / 3b$
- B) $\sen \theta = 2a / b$
- C) $\operatorname{tg} \theta = \frac{2ma}{nb}$
- D) $\cos \theta = 3ma / 2nb$
- E) $\sen \theta = 2na / b$



10. Un torpedo es lanzado desde el punto A en el instante en que el barco enemigo se encuentra en el punto "B" y navega con velocidad $v_1 = 70 \text{ km/h}$ dirigida formando el ángulo $\beta = 37^\circ$ con la línea AB. La velocidad del torpedo es $v_2 = 150 \text{ km/h}$ ¿Bajo qué ángulo α hay que lanzarlo para que dé en el blanco?



- A) 45°
- B) 53°
- C) 37°
- D) 30°
- E) 16°

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

11. Los puntos A y B se encuentran el uno al otro a una distancia $L = 4 \text{ km}$. Del punto A en dirección al punto B salió un automóvil que durante todo el camino se movía uniformemente. Al mismo tiempo del punto B en dirección al punto A salió otro automóvil con velocidad inicial $v_0 = 32 \text{ m/s}$, que tenía una aceleración constante $a = 0,2 \text{ m/s}^2$ con la misma dirección del primer automóvil. Es sabido que en el camino los dos automóviles se cruzan dos veces. ¿Dentro de qué límites se encuentra la velocidad del primer automóvil?

- A) $v \in [7 ; 9] \text{ m/s}$
- B) $v \in \langle 8 ; 9 \rangle \text{ m/s}$
- C) $v \in \langle 7 ; 10 \rangle \text{ m/s}$
- D) $v \in \langle 8 ; 10 \rangle \text{ m/s}$
- E) $v \in [7 ; 9] \text{ m/s}$

12. Dos automóviles salen de las ciudades A y B, el uno al encuentro del otro, con velocidades y aceleraciones "a" de iguales valores. La aceleración del automóvil que salió de la ciudad A todo el tiempo tenía dirección hacia A y la del automóvil que salió de la ciudad B, hacia B. ¿Cuánto tiempo más tarde salió uno de estos automóviles si el tercer automóvil que iba todo el tiempo con velocidad constante v_1 presenció ambos encuentros de los dos primeros automóviles?

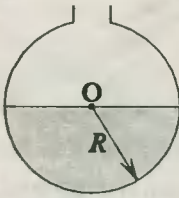
- A) $v_1 / 3a$
- B) $v_1 / 2a$
- C) $2v_1 / a$
- D) a / v_1^2
- E) $2a / v_1$

13. Un patinador recorre la distancia L con velocidad constante y luego frena con una aceleración a hasta detenerse. ¿En caso de qué velocidad el tiempo del movimiento del patinador será el mismo?

- A) $v = \sqrt{La}$ B) $v = \sqrt{2La}$ C) $v = \sqrt{3La}$
 E) $v = 3\sqrt{La}$ D) $v = 2\sqrt{La}$

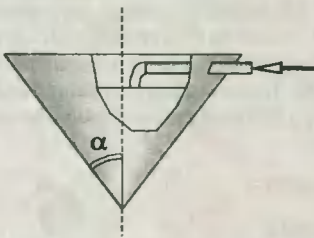
14. De un acuario de radio $R = 20 \text{ cm}$, que contiene agua hasta la mitad, de cada unidad de superficie se evapora por unidad de tiempo un volumen de líquido $q = 2 \text{ cm}^3/\text{cm}^2 \cdot \text{s}$. ¿Dentro de cuánto tiempo se evaporará el agua?

- A) 20 s
 B) 15 s
 C) 18 s
 D) 5 s
 E) 10 s

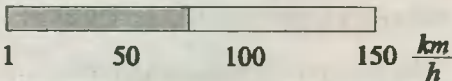


15. En un recipiente cónico el nivel de agua se eleva con una velocidad constante $v_0 = 3 \text{ mm/s}$. ¿Cómo depende del tiempo la velocidad de entrada del agua al recipiente por un orificio de sección $S = 48 \text{ mm}^2$? En el instante $t = 0$ el recipiente estaba vacío.

- A) πt^2
 B) $4\pi t^2$
 C) $5t^2$
 D) πt
 E) πt^3



16. La longitud de la escala del velocímetro es de 15 cm; el dispositivo mostrado mide la velocidad desde 0 hasta 150 km/h. Hállese la velocidad del indicador del velocímetro, si el automóvil se mueve con una aceleración de 2 m/s^2 .



- A) 1,00 cm/s B) 0,50 cm/s C) 0,72 cm/s
 D) 1,50 cm/s E) N.A.

17. El tiempo de salida de un tren eléctrico es a las 12:00. Su reloj muestra las 12 en punto, pero ante Ud. ya empieza a pasar el penúltimo vagón. Este tardó en pasar 10 s en tanto que el último vagón pasó ante Ud. en 8 s. El tren eléctrico partió a tiempo y se mueve de manera uniformemente acelerada. ¿En cuánto se atrasa su reloj?

- A) 16 s B) 31 s C) 42 s D) 17 s E) 27 s

18. Un niño está inflando un globo. Cuando el radio de éste tenía el valor de 10 cm la velocidad con que aumentaba el radio constituía 1 mm/s. ¿Qué volumen de aire por segundo expele el niño?

- A) 60,2 cm³/s B) 120,1 cm³/s C) 180,3 cm³/s
 D) 125,6 cm³/s E) N.A.

CAIDA LIBRE VERTICAL

19. De un mismo punto con velocidad v se lanzan bolas verticalmente hacia arriba con un intervalo de tiempo T . Dentro de cuánto tiempo, después de lanzar la segunda bola, ellas chocarán?

- A) $\frac{v}{g} - \frac{T}{2}$ B) $\frac{v}{g} + T$ C) $\frac{v}{2g} + T$
 D) $\frac{2v}{g} - \frac{T}{2}$ E) $\frac{v}{g} + \frac{T}{2}$

20. Durante el último segundo de caída libre sin velocidad inicial, un cuerpo recorre las 3/4 partes de todo su camino. ¿Cuánto tiempo tarda en caer dicho cuerpo?

- A) 1 s B) 2 s C) 10 s D) 6 s E) 8 s

21. ¿Durante qué tiempo un cuerpo que cae libremente sin velocidad inicial, recorre el n ésimo centímetro de su trayectoria.

- A) $\sqrt{\frac{2}{g}}$ D) $\sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$
 B) $\sqrt{\frac{2n}{g}}$ E) N.A.
 C) $\sqrt{2/g} (\sqrt{n-1})$

22. De una torre alta se lanzan dos cuerpos uno tras otro, con velocidades $v_0 = 8\text{ m/s}$, de igual valor. El primer cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba y pasando cierto tiempo $T = 1,5\text{ s}$, se tira el segundo verticalmente hacia abajo. Determinar la distancia entre ellos en el momento $t > T$.

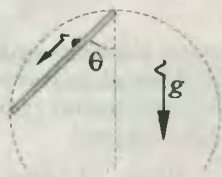
- A) $t^2 - t$ B) $5t^2 + t - 12$ C) $3t^2 + t - 10$
 D) $2t^2 - 3t + 10$ E) $4t^2 - 5t - 12$

23. Un hombre en un ascensor que se mueve con aceleración a , deja caer una bola de una altura H sobre el piso. Pasado un tiempo T del comienzo de la caída de la bola, la aceleración del ascensor cambia su sentido y después del lapso $2T$ la aceleración se hace igual a cero. Luego la bola toca el suelo. ¿A qué altura del suelo del ascensor salta la bola después del choque? Considerar el choque absolutamente elástico.

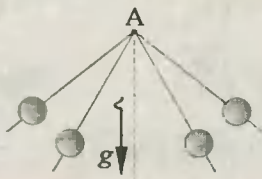
- A) $H - aT^2$ B) $H + aT^2/2$ C) $2H - aT^2$
 D) $(H - aT^2)/2$ E) N.A.

24. Una bola empieza a deslizarse sin fricción desde el punto superior de una circunferencia por una canaleta, inclinada bajo un ángulo θ respecto a la vertical. ¿Dentro de cuánto tiempo la bola alcanzará la circunferencia, si su diámetro es D ?

- A) $t = \sqrt{5D/g}$
 B) $t = \sqrt{3D/g}$
 C) $t = \sqrt{2D/g}$
 D) $t = \sqrt{6D/g}$
 E) $t = \sqrt{7D/g}$

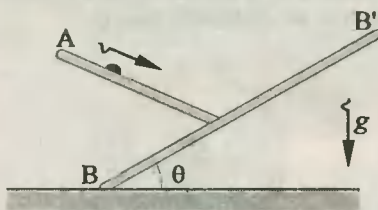


25.- Del punto A por los radios inclinados de diferente manera empiezan a deslizarse uniformemente sin fricción unas pequeñas esferas. ¿En qué curva se encontrarán las esferas luego de un tiempo t ?



- A) En una circunferencia que contiene a "A" y las bolas.
 B) En una parábola cóncava hacia arriba.
 C) En una elipse con uno de sus focos en "A".
 D) En un hipérbola cóncava hacia arriba.
 E) En una circunferencia con centro en A

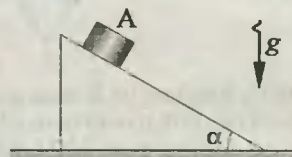
26. ¿Cómo debe estar dirigida desde el punto A una canaleta inclinada para que una bola se deslice por ella hasta el plano inclinado BB' en el transcurso del tiempo mínimo?



- A) $\theta/3$ respecto a la horizontal.
 B) $\theta/2$ respecto a la vertical.
 C) $\theta/4$ respecto a la horizontal.
 D) $2\theta/3$ respecto a la vertical.
 E) N.A.

27. Sobre un cuña, cuyo plano forma un ángulo α con la horizontal, colocaron el cuerpo A. ¿Qué aceleración es necesario transmitir a la cuña en dirección horizontal para que el cuerpo A caiga libremente en dirección vertical hacia abajo?

- A) $g \sin \alpha$
 B) $g \cos \alpha$
 C) $g \tan \alpha$
 D) $g (\sin \alpha - \cos \alpha)$
 E) $g \cot \alpha$

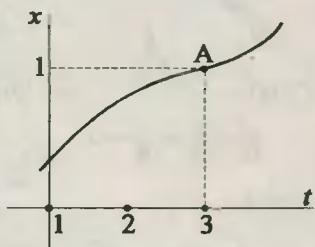


GRAFICOS REFERIDOS AL TIEMPO

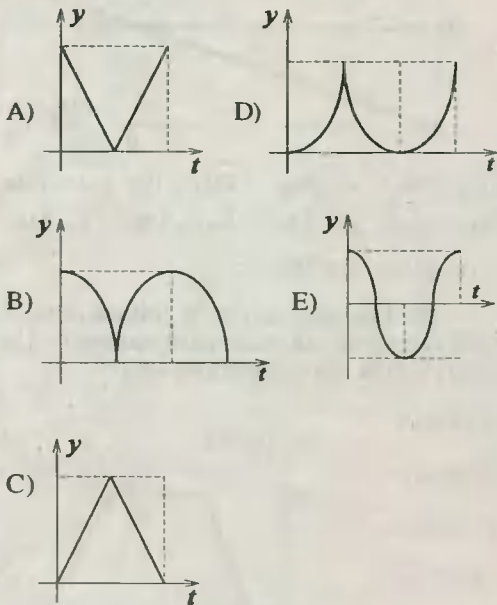
28. Un ingeniero trabaja en una fábrica que se encuentra en las cercanías de la ciudad. Cada vez que llega el tren a la estación ferroviaria venía el coche de la fábrica que conduce al ingeniero

33. Las gráficas de la dependencia entre la coordenada y el tiempo, pertenecientes a dos partículas, resultaron ser iguales, pero para la primera partícula una división del eje corresponde a 4 s y para la segunda, a 1 s. ¿En qué relación están las velocidades y aceleraciones de las partículas para el punto A de la gráfica?

- A) 0 y 0
- B) 1 y 1
- C) 4 y 16
- D) 2 y 5
- E) N.A.

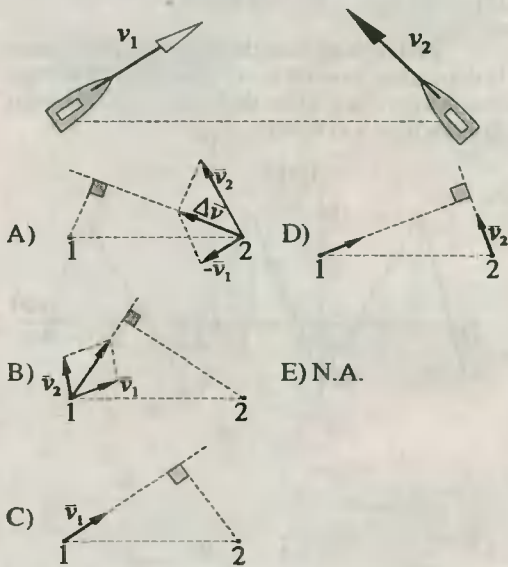


34. Una bola cae libremente de una altura H sobre una placa elástica horizontal. Construir el gráfico de la variación de la coordenada (y) de la bola en función del tiempo, despreciando el tiempo de choque. El choque se considera absolutamente elástico.



MOVIMIENTOS RELATIVOS
(Transformaciones de Galileo)

35. Las posiciones iniciales y los vectores velocidades para dos barcos vienen dados en la figura. Los barcos se mueven sin aceleración. ¿Cómo deben disponerse los vectores velocidad para encontrar la distancia mínima entre ellos?



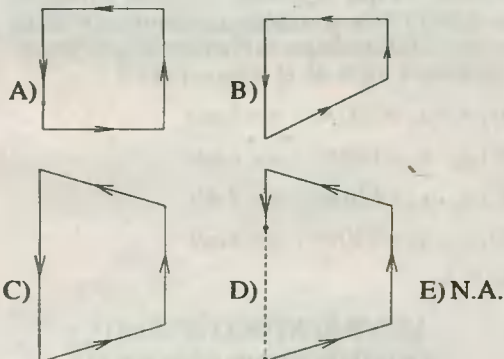
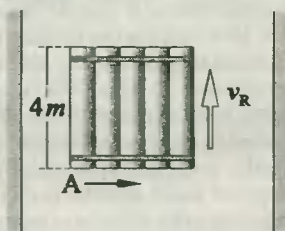
36. A la velocidad del viento de 10 m/s las gotas de lluvia caen bajo un ángulo de 30° respecto a la vertical. ¿A qué velocidad del viento las gotas caerán bajo el ángulo de 45° ?

- A) $20\sqrt{3} \text{ m/s}$
- B) $10\sqrt{5} \text{ m/s}$
- C) $20\sqrt{2} \text{ m/s}$
- D) $10\sqrt{3} \text{ m/s}$
- E) 20 m/s

37. Llueve "verticalmente" y la velocidad de las gotas es $u = \sqrt{3} \text{ m/s}$. Una pelota se desliza por el asfalto a la velocidad $v = 1 \text{ m/s}$. ¿En cuántas veces caerán más gotas por segundo sobre esta pelota que en una inmóvil? ¿Cambiará la respuesta si la pelota es redonda?

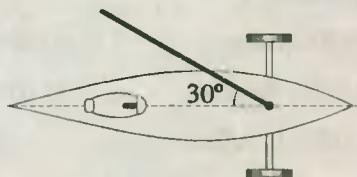
- A) 3 veces ; no
- B) 2 veces ; sí
- C) 5 veces ; no
- D) 2 veces ; no
- E) 3 veces ; sí

38. De la esquina A de una balsa cuadrada salta un perro y nada alrededor de la balsa en la dirección señalada por la flecha corta. Señale la figura que más se aproxime a la trayectoria del movimiento del perro con respecto a la orilla, si la velocidad del animal con relación al agua constituye $\frac{4}{3}$ de la velocidad de la corriente que viene indicada por la flecha larga.



39. El trineo de vela puede moverse solamente por la línea que señalan los patines. El viento sopla con una velocidad v , perpendicular a su movimiento. Mientras tanto, la vela forma con la dirección del movimiento un ángulo de 30° . Determinése la velocidad máxima del trineo de vela.

- A) $v\sqrt{3}$
- B) $v\sqrt{2}$
- C) $2v$
- D) $v/2$
- E) $\frac{v}{2}\sqrt{3}$



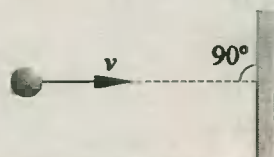
40. ¿Cuál será la duración de un viaje en avión que vuela de A a B y de B a A, si aquel transcurre por una recta y durante todo el vuelo el

viento sopla bajo el ángulo $\alpha = 30^\circ$ respecto a la ruta con una velocidad $u = 14\text{ m/s}$? La velocidad del avión con relación al aire es $v = 25\text{ m/s}$ y la longitud de la ruta es $L = 4,29\text{ km}$.

- A) 500 B) 160s C) 320s D) 600s E) 640s

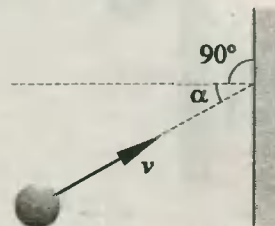
41. Al chocar elásticamente un cuerpo contra cierta pared inmóvil, la velocidad v cambia solo de dirección. Determinése en qué valor cambiará la velocidad de este cuerpo después de la colisión si la pared se mueve a una velocidad $w < v$ en dirección del movimiento del cuerpo.

- A) $\Delta v = 2v + w$
- B) $\Delta v = -2(v + w)$
- C) $\Delta v = 2w - v$
- D) $\Delta v = -2(v - w)$
- E) $\Delta v = -(w + v)$

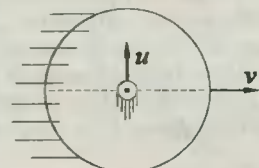


42. Cierta cuerpo choca contra una pared con la velocidad $v = 4\text{ m/s}$, formando un ángulo $\alpha = 60^\circ$ respecto a su normal. Determinése el módulo de la velocidad del cuerpo después de chocar elásticamente contra la pared, si ésta se mueve a una velocidad $w = 1\text{ m/s}$ por su normal al encuentro del cuerpo.

- A) $2\sqrt{5}\text{ m/s}$
- B) $2\sqrt{7}\text{ m/s}$
- C) $3\sqrt{3}\text{ m/s}$
- D) $5\sqrt{2}\text{ m/s}$
- E) $4\sqrt{2}\text{ m/s}$

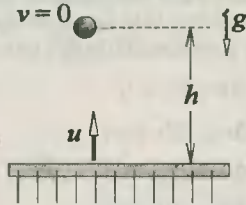


43. Dentro de una esfera de radio $R = 10\text{ cm}$, que se mueve a una velocidad $u = 3\text{ m/s}$, se encuentra una bola de radio $r = 5\text{ cm}$ que en el momento de pasar por el centro de la esfera, poseía la velocidad $v = 4\text{ m/s}$ ($\vec{v} \perp \vec{u}$). La masa de la esfera es mucho mayor que la de la bola. Determinése con qué frecuencia la bola choca contra la pared de la esfera si la colisión se considera absolutamente elástica.



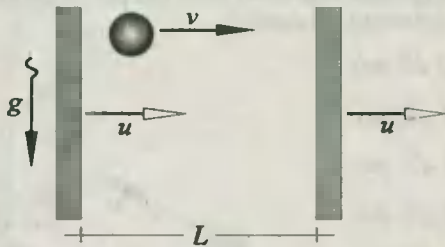
- A) 5 veces/s B) 40 veces/s C) 25 veces/s
 D) 10 veces/s E) 50 veces/s

44. Cierta cuerpo se deja caer en el campo gravitatorio a la altura $h = 3,75m$ respecto de una plancha que se mueve verticalmente hacia arriba con la velocidad $u = 5m/s$. Determinése el tiempo entre las colisiones sucesivas del cuerpo contra la plancha. Las colisiones son absolutamente elásticas.



- A) 1s
 B) 3s
 C) 5s
 D) 1,5s
 E) 2s

45. Un cuerpo irrumpe horizontalmente a la velocidad v en cierto espacio entre dos planos verticales que se mueven a una velocidad u . Determinése la componente vertical de la velocidad del cuerpo después de la n -ésima colisión, contra la pared delantera. La distancia entre las placas es L y las colisiones son absolutamente elásticas.



- A) nLg/v D) $nLg/(v-u)$
 B) $\left(\frac{n-1}{v+u}\right)Lg$ E) $\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)\frac{Lg}{u}$
 C) $\frac{(2n-1)}{v-u}Lg$

46. Las partículas 1 y 2 se mueven con velocidades constantes $v_1 = 5m/s$ y $v_2 = 15m/s$ por dos líneas rectas, mutuamente perpendiculares, hasta el punto de su intersección O. En el instante $t = 0$ las partículas se encontraban a las distancias $\ell_1 = 20m$ y $\ell_2 = 12m$ del punto O.

¿Al cabo de qué tiempo la distancia entre las partículas resultará ser mínima?

- A) 10,5s B) 11,2s C) 9,6s
 D) 10,2s E) 12,5s

47. Un tren cuya longitud es $L = 350m$, empieza su recorrido por una vía recta con una aceleración constante, $a = 3,0 \cdot 10^{-2} m/s^2$. Pasado un tiempo $t = 30s$ de haberse iniciado el movimiento fue conectado al reflector de la locomotora (acontecimiento 1) y transcurrido un tiempo $t = 60s$, desde este momento se enciende la lámpara de señales en la cola del tren (acontecimiento 2). Hallar la distancia entre los puntos en que se produjeron estos acontecimientos en un sistema de referencia ligado con el tren y la tierra. ¿Cómo y a qué velocidad constante v respecto a la tierra debe reemplazarse cierto sistema de referencia K , para que en él ambos acontecimientos tengan lugar en el mismo punto?

- A) $x_1 - x_2 = 200m$; $v = 5m/s$
 B) $x_1 - x_2 = 180m$; $v = 6m/s$
 C) $x_1 - x_2 = 120m$; $v = 2m/s$
 D) $x_1 - x_2 = 240m$; $v = 4m/s$
 E) N.A.

**MOVIMIENTO COMPUESTO
 MOVIMIENTO PARABOLICO**

48. Un chico que puede nadar a una velocidad dos veces inferior a la velocidad de la corriente del río quiere atravesarlo a nado de manera que la corriente se lo lleve abajo lo menos posible. ¿Bajo qué ángulo con respecto a la orilla deberá nadar el chico? ¿A qué distancia se lo llevará abajo la corriente si la anchura del río es de $200m$?

- A) 30° ; $100m$ D) 60° ; $200\sqrt{3}m$
 B) 30° ; $200\sqrt{3}m$ E) 60° ; $200m$
 C) 45° ; $100\sqrt{2}m$

49. Desde una boya que se encuentra en el medio de un ancho río partieron los botes A y B. Los botes tomaron direcciones perpendicu-

lares entre si; el bote A a lo largo del río, y el bote B a lo ancho. Habiéndose separado a una misma distancia de la boya, los botes emprendieron el regreso. Hallar la relación de los tiempos T_A / T_B , si la rapidez de cada uno de ellos supera $n = 1,2$ veces a la del río.

- A) 1,8 B) 1,2 C) 1,1 D) 1,0 E) 0,8

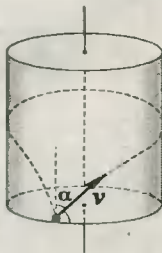
50. De una manguera ubicada en Tierra, brota un chorro de agua, formando un ángulo de 45° respecto al horizonte, con velocidad inicial de 10 m/s . El área de la sección del orificio de la manguera es igual a 5 cm^2 . Determinése la masa del chorro que se encuentra en el aire.

- A) 5 kg B) 7 kg C) 6 kg D) 9 kg E) N.A.

51. Una bola se lanza por la superficie interior de un cilindro vertical liso de radio R bajo un ángulo α respecto a la vertical. ¿Qué velocidad inicial es necesario comunicar a la bola para que retorne al punto inicial?

Nota : $n \in \mathbb{N}$

- A) $\sqrt{2\pi Rg}$
 B) $\sqrt{\pi Rg}$
 C) $\sqrt{2\pi Rgn / \sin 2\alpha}$
 D) $\sqrt{2\pi nRg / \sin \alpha}$
 E) $\sqrt{2\pi Rg / n \cdot \sin \alpha}$



52. De un mismo lugar con un intervalo de tiempo $T = 0,5\text{ s}$ se lanzan dos cuerpos a una misma velocidad inicial y bajo el ángulo $\theta = 37^\circ$ respecto al horizonte. ¿Qué velocidad relativa posee el primer cuerpo con relación al segundo.

- A) $(3 ; 4)\text{ m/s}$ B) $(5 ; 5)\text{ m/s}$ C) $(5 ; 0)\text{ m/s}$
 D) $(2 ; 5)\text{ m/s}$ E) $(0 ; 5)\text{ m/s}$

53. Un proyectil se lanza de un cañón con velocidad inicial v_0 . Determinar la "zona de seguridad", es decir, el lugar geométrico de todos los puntos del espacio donde el proyectil no podrá impactar en el blanco.

- A) Cono B) Paraboloide C) Cilindro
 D) Esfera E) Semiesfera

54. Dos partículas se mueven en un campo de gravedad homogéneo con una aceleración igual g . En el momento inicial ellas se encontraban en un mismo punto y sus velocidades dirigidas horizontalmente y en direcciones opuestas eran $v_1 = 3\text{ m/s}$ y $v_2 = 4\text{ m/s}$. Hallar la distancia entre las partículas en el momento, en que los vectores de sus velocidades resulten ser mutuamente perpendiculares.

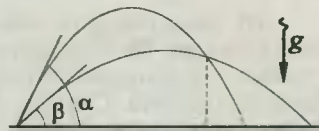
- A) $1,50\text{ m}$ B) $1,15\text{ m}$ C) $2,50\text{ m}$
 D) $2,80\text{ m}$ E) $3,00\text{ m}$

55. ¿Con qué velocidad en el momento de lanzamiento de un cohete es necesario disparar de un cañón para destruir el cohete que se lanza verticalmente con aceleración $a = 2\text{ m/s}^2$? La distancia entre el cañón y el lugar de lanzamiento del cohete es $L = 300\text{ m}$, el cañón dispara bajo el ángulo de 45° respecto al horizonte.

- A) 100 m/s B) 90 m/s C) 40 m/s
 D) 120 m/s E) 60 m/s

56. Del orificio de una manguera, obstruido con el dedo, brotan dos chorros de agua bajo los ángulos $\alpha = 45^\circ$ y $\beta = 37^\circ$ respecto al horizonte con una misma velocidad inicial $v = 7\text{ m/s}$. ¿A qué distancia con respecto a la horizontal los chorros se intersecan?

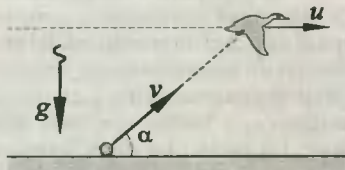
- A) $3,5\text{ m}$
 B) $1,6\text{ m}$
 C) $3,2\text{ m}$
 D) $5,6\text{ m}$
 E) $2,8\text{ m}$



57. Un pato volaba por una recta horizontal a la velocidad constante $u = 5\text{ m/s}$. Un "cazador" inexperto le lanzó una flecha, con la particularidad de que el lanzamiento fue hecho sin corrección del avance, de modo que en el momento del lanzamiento la dirección de la velocidad de la flecha (el ángulo $\alpha = 53^\circ$ respecto al horizonte) estaba orientada precisamente hacia el pato. El módulo de la velocidad inicial de la

flecha es igual a $v = 23 \frac{1}{3} \text{ m/s}$; ¿A qué altura volaba el pato, si la flecha, a pesar de todo, dió con él?

- A) 16m
B) 12m
C) 10m
D) 16m
E) 9m



58. De un cañón fueron disparados dos proyectiles seguidos con una velocidad $v = 250 \text{ m/s}$. El primero a un ángulo $\theta_1 = 60^\circ$ hacia el horizonte; el segundo a un ángulo $\theta_2 = 45^\circ$ (El azimut es el mismo). Despreciando la resistencia del aire, hallar el intervalo de tiempo entre los disparos que asegure que los proyectiles choquen.

- A) 7s B) 8s C) 9s D) 10s E) 11s

59. Una bola inicia su caída, siendo nula su velocidad inicial, sobre un plano inclinado liso que forma un ángulo α con el horizonte. Después de cubrir la distancia h , ella rebota elásticamente del plano. ¿A qué distancia del primer lugar rebota la segunda vez?

- A) $8h \sin^2 \alpha$ B) $4h \cos^2 \alpha$ C) $8h \sin \alpha$
D) $4h \cos \alpha$ E) N.A.

MOVIMIENTO CURVILINEO (MCU-MCUV-ROTACION Y TRASLACION)

60. Determínese las velocidades que poseen los puntos de la superficie terrestre en el Ecuador y Leningrado, debidas a la rotación diaria de la Tierra. Considérese el radio de la Tierra igual a 6400 km . La latitud de Leningrado es de 60° .

- A) 1 240 y 560 km/h
B) 1 675 y 838 km/h
C) 2 400 y 1 200 km/h
D) 1 500 y 760 km/h
E) N.A.

61. ¿A qué velocidad debe volar un satélite para que, cayendo todo el tiempo hacia la Tierra

con una aceleración g , se mueva describiendo una circunferencia?. Adóptese el radio de la Tierra: $R = 6400 \text{ km}$ y $g = 10 \text{ m/s}^2$

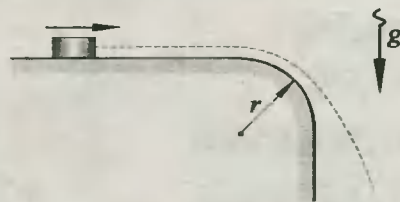
- A) 8 km/s B) 6 km/s C) 3 km/s
D) 4 km/s E) 2 km/s

62. En el instante en que el módulo de la velocidad es $v = 10^6 \text{ m/s}$, la aceleración de una partícula es $a = 10^4 \text{ m/s}^2$ y está dirigida formando un ángulo de 30° respecto al vector velocidad. ¿En cuánto aumentará el módulo de la velocidad durante el tiempo $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$?

- A) $10 \sqrt{2} \text{ m/s}$ B) $10 \sqrt{3} \text{ m/s}$ C) $50 \sqrt{3} \text{ m/s}$
D) $50 \sqrt{2} \text{ m/s}$ E) N.A.

63. El extremo de una mesa horizontal está redondeado por una semicircunferencia de radio r . ¿Con qué velocidad mínima es necesario poner en marcha un pequeño cuerpo por la mesa para que éste, al alcanzar la parte redondeada, comience a describir una parábola?

- A) $\sqrt{2rg}$
B) $2\sqrt{rg}$
C) $3\sqrt{rg}$
D) \sqrt{rg}
E) $2\sqrt{2rg}$



64. Un proyectil sale volando a la velocidad inicial de 600 m/s bajo un ángulo de 60° respecto al horizonte. Determinar los radios de curvatura de las trayectorias del proyectil en los puntos más alto e inicial.

- A) 8 y 12 km B) 9 y 72 km C) 10 y 24 km
D) 11 y 32 km E) 12 y 36 km

65. Para economizar sitio, la entrada a uno de los puentes más altos de Japón está hecha en forma de hélice que enrolla un cilindro de radio $R = 48 \text{ m}$. La vía forma con el plano horizontal un ángulo $\alpha = 16^\circ$. ¿Cuál es la aceleración del automóvil que se mueve a velocidad $v = 15 \text{ m/s}$ constante en módulo?

- A) $2,15m/s^2$ D) $1,15m/s^2$
 B) $1,12m/s^2$ E) $4,32m/s^2$
 C) $6,18m/s^2$

66. Cierta partícula se mueve por una trayectoria circular a la velocidad $v = at$, donde $a = 0,5m/s^2$. Determinar la aceleración total de ésta en el momento en que ha recorrido $n = 0,10$ de esta trayectoria.

- A) $0,6m/s^2$ B) $0,8m/s^2$ C) $0,9m/s^2$
 D) $1,0m/s^2$ E) $1,2m/s^2$

67. Un punto gira desaceleradamente en una trayectoria circular de radio $R = 16m$ de modo que en todo momento sus aceleraciones normal y tangencial tienen módulos iguales. En el momento inicial $t = 0$ la velocidad inicial del punto es $v_0 = 16m/s$. Hallar en m/s^2 la aceleración total del punto en $t = 7s$.

- A) 2 B) $\sqrt{2}/4$ C) 12
 D) $3\sqrt{2}$ E) N.A.

68. Una rueda gira alrededor de un eje fijo de modo que el ángulo de rotación θ depende del tiempo según la ley $\theta = at^2$, donde $a = 0,2rad/s^2$. Hallar la aceleración total w del punto A en la llanta de la rueda en el instante $t = 2,5s$, si la velocidad de este punto y en dicho instante es $v = 0,65m/s$.

- A) $0,7m/s^2$ B) $0,8m/s^2$ C) $0,9m/s^2$
 D) $1,0m/s^2$ E) $1,1m/s^2$

69. Un cilindro de radio $R = 20cm$ gira alrededor de su eje con la frecuencia $f = 20rpm$. A lo largo de la generatriz del cilindro se mueve un cuerpo con la velocidad constante $v = 30cm/s$ respecto de la superficie del cilindro. Determinar la velocidad de dicho cuerpo.

- A) $0,7m/s$ B) $0,6m/s$ C) $0,5m/s$
 D) $0,4m/s$ E) $0,3m/s$

70. Un proyectil salió disparado con una velocidad $v = 320m/s$, dando $n = 2,0$ vueltas dentro del cañón. La longitud de este último es $L = 2,0m$. Considerando el movimiento del proyectil en el cañón uniformemente acelerado, de-

terminar su velocidad angular de rotación alrededor del eje en el momento de la salida.

- A) $5 \cdot 10^3 rad/s$ D) $3 \cdot 10^2 rad/s$
 B) $4 \cdot 10^3 rad/s$ E) $2 \cdot 10^3 rad/s$
 C) $2 \cdot 10^2 rad/s$

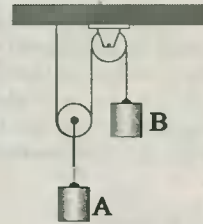
71. El punto A se encuentra en la llanta de una rueda de radio $R = 0,5m$, que se mueve sin resbalar por un plano horizontal a la velocidad $v = 1,00m/s$. Hallar el recorrido s del punto A entre dos momentos consecutivos de su contacto con la superficie.

- A) $8m$ B) $7m$ C) $6m$ D) $4m$ E) $5m$

MOVIMIENTOS CON ENLACES

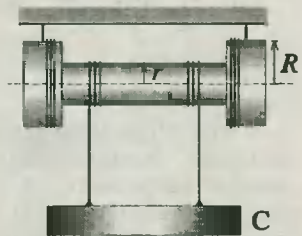
72. La velocidad de la carga A es igual a v . ¿Qué velocidad tendrá la carga B?

- A) $3v_A$
 B) $2v_A$
 C) v_A
 D) $\frac{3}{2}v_A$
 E) $\frac{1}{2}v_A$



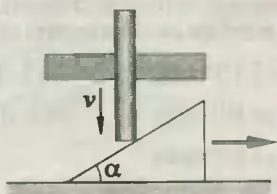
73. La velocidad angular de la bobina es ω , el radio del cilindro interior es r y de los exteriores R . ¿Cuáles son las velocidades del eje de la bobina y de la carga con relación a la Tierra?

- A) ωR ; $\omega(R - r)$
 B) ωr ; $\omega(R - r)$
 C) ωR ; $\omega(R + r)$
 D) ωr ; $\omega(R + r)$
 E) N.A.

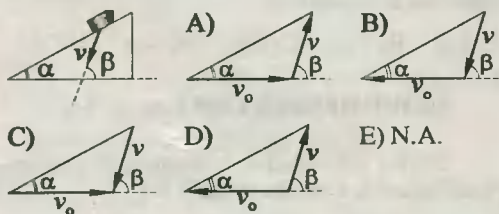


74. Una cuña forma con el soporte horizontal un ángulo de 30° . Una barra vertical que baja a la velocidad v la "empuja". ¿Qué velocidad desarrollará la cuña?

- A) $v\sqrt{2}$
- B) $v\sqrt{3}$
- C) v
- D) $2v$
- E) $\frac{3}{2}v$

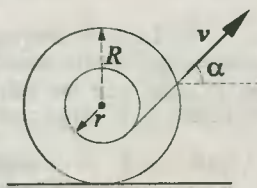


75. El vector velocidad de cierto cuerpo que se desliza por una cuña, se muestra en la figura. Hállese por vía gráfica, la velocidad v_0 de la cuña.

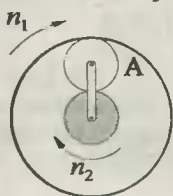


76. Una bobina rueda por un plano horizontal sin deslizamiento. Del hilo se tira bajo un ángulo α hacia el horizonte con una velocidad v . Hállese la velocidad del eje y la velocidad angular de rotación de la bobina. El hilo es tan largo que α no cambia durante el movimiento.

- A) $\frac{vR}{R \cos \alpha - r}$
- B) $v \cos \alpha$
- C) $\frac{vR \cos \alpha}{R - r}$
- D) $\frac{vR}{(R - r) \cos \alpha}$
- E) $\frac{vr}{(R - r) \cos \alpha}$



77. La figura muestra cierta transmisión de engranajes de movimiento rotacional. ¿Qué cantidad de revoluciones alrededor de su eje efectuará el engranaje A si la rueda dentada exterior realiza $n_1 = 8$ revoluciones y el engranaje central, $n_2 = 6$ revoluciones?. El radio interior de la rueda exterior es $R = 12 \text{ cm}$ y del engranaje central $r = 4 \text{ cm}$.



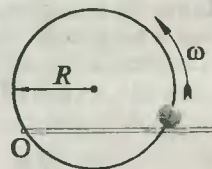
- A) 8
- B) 7
- C) 6
- D) 9
- E) 10

78. La luna presenta siempre la misma cara a la Tierra. ¿Cuántas revoluciones realizará la luna alrededor de su eje durante una revolución completa en torno a la Tierra?

- A) Una y media
- B) Media
- C) Dos y media
- D) Dos
- E) Una

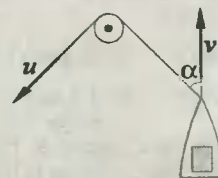
79. Un abalorio puede moverse por cierta circunferencia de radio R , empujado por una aguja que gira uniformemente a la velocidad angular ω . El eje de rotación de la aguja pasa por el punto O del aro. ¿Cuál será la aceleración total del abalorio?

- A) $3\omega^2 R$
- B) $2\omega^2 R$
- C) $4\omega^2 R$
- D) $5\omega^2 R$
- E) $\omega^2 R$



80. Una cuerda que está amarrada a una lancha, se echa sobre un poste. La lancha se mueve con velocidad v que forma en cierto momento de tiempo un ángulo α con la cuerda. ¿Con qué velocidad u es necesario tirar en este instante del cabo libre de la cuerda para que ésta se mantenga tensa?

- A) $v \operatorname{tg} \alpha$
- B) $v \cos^2 \alpha$
- C) $v \operatorname{sen}^2 \alpha$
- D) $v \operatorname{sen} \alpha$
- E) $v \cos \alpha$



81. Un rollo de papel se desenrolla de manera que la velocidad del cabo de la cinta de papel es constante e igual a v . En el instante inicial el radio del rollo era R . ¿Qué velocidad angular tendrá el rollo al cabo del tiempo t ? El grosor inicial del papel es h .

- A) $\omega = \frac{v}{R - vht}$
- B) $\omega = \frac{v}{\sqrt{R^2 - vht / \pi}}$



C) $\omega = \frac{vh}{\sqrt{R^2 - ht}}$

D) $\omega = \frac{vR}{\sqrt{(R+ht)\pi}h}$

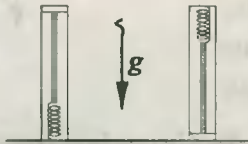
E) $\omega = \frac{vh}{\sqrt{R^2 + vht}}$

ESTÁTICA

(1ª Y 2ª CONDICION DE EQUILIBRIO)

82. Un lápiz de masa 0,01 kg está colocado verticalmente sobre un resorte en un lapicero cerrado. Al dar la vuelta a éste, el lápiz comenzó a presionar sobre la tapa con una fuerza 1,2 veces mayor. ¿Con qué fuerza el lápiz presionaba inicialmente sobre la tapa?

- A) 0,60 N
- B) 0,50 N
- C) 0,90 N
- D) 1,00 N
- E) 1,20 N



83. Determinése la altura máxima de una casa que puede construirse de ladrillo, si el límite de resistencia a la compresión del ladrillo es igual a $10^7 Pa$ y la densidad de éste es de $1,5 \cdot 10^3 kg/m^3$.

- A) 460 m
- B) 600 m
- C) 400 m
- D) 506 m
- E) 667 m

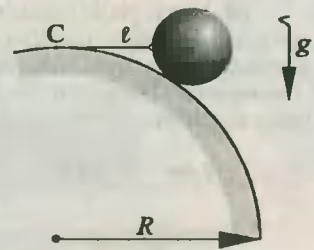
84. ¿Qué ángulo de inclinación θ deberá tener el plano para que la bola abandone el hoyo situado en este mismo plano? La profundidad del hoyo es dos veces inferior al radio de la bola.

- A) $\theta > 53^\circ$
- B) $\theta > 60^\circ$
- C) $\theta \geq 30^\circ$
- D) $\theta \geq 45^\circ$
- E) $\theta > 37^\circ$



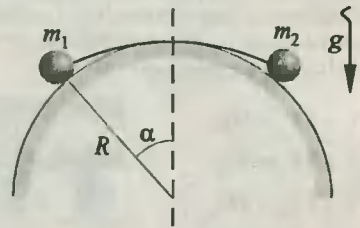
85. Una bola de radio r y masa m , se retiene en una esfera inmóvil de radio R mediante un hilo imponderable de longitud l sujeto al punto superior de la esfera C. No hay otros puntos de contacto entre el hilo y la esfera. Menospreciando la fricción, hállese la tensión del hilo.

- A) $mg(l-r)/R$
- B) $mg l r / R^2$
- C) $mg(l+r)/R$
- D) $mg(l+R)/r$
- E) $mg(l-R)/r$



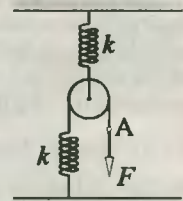
86. Dos cargas se unen mediante un hilo imponderable de longitud $l = 2\alpha R$ y se ubican en una superficie lisa cilíndrica de radio R . En estado de equilibrio el ángulo entre la vertical y el radio trazado al punto donde se encuentra la carga m_1 , es igual a α . Búsquese la masa de la segunda carga.

- A) $m_2 = 2m_1$
- B) $m_2 = m_1$
- C) $m_2 = 3m_1$
- D) $m_2 = \frac{2}{3} m_1$
- E) $m_2 = \frac{3}{2} m_1$



87. ¿En cuánto se desplazará el cabo de un hilo (punto A) que descansa sobre la p Polea móvil, si se aplica la fuerza F ? La rigidez de ambos muelles es k .

- A) F/k
- B) $3 F/k$
- C) $4 F/k$
- D) $6 F/k$
- E) $5 F/k$

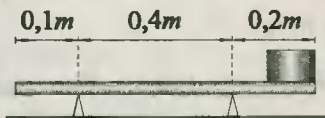


88. Una cadena pequeña de masa $m = 2,4 kg$ está suspendida por los extremos. La tensión de la cadena en el punto inferior es $T = 9 N$. Hállese la tensión en newtons los puntos de suspensión.

- A) 20
- B) 10
- C) 12
- D) 15
- E) 18



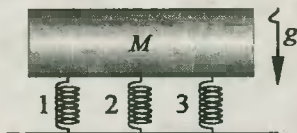
89. Una regla de masa 10 kg yace sobre dos apoyos de la manera mostrada en la figura. Pongamos sobre el extremo libre de la regla una carga con masa m . ¿Hasta colocar qué masa m puede haber equilibrio?



- A) $m \geq 5\text{ kg}$ B) $m \leq 7,5\text{ kg}$ C) $m < 6\text{ kg}$
 D) $m > 4\text{ kg}$ E) $m \leq 5\text{ kg}$

90. En tres muelles de la misma longitud, cuyas rigideces son k , $2k$ y k , se pone una viga como viene expuesta en la figura. Determinínense las fuerzas que ejercen los muelles sobre la viga cuya masa es M , indicándose verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- () $4F_1 = Mg$
 () $5F_2 = Mg$
 () $2F_3 = Mg$
 () $2F_1 = Mg$



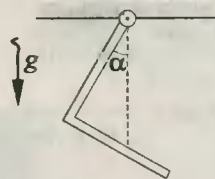
- A) VVVV B) VFVV C) VFFV
 D) VFFF E) N.A.

91. Una balanza de brazos desiguales se equilibra poniendo en uno de los platillos de aquella una carga complementaria. ¿Cómo se podrá usar ahora esta balanza para pesar de la misma manera que se hace en una corriente?

- A) Agregando pesas iguales en ambos platillos.
 B) Quitando la pesa complementaria.
 C) No se puede.
 D) Agregando dos pesas complementarias.
 E) Agregando la misma pesa complementaria en ambos platillos.

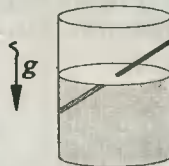
92. Una barra pesada se dobla por el centro en 90° y se cuelga libremente por uno de sus extremos. ¿Qué ángulo con la vertical formará la parte sujeta?

- A) $\text{tg}^{-1}(1)$
 B) $\text{tg}^{-1}(4)^{-1}$
 C) $\text{tg}^{-1}(2)^{-1}$
 D) $\text{tg}^{-1}(3)$
 E) $\text{tg}^{-1}(3)^{-1}$



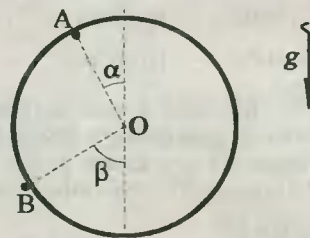
93. ¿Con qué fuerza presiona un palillo de masa $M = 12\text{ kg}$, sumergido hasta la mitad en el agua del vaso cilíndrico, sobre la pared del mencionado vaso?. El ángulo de inclinación del palillo respecto al horizonte es $\alpha = 37^\circ$. No hay fricción.

- A) 50 N
 B) 30 N
 C) 80 N
 D) 40 N
 E) 60 N



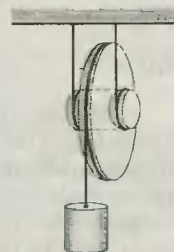
94. Un aro fino redondo y liso de masa $m = 11,7\text{ kg}$ está sujetado a la pared con ayuda de dos clavos sin fricción. El primero se encuentra dentro del aro (A) y el segundo está fuera del aro (B). Hállese con qué fuerza el aro presiona sobre el clavo A, siendo: $\alpha = 16^\circ \wedge \beta = 53^\circ$

- A) 50 N
 B) 100 N
 C) 60 N
 D) 120 N
 E) 125 N

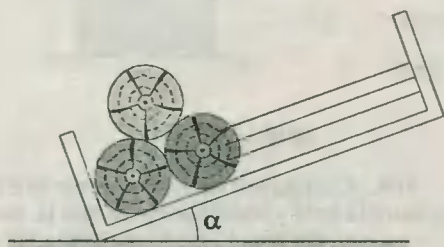


95. Una bobina está suspendida del techo mediante dos hilos, enrollados en el radio menor $r = 10\text{ cm}$. En el radio mayor $R = 30\text{ cm}$ se enrolla también el hilo, en cuyo caso se cuelga una carga. ¿Cuál deberá ser la masa en kg de la carga, para que el sistema se encuentre en equilibrio?. La masa de la bobina es $M = 8\text{ kg}$.

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



96. ¿Manteniendo qué ángulos α los tres troncos en la tolva de un camión se encontrarán en equilibrio, si los troncos son idénticos? Despreciar la fricción.



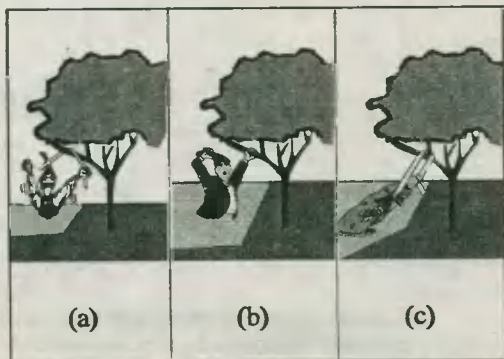
A) $\text{tg}^{-1} \left(\frac{1}{4} \right) \leq \alpha \leq 30^\circ$ D) $\text{tg}^{-1} \left(\frac{1}{9} \right) \leq \alpha < 60^\circ$

B) $\text{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) < \alpha \leq 45^\circ$ E) $30^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$

C) $\text{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \leq \alpha \leq 30^\circ$

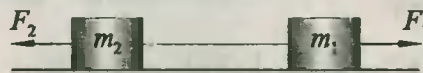
DINAMICA LINEAL

97. De informaciones fehacientes, una vez el barón Münchhausen al atollarse en un pantano se sacó a sí mismo de éste halándose de los pelos. ¿De cuál(es) de las formas mostradas pudo salir el barón?



- A) Como en (a) D) Como en (a), ó, (b)
 B) Como en (b) E) Como en (a), ó, (c)
 C) Como en (c)

98. Dos cuerpos de masas $m_1 = 2 \text{ kg}$ y $m_2 = 1 \text{ kg}$, están atados por un hilo que puede soportar la tensión $T = 150 \text{ N}$. A los cuerpos se les aplica las fuerzas $F_1 = \alpha t$ y $F_2 = 2\alpha t$ (α es un coeficiente constante $= 3 \text{ N/s}$, y, t el tiempo). Determiné al cabo de qué tiempo, el hilo se romperá.



- A) 10s B) 45s C) 60s D) 30s E) 25s

99. Un pintor de brocha gorda con masa de 72 kg trabaja en un sillón colgante, necesita urgentemente elevarse. Con este fin comienza a tirar de la cuerda con una fuerza tal que su presión sobre el sillón disminuye hasta 400N. La masa del sillón es de 12 kg y considerando que $g = 10 \text{ m/s}^2$. ¿Cuál será la aceleración del sistema formado por el hombre y el sillón?



- A) 2 m/s^2
 B) 5 m/s^2
 C) $4/3 \text{ m/s}^2$
 D) 3 m/s^2
 E) $10/3 \text{ m/s}^2$

100. Un avión reactor de masa $m = 10^4 \text{ kg}$, desarrolla con empuje $F = 1,5 \cdot 10^5 \sqrt{41} \text{ N}$, se desplaza desde el lugar de despegue por una recta, dirigida bajo el ángulo α hacia el horizonte. ¿A qué distancia del lugar de despegue se encontrará el avión al cabo de un tiempo $T = 20 \text{ s}$ después del despegue?. Despreciar la variación de masa del avión y la resistencia del aire.

- A) 500m B) 100m C) 200m
 D) 1 500m E) 2 000m

101. Tres bolas iguales están unidas por muelles imponderables idénticos y suspendidas de un hilo. El hilo se quema. Hállense las aceleraciones de las bolas en el momento en que se quema el hilo e indique verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

() $a_A = 3g$

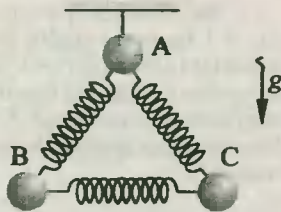
() $a_B = 0$

() $a_C = g$

A) VVF

B) VVF

C) FVF D) VFF E) VVV



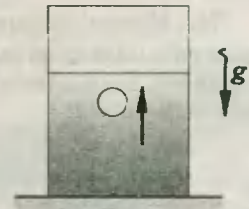
A) 60N

B) 70N

C) 80N

D) 90N

E) 100N



ROZAMIENTO

102. Entre dos barras iguales de masas $M = 2\text{kg}$ se coloca una cuña de masa $m = 8\text{kg}$ con ángulo $\alpha = 120^\circ$. Determinéense la aceleración de la cuña.

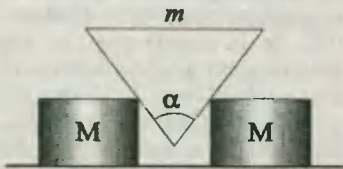
A) 4m/s^2

B) 5m/s^2

C) 6m/s^2

D) 7m/s^2

E) 8m/s^2



105. ¿Cuál deberá ser el coeficiente de fricción entre la bola y los planos para que la bola no "se escape" del ángulo diedro α , formado por dos planos, al intentar disminuir dicho ángulo?. Menospréciase la fuerza de gravedad.

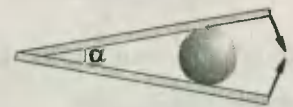
A) $\mu > \sin \alpha$

B) $\mu \geq \cos \alpha$

C) $\mu \geq \tan \alpha$

D) $\mu > \cot(\alpha/2)$

E) $\mu \geq \tan(\alpha/2)$



103. Una carga está colgada del cabo de un hilo, sujeto a la pared y que contornea un rodillo, fijado en una barra de masa $M = 4\text{kg}$. Esta última puede deslizarse por el plano horizontal sin fricción. En el instante inicial desvían la carga en un ángulo $\alpha = 37^\circ$ respecto a la vertical y la dejan libre. Determinéense la aceleración de la barra, si el ángulo formado entre el hilo y la vertical, no cambia al moverse el sistema. ¿Cuál es la masa de la carga?

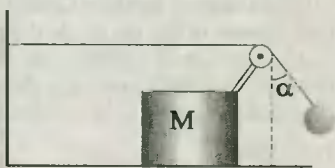
A) 20 kg

B) 10 kg

C) 2 kg

D) 5 kg

E) 15 kg



106. ¿Cuál deberá ser el coeficiente de fricción de una barra homogénea con el suelo para que pueda permanecer de la manera mostrada en la figura?. La longitud del hilo AB es igual a la longitud de la barra.

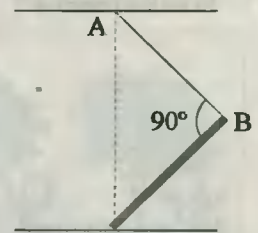
A) $\mu \geq \frac{1}{4}$

B) $\mu > \frac{1}{2}$

C) $\mu \geq \frac{1}{3}$

D) $\mu > \frac{2}{3}$

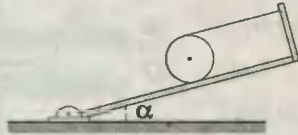
E) $\frac{1}{3} < \mu < \frac{2}{3}$



104. En un recipiente que contiene agua de densidad $\rho = 10^3\text{ kg/m}^3$ emerge a la superficie una burbuja de volumen $V = 0,04\text{ m}^3$ con la aceleración $a = 2\text{ m/s}^2$. Hállese la fuerza del recipiente sobre el soporte. La masa del recipiente junto con el agua es $M = 15\text{ kg}$.

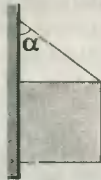
107. En un cilindro se enrolla un hilo, cuyo cabo se sujeta del montante en el punto superior del plano inclinado. El coeficiente de fricción entre el cilindro y el plano es μ . ¿Hasta qué ángulo máximo el cilindro no se deslizará del plano inclinado?

- A) $\text{tg}^{-1}(\mu)$
- B) $\text{tg}^{-1}(2\mu)$
- C) $\text{tg}^{-1}(\mu/2)$
- D) $\text{tg}^{-1}(\mu/3)$
- E) $\text{tg}^{-1}(2\mu/3)$



108. Sobre una pared vertical se apoya un cubo que se sujeta mediante una cuerda fijada en la arista. ¿Hasta qué valores del ángulo α el cubo se encontrará en equilibrio, si el coeficiente de fricción entre el cubo y la pared es $\mu = 0,75$?

- A) $\alpha \geq 53^\circ$
- B) $\alpha > 37^\circ$
- C) $\alpha \geq 60^\circ$
- D) $\alpha > 45^\circ$
- E) $\alpha \geq 74^\circ$



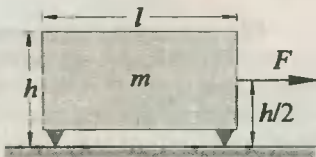
109. Un cubo se encuentra sobre una superficie horizontal. ¿Con qué fuerza mínima es necesario tirar del cubo por su arista superior para que se vuelque sin deslizamiento. Si el coeficiente de fricción es igual $\mu = 1/5$? La masa del cubo es $m = \sqrt{1,2} \text{ kg}$, y, $\alpha > 0^\circ$

- A) 12 N
- B) 20 N
- C) 15 N
- D) 30 N
- E) 35 N



110. En los extremos de una barra homogénea de masa $m = 15 \text{ kg}$, altura h y longitud l , se sujetan rígidamente dos apoyos, cuyas dimensiones pueden menospreciarse. ¿Qué fuerza horizontal es necesario aplicar a la carga a la altura $h/2$ para que se mueva uniformemente, si los coeficientes de fricción entre los apoyos y el plano horizontal son iguales a $\mu_1 = 1/2$ y $\mu_2 = 2/3$?

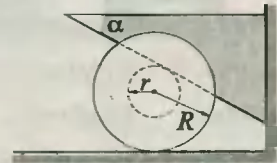
- A) 30 N
- B) 120 N
- C) 150 N
- D) 180 N
- E) 210 N



111. Sobre una bobina, yacente en una mesa horizontal, presiona una cuña que puede desplazarse a lo largo del plano vertical AB. Los coeficientes de fricción de la bobina con la cuña y la mesa son idénticos e iguales a μ . ¿En caso de qué valor de μ , la bobina se desplazará a la izquierda, girando en sentido contrario a las agujas del reloj?

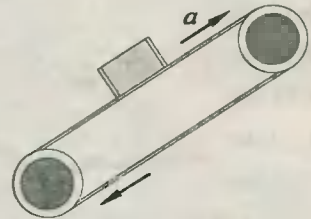
$R = 20 \text{ cm}$; $r = 8 \text{ cm}$; $\alpha = 37^\circ$

- A) $\mu \geq 0,3$
- B) $\mu = 0,5$
- C) $\mu \geq 0,6$
- D) $\mu \geq 0,7$
- E) $\mu \geq 0,8$



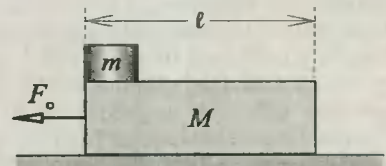
112. Un elevador de cinta está inclinado formando un ángulo $\alpha = 37^\circ$ respecto al horizonte. El coeficiente de fricción entre el cajón y la cinta es $\mu = 7/8$. ¿Hasta qué aceleración de la cinta el cajón en movimiento no se deslizará por la cinta del elevador?. La cinta del elevador no se encorva.

- A) $a \leq 5 \text{ m/s}^2$
- B) $a < 3 \text{ m/s}^2$
- C) $a \leq 2 \text{ m/s}^2$
- D) $a = 8 \text{ m/s}^2$
- E) $a \leq 1 \text{ m/s}^2$



113. En una tabla de masa $M = 9 \text{ kg}$, colocada sobre cierto plano horizontal liso, yace un cuerpo de masa $m = 3 \text{ kg}$. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y la tabla es μ . ¿Durante qué tiempo el cuerpo se deslizará, si sobre la tabla se ejerce una fuerza $F_0 = 41 \text{ N}$? La longitud de la tabla es $\ell = 8 \text{ m}$.

- A) 4 s
- B) 8 s
- C) 9 s
- D) 10 s
- E) 12 s



114. En una mesa horizontal lisa se encuentra el sistema de cargas mostrado en la figura. El coeficiente de fricción entre las cargas $M = 15\text{ kg}$ y $m = 5\text{ kg}$ es igual a $\mu = 1/2$. La carga inferior derecha se arrastra a lo largo de la mesa con la fuerza $F = 50\text{ N}$, como se indica en la figura. Hállese la aceleración del bloque M de la derecha.



- A) $4/3\text{ m/s}^2$ B) $2/3\text{ m/s}^2$ C) $5/3\text{ m/s}^2$
D) 3 m/s^2 E) $3/5\text{ m/s}^2$

115. La cinta del transportador se mueve a la velocidad $u = 1,2\text{ m/s}$. Sobre la cinta cae una arandela, cuya velocidad inicial $v = 0,5\text{ m/s}$ es perpendicular al límite lateral de la cinta. Hállese la anchura mínima de la cinta, que corresponda al caso en que la arandela alcanza el otro lado. El coeficiente de fricción entre la arandela y la cinta es $\mu = 0,13$; la cinta está dispuesta horizontalmente.

- A) $1,2\text{ m}$
B) $2,5\text{ m}$
C) $1,5\text{ m}$
D) $2,0\text{ m}$
E) $1,8\text{ m}$

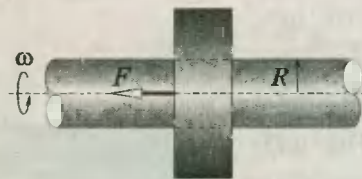


116. En un plano inclinado, para el cual $\text{tg } \alpha = \mu$, yace una moneda. A ésta le comunicaron una velocidad v en dirección perpendicular a la superficie. Hállese la velocidad estacionaria de la moneda.

- A) $v/2$ B) $2v$ C) $v/3$ D) $3v$ E) $2v/3$

117. Un anillo está montado sobre un cilindro de radio $R = 10\text{ cm}$. El primero puede desplazarse solamente a lo largo del cilindro. Determinése la velocidad estacionaria del anillo bajo la acción de la fuerza $F = 12\text{ N}$, aplicada al anillo a lo largo del cilindro, si éste último gira con una velocidad angular $\omega = 80\text{ rad/s}$. La fuerza de fricción máxima del anillo con el cilindro es $F_0 = 20\text{ N}$.

- A) 5 m/s
B) 4 m/s
C) 3 m/s
D) 6 m/s
E) 2 m/s



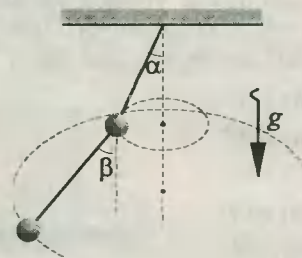
DINAMICA CIRCULAR

118. ¿Dentro de cuántas revoluciones la velocidad de un cuerpo que se mueve en el seno de cierta cavidad esférica, disminuirá $e = 2$ veces? El coeficiente de fricción entre la superficie y el cuerpo es $\mu = 1/8$. Menospréciese la influencia de la gravedad sobre el movimiento del cuerpo.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

119. Un péndulo cónico doble gira alrededor del eje vertical de manera que los dos hilos yacen en un mismo plano y forman con la vertical ángulos constantes $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 37^\circ$. Las longitudes de los hilos son las mismas e iguales a $\ell = 5/11$. Hállese la velocidad angular de rotación del péndulo.

- A) 15 rad/s
B) 16 rad/s
C) 18 rad/s
D) 20 rad/s
E) 25 rad/s



120. Un anillo fino de goma con masa $m = 4\text{ kg}$ y radio $R_0 = 15\text{ cm}$ se hace girar hasta que recibe la velocidad angular $\omega = 1\text{ rev/s}$ alrededor de su eje. Hállese el nuevo radio del anillo si la rigidez de la goma es $k = 9\text{ N/m}$.

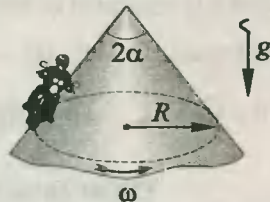
- A) 21 cm B) 18 cm C) 27 cm
D) 24 cm E) 30 cm

121. ¿En cuántas veces aumentará la velocidad máxima admisible del movimiento de un motociclista por una pista oblicua con el ángulo de inclinación $\alpha = 37^\circ$ en comparación con la velocidad máxima admisible por una pista horizontal, siendo igual el radio de la curva y $\mu = 3/5$ en ambos casos?

- A) 1 vez B) 2 veces C) 3 veces
 D) 4 veces E) 5 veces

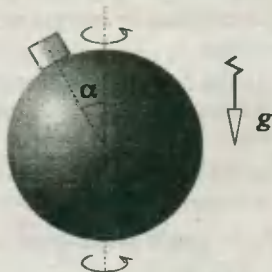
122. ¿Cuál debe ser el coeficiente de fricción de la goma con la superficie interior del cono; cuyo ángulo del vértice es $2\alpha = 90^\circ$, para que un motociclista pueda moverse por una circunferencia de radio $R = 5\text{ m}$ a la velocidad angular $\omega = 1,5\text{ rad/s}$?

- A) $\mu \geq 45/32$
 B) $\mu > 5/6$
 C) $\mu \geq 3/4$
 D) $\mu \geq \sqrt{2}/2$
 E) $\mu > \sqrt{2}/3$



123. En una superficie esférica de radio $R = 20/17\text{ m}$ se encuentra un cuerpo. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y la superficie de la esfera es $\mu = 3/2$ y el ángulo entre la vertical y el radio vector del cuerpo es $\alpha = 37^\circ$. ¿Cuál será la velocidad angular máxima de rotación de la esfera, para la cual el cuerpo sigue inmóvil en su superficie?

- A) 9 rad/s
 B) 8 rad/s
 C) 7 rad/s
 D) 6 rad/s
 E) 5 rad/s



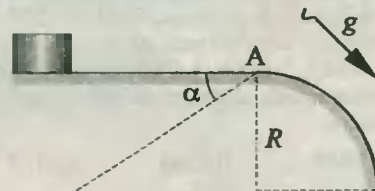
124. ¿A qué velocidad angular como mínimo debe girar alrededor de su eje un cilindro colocado horizontalmente para que las partículas pequeñas dentro del cilindro no se desprendan de su superficie? El coeficiente de fricción entre la superficie del cilindro y las partículas es igual a 1 y el radio interno del cilindro igual a $R = \sqrt{2}/10$.

- A) $5\sqrt{2}\text{ rad/s}$
 B) $4\sqrt{2}\text{ rad/s}$
 C) 2 rad/s
 D) 9 rad/s
 E) 10 rad/s



125. ¿A qué distancia mínima del punto A debemos colocar el cuerpo para que éste en el punto A se desprenda de la superficie y comience una trayectoria balística? El ángulo de inclinación del plano, por el que se mueve el cuerpo, es igual a $\alpha = 45^\circ$, el radio de la cuerda es $R = 10\text{ cm}$. Desprecie la fricción.

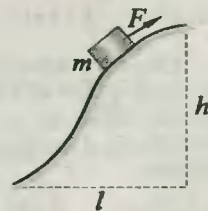
- A) 6 m
 B) 5 m
 C) 4 m
 D) 3 m
 E) 2 m



TRABAJO Y POTENCIA

126. Actuando con la fuerza F dirigida siempre por la tangente a la trayectoria, hicieron subir lentamente a un montículo un pequeño cuerpo de masa $m = 1\text{ kg}$. Hallar el trabajo de esta fuerza, si $h = 6\text{ m}$ es la altura del montículo, $\ell = 4\text{ m}$, es longitud de la base y $\mu = 0,75$, el coeficiente de rozamiento.

- A) 90 J
 B) 100 J
 C) 120 J
 D) 140 J
 E) Faltan datos



127. Un cuerpo de masa $m = 1\text{ kg}$ se lanzó bajo un ángulo $\alpha = 53^\circ$ hacia el horizonte con una velocidad $v_0 = 25\text{ m/s}$. Determinar la potencia media, desarrollada por la fuerza de gravedad durante el movimiento del cuerpo, en función del tiempo.

- A) 200 W B) 1 W C) $0,5\text{ W}$ D) 0 W E) -1 W

128. ¿Qué trabajo hay que realizar para subir un trineo cargado (cuya masa total es $m = 30\text{ kg}$) a un montículo cuya altura es $H = 10\text{ m}$. El ángulo de inclinación de la pendiente es $\theta = 30^\circ$. El coeficiente de rozamiento entre el trineo y el montículo disminuye linealmente a lo largo del camino desde $\mu_1 = 0,5$ en la base, hasta $\mu_2 = 0,1$ en la cumbre.

A) 2,5kJ B) 3,5kJ C) 4,5kJ

D) 5,5kJ E) 6,5kJ

129. Funcionando con potencia constante una locomotora puede arrastrar un tren hacia arriba, por una pendiente cuyo ángulo de inclinación es $\theta_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$, con la velocidad $v_1 = 50 \text{ km/h}$. Para un ángulo de inclinación, $\theta_2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$, en las mismas condiciones, el tren desarrolla la velocidad $v_2 = 60 \text{ km/h}$. Determinar el coeficiente de rozamiento suponiendo que es igual en ambos casos.

A) 0,05 B) 0,04 C) 0,03

D) 0,02 E) 0,01

130. ¿A qué es igual la fuerza media de la resistencia que opone el agua al movimiento de un barco, si éste consume en tres días $M = 6,5t$ de carbón navegando a la velocidad media $v = 10 \text{ km/h}$? El rendimiento del motor del barco es $n = 0,1$, el poder calorífico específico de combustión del carbón $q = 33,5 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$.

A) 30 kN B) 28 kN C) 25 kN

D) 20 kN E) 18 kN

131. Dos automóviles con potencias $N_1 = 30 \text{ kW}$ y $N_2 = 45 \text{ kW}$ desarrollan las velocidades $v_1 = 20 \text{ m/s}$ y $v_2 = 15 \text{ m/s}$. ¿Qué velocidad desarrollarán si los enganchamos? No hay deslizamiento.

A) 12,00 m/s B) 13,50 m/s C) 14,50 m/s

D) 18,75 m/s E) 16,25 m/s

132. Un automóvil de masa $m = 10^3 \text{ kg}$ se pone en marcha. El coeficiente de fricción entre las ruedas y la carretera es $\mu = 0,1$. Los dos ejes del automóvil con ejes impulsores. Hállese la dependencia de la velocidad respecto al tiempo, si la potencia del motor es $N = 18 \text{ kW}$.

A) $4\sqrt{t-10}$ B) $5\sqrt{t+8}$ C) $6\sqrt{t-9}$ D) $3\sqrt{t+7}$ E) $2\sqrt{t-6}$

133. Una lancha impulsada por un chorro de agua se mueve por agua tranquila a velocidad constante v . La velocidad del agua expulsada con relación a la lancha es u . Determinése la

resistencia que ejerce el agua si la sección del flujo del agua que toma el motor es S y la densidad del agua es ρ .

A) $\rho Su(v-u)$ B) $\rho Sv(u+v)$ C) $\rho Su(u+v)$ D) $\rho Sv u$ E) $\rho Sv(u-v)$

134. ¿Qué potencia desarrollan los motores de un cohete que queda suspendido de modo inmóvil sobre la Tierra? La masa del cohete es M y la velocidad de salida de los gases es u .

A) $Mg u/2$ B) $Mg u$ C) $2Mg u$ D) $3 Mg u$ E) $\frac{3}{4} Mg u$

ENERGIAMECANICA

135. Levantaron leña al noveno piso y la quemaron. ¿Qué ocurrió con la energía potencial de la leña? Señala la proposición que creas correcta.

A) La cantidad de energía por combustión será mayor arriba que abajo.

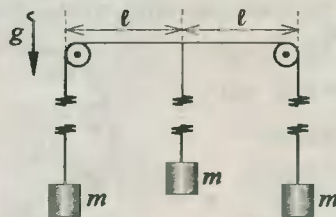
B) La cantidad de energía arriba y abajo será la misma.

C) Arriba la combustión toma menos tiempo gracias al trabajo realizado para levantar la leña.

D) Arriba la combustión toma más tiempo debido al aumento de energía potencial de la leña.

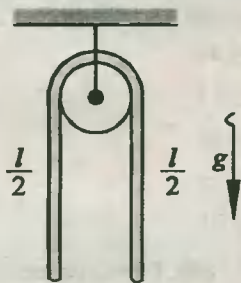
E) No se puede precisar nada.

136. El sistema, mostrado en la figura, se pone en movimiento mediante una carga central de masa m . Determinése la velocidad máxima de la carga central si: $l = 6(2 + \sqrt{3}) \text{ m}$

A) $2\sqrt{3} \text{ m/s}$ B) $4\sqrt{5} \text{ m/s}$ C) $3\sqrt{2} \text{ m/s}$ D) $5\sqrt{5} \text{ m/s}$ E) $6\sqrt{6} \text{ m/s}$ 

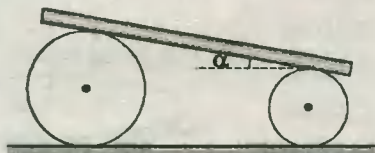
137. Una cuerda homogénea de longitud l y masa m yace sobre la polea de manera que inicialmente se encuentra en equilibrio. No existe fricción. La cuerda empieza a deslizarse. ¿Con qué fuerza actúa la cuerda sobre la polea en el instante en que la longitud de la cuerda en una parte de la polea es igual a $l/3$?

- A) $\frac{6}{5} mg$
- B) $\frac{7}{9} mg$
- C) $\frac{3}{5} mg$
- D) $\frac{4}{9} mg$
- E) $\frac{5}{6} mg$



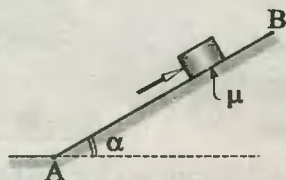
138. Sobre dos rodillos de diferentes radios yace una tabla pesada que forma el ángulo $\alpha = 32^\circ$ con el horizonte. Hállese la aceleración de la tabla, despreciándose la masa de los rodillos. No hay deslizamiento.

- A) $9 m/s^2$
- B) $8,2 m/s^2$
- C) $7 m/s^2$
- D) $6 m/s^2$
- E) $2,8 m/s^2$



139. Al elevar lentamente un cuerpo de masa m por un plano oblicuo con ángulo de inclinación $\alpha = 37^\circ$ y el coeficiente de fricción $\mu = 1/4$, se ha realizado un trabajo $W = 240 J$. Determinése cuánto calor se desprendió.

- A) $160 J$
- B) $120 J$
- C) $40 J$
- D) $60 J$
- E) $2,8 J$



140. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá al dar media vuelta a una barra de sección cuadrada sumergida en agua pasándola de la

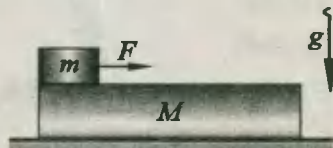
posición vertical a la horizontal?. La masa de la barra es de $10^{-2} kg$. La longitud es de $0,2 m$ y la sección es de $0,01 \times 0,01 m^2$.

- A) $4,9 J$
- B) $3,5 \cdot 10^{-3} J$
- C) $1,2 \cdot 10^{-3} J$
- D) $2,5 \cdot 10^{-3} J$
- E) $4,4 \cdot 10^{-3} J$



141. En una superficie horizontal lisa yace una barra larga de masa $M = 5 kg$. Una fuerza horizontal $F = 14 N$ actúa sobre un cubo de masa $m = 1 kg$ que descansa en la barra durante el tiempo $T = 0,6 s$. El coeficiente de fricción entre la barra y el cubo es $\mu = 5/8$. ¿Qué camino recorrerá el cubo por la superficie de la barra?

- A) $0,42 m$
- B) $0,50 m$
- C) $0,60 m$
- D) $0,65 m$
- E) $0,77770 m$



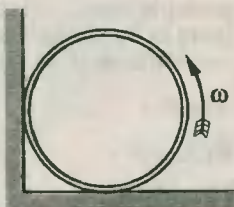
142. ¿Qué trabajo realizará la fuerza de fricción durante una revolución del trineo aéreo recorriendo el rizo?. El movimiento transcurre a velocidad constante v , la masa del trineo es m y el coeficiente de fricción es μ .

- A) πmv^2
- B) $2 \pi mv^2/\mu$
- C) $2 \pi \mu mv^2$
- D) $\pi \mu mv^2$
- E) $\mu mv^2/2\pi$



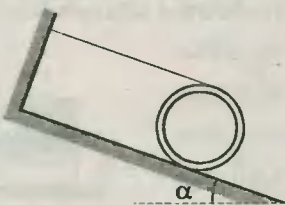
143. Un cilindro de paredes finas y radio $R = 4\pi m$ se hace girar hasta una velocidad angular $\omega = 20 rad/s$ y se pone en un rincón, como se muestra en la figura. El coeficiente de rozamiento de deslizamiento entre las paredes del ángulo y el cilindro es $\mu = 1/3$. ¿Cuántas revoluciones realizará el cilindro hasta pararse?

- A) 80
- B) 90
- C) 120
- D) 110
- E) 150



144. En un cilindro de paredes delgadas se enrolla un hilo, cuyo cabo se fija en el soporte en el punto superior del plano oblicuo de manera que, al deslizarse el cilindro, el hilo permanece paralelo todo el tiempo al plano. Determinése la velocidad del cilindro en el punto inferior del plano, si su longitud es $\ell = 135\text{ m}$, el ángulo de inclinación hacia el horizonte es $\alpha = 30^\circ$ y el coeficiente de rozamiento es $\mu = \sqrt{3}/9$.

- A) 8 m/s
- B) 9 m/s
- C) 10 m/s
- D) 12 m/s
- E) 15 m/s

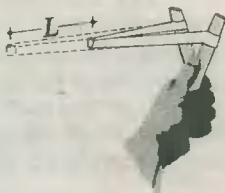


145. Cierta persona encontrándose en una escalera automática que se mueve hacia abajo, decide subir por ella en dirección contraria. ¿Qué trabajo como mínimo deberá efectuar para subir a la altura $H = 9\text{ m}$ durante el tiempo $T = 5\text{ s}$? La masa de la persona es $m = 60\text{ kg}$, la velocidad de la escalera automática es $v = 1\text{ m/s}$ y el ángulo de inclinación es $\alpha = 37^\circ$.

- A) 5,10 kJ
- B) 6,20 kJ
- C) 5,64 kJ
- D) 6,00 kJ
- E) 7,00 kJ



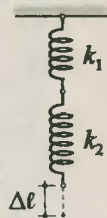
146. El tiragomas está hecho de caucho con rigidez $k = 180\text{ N/m}$. Hálese la velocidad del "Proyectil" de masa $m = 0,2\text{ kg}$, lanzado de dicho tiragomas si éste se estiró una longitud $L = 20\text{ cm}$.



- A) 6 m/s B) 8 m/s C) 10 m/s
- D) 12 m/s E) 14 m/s

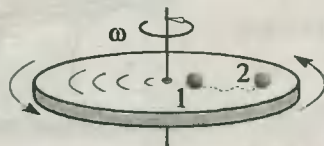
147. Un sistema se compone de dos resortes unidos, cuyos coeficientes de rigidez son $k_1 = 30\text{ N/cm}$ y $k_2 = 60\text{ N/cm}$. Hallar el trabajo mínimo necesario para estirar este sistema a una longitud $\Delta\ell = 60\text{ cm}$.

- A) 5,4 J
- B) 3,6 J
- C) 4,8 J
- D) 3,2 J
- E) 4,0 J



148. En un sistema de referencia, que gira alrededor de un eje fijo a la velocidad angular constante $\omega = 5\text{ rad/s}$, se mueve un pequeño cuerpo de masa $m = 0,1\text{ kg}$. ¿Qué trabajo realizó la fuerza centrífuga de inercia durante el desplazamiento de este cuerpo por una trayectoria arbitraria, desde el punto 1 al punto 2 que distan $r_1 = 30\text{ cm}$ y $r_2 = 50\text{ cm}$ del eje de rotación?

- A) 0,60 J
- B) 0,50 J
- C) 0,40 J
- D) 0,30 J
- E) 0,20 J



149. Sobre una pelota de tenis cae de una altura de 1 m un ladrillo y rebota casi a 1 m. Estímese a qué altura saltará la pelota.

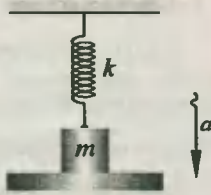
- A) 0,25 m
- B) 0,50 m
- C) 0,45 m
- D) 0,60 m
- E) 0,80 m



150. Cierta cuerpo suspendido en un muelle, descansa sobre una tabla. En el instante inicial el muelle no está estirado. La tabla empieza a bajar con aceleración $a = 5\text{ m/s}^2$. ¿Cuál será la longitud del alargamiento máximo del muelle? $m = 0,1\text{ kg}$; $k = 5(2 + \sqrt{3})\text{ N/m}$



- A) 0,2m
- B) 0,1m
- C) 0,5m
- D) 0,3m
- E) 0,4m



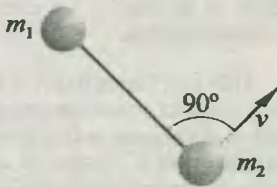
CANTIDAD DE MOVIMIENTO

151. Un proyectil, lanzado bajo un ángulo hacia el horizonte, explota en el punto superior de la trayectoria (distando L del cañón por la horizontal) y forma dos fragmentos iguales. Uno de los fragmentos cae al lado del cañón. ¿Dónde caerá el segundo fragmento respecto del cañón si el primero volvió describiendo la trayectoria del proyectil?

- A) 2L B) 3L C) 4L D) 5L E) 6L

152. Dos cuerpos de masas $m_1 = 4\text{ kg}$ y $m_2 = 12\text{ kg}$ están unidos por un hilo de longitud ℓ y se mueven por una superficie horizontal lisa. En cierto instante resultó que el cuerpo m_1 quedó inmóvil, mientras que la velocidad del cuerpo m_2 , igual a $v = 3\text{ m/s}$, era perpendicular al hilo. Determiné la tensión del hilo en dicho instante.

- A) 16N
- B) 20N
- C) 25N
- D) 27N
- E) 30N



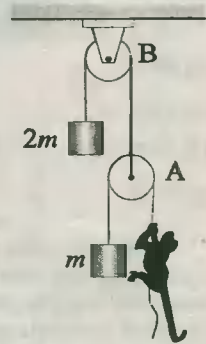
153. ¿Con qué fuerza presiona sobre la tierra una cobra cuando, preparándose a saltar, se levanta verticalmente con una velocidad constante $v = 3\text{ m/s}$? La masa de la serpiente es $m = 3\text{ kg}$ y su longitud es $\ell = 1,5\text{ m}$.

- A) 20N
- B) 30N
- C) 36N
- D) 24N
- E) 48N



154. Una mona de masa m está equilibrada con un contrapeso en la polea A. La polea A queda equilibrada con una carga $2m$ en la polea B. El sistema permanece inmóvil. ¿Cómo se moverá la carga $2m$, si la mona comienza a acortar uniformemente la cuerda tirando de ella a la velocidad u con relación a sí misma?. Despreciar las masas de las poleas y la fricción.

- A) $u/4$ (\uparrow)
- B) $u/3$ (\downarrow)
- C) $u/2$ (\uparrow)
- D) $2u/3$ (\uparrow)
- E) $3u/4$ (\uparrow)



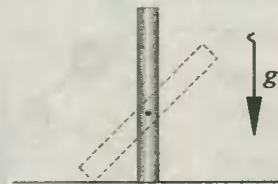
155. En un suelo liso se encuentra cierto recipiente lleno de agua de densidad ρ_0 y volumen V_0 . En él se halla un grillo de volumen $V = V_0/99$ y densidad $\rho = \rho_0/5$. El bicho comienza a moverse a la velocidad u con respecto al recipiente. ¿Con qué velocidad empieza a moverse el recipiente con relación al suelo?. Despreciar la masa del recipiente.

- A) $u/20$
- B) $u/25$
- C) $u/26$
- D) $u/30$
- E) $u/35$



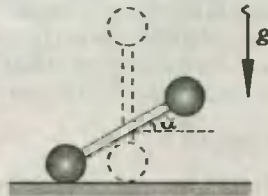
156. Un lápiz de longitud ℓ cae de la posición vertical sobre una superficie horizontal lisa. Determiné la velocidad del extremo superior del lápiz en el instante en que éste cocha contra la superficie.

- A) $3\sqrt{g\ell}$
- B) $2\sqrt{g\ell}$
- C) $\sqrt{g\ell}$
- D) $\sqrt{2g\ell}$
- E) $\sqrt{3g\ell}$



157. Determínese la fuerza que ejerce sobre un plano horizontal liso el halterio en caída, en el instante que su eje forma el ángulo $\alpha = 30^\circ$ con el horizonte. El halterio empieza su movimiento desde la posición vertical sin velocidad inicial. La masa de cada bola del halterio es $m = 4,9 \text{ kg}$.

- A) 20 N
- B) 30 N
- C) 40 N
- D) 50 N
- E) 60 N

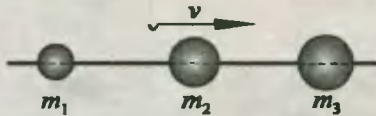


158. Una partícula pesada de masa $M = 25 \text{ kg}$ choca con una partícula ligera en reposo con masa $m = 7 \text{ kg}$. ¿A qué ángulo máximo puede desviarse la partícula pesada durante la colisión?

- A) 30° B) 37° C) 45° D) 53° E) 16°

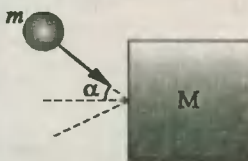
159. Tres abalorios con masas $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 6 \text{ kg}$ y $m_3 = 18 \text{ kg}$ pueden deslizarse a lo largo de una aguja horizontal sin fricción. Determínese la velocidad máxima del abalorio 3 dispuesto en el extremo, si en el instante inicial 1 y 3 estaban en reposo, mientras que el central tenía una velocidad $v = 15 \text{ m/s}$. Considérese que las colisiones son elásticas.

- A) 6 m/s
- B) 5 m/s
- C) 4 m/s
- D) 3 m/s
- E) 2 m/s



160. Una partícula de masa $m = 5,5 \text{ kg}$ choca contra un cubo de masa $M = 12,5 \text{ kg}$ bajo el ángulo $\alpha = 16^\circ$ respecto a la normal del plano del cubo. El cubo se encuentra en reposo. Determínese bajo qué ángulo rebota la partícula si la colisión es elástica.

- A) 74°
- B) 60°
- C) 53°
- D) 45°
- E) 37°



GRAVITACION UNIVERSAL

161. ¿Porqué la Tierra transmite a todos los cuerpos una misma aceleración independientemente de la masa de éstos?

- A) Porque la tierra tiene una forma esférica.
- B) Porque la deformación del espacio que causa la tierra es la misma para todos.
- C) Porque la fuerza de atracción depende de la masa terrestre.
- D) Porque la atracción gravitatoria es radial.
- E) Ninguna es correcta.

162. ¿En qué condiciones los cuerpos dentro de una nave cósmica estarán en un estado de imponderabilidad, es decir, dejarán de ejercer presión sobre las paredes de la cabina de la nave?

- A) Cuando se agote el combustible.
- B) Cuando se produce el despegue.
- C) Solo cuando la nave y los cuerpos estén afectados por la misma aceleración.
- D) Siempre que la nave no experimente ninguna fuerza externa.
- E) Solo si la nave y los cuerpos presentan la misma rapidez.

163. En el agua hay dos burbujas de aire de radio r . ¿Habrá atracción o repulsión entre ellas? ¿Cuál es el valor de la fuerza de interacción? La distancia entre las burbujas es igual a R . Señalar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

- () Existe atracción entre ellas.
- () Existe repulsión entre ellas.
- () La fuerza de interacción entre ellas es : Gm^2/R^2

- A) VVV B) VFF C) FVF D) FVV E) VFV

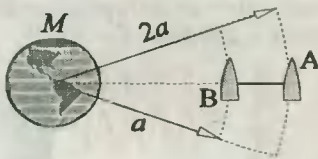
164. Un cuerpo de masa m se mueve por el Ecuador a la velocidad v . Búsqese la fuerza con la que el cuerpo ejerce atracción sobre la superficie terrestre. Estúdiase el caso del movimiento del cuerpo de Este al Oeste, asumiendo que:

$3\omega R = 6v = \sqrt{gR}$; donde ω es la velocidad angular de la tierra y R es el radio ecuatorial.

- A) $4mg$ B) $2mg$ C) $\frac{2}{3}mg$
 D) $\frac{1}{4}mg$ E) $\frac{3}{4}mg$

165. Determinése la tensión del cable que une dos naves cósmicas de masas $M =$ masa de la tierra, que giran alrededor de la Tierra distando de ella a y $2a$ de manera que el cable está siempre dirigido en sentido contrario al de la Tierra.

- A) Cero
 B) $\frac{5}{9} \frac{GmM}{a^2}$
 C) $\frac{7}{12} \frac{GmM}{a^2}$
 D) $\frac{1}{2} \frac{GmM}{a^2}$
 E) N.A.



166. ¿Cómo cambiaría la duración de un año terrestre, si la masa de la Tierra aumentase y se hiciese igual a la masa del Sol, mientras que la distancia entre ellos siguiera siendo la misma?

- A) 1 año B) 0,7 años C) 0,6 años
 D) 0,5 años E) 0,1 años

167. ¿Cuál debió ser la velocidad mínima del proyectil de Julio Verne para que vaya a parar a la Luna?

- A) $0,9km/s$ B) $8km/s$ C) $9km/s$
 D) $11,1km/s$ E) $13km/s$

168. Un satélite artificial de la Tierra ha sido lanzado desde el Ecuador y se mueve por una órbita circular en el plano de éste en el sentido de la rotación de la Tierra. El radio de la órbita del satélite es $R = 3R_T$, donde $R_T = 6400km$; $T_T = 24h$. Al cabo de cuánto tiempo pasará por primera vez el satélite sobre el punto de lanzamiento?

- A) 0,94 día B) 0,85 día C) 0,70 día
 D) 0,65 día E) 0,44 día

169. A un cuerpo se le comunicó una velocidad $v_0 = \frac{4}{3} \sqrt{gR}$ verticalmente hacia arriba en uno de los polos de la Tierra. Conociendo el radio R de la Tierra y la aceleración de caída libre, determinar a qué altura asciende el cuerpo.

- A) $R/2$ B) $5R/3$ C) $R/7$ D) $2R$ E) $8R$

170. Un proyectil se lanza con la primera velocidad cósmica bajo cierto ángulo al horizonte. ¿Qué trayectoria describirá el proyectil?

- A) Elipse B) Parábola C) Hipérbola
 D) Recta E) Circunferencia

171. ¿Qué velocidad hay que comunicar horizontalmente a un cuerpo cerca de la superficie terrestre en uno de los polos de la Tierra para ponerlo en una órbita elíptica, cuyo semieje mayor sea igual a "a"?

- A) $\sqrt{2gR(1-3R/2a)}$ D) $\sqrt{2gR(1-2R/a)}$
 B) $\sqrt{2gR(1-4R/a)}$ E) $\sqrt{2gR(1-R/2a)}$
 C) $\sqrt{2gR(1-3R/a)}$

172. Determinése en cuántas veces la masa del planeta Marte es inferior a la masa de la Tierra, si se sabe que el satélite de Marte (Fobos) gira en torno a este planeta por una órbita de $9400km$ de radio y con un período de $7h39min$.

- A) 12,2 veces B) 11,5 veces C) 8,5 veces
 D) 9,3 veces E) 10,2 veces

173. El satélite de un planeta se mueve por una órbita circular a la altura h sobre la superficie del mismo. Es necesario pasarlo a una órbita elíptica con el alejamiento máximo de la superficie del planeta $H = 5R$ y la distancia mínima $h = R$. ¿Cuál será el período de revolución del satélite por la nueva órbita elíptica? El radio del planeta es R y su masa es M .

- A) $5\pi R \sqrt{2R/GM}$ D) $\pi R \sqrt{6R/GM}$
 B) $8\pi R \sqrt{R/GM}$ E) $\pi R \sqrt{R/GM}$
 C) $16\pi R \sqrt{R/GM}$

174. ¿Cuál es el trabajo mínimo necesario, para lanzar una nave cósmica de masa $m = 2 \cdot 10^3$ kg desde la superficie de la Tierra a la Luna?

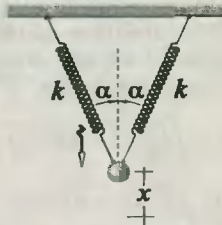
Datos: $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m ;

$M_L = 7,3 \cdot 10^{22}$ kg ; $R_L = 1,78 \cdot 10^6$ m

- A) $2,4 \cdot 10^8$ kJ B) $3,0 \cdot 10^8$ kJ C) $5,0 \cdot 10^8$ kJ
D) $1,3 \cdot 10^8$ kJ E) $0,8 \cdot 10^8$ kJ

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

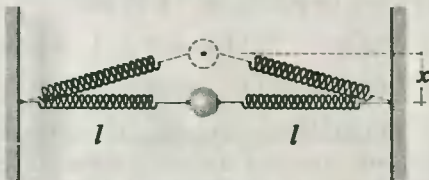
175. La figura muestra el estado de equilibrio. ¿Qué dependencia existe entre la fuerza total que actúa sobre el cuerpo y sus desplazamientos pequeños x ? Despreciar la acción de la gravedad.



- A) $3k \sin \alpha x$
B) $-2k \cos \alpha x$
C) $k \sin \alpha x$
D) $-3k \cos \alpha x$
E) $-k \operatorname{tg} \alpha x$

176. Supongamos que los muelles permanecen en estado no deformado y sus longitudes son iguales a l . Hállese la fuerza que actúa sobre el cuerpo en caso de pequeños desplazamientos horizontales x .

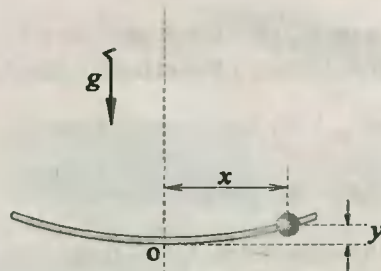
$k =$ constante de elasticidad de los resortes.



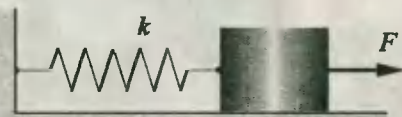
- A) $-k(l-x)$ B) $k(x-l)$ C) $-kx^2/l$
D) kx^2/l E) $-kx^3/l^2$

177. Por un alambre encorvado de radio R puede deslizarse una carga de masa m . ¿Qué dependencia existe entre la fuerza que actúa sobre la carga y los desplazamientos x para el caso « y »?

- A) $-mgx/R$ B) $+2mgx/R$ C) $mgx/2R$
D) $-mgx/2R$ E) $+mgx^2/3R^2$



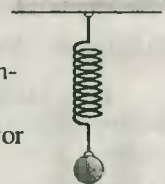
178. Un bloque de acero se sujeta a un muelle de rigidez k . Para cualquier posición de éste sobre la barra actúa una fuerza magnética constante F . ¿Cómo dependerá la fuerza total, que actúa sobre el bloque, con relación al desplazamiento x desde la posición de equilibrio? Datos: $k = 200$ N/m ; $F = 300$ N



- A) $+200x$ B) $+200x - 300$ C) $-200x - 300$
D) $+500x$ E) $-200x$

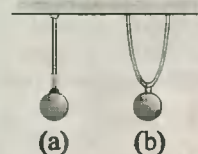
179. ¿Porqué parece que una bombilla incandescente, cuando oscila rápidamente en un muelle, se enciende en los puntos extremos?

- A) Por interferencia de la luz.
B) Por difracción de la luz.
C) La energía mecánica se convierte en energía luminosa.
D) En los extremos hay una mayor agitación electrónica.
E) El resorte calienta el filamento.



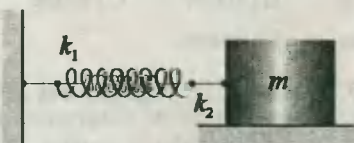
180. Una carga oscila por la vertical en un cordón de goma. ¿En cuánto variará el período de oscilaciones si la carga se cuelga del mismo cordón, pero doblado?

- A) Se duplica
B) Se triplica
C) Le hace la mitad
D) La hace la tercera parte
E) No cambia



181. Hállese el período en segundos de las vibraciones de los osciladores mostrados.

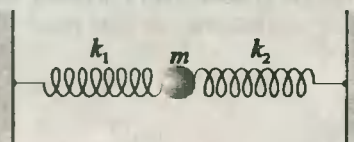
$$k_1 = 8 \text{ N/m}; k_2 = 12 \text{ N/m}; m = 5 \text{ kg}$$



- A) $5\pi/3$ B) $3\pi/2$ C) 2π
D) $\pi/2$ E) π

182. Dos resortes no deformados con rigideces k_1 y k_2 se sujetan a dos paredes. Entre ellos contactando con los extremos libres, se encuentra una bola de masa m . Si ésta no está sujeta a los resortes ¿Cómo se relacionan las desviaciones máximas de la bola a la izquierda y a la derecha de la posición de equilibrio?

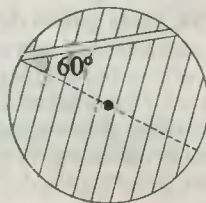
$$k_1 = 6 \text{ kN/m}; k_2 = 2 \text{ kN/m}$$



- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

183. A través de la Tierra se practica un túnel recto que no pasa por su centro. Determinése el tiempo de movimiento de un tren con los motores desconectados por semejante túnel sino hay fricción. Menospréciase la rotación de la Tierra, y considere el radio de la Tierra igual a 6400 km .

- A) 56 min
B) 42 min
C) 21 min
D) 24 min
E) 25 min



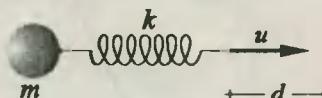
184. Una carga que oscila libremente en un resorte, se desplaza durante un tiempo de $0,01 \text{ s}$ desde la distancia de $0,5 \text{ cm}$ con respecto a la posición de equilibrio hasta la máxima elongación igual a 1 cm . ¿Cuál es el período de las oscilaciones?

- A) $0,12 \text{ s}$ B) $0,03 \text{ s}$ C) $0,06 \text{ s}$ D) $0,15 \text{ s}$ E) $0,02 \text{ s}$

185. La frecuencia de las vibraciones libres de un oscilador es ω . ¿Dentro de cuánto tiempo mínimo la energía cinética del oscilador disminuirá desde el valor máximo hasta la mitad de éste?

- A) π/ω B) $\sqrt{2} \pi/\omega$ C) $2\pi/3\omega$
D) $\pi/4\omega$ E) $2\pi/\omega$

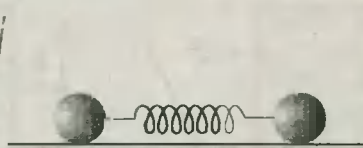
186. A uno de los extremos del resorte con rigidez $k = 32\pi^2 \text{ N/m}$ no deformado inicialmente se sujeta cierta carga de masa $m = 2 \text{ kg}$, mientras del otro extremo empiezan a tirar con una velocidad u a lo largo del resorte. A la distancia $d = 5 \text{ m}$ de la posición inicial este extremo del resorte de nuevo lo paran bruscamente. ¿En caso de qué velocidades u la carga una vez parada no oscilará?



- A) 2 m/s B) 5 m/s C) 7 m/s
D) 8 m/s E) 10 m/s

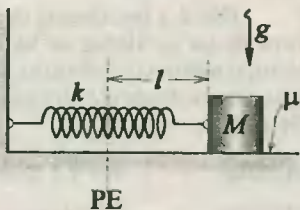
187. Por un plano horizontal se deslizan a la velocidad v dos bolas de masas iguales $m = 3 \text{ kg}$, unidas mediante un muelle no deformado de rigidez $k = 150 \text{ N/m}$. Las bolas chocan contra una pared elástica vertical. Describáse el movimiento de las bolas en lo sucesivo. ¿Tendrá lugar otra colisión más contra la pared?

- A) $\pi/3 \text{ s}$
B) $\pi/5 \text{ s}$
C) $2\pi/5 \text{ s}$
D) $5\pi \text{ s}$
E) 2π



188. Sobre un plano horizontal yace cierto cuerpo de masa M , unido con una pared inmóvil mediante un muelle de rigidez k . El cuerpo se separa a una distancia l de la posición de equilibrio y se deja libre. Después de n oscilaciones el cuerpo se para. ¿Cuál será el valor de μ entre el cuerpo y el plano, si después de pararse, el muelle resultó no deformado?

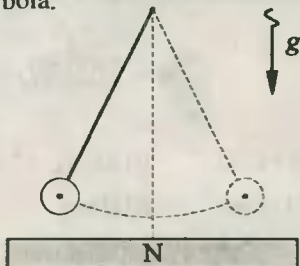
- A) $4 kln/Mg$
- B) kln/Mg
- C) $kl/4Mgn$
- D) $2 kl/Mgn$
- E) kl/Mgn



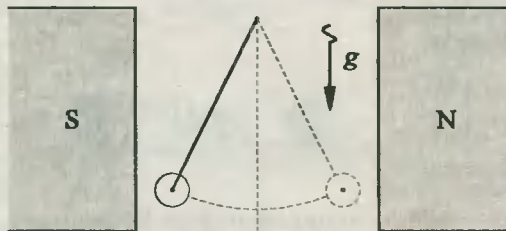
PENDULO SIMPLE

189. El péndulo matemático -una bola de hierro de masa $m = 0,5 \text{ kg}$ suspendida de un hilo largo- posee el período T_0 . En presencia de un imán, situado un poco más abajo de la bola por la vertical, el período de las oscilaciones se volvió $T = T_0/3$. Determinése la fuerza magnética que actúa sobre la bola.

- A) 40N
- B) 50N
- C) 60N
- D) 70N
- E) 80N



190. El péndulo del problema anterior se coloca ahora entre dos polos de imán, de manera que sobre ella ejercen una fuerza magnética horizontal. Hállese esta fuerza, si el período de las pequeñas oscilaciones se hizo T .



- A) $20\sqrt{3} \text{ N}$
- B) 40N
- C) 15N
- D) $20\sqrt{5} \text{ N}$
- E) 20N

191. En las inmediaciones de un yacimiento de minerales, el período de oscilaciones del péndulo cambió en 0,1s por cien. La densidad del mineral en el yacimiento es de $8g/cm^3$. Estímese

el radio del yacimiento, si la densidad de la Tierra es de $5,6 g/cm^3$ y su radio es de 6 400 km.

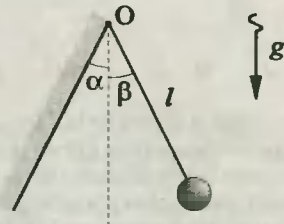
- A) 20 km
- B) 30 km
- C) 45 km
- D) 60 km
- E) 65 km

192. Después de empujar dos péndulos idénticos con el punto de suspensión común éstos adquieren velocidades iguales, pero uno de ellos con cierto tiempo de retraso T . ¿Cuándo se encontrarán los péndulos, si el período de sus oscilaciones es $T_0 = 2T$?

- A) $\frac{3}{8} T_0$
- B) $\frac{2}{9} T_0$
- C) $\frac{5}{4} T_0$
- D) $\frac{3}{5} T_0$
- E) $\frac{5}{8} T_0$

193. Al punto O de una pared que forma un pequeño ángulo α con la vertical se colgó de un hilo de longitud $l = 1 \text{ m}$, una bola. Luego se inclinó el hilo con la bola en un pequeño ángulo $\beta = 2\alpha$ y se soltó. Considerando absolutamente elástico el golpe de la bola contra la pared, hallar el período de oscilaciones de éste péndulo.

- A) $\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ s}$
- B) $\frac{2}{3} \text{ s}$
- C) $\frac{4}{3} \text{ s}$
- D) $\frac{5}{3} \text{ s}$
- E) 2s



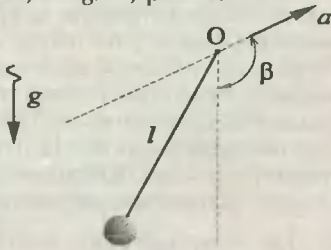
194. En la cabina de un ascensor que empezó a elevarse con una aceleración constante $a = 7,5 \text{ m/s}^2$ se instaló un reloj de péndulo. A la altura $h = 3,75 \text{ m}$ la aceleración de la cabina cambia de sentido, manteniéndose igual su módulo. ¿Al cabo de qué tiempo de haber iniciado el movimiento, la indicación del reloj resulta ser justa?

- A) 30s
- B) $4\sqrt{3} \text{ s}$
- C) $5\sqrt{3} \text{ s}$
- D) $\sqrt{7} \text{ s}$
- E) $(\sqrt{7} - 1) \text{ s}$

195. Determinar el período de las oscilaciones pequeñas de un péndulo matemático de longitud $l = 5\sqrt{7} \text{ m}$, si el punto de suspensión O se

mueve respecto a la superficie de la Tierra en una dirección arbitraria y con una aceleración constante a . $l = 21 \text{ cm}$; $a = g/2$; $\beta = 120^\circ$

- A) πs
- B) $2\pi s$
- C) $3\pi s$
- D) $5\pi s$
- E) $7\pi s$

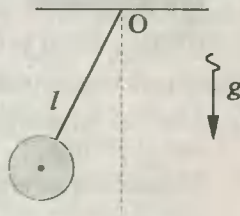


196. Hallar la dependencia entre el tiempo y el ángulo de desviación de un péndulo matemático de 80 cm de longitud, si en el momento inicial el péndulo: Se inclinó en $3,0^\circ$ y a su extremo inferior le fué comunicada una velocidad de $0,22 \text{ m/s}$ dirigida hacia la posición de equilibrio.

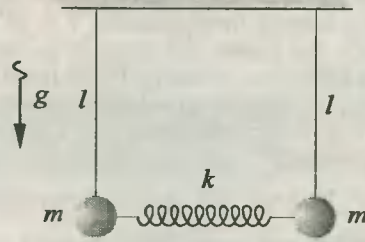
- A) $5,4^\circ \cos(3,5t + 1)$
- B) $3^\circ \cos(3,5t - 1)$
- C) $3^\circ \cos(3,5t + 1)$
- D) $4,5^\circ \cos(3,5t)$
- E) $4,5^\circ \sin(3,5t)$

197. Un péndulo representa un recipiente esférico liviano de radio R y de paredes delgadas, completamente lleno de agua. El recipiente se fija a una barra liviana rígida. La distancia entre el punto de suspensión O y el centro del recipiente es igual a $l = 4R$. ¿Cuántas veces variará el período de las oscilaciones pequeñas de este punto una vez que el agua se congele? Despreciar la viscosidad del agua y la variación de volumen con la congelación.

- A) $\sqrt{1,5}$
- B) $\sqrt{\frac{37}{40}}$
- C) $\sqrt{\frac{83}{80}}$
- D) $\sqrt{\frac{17}{12}}$
- E) $\sqrt{\frac{19}{21}}$



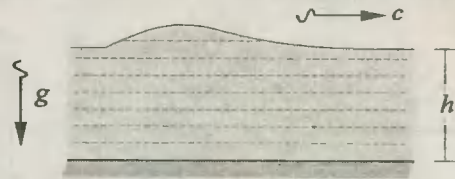
198. Dos péndulos simples de longitud l c/u están unidos por un muelle imponderable, como muestra la figura de rigidez k . En equilibrio los péndulos están en posición vertical y el muelle no está deformado. Determinar la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones de los péndulos: Cuando se desvían hacia lados opuestos.



- A) $\sqrt{gl/m+k/lm}$
- B) $\sqrt{gl/m-k/lm}$
- C) $\sqrt{2gl/m+k/lm}$
- D) $\sqrt{g/l+2k/m}$
- E) $\sqrt{2gl/m-k/lm}$

ONDAS MECANICAS

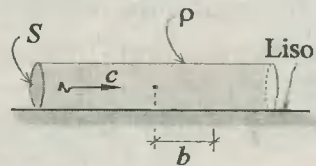
199. Determinése la velocidad de las "ondas en agua poco profunda". Así se denominan por lo general las perturbaciones del nivel de agua, cuya extensión es mucho mayor que la profundidad del agua h . El cambio del nivel a causa de la perturbación es pequeño en comparación con h .



- A) $2\sqrt{gh}$
- B) $\sqrt{3gh/2}$
- C) $\sqrt{gh/2}$
- D) $\sqrt{2gh}$
- E) \sqrt{gh}

200. El centro de una barra con sección S y densidad ρ se desplazó a la derecha a una distancia b después de que pasó una onda corta de compresión longitudinal. La velocidad de la onda es c . Determinése el impulso de la onda.

- A) $\rho c b S$
- B) $3\rho c b S$
- C) $\rho c b S/2$
- D) $c b^2 S/\rho$
- E) $c \rho S/b^2$



201. Una cuerda se estira por los extremos mediante fuerzas longitudinales $T = 9N$. Ella consta de dos partes con densidades lineales $\mu_1 = 16 \text{ kg/m}$ y $\mu_2 = 4 \text{ kg/m}$. Por el lugar de su unión empiezan a tirar con una fuerza transversal $F = 54N$. Hallar la velocidad en la zona de unión de las cuerdas.

- A) $2m/s$ B) $2m/s$ C) $2m/s$ D) $2m/s$ E) $2m/s$

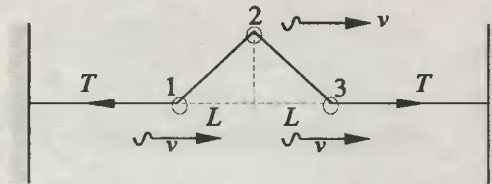
202. En una cuerda, cuya masa por unidad de longitud es μ y la tensión es T , se ponen tres anillos lisos. Ellos se mueven a la velocidad v a lo largo de la cuerda; con la misma velocidad, así y sin cambiar su forma, se mueve el perfil, creado por los anillos. ¿Qué fuerzas obran por parte de los anillos sobre la cuerda? ¿Qué es lo que sucede al aproximarse v a $\sqrt{T/\mu}$?

Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

() $F_1 = (\mu v^2 - T)b/L$ (↑)

() $F_2 = 2(T - \mu v^2 -)b/L$ (↑)

() Cuando v se aproxima a $\sqrt{T/\mu}$ la cuerda no se opone a la flexión.



- A) VFV B) VVV C) FFV D) FVV E) FVF

203. La velocidad de las ondas de "flexión", de un neumático es de 160..... 200km/h. ¿Qué ocurrirá al aproximarse la velocidad del automóvil a esta magnitud?

- () Las ondas de flexión y de perturbación.
 () La amplitud de las ondas aumentan suavemente.
 () El neumático puede estallar.

Señalar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- A) FVF B) FVV C) VFF D) VFV E) VVV

204. En su conferencia "Sobre las ondas de barco", Lord Kelvin narra: "..... un descubrimiento fue en realidad hecho por un caballo que arrastraba diariamente una lancha por el canal entre Glasgow y Ardrossan. Una vez el caballo se asustó y desbocó a galope, en tanto que el cochero, siendo una persona observadora, vio que cuando el caballo alcanzó cierta velocidad, se hizo ostensiblemente más fácil tirar de la lancha, mientras que detrás de ella desapareció la traza de la onda". Explíquese este fenómeno.

- I) Las velocidades de la onda y de la lancha se igualaron.
 II) La velocidad de la onda se hizo mayor que la de lancha.
 III) La velocidad de la lancha alcanzó el valor de las ondas longitudinales de las moléculas de agua.

Son verdaderas :

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
 D) I y II E) II y III

205. Una onda plana incide sobre una superficie de separación plana de dos medios con velocidades del sonido c_1 y $c_2 = 6/5 c_1$ bajo un ángulo $\alpha = 30^\circ$ a la normal. Hállese la dirección de propagación de la onda refractada.

- A) 74° B) 60° C) 53° D) 45° E) 37°

206. Cuando el avión vuela a velocidad subsónica, en la Tierra se oye el ruido de los motores. En cambio cuando sobre nosotros vuela un supersónico, primero se oye un estampido fuerte y luego ya el ruido de los motores.

Luego podemos afirmar que :

- I.- El avión subsónico se mueve muy rápido que el sonido.
 II.- El sonido de los motores es lento en comparación con las ondas creadas por el supersónico
 III.- El supersónico crea un frente de ondas de choques.

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
 D) I y II E) II y III

207. ¿Porqué el sonido se oye mucho mejor en dirección del viento que contra éste? La velocidad del viento disminuye considerablemente al aproximarse a la superficie terrestre. Esto se debe a que :

- I.- Puede haber refracción en las zonas rocosas submarinas.
 - II.- Puede haber reflexión interna total en la superficie de las profundidades.
 - III.- La longitud de las ondas son menores que las montañas submarinas.
- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) II y III

208. Por una cuerda se propagan dos ondas opuestas con energía W cada una. ¿Cuáles serán las energías cinética y potencial en el instante en que coincidan las bases de las ondas, mostradas en la figura? Los perfiles de las flecciones son iguales.

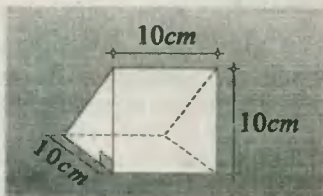


- A) 0 ; 2W B) 0 ; 0 C) 2W ; 0
D) 2W ; 2W E) W ; W

HIDROSTATICA

209. En el líquido se halla un prisma rectangular, cuyas dimensiones se dan en la figura. Búsqese la suma de las fuerzas que actúan sobre la cara frontal e inferior del prisma, si la presión del líquido es de $2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

- A) $2\sqrt{2} \text{ kN}$
B) $2\sqrt{5} \text{ kN}$
C) 2 kN
D) $2\sqrt{3} \text{ kN}$
E) 20 kN

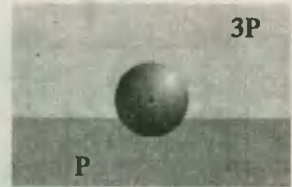


210. La resultante que ejerce el líquido comprimido sobre tres caras de un tetraedro regular es igual a $F = \sqrt{3} \text{ kN}$. La longitud de la arista del tetraedro es $a = 2 \text{ m}^2$. Determinése la presión del líquido.

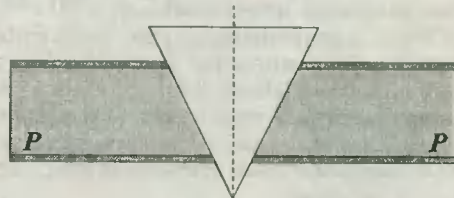
- A) 3 kPa B) 4 kPa C) 12 kPa
D) 1 kPa E) 2 kPa

211. Una esfera de radio R tapa un orificio de radio $r = 5 \text{ cm}$ en cierta pared plana que divide dos líquidos con presiones $3P$ y $P = 4/\pi \text{ kPa}$. ¿Con qué fuerza se aprieta la esfera contra el orificio?

- A) 30N
B) 20N
C) 25N
D) 10N
E) 15N



212. Un tapón cónico tapa al mismo tiempo dos orificios en un recipiente plano, lleno de líquido a presión $P = \frac{5}{\pi} \text{ kPa}$. Los radios de los orificios son $r = 3 \text{ cm}$ y $R = 5 \text{ cm}$. Determinése la fuerza que ejerce el líquido sobre el tapón.



- A) 21N B) 9N C) 7N
D) 8N E) 16N

213. ¿Porqué la salchicha en agua hirviendo revienta a lo largo de su longitud y no en sentido transversal?

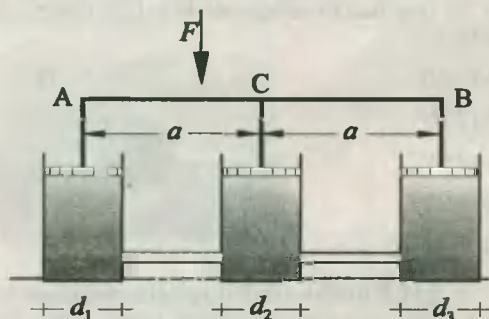
- I.- La fuerza por unidad de longitud a lo largo del perímetro de la sección longitudinal es mayor que el de la sección transversal.
- II.- La presión se distribuye longitudinalmente.
- III.- La resistencia de la salchicha es menor en su sección transversal que en su sección longitudinal

Señalar lo correcto:

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) Todas

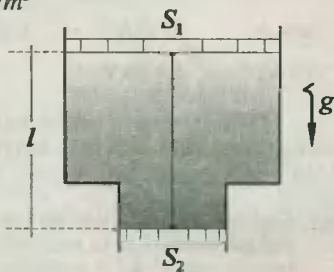
214. ¿En qué parte de la varilla AB es necesario aplicar la fuerza F para que ella siga permaneciendo horizontalmente? Los diámetros de los recipientes y las distancias entre ellos se indican en la figura.

$d_1 = d_2 = 2 \text{ cm}$; $d_3 = 1 \text{ cm}$; $a = 18 \text{ cm}$



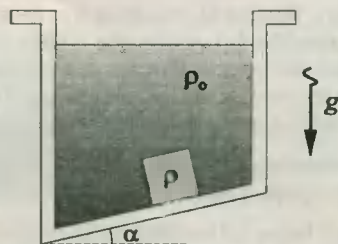
- A) 5 cm B) 6 cm C) 8 cm
D) 9 cm E) 12 cm

215. El recipiente mostrado en la figura, tiene, secciones transversales $S_1 = 50 \text{ cm}^2$ y $S_2 = 30 \text{ cm}^2$, y dos émbolos sin peso. Estos émbolos están unidos entre sí por un alambre fino de longitud $l = 8 \text{ cm}$. Hallar la fuerza de tensión T del alambre si el espacio entre los émbolos está lleno de agua. Despréciase el rozamiento. Los extremos del recipiente están abiertos a la atmósfera. $D_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$



- A) 2 N
B) 4 N
C) 5 N
D) 6 N
E) 8 N

216. En el fondo de un recipiente, que forma un ángulo $\alpha = 37^\circ$ con el horizonte, se encuentra un cubo con arista $a = 1 \text{ m}$, hecho de un material de densidad $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Se sabe que en el recipiente se vierte un líquido de densidad $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$ y la arista superior del cubo dista h de la superficie del líquido, además entre el fondo del recipiente y el cubo no hay líquido. La presión atmosférica es $P = 10^5 \text{ Pa}$ y la aceleración de la caída libre es g . Se plantea que :



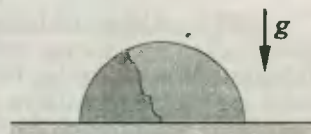
- I.- La fuerza con el bloque actúa de forma paralela al fondo es 6 kN.
II.- La fuerza con el bloque actúa de forma normal al fondo es 159 kN.
III.- El empuje hidrostático del líquido contra el bloque es 20 kN.

Indicar la(s) proposición(es) incorrecta(s)

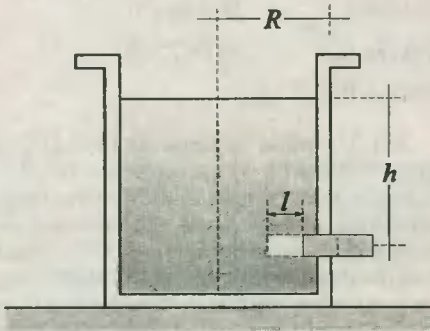
- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) II y III

217. En una campana semiesférica, que yace herméticamente sobre la mesa, se echa por un orificio pequeño practicado en lo alto cierto líquido. Cuando el líquido llega hasta el orificio, levanta la campana y empieza a fluir por debajo de ella. Hállese la masa de la campana, si su radio interno es igual a $R = 2 \text{ m}$ y la densidad del líquido es $\rho = 1,5 \text{ g/cm}^3$.

- A) $\pi \cdot 10^3 \text{ kg}$
B) $4\pi \cdot 10^3 \text{ kg}$
C) $3\pi \cdot 10^3 \text{ kg}$
D) $5 \cdot 10^3 \text{ kg}$
E) $4 \cdot 10^3 \text{ kg}$



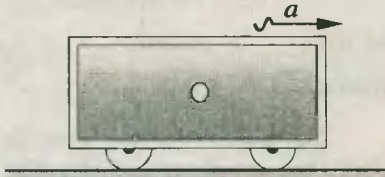
218. Un recipiente cilíndrico de radio $R = 50 \text{ cm}$, contiene un líquido con densidad $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, en la pared lateral hay un orificio cerrado con un tapón. ¿Qué trabajo es necesario realizar para meter el tapón la longitud $l = 20 \text{ cm}$? El tapón tiene la forma de un cilindro de radio $r = 30 \text{ cm}$. El centro del orificio se encuentra a la profundidad $h = 1 \text{ m}$. El recipiente es suficiente alto para que el agua no salga por encima de él. Despréciase la fricción.



- A) $164,20J$ B) $186,48J$ C) $300,20\pi J$
 D) $164,20\pi J$ E) $186,48\pi J$

219. En un recipiente con líquido hay una burbuja de gas. No existe gravedad. El recipiente comienza a moverse con una aceleración constante. ¿Hacia dónde empezará a desplazarse la burbuja?

- A) ←
 B) →
 C) ↑
 D) ↓
 E) ↙



220. Un cubo de madera con arista de $0,5m$ flota en un lago de modo que, $2/3$ de aquel están sumergidos en el agua. ¿Qué trabajo mínimo es necesario realizar para hundir el cubo?

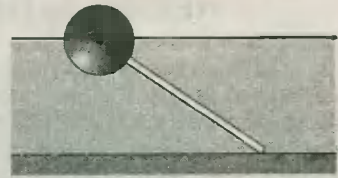
- A) $32,5J$ B) $36,0J$ C) $40,5J$
 D) $52,5J$ E) $60,0J$

221. Un cuerpo pesa tres veces menos en el agua que en el aire. ¿Qué densidad tiene el cuerpo?

- A) $1,1 g/cm^3$ B) $1,2 g/cm^3$ C) $1,5 g/cm^3$
 D) $1,8 g/cm^3$ E) $2,0 g/cm^3$

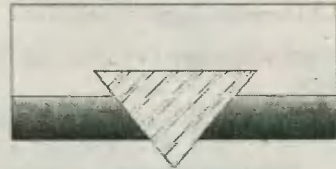
222. ¿Con qué fuerza presiona un palo pesado sobre el fondo del depósito de agua, si una bola de radio $r = 15cm$, unida rígidamente con el palo, se sumerge a medias en el líquido? La densidad del líquido es ρ y la longitud del palo $l = 50 cm$?

- A) $10\pi J$
 B) $10J$
 C) $25\pi J$
 D) $50J$
 E) $36\pi J$



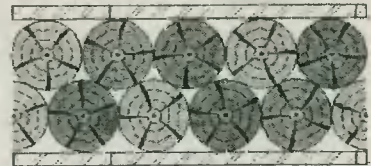
223. Un tapón cónico de $10 cm$ de altura con el ángulo del vértice de 90° tapa un orificio de radio $5 cm$. ¿Qué masa deberá tener el tapón para que él no emerja a la superficie al cambiar el nivel del agua en el recipiente?

- A) $360g$
 B) $410g$
 C) $460g$
 D) $520g$
 E) $600g$



224. Determinése la tensión mínima de dos cables que unen una balsa ancha que consta de dos capas de troncos. La masa de cada tronco es $m = 6\sqrt{3} kg$. La capa superior de los troncos está sumergida a medias en el agua.

- A) $15N$
 B) $10N$
 C) $18N$
 D) $21N$
 E) $30N$



225. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá en un depósito de agua al emerger en él una burbuja de aire de radio $R = 0,1 m$ desde la profundidad $H = 10 m$?

- A) $250J$ B) $300J$ C) $360J$ D) $410J$ E) $500J$

226. ¿Qué trabajo mínimo es necesario realizar para sacar del fondo del mar, instalándolo a bordo de un barco, un batiscafo de $2m$ de radio? La masa del batiscafo es de $35t$; la profundidad del mar es de $100m$ y la altura del borde del barco es de $3 m$.

- A) $283kJ$ B) $250kJ$ C) $240kJ$
 D) $210kJ$ E) $200kJ$

NEUMOSTATICA

227. Un hombre que traía una cámara de neumático, decidió facilitar su trabajo, utilizando la fuerza de empuje del aire (por la ley de Arquímedes). Para esto el hombre bombeó la cámara aumentando su volumen. ¿Obtuvo el hombre su objetivo?
Luego se afirma que :

- I.- La densidad del aire comprimido es de mayor que la densidad del aire circundante.
II.- Por aumentar el empuje, el hombre aumentó el peso de la cámara.
III.- El hombre logró su objetivo.

Señalar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

A) VFF B) FFV C) FVV D) VFV E) VVF

228. En una balanza analítica de precisión que se encuentra bajo una camisa de vidrio, pesan un cuerpo. ¿Variará la indicación de la balanza si se evacúa el aire de la camisa?

- () Aumentará
() Disminuirá
() No cambiará

Indicar verdadero (V) o falso (F)

A) FVF B) VVF C) VFF D) FFV E) VFV

229. ¿Cuál es el error cometido al pesar un cuerpo de volumen $V = 1l$, si al pesarlo en el aire, utilizamos pesas de cobre de masa $M_1 = 800g$? La densidad del cobre es $d_1 = 8.8g/cm^3$ y del aire es $d_0 = 1,29g/l$.

- A) 0,90 % B) 0,10 % C) 0,12 %
D) 0,14 % E) 0,20 %

230. Un colchón de aire está lleno de agua hasta una determinada presión que supera la atmosférica. ¿En qué caso la presión del aire en el colchón será mayor?

- I.- Cuando está de pie.
II.- Cuando está acostado de lado.
III.- Cuando está acostado de cúbito ventral.

- A) Solo en I D) En I y II
B) Solo en II E) En II y III
C) Solo en III

231. Un balón de capacidad $V = 100 cm^3$, contiene hidrógeno a la presión $p = 10^7 Pa$, se utiliza para llenar globos sonda meteorológicos de envoltura blanda. Cada globo sonda debe tener la fuerza ascensional $F = 20 N$. ¿Cuántos globos pueden llenarse con el hidrógeno de un balón? La temperatura del hidrógeno en el balón y en los globos es igual a la temperatura del aire circundante $T = 27^\circ C$.

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

232. ¿Qué masa de lastre debe tirar un aerostato, de capacidad $V = 300m^3$, para elevarse desde la altura en la cual el barómetro marca la presión $p_1 = 84k Pa$ a la temperatura $T_1 = 15^\circ C$, hasta la altura en la cual el barómetro marca la presión $p_2 = 66,7k Pa$ a la temperatura $T_2 = -30^\circ C$?

- A) 10kg B) 20kg C) 30kg
D) 40kg E) 50kg

233. La envoltura esférica de un globo (aerostato) es de un material cuya densidad superficial es $\sigma = 1kg/m^2$. El globo está lleno de helio a presión atmosférica normal. ¿Qué radio mínimo debe tener el globo para poder elevarse de por sí? El aire y el helio están a la misma temperatura, igual a $0^\circ C$.

- A) 2,6m B) 2,5m C) 2,7m
D) 2,4m E) 1,8m

234. Para retener sobre la superficie de la Tierra un globo sonda meteorológica de masa $M = 20kg$ hay que aplicar la fuerza $F = 10^3 N$. El globo se eleva hasta una altura en que su volumen se duplica. La temperatura del aire, medida por medio de la sonda a esta altura es $T = -43^\circ C$. Calcular la presión del aire a dicha altura, si en la superficie de la Tierra la presión era $P_0 = 754 Pa$ y la temperatura. $T_0 = 17^\circ C$.

- A) 46Pa B) 50Pa C) 64Pa
D) 72Pa E) 80Pa

TEMPERATURA DILATACION

235. Para medir la temperatura del cuerpo humano es necesario mantener el termómetro debajo del sobaco unos 5 - 8 minutos. No obstante podemos hacerlo volver a la posición inicial inmediatamente después de tomar la temperatura. Esto ocurre por que:

- I.- El mercurio del termómetro es un fluido.
 - II.- La ampolla metálica del termómetro es buen conductor del calor.
 - III.- Al agitar el termómetro la fuga de calor proviene del mercurio.
- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

236. ¿Cómo medir con un termómetro clínico la temperatura del cuerpo humano si la temperatura del medio ambiente es $+42^{\circ}\text{C}$?

- I.- Enfriar el termómetro humedeciéndolo previamente y luego agitándolo.
 - II.- Mantenerlo debajo del sobaco durante un lapso de tiempo prolongado.
 - III.- Exponiendo el termómetro al aire del ambiente.
- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III

237. ¿Dónde es mayor la posibilidad de que aparezcan las ligeras heladas de la mañana: en un lugar elevado o en una depresión?

- A) En un lugar elevado
- B) En la planicie
- C) En las depresiones
- D) En todo lugar lejos del mar
- E) En las islas

238. Si se calienta un brazo de la palanca de una balanza sensible :

- () Las lecturas no se alterarán.
- () Las lecturas disminuirán.
- () Las lecturas aumentarán.

Señalar verdadero (V) o falso (F).

- A)VVV B)VVF C)FFF
D)VFF E)FFV

239. ¿Porqué al calentar y enfriar las estructuras del hormigón, el hierro no se separa del hormigón?

- A) Por que sus coeficientes de dilatación son iguales.
- B) Por que ambos son sólidos.
- C) Por que ambos poseen la misma rigidez.
- D) Por que ambos presentan la misma elasticidad.
- E) Por que el volumen ocupado por las varillas de hierro son muy pequeñas.

240. A la temperatura de 0°C , una hoja de zinc tiene las siguientes dimensiones: $120 \times 70 \text{ cm}^2$. ¿En cuánto aumentará su área al calentarla hasta 100°C ?

$$\alpha_{\text{Zn}} = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

- A) 60 cm^2 B) 70 cm^2 C) 80 cm^2
D) 50 cm^2 E) 30 cm^2

241. La altura de la columna de mercurio medida en una escala de latón a la temperatura T_1 es igual a H_1 . ¿Cuál será la altura H_0 de la columna de mercurio a $T = 0^{\circ}\text{C}$? Los coeficientes de dilatación lineal del latón α y de dilatación volumétrica del mercurio γ son conocidos.

- A) $H_1 \{ 1 - (\alpha + \gamma) T_1 \}$ D) $H_1 (1 - \alpha T_1 + \gamma T_1^2)$
B) $H_1 \{ 1 + (\alpha - \gamma) T_1 \}$ E) $H_1 \{ 1 + (2\alpha - \gamma) T_1 \}$
C) $H_1 (1 + \alpha T_1^2 - \gamma T_1)$

242. Un reloj de péndulo metálico adelanta $t_1 = 5 \text{ s}$ por día a una temperatura $T_1 = 15^{\circ}\text{C}$ y atrasa $t_2 = 10 \text{ s}$ por día a una temperatura $T_2 = +30^{\circ}\text{C}$. Encontrar el coeficiente α de expansión térmica del metal del péndulo.

- A) $5,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ D) $3,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
B) $3,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ E) $2,8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
C) $2,3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

243. Un matraz de vidrio a 0°C tiene la capacidad de 1000 g de líquido y a 150°C , de 978 g. Determinar el coeficiente de dilatación cúbica del líquido. $\alpha_v = 9 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$

- A) $5,6 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ D) $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
 B) $3,2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ E) $1,2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
 C) $2,4 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$

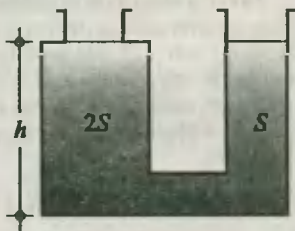
244. En uno de dos vasos comunicantes, llenos de un líquido a la temperatura $T = 20^{\circ}\text{C}$ hasta el nivel $H_0 = 10 \text{ cm}$, la temperatura del líquido se eleva en la magnitud $\Delta T = 10^{\circ}\text{C}$. ¿Qué diferencia de niveles se producirá en este caso si el coeficiente de dilatación cúbica del líquido es $\gamma = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$? Despréciase la dilatación del vaso.

- A) 0,26 cm B) 0,32 cm C) 0,40 cm
 D) 0,60 cm E) 0,80 cm

245. Dos vasos comunicantes están llenos hasta el nivel h de un líquido de coeficiente de dilatación $\gamma = 8 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Las secciones S y $2S$ son constantes y la temperatura del vaso derecho no cambia y si el de la izquierda aumenta en $\Delta T = 100^{\circ}\text{C}$. ¿Cuál es el nuevo nivel en el vaso de la derecha?

- A) $1,1 h$
 B) $1,2 h$
 C) $1,4 h$
 D) $0,9 h$
 E) $0,8 h$



CALORIMETRIA

246. ¿Porqué el clima de las islas es más suave y uniforme que el de los continentes?

- I.- La capacidad calorífica del agua es enorme.
 II.- El agua es verdosa.
 III.- Las oscilaciones de la temperatura del aire en el litoral se nivelan debido a que el agua absorbe y cede calor con la misma facilidad.
 Son verdaderas :

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
 D) I y II E) I y III

247. ¿Porqué en los desiertos la temperatura por el día es muy alta y por la noche puede descender por debajo del cero?

- I.- El calor específico de la arena es muy pequeño.
 II.- La energía que libera la arena no es suficiente para nivelar las oscilaciones de la temperatura del aire.
 III.- El calor específico de la arena es muy grande.
 Indicar lo(s) incorrecto(s).

- A) I B) II C) III D) I y II E) II y III

248. Se sabe que a grandes alturas (1 800 - 1 000 km) las velocidades de las moléculas de los gases, que componen el aire atmosférico, alcanzan valores correspondientes a la temperatura de unos $2\ 000^{\circ}\text{C}$. ¿Porqué en este caso no se funden las envolturas de los satélites artificiales de la Tierra que vuelan a esa altura?

- A) Por la enorme densidad del aire.
 B) Por la baja concentración del aire a esas alturas.
 C) Por la baja velocidad de las moléculas de aire.
 D) Por la baja energía cinética de las moléculas de aire.
 E) N.A.

249. Una broca de acero con masa de 0,090 kg, calentada al someterla al temple hasta 840°C , se sumerge en un recipiente con aceite para máquinas a 20°C . ¿Qué cantidad de aceite deberá contener el recipiente para que la temperatura final de aquél no supere los 70°C ? C_e (acero) = $460 \text{ J/kg }^{\circ}\text{C}$; C_e (aceite) = $2\ 100 \text{ J/kg }^{\circ}\text{C}$.

- A) 0,3 kg B) 0,4 kg C) 0,5 kg
 D) 0,6 kg E) 0,7 kg

250. En un frasco de vidrio con masa de 50 g, que contenía 185 g de agua a 20°C , se vertió cierta cantidad de mercurio a 100°C , con lo que la temperatura del agua en el frasco se elevó hasta 22°C . Determinar la masa del mercurio.

$C_e(\text{vidrio}) = 840 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$; $C_e(\text{Hg}) = 125 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$

- A) 99 g B) 112 g C) 210 g
 D) 190 g E) 168 g

251. En un calorímetro de aluminio, cuya masa es de 29,5 g y que contiene kerosene a 20°C , se metió un cilindro de estaño con la masa de 0,60 kg, calentando previamente hasta 100°C . ¿Qué cantidad de kerosene contenía el calorímetro si la temperatura final resultó igual a $29,5^\circ\text{C}$ y las pérdidas de calor disipadas en el espacio circundante corresponden al 15 por 100?

$C_e(\text{estaño}) = 250 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$;

$C_e(\text{kerosene}) = 2140 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$

- A) 0,55 kg B) 0,43 kg C) 0,66 kg
 D) 0,85 kg E) 0,92 kg

252. ¿Qué cantidad de kerosene habrá que quemar para calentar 50 l de agua desde 20°C hasta el punto de ebullición? El rendimiento del calentador es del 35 por 100.

Poder calorífico q (kerosene) = $4,31 \cdot 10^7 \text{ kg}$

- A) 1,3 kg B) 1,2 kg C) 1,1 kg
 D) 1,0 kg E) 0,9 kg

253. Determinar el rendimiento de un calentador que consume 80 g de kerosene para calentar 3 l de agua en 90°C .

- A) 33 % B) 45 % C) 52 %
 D) 58 % E) 60 %

254. Se sabe que si calentamos o enfriamos el agua guardando ciertas medidas de precaución, podemos obtener el agua en estado líquido a temperaturas menores que 0°C y mayores que $+100^\circ\text{C}$. En un calorímetro de capacidad calorífica igual a $q = 1700 \text{ J}^\circ\text{C}$, se encuentra $m_1 = 1 \text{ kg}$ de agua enfriada hasta $t_1 = 10^\circ\text{C}$. Junto con ésta se vierten $m_2 = 100 \text{ g}$ de agua recalentada hasta $t_2 = +120^\circ\text{C}$. ¿Cuál será la temperatura establecida en el calorímetro?

- A) 20°C B) 16°C C) 12°C
 D) 8°C E) 4°C

255. ¿En cuánto aumentará el volumen de un cubo de hierro fundido, si se le comunican 296,4 kJ de calor?

$C_{e_{\text{Fe}}} = 40 \text{ J/(kg K)}$; $\alpha_{\text{Fe}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

$\rho_{\text{Fe}} = 7800 \text{ kg/m}^3$

- A) $9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ B) $8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ C) $5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$
 D) $3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ E) $2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$

256. ¿Cuántos litros exactos de agua a 20°C y 100°C es necesario mezclar para obtener 300 l de la misma a 40°C ?

- A) 150 l y 150 l D) 200 l y 100 l
 B) 225 l y 75 l E) 50 l y 250 l
 C) 180 l y 120 l

257. Una lámpara de incandescencia que consume $P = 54 \text{ Watts}$, fue sumergida en un calorímetro transparente que contiene $V = 650 \text{ cm}^3$ de agua. Durante $t = 3 \text{ min}$ el agua se calienta en $\Delta t = 3,4^\circ\text{C}$. ¿Qué parte de la energía Q consumida por la lámpara, se emite por el calorímetro al exterior en forma de energía radiante?

- A) 10 % B) 8 % C) 5 %
 D) 2 % E) 1 %

CAMBIOS DE FASE Fusión y Cristalización

258. ¿Porqué cuando el agua se hiela en los depósitos de ésta, primero se cubre de hielo su superficie?

- I.- Por que la superficie del agua es la primera en perder calor.
 II.- Por que al enfriarse el agua su densidad disminuye, lo cual hace que las moléculas de hielo se desplacen hacia la superficie.
 III.- Por que el coeficiente de dilatación del hielo es menor que el del agua líquida.

Señalar lo correcto :

- A) Solo III B) Solo II C) Solo I
 D) I y II E) II y III

259. ¿Porqué durante el deshielo de los ríos hace más frío?

- I.- Por que el aire se enfría con el hielo.
 II.- Por que el aire posee un mayor calor específico que el hielo.
 III.- Por que el calor que derrite al hielo se toma del aire.

Señalar lo incorrecto :

- A) I B) II C) III D) I y II E) Todas

260. ¿Porqué durante las nevadas hace menos frío?

- () Por que la presión disminuye.
 () Por que al cristalizarse el agua, el calor se desprende hacia el medio ambiente.
 () Por que siendo la capacidad calorífica de la nieve mayor que la del aire, absorbe calor de éste.

Señalar verdadero (V) o falso (F).

- A) FFV B) FVF C) VFF D) VVF E) VVV

261. En la nieve en proceso de derretimiento han puesto un tubo de ensayo con hielo a 0°C ; entonces :

- I.- El hielo se conserva intacto.
 II.- El hielo se derrite.
 III.- Se forma una capa de hielo alrededor del tubo.

Señalar lo incorrecto :

- A) I B) I y II C) I y III
 D) II y III E) Todas

262. ¿Porqué la escarcha en los árboles desaparece a veces sin haber deshielo?

- I.- Por que la capacidad calorífica específica de la escarcha es igual que el del aire.
 II.- Por que el calor específico de la escarcha es muy pequeña.
 III.- Por que la presión del vapor saturado sobre la superficie del hielo difiere de cero.

Indicar lo correcto :

- A) I y II B) II y III C) Solo I
 D) Solo II E) Solo III

263. ¿Porqué los alimentos en un frigorífico cerrado se secan?

- () Por falta de aire caliente.
 () Por exceso de aire frío.
 () Por una diferencia de concentración de materia entre los alimentos y el aire encerrado.

Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda .

- A) FFV B) FVF C) VFF
 D) VVF E) VFV

264. El agua se congela en un vaso a 0°C . Si dividimos el agua en gotas diminutas, entonces el agua puede sobre enfriarse hasta -40°C . Así pues, por ejemplo, las gotas de agua que constituyen las nubes comienzan a congelarse, como regla, a temperaturas inferiores a -17°C . ¿Cómo explicar estos hechos?

- I.- La congelación a 0°C solo tiene lugar bajo la presencia de los centros de cristalización.
 II.- Toda partícula insoluble es un centro de cristalización.
 III.- Cuando el agua se divide en gotas, en algunas de ellas habrá centros de cristalización y solo ellas se congelarán.

Indicar lo correcto :

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
 D) I y III E) Todas

265. Al arrojar un pequeño trocito de hielo en agua sobre enfriada, ésta última comienza a congelarse inmediatamente.

- 1) ¿Qué cantidad de hielo se forma de $M = 1\text{ kg}$ de agua, sobre enfriada hasta $T = -8^{\circ}\text{C}$?
 2) ¿Qué temperatura deberá tener el agua sobre enfriada, para transformarse por completo en hielo?
 A) 200 g ; -60°C D) 150 g ; -50°C
 B) 120 g ; -60°C E) 120 g ; -0°C
 C) 100 g ; -80°C

266. ¿Qué cantidad de calor habrá que consumir para que 8,0kg de hielo a -30°C alcancen el punto de fusión, se derritan y el agua que se formó se calienta hasta 60°C ?

$$C_{e, \text{hielo}} = 2,5 \text{ KJ/kg } K$$

$$L_{F(\text{hielo})} = 3,35 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$$

- A) 9,4 MJ B) 8,1 MJ C) 3,2 MJ
D) 5,1 MJ E) 5,3 MJ

267. En un calorímetro hay hielo. Determinar la capacidad calorífica del calorímetro, si para calentarlo junto con el hielo de 270K a 272K , se requiere $Q_1 = 2100\text{J}$ de calor, y de 272K a 274K se exige $Q_2 = 69700\text{J}$.

- A) 520 J/K B) 630 J/K C) 450 J/K
D) 250 J/K E) 720 J/K

288. En un calorímetro se encuentran 400g de agua a una temperatura de $+5^{\circ}\text{C}$. Se ha añadido a ésta otros 200g de agua a una temperatura de -60°C . ¿Qué temperatura se establece en el calorímetro?

- A) 0°C B) -10°C C) -15°C
D) 2°C E) 3°C

269. Se requiere enfriar hasta 5°C , echando al agua trocitos de hielo a 0°C , 3 l de agua a 80°C que se encuentran en un recipiente de vidrio de 1,2kg de masa. Determinar la cantidad de hielo que se necesitará para ello. $C_e(\text{vidrio}) = 840 \text{ J/kg} \cdot K$

- A) 4,5 kg B) 3,1 kg C) 2,9 kg
D) 5,2 kg E) 1,5 kg

VAPORIZACIÓN Y CONDENSACIÓN

270. La ropa mojada tendida y la hierba segada se secan con mayor rapidez cuando hace viento. Ello sucede por que :

- I.- La densidad del vapor alrededor de estos cuerpos disminuye.
II.- La rapidez del proceso de evaporación de estos cuerpos aumenta con la disminución de concentración del vapor de agua que los rodea.

III.- Por que el viento trae un aire más frío que favorece la evaporación.

IV.- Por que el viento trae un aire caliente que favorece la evaporación.

Indicar lo correcto :

- A) I y IV B) II y III C) I y III
D) I y II E) Solo IV

271. ¿Porqué la temperatura del agua en los depósitos de ésta descubierto en verano es siempre inferior a la temperatura del medio ambiente?

- A) Por que el calor específico del agua es 1.
B) Por que el agua es transparente.
C) Porque el aire siempre está más frío que el agua.
D) Por que el aire tiene menor calor específico que el agua.
E) Por que se produce una evaporación que hace disminuir la energía interna del agua.

272. ¿Porqué el nadador, que sale del agua, siente frío y ésta sensación es mucho más fuerte cuando hace viento?

- I.- Debido al gasto de energía interna durante la evaporación.
II.- El viento acelera el proceso de evaporación.
III.- La piel de un nadador posee poco pelo.

Señalar lo correcto :

- A) I y II B) I y III C) II y III
D) Solo I E) Solo III

273. ¿Porqué al llover la temperatura del aire desciende?

- I.- Por que la pulverización del agua propicia una evaporación cuya energía se toma del aire circundante.
II.- Generalmente las lluvias abarcan un área muy grande de terreno.
III.- Durante su caída las gotas de lluvia absorben calor del aire.

Indicar lo incorrecto :

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

274. ¿Qué apagará antes el fuego? :

I.- Agua fría a 0° C.

II.- Agua fría con cubitos de hielo.

III.- Agua caliente.

IV.- Agua hirviendo.

- A) I B) II C) III D) IV E) I, 6, II

275. ¿Porqué una cacerola empieza a quemarse solamente después de que se evapora todo el agua?

() Mientras haya agua, ésta es quien absorbe el calor.

() La cacerola tiene un punto de fusión más bajo que el del agua.

() Mientras haya agua, en el fondo la temperatura solo alcanza los 100° C.

Señalar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- A) FVV B) VVV C) VFV D) FFV E) FFF

276. Se hecha agua en un vaso de papel, y cuando las paredes se humedecen se le pone sobre una hornilla encendida, luego :

I.- El papel se calienta y se quema.

II.- El papel absorbe calor y lo cede al agua.

III.- El agua puede llegar a hervir sin quemar al papel.

IV.- El punto de fusión del papel es más alto que el punto de ebullición del agua.

Indicar lo incorrecto.

- A) I B) II C) III D) IV E) III y IV

277. ¿Porqué las gotas de agua en un hornillo incandescente "viven" más tiempo que en un hornillo simplemente caliente?

() El punto de ebullición del agua es más alto que el de fusión del hornillo.

() Las gotas de agua viven más tiempo en las zonas de mayor temperatura.

() Entre el hornillo incandescente y la gota se crea una capa de vapor que dificulta el suministro de calor.

Señalar verdadero (V) o falso (F).

- A) FFF B) VVF C) FVF D) FFV E) VFV

278. En un matraz se encontraba agua a 0 °C. Evacuando por medio de una bomba el vapor, se logró congelar toda el agua en el matraz. ¿Qué parte del agua se evaporó?

- A) 77% B) 17% C) 13%
D) 87% E) 100%

279. El vapor de agua a 100 °C se hace pasar por el serpentín de un calentador que contiene 12l de agua a 12 °C. El agua condensada que sale del serpentín posee, en término medio, la temperatura de 60 °C. ¿Qué cantidad de vapor habrá que hacer pasar a través del serpentín para que el agua en el calentador se eleve a 50 °C?

- A) 400g B) 500g C) 600g
D) 700g E) 800g

280. Un trozo de aluminio de 561 g de masa calentado hasta 200 °C, se sumergió en 400 g de agua a 16 °C. Una parte del agua se evaporó y la que quedó, adquirió la temperatura de 50 °C. Definir la masa del agua evaporada.

- A) 10g B) 7g C) 20g
D) 25g E) 5g

TEORIA CINETICA DE LOS GASES

281. Estímese la energía cinética media y la velocidad media cuadrática de las partículas en la niebla con diámetro de $10\mu m$ que se encuentran en el aire a una temperatura de 5° C.

- A) $5,2 \cdot 10^{-21} J$; $1,6 \cdot 10^4 m/s$
B) $5,8 \cdot 10^{-21} J$; $1,5 \cdot 10^4 m/s$
C) $6,3 \cdot 10^{-21} J$; $1,2 \cdot 10^4 m/s$
D) $5,2 \cdot 10^{-21} J$; $1,8 \cdot 10^4 m/s$
E) $6,8 \cdot 10^{-21} J$; $1,6 \cdot 10^4 m/s$

282. ¿En cuánto se diferencian las velocidades medias cuadráticas de dos partículas que realizan movimiento Browniano en una gota de agua, si sus masas se diferencian 4 veces?

- A) En 3 veces B) En 4 veces C) En $5\frac{1}{2}$ veces
D) En 2 veces E) En 1 vez

283. A presión atmosférica, y temperatura de 0°C la longitud del recorrido libre de las moléculas de hidrógeno es de $0,1 \mu\text{m}$. Estímese el diámetro de las moléculas de hidrógeno.

- A) $0,7 \text{nm}$ B) $0,6 \text{nm}$ C) $0,5 \text{nm}$
D) $0,4 \text{nm}$ E) $0,3 \text{nm}$

284. Estímese ¿cuántas veces durante un segundo en 1cm^3 de aire las moléculas de nitrógeno chocan entre sí?

- A) $4 \cdot 10^{28} \text{ veces/cm}^3 \cdot \text{s}$ D) $3 \cdot 10^{28} \text{ veces/cm}^3 \cdot \text{s}$
B) $5 \cdot 10^{27} \text{ veces/cm}^3 \cdot \text{s}$ E) $5 \cdot 10^{28} \text{ veces/cm}^3 \cdot \text{s}$
C) $6 \cdot 10^{28} \text{ veces/cm}^3 \cdot \text{s}$

285. Estímese cuántas colisiones por parte de las moléculas del aire soporta 1cm^2 de la pared de su habitación durante 1s . ¿Qué fuerza se transmite a la pared en el transcurso de 1s ?

- A) $10^{24} \text{ veces/cm}^2 \cdot \text{s}$; 18N
B) $10^{23} \text{ veces/cm}^2 \cdot \text{s}$; 10N
C) $10^{23} \text{ veces/cm}^2 \cdot \text{s}$; 12N
D) $2 \cdot 10^{24} \text{ veces/cm}^2 \cdot \text{s}$; 15N
E) $10^{24} \text{ veces/cm}^2 \cdot \text{s}$; 10N

286. ¿En cuánto cambiará la presión del gas, si la k -ésima parte de las moléculas que chocan contra la pared, de repente empezase a ser absorbida por ella?

- A) Se reducirá k veces
B) Se reducirá $(1 - k/2)$ veces
C) Aumentará k veces
D) Aumentará $(1 - k)$ veces
E) Se reducirá $(1 - k)$ veces

287. ¿Porqué los meteoritos se calientan al rojo al ingresar a la atmósfera de la Tierra?

- I.- La velocidad relativa de las moléculas del aire aumentan con relación al meteorito.
II.- La energía cinética relativa de las moléculas del aire se transforma en agente calorífico.
III.- El número de los choques de las moléculas del aire con el meteorito aumentan enormemente.

Señalar la(s) proposición(es) correcta :

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) Todas E) Ninguna

288. ¿Cómo variará la presión dentro de un gas o de un líquido, si la fuerza de atracción entre las moléculas desapareciere súbitamente?

- () Aumentará () No cambia
() Disminuirá () Desaparece

Señalar verdadero (V) o falso (F).

- A) VFFF B) FVFF C) FFVF
D) FFFV E) FFFF

289. ¿Es igual la presión dentro de un gas y junto a las paredes del recipiente que contiene el mismo?

- A) Si D) Depende del volumen
B) No E) Depende del lugar
C) Depende de la temperatura

290. ¿Es igual la concentración de las moléculas de gas dentro de un vaso que junto a las paredes de éste?

- A) Si
B) Depende de la presión
C) No
D) Depende de la temperatura
E) Depende de la forma del vaso

291. Calcular la cantidad de moléculas que contiene 1kg de dióxido de carbono (CO_2); hallar la masa de una molécula. Calcular para las

condiciones normales la distancia media entre las moléculas de gas.

Datos del CO_2 a C.N. $\mu = 44 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$,

$\rho_0 = 1,98 \text{ kg/m}^3$; $N_A = 6\,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

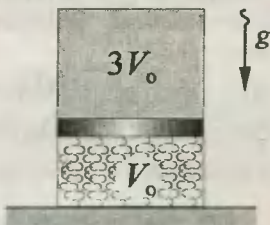
- A) $3,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ D) $3,3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
 B) $3,3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ E) $3,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
 C) $3,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

292. Hallar la longitud media del recorrido libre de las moléculas a condiciones normales, si el número de colisiones de cada molécula con las demás en un segundo es, en término medio, igual a $9,12 \cdot 10^9$; la constante universal de los gases: $R = 8,314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ y la constante de Boltzmann: $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

- A) 10^{-7} m B) $1,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ C) $2 \cdot 10^{-8} \text{ m}$
 D) $3 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ E) $4 \cdot 10^{-8} \text{ m}$

293. En un recipiente cilíndrico se encuentra en equilibrio un émbolo pesado. Por encima del émbolo y por debajo de él se hallan masas iguales de gas a temperatura idéntica. La relación entre el volumen superior y el inferior es igual a 3. ¿Cuál será la relación de los volúmenes si aumentamos la temperatura del gas al doble?

- A) 1,5
 B) 1,2
 C) 2,3
 D) 1,9
 E) 2,5



294. Para disminuir isotérmicamente $n = 4$ veces el volumen de gas en un cilindro con émbolo sobre éste último se coloca una carga de masa $m = 3 \text{ kg}$. ¿Qué carga es necesario añadir para que el volumen del gas disminuya isotérmicamente $k = 3$ veces más?

- A) 4 kg B) 5 kg C) 6 kg D) 7 kg E) 8 kg

295. Determinar la temperatura del gas que se encuentra en un recipiente cerrado, si la presión del gas aumenta en un 0,4% con relación a la presión inicial al calentar el gas en 1°C .

- A) 300K B) 330K C) 250K
 D) 270K E) 350K

296. El volumen de un gas se reduce a la mitad, mientras que la temperatura aumenta 1,5 veces. ¿En cuánto aumentará la presión del gas?

- A) 2 veces B) 3 veces C) 5 veces
 D) 4,5 veces E) 3,5 veces

297. Un depósito cerrado herméticamente está lleno de líquido, solo que en su fondo hay una burbuja de aire. La presión sobre el fondo del depósito es P_0 . ¿Cuál será la presión, si la burbuja asciende a la superficie? La profundidad del depósito es H y la densidad del líquido, ρ .

- A) $P_0 + 2\rho gH$ B) $P_0 + \rho gH$ C) $P_0 - \rho gH$
 D) $P_0 - 2\rho gH$ E) $P_0 + \rho gH/2$

298. Un depósito cerrado herméticamente de 3 m de altura está lleno de agua, sólo que en su fondo hay dos burbujas iguales de aire. La presión sobre el fondo del depósito es de $0,15 \text{ MPa}$. ¿Cuál será la presión si emerge una de las burbujas?

- A) $0,10 \text{ MPa}$ B) $0,11 \text{ MPa}$ C) $0,12 \text{ MPa}$
 D) $0,15 \text{ MPa}$ E) $0,17 \text{ MPa}$

299. Un automovilista viaja de la costa a la Sierra. Al bajar en un lugar alto de nuestra serranía observa que sus neumáticos:

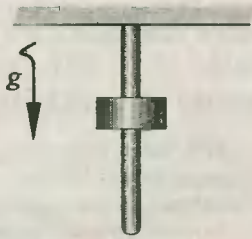
- A) Están menos inflados
 B) Están más inflados
 C) Están igualmente inflados
 D) Están desinflados
 E) N.A.

TERMODINAMICA

Ley de Conservación de la Energía en los Procesos Térmicos

300. A lo largo de un cordón de goma imponderable, de longitud $l_0 = 1 \text{ m}$, se desliza una arandela de hierro. La fuerza de fricción que actúa entre el cordón y la arandela, es igual a $f = 80 \text{ N}$. El coeficiente de elasticidad del cordón es igual a $k = 200 \text{ N/m}$. Encontrar la cantidad de calor Q que se desprende en este caso.

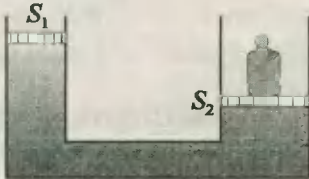
- A) 56J
- B) 64J
- C) 80J
- D) 96J
- E) 104J



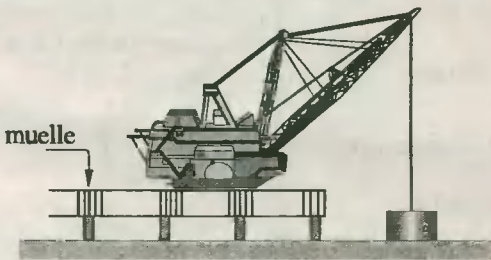
- 301.** Una pelota de ping-pong (tenis de mesa) de radio $r = 5\text{ cm}$ y masa $m = 387\text{ g}$, se sumerge en agua a la profundidad $h = 30\text{ cm}$ y se suelta. La pelotita emerge del agua y salta sobre ella hasta la altura $h_1 = 10\text{ cm}$. ¿Qué energía se transforma en calor a causa del rozamiento de la pelotita con el agua?
- A) 14 mJ
 - B) 16 mJ
 - C) 18 mJ
 - D) 20 mJ
 - E) 22 mJ

- 302.** Dos cilindros comunicantes, cuyas secciones son $S_1 = 100\text{ cm}^2$ y $S_2 = 200\text{ cm}^2$, están llenos de agua y cerrados por sendos émbolos ligeros. El sistema se encuentra en equilibrio. En estas condiciones, sobre el émbolo mayor se coloca una pesa de masa $m = 1\text{ kg}$. ¿Qué cantidad de calor se desprende al pasar el sistema a la nueva posición de equilibrio?

- A) 80 mJ
- B) 90 mJ
- C) 100 mJ
- D) 120 mJ
- E) 140 mJ



- 303.** Un bloque de masa $m = 1\,500\text{ kg}$, sección $S = 4\text{ m}^2$ y altura $h = 0,5\text{ m}$, se pone suavemente sobre el agua con una grúa. En el instante en que el fondo del bloque toca el agua, se desengancha el cable. ¿Qué cantidad de calor se desprende al establecerse el equilibrio?



- A) 25 kJ
- B) 30 kJ
- C) 18 kJ
- D) 32 kJ
- E) 28 kJ

- 304.** El agua cae desde la altura de 1 200 m. ¿En cuánto aumenta la temperatura del agua si para su calentamiento se gasta el 60% del trabajo de la fuerza de gravedad?
- A) 3,5°C
 - B) 2,5°C
 - C) 1,5°C
 - D) 1,7°C
 - E) 1,2°C

- 305.** ¿De qué altura deberá soltarse un trozo de estaño para que al chocar contra la Tierra, se funda? La $T_0 = 0^\circ\text{C}$ y el 50% del trabajo de la fuerza de gravedad se gasta en calentar y fundir el estaño.

- $C_e(\text{Sn}) = 250\text{ J/kg} \cdot \text{K}$; $T_{\text{fusión}}(\text{Sn}) = 505\text{ K}$
 $L_f(\text{Sn}) = 5,8 \cdot 10^4\text{ J/kg}$
- A) 2 km
 - B) 24 km
 - C) 18 km
 - D) 20 km
 - E) 15 km

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

- 306.** Cuando agitamos el té caliente con una cucharita provocamos su enfriamiento. En el experimento de Joule una operación análoga conduce al calentamiento del líquido; esto sucede por que :

- I.- La cucharita está fría.
 - II.- La cucharita absorbe calor del té y lo entrega al medio por conducción.
 - III.- La agitación acelera la entrega de calor del agua al medio ambiente.
- A) Solo I
 - B) Solo II
 - C) Solo III
 - D) I y II
 - E) I y III

- 307.** El aire en la habitación se calienta desde la temperatura T_0 hasta T y la presión no cambia. Entonces la energía interna del aire dentro de la habitación:

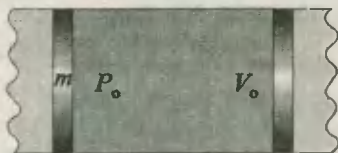
- A) Aumentó
- B) Disminuyó
- C) No cambió
- D) Desapareció
- E) Es imposible que ello ocurra

308. En el volumen $V_1 = 4V$ se encuentra un gas monoatómico a presión $p_1 = 2p$ y temperatura T_1 , mientras que en el volumen $V_2 = 6V$, un gas monoatómico a presión $p_2 = 5p$ y temperatura T_2 . ¿Qué presión se establecerá en estos volúmenes después de unirlos? Los volúmenes están termoaislados del espacio circundante.

- A) $3,2p$ B) $4,5p$ C) $6,5p$ D) $3,8p$ E) $2,5p$

309. En un tubo termoaislado liso e infinito se encuentran dos émbolos con masas $M = 3\text{ kg}$ y $m = 1,5\text{ kg}$, entre los cuales hay un gas monoatómico de volumen $V_0 = 5 \cdot 10^{-2}\text{ m}^3$ a presión $p_0 = 6\text{ kPa}$. Los émbolos se dejan libres. Estímese la velocidad máxima de m . Menospréciense la masa del gas en comparación con las masas de cada émbolo.

- A) 12 m/s
 B) 14 m/s
 C) 16 m/s
 D) 18 m/s
 E) 20 m/s



310. El volumen de gas aumenta al doble. ¿Una vez de modo isotérmico, otra de modo isobárico y otra de modo adiabático. ¿En cuál de éstos casos el gas efectúa menor trabajo?

- A) En la expansión adiabática
 B) En la expansión isobárica
 C) En la expansión isotérmica
 D) En todos es igual
 E) Falta información para decidir

311. ¿Porqué se calienta la bomba al inflar un neumático?

- I.- Por que es un proceso cuasi-isovolumétrico
 II.- Parte del trabajo se emplea en aumentar la energía interna.
 III.- Por que se trata de procesos isobáricos.

Señale la(s) correcta(s) :

- A) Todas B) I y II C) Ninguna
 D) II y III E) I y III

312. ¿Un mol de hidrógeno se calienta a presión constante desde 0°C . ¿Qué cantidad de

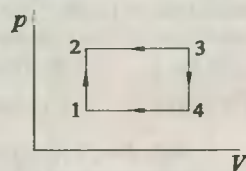
calor es necesario comunicar al gas para que su volumen aumenta al doble?

- A) $8,11\text{ kJ}$ B) $6,12\text{ kJ}$ C) $5,50\text{ kJ}$
 D) $6,60\text{ kJ}$ E) $7,94\text{ kJ}$

313. Sobre un mol de gas se realiza un ciclo que consta de dos isócoras y dos isóbaras. Las temperaturas en los puntos 1 y 3 son T_1 y T_3 . Determinése el trabajo que efectúa el gas durante dicho ciclo, si se sabe que los puntos 2 y 4 están en una isoterma común.

Nota : $R =$ Constante Universal de los Gases

- A) $R(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_3})^2$
 B) $R\sqrt{T_1 \cdot T_3}$
 D) $R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2$
 C) $R\sqrt{T_1^2 + T_3^2}$



- E) N.A.

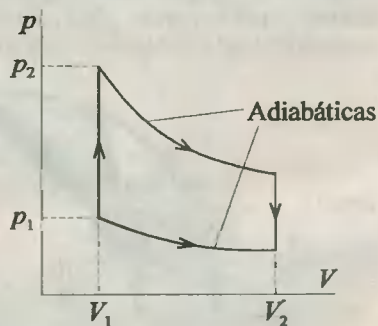
314. Para calentar 1 kg de un gas desconocido en 1 K a presión constante se requieren 912 J y para calentarlo a volumen constante, 694 J . ¿De qué gas se trata?

- A) El argón B) El neón C) El freón
 D) El oxígeno E) El hidrógeno

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

315. Hállese el rendimiento de los ciclos, mostrados en la figura, si como sustancia de trabajo se toma un gas monoatómico perfecto.

- A) $12,6\%$
 B) $15,5\%$
 C) $19,8\%$
 D) $21,4\%$
 E) $28,2\%$



316. Estímese qué trabajo puede realizarse disponiendo de un iceberg de volumen igual a 1 km^3 en calidad de máquina frigorífica y el océano haciendo las veces de calentador.

- A) 60 kJ B) 33 kJ C) 52 kJ
 D) 48 kJ E) 30 kJ

317. ¿Cómo cambiará la temperatura en la habitación, si se deja abierta la puerta del refrigerador en funcionamiento?

- () Aumentará, debido a que el motor no descansará a causa de la enorme masa del ambiente, que ahora debe enfriar.
 () Disminuirá, debido a que el trabajo del motor se encargaría de bajar la temperatura del medio.
 () No sucede nada, debido a que el trabajo para enfriar el ambiente, se devuelve como calor a través del condensador (panilla).

Marcar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- A) VFF B) VVF C) FVV D) FFV E) FFF

318. Se dispone de dos cuerpos con temperaturas iniciales T_1 y T_2 . La capacidades caloríficas de estos cuerpos son C_1 y C_2 , respectivamente y no dependen de la temperatura. Uno de los cuerpos se usa como calentador y el otro, como refrigerador en una máquina térmica. Hállese el trabajo máximo que puede obtenerse de esta manera. Realícese el cálculo para el caso en que el primer cuerpo es 1 kg de agua hirviendo y el segundo, 1 kg de agua a 0°C .

- A) 12 kJ B) 16 kJ C) $1,6 \text{ kJ}$
 D) 32 kJ E) $3,2 \text{ kJ}$

319. Una máquina térmica ideal con un rendimiento η funciona siguiendo el ciclo inverso. ¿Qué cantidad máxima de calor se puede extraer del frigorífico, al realizar un trabajo mecánico W ?

- A) $(\eta + 1)W$ B) ηW C) W/η
 D) $W(1 - \eta)$ E) $W(1 - \eta)/\eta$

320. Con ayuda de un hornillo eléctrico de 1 kW de potencia, en la habitación se mantiene la temperatura de 17°C , siendo la temperatura del

aire circundante de -23°C . ¿Qué potencia se necesitaría para mantener en la habitación la misma temperatura con ayuda de una bomba térmica ideal?

- A) 155 W B) 160 W C) 138 W
 D) 172 W E) 159 W

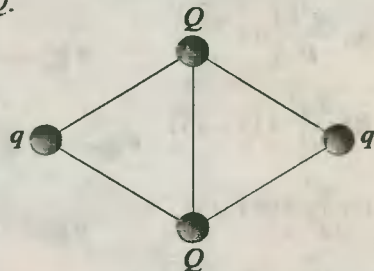
321. ¿Qué trabajo mínimo es necesario gastar para congelar 1 kg de agua que se encuentra a temperatura del medio circundante igual a 300 K ?

- A) 28 kJ B) 46 kJ C) 40 kJ
 D) 18 kJ E) 32 kJ

ELECTROSTATICA LEY DE COULOMB

322. Cuatro cargas de valores $q = 30 \mu \text{ C}$ y $Q = 20\sqrt{3} \mu \text{ C}$ están unidas mediante cinco hilos de longitud $l = 1 \text{ m}$ de la manera mostrada en la figura. Determinése la tensión del hilo que une las cargas Q .

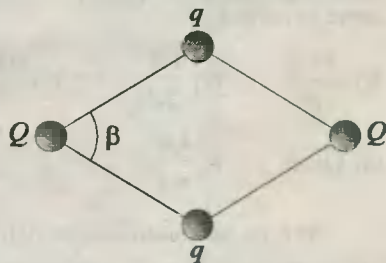
- A) $1,5\sqrt{3} \text{ N}$
 B) $2,7\sqrt{3} \text{ N}$
 C) $2,5\sqrt{3} \text{ N}$
 D) $1,6\sqrt{3} \text{ N}$
 E) $3,2\sqrt{3} \text{ N}$



323. Cuatro cargas Q, q, Q, q se unen mediante cuatro hilos de longitud l de la manera expuesta en la figura. Determinéense los ángulos β entre los hilos.

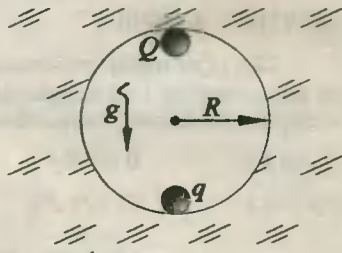
Datos : $q = 8 \mu \text{ C}$; $Q = 3\sqrt{3} \mu \text{ C}$

- A) 120°
 B) 135°
 C) 127°
 D) 90°
 E) 106°



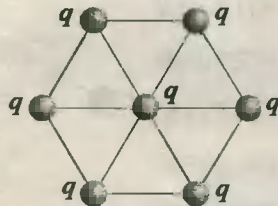
324. ¿Qué carga mínima q fijada en el punto inferior de una cavidad esférica de radio $R = 3\text{ m}$, puede mantener en el campo de gravedad en el punto superior de la cavidad, una bola de masa $m = 1\text{ kg}$ con carga $Q = 2\text{ n C}$?

- A) 6 C
- B) 5 C
- C) 4 C
- D) 3 C
- E) 2 C



325. Siete cargas idénticas q están unidas mediante hilos iguales y elásticos de la manera expuesta en la figura. Después de dejar las cargas libres, las longitudes de los hilos resultaron iguales a l . Determiné la tensión de cada hilo. Nota : $k =$ Constante Eléctrica de Coulomb

- A) $\frac{q^2 k}{l^2} \left(9 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$
- B) $\frac{2q^2}{l^2} k (9 - \sqrt{3})$
- C) $\frac{q^2}{l^2} k (9 + \sqrt{3})$
- D) $\frac{q^2}{2l^2} k \left(\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$
- E) N.A.



326. Una carga eléctrica puntual $+q$ se encuentran a la distancia d de una lámina conductora grande. ¿Con qué fuerza actúa la lámina sobre la carga?

- A) $\frac{4kq^2}{d^2}$
- B) $\frac{kq^2}{2d^2}$
- C) $\frac{3kq^2}{4d^2}$
- D) kq^2/d^2
- E) $\frac{kq^2}{4d^2}$

327. En los puntos que se definen por los radios vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 se encuentran dos car-

gas positivas $q_1 = 4\mu\text{ C}$ y $q_2 = 9\mu\text{ C}$. Determinar el radio vector \vec{r}_3 del punto en el cual hay que poner una carga negativa q_3 , para que la fuerza que actúa sobre cada una de estas tres cargas sea igual a cero.

- A) $\frac{2\vec{r}_1 + 3\vec{r}_2}{5}$
- B) $\frac{3\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2}{5}$
- C) $\frac{5\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2}{2}$
- D) $\frac{3\vec{r}_1 - 2\vec{r}_2}{5}$
- E) $\frac{5\vec{r}_1 + 3\vec{r}_2}{8}$

328. Un anillo de alambre fino de radio $r = 1\text{ cm}$ tiene una carga eléctrica $q = 3\pi\mu\text{ C}$. ¿Cuál será el incremento de la fuerza de tracción del alambre, si en el centro del anillo se coloca la carga puntual $q_0 = 2\mu\text{ C}$?

- A) 120 N
- B) 135 N
- C) 180 N
- D) 360 N
- E) 270 N

CAMPO ELECTRICICO

329. ¿En qué medio estará ubicada una carga eléctrica puntual de $4,5 \cdot 10^{-7}\text{ C}$, si a la distancia de 5 cm de ella la intensidad del campo es igual a $2 \cdot 10^4\text{ N/C}$? Determinar la permitividad absoluta de este medio.

- A) Aire
- B) Vacío
- C) Aceite
- D) Agua
- E) Hielo

330. ¿En cuánto variará la aceleración de un cuerpo que cae sobre la Tierra, si se le comunica una carga de $+4 \cdot 10^{-8}\text{ C}$? La masa del cuerpo es de 5 g ; la intensidad del campo junto a la superficie terrestre es de 100 N/C .

- A) $8 \cdot 10^{-4}\text{ m/s}^2$
- B) $6 \cdot 10^{-4}\text{ m/s}^2$
- C) $5 \cdot 10^{-4}\text{ m/s}^2$
- D) $3 \cdot 10^{-4}\text{ m/s}^2$
- E) $2 \cdot 10^{-4}\text{ m/s}^2$

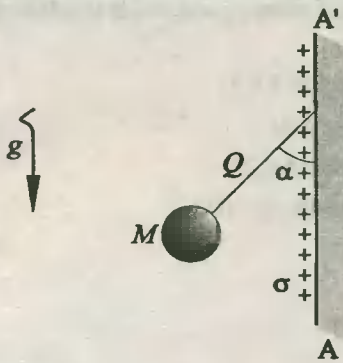
331. Se sabe que estando equilibradas las cargas en el conductor, dentro de éste no existe campo alguno. Sin embargo, si el conductor se mueve con aceleración, en él surge un campo eléctrico. ¿Con qué aceleración debe moverse una barra metálica para que la intensidad del campo homogéneo que surge en ella sea igual a 10^{-6} N/C ?

- A) 10 m/s^2 B) $1,2 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2$ C) $1,8 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$
 D) $1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}^2$ E) Es imposible

332. Un anillo metálico se rompió bajo las fuerzas *coulombianas*, cuando la carga del anillo era Q . Se hizo otro anillo nuevo idéntico al anterior, pero de un material cuya resistencia mecánica es 10 veces mayor. ¿Qué carga romperá el nuevo anillo?

- A) $\sqrt{5} Q$ B) $\sqrt{3} Q$ C) $\sqrt{6} Q$
 D) $\sqrt{7} Q$ E) $\sqrt{10} Q$

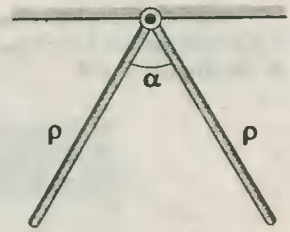
333. En la figura se muestran un plano infinito $A'A$, con densidad superficial de carga σ , y una bola de masa M , con la carga del mismo signo Q , sujeta al plano mediante un hilo. La bola se encuentra en equilibrio. Hállese la tensión del hilo.



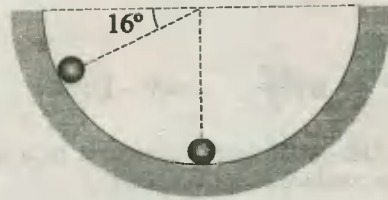
- A) $\sqrt{M^2 g^2 + \sigma Q / \epsilon_0}$
 B) $\sqrt{M^2 g^2 + \sigma^2 Q^2 / 4 \epsilon_0 M g}$
 C) $\sqrt{M^2 g^2 + 3 \sigma^2 Q^2 / 2 \epsilon_0 M g}$
 D) $\sqrt{M^2 g^2 - \sigma^2 Q^2 / 2 \epsilon_0 M g}$
 E) N.A.

334. Estímese la densidad superficial de la carga σ en las placas de un electroscopio que se separan en un ángulo α , si $\alpha(\text{rad}) \ll 1$. La masa de la unidad de área de las placas es ρ . Considérese que la distribución de la carga en las placas es uniforme.

- A) $\alpha \sqrt{\rho g \epsilon_0}$
 B) $\sqrt{\rho g \epsilon_0}$
 C) $\sqrt{2 \rho g \alpha \epsilon_0}$
 D) $\sqrt{\rho g \alpha \epsilon_0}$
 E) $2 \alpha \sqrt{\rho g \epsilon_0}$

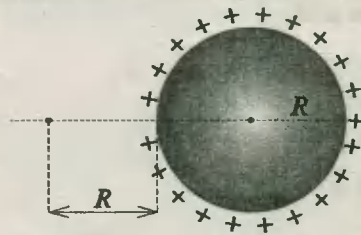


335. Determine el módulo de la intensidad de campo eléctrico uniforme y horizontal que debe establecerse para que la esferita de 20g que reposa en "A", empiece a oscilar entre A y B. ($q = +3\mu\text{C}$)



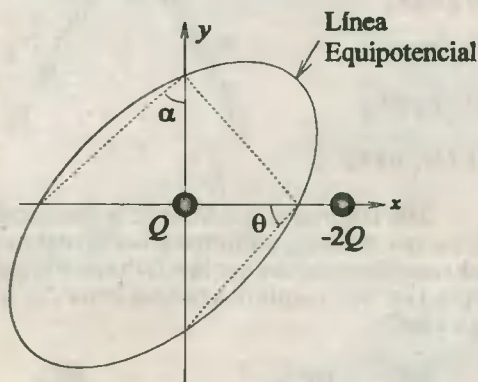
- A) 10 kN/C B) 20 kN/C C) 30 kN/C
 D) 40 kN/C E) 50 kN/C

336. Se suelta una esferita de carga $-Q$ y masa "m". ¿Qué tiempo demora la esferita en cruzar el agujero diametral de la esfera de radio R y carga Q .



- A) $2 \sqrt{\frac{mR^3}{kQ^2}}$ B) $3 \sqrt{\frac{mR^3}{kQ^2}}$ C) $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{mR^3}{kQ^2}}$
 D) $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{mR^3}{kQ^2}}$ E) $6 \sqrt{\frac{mR^3}{kQ^2}}$

337. Se muestran dos cargas puntuales, Q y $2Q$ en el punto $(3;0)$ determínese la diferencia de los ángulo α y θ .



- A) 30° B) $\frac{53^\circ}{2}$ C) 45° D) $\frac{37^\circ}{2}$ E) 0°

338.- ¿Qué sucede cuando se toca un cable que conduce 30 miliamperes :

- A) Cosquilleos o no puede sentirse
 B) Se altera la respiración
 C) Dolores y no puede soltarse
 D) Muerte a causa de arritmia
 E) N.A.

339.- Entre qué valores se encuentra la corriente letal :

- A) 0,01A y 0,02A
 B) 0,02A y 0,05A
 C) 0,1A y 0,2A
 D) 1A y 2A
 E) N.A.

340.- ¿Qué es lo que hace aparecer la luz en la bombilla?

- A) La energía del campo eléctrico que viajan casi a la velocidad de la luz.
 B) Los electrones que llegan del interruptor al foco que viajan a 10^4 m/s

C) La presión del dedo que se transmite por los cables.

D) La radiación solar.

E) N.A.

341.- ¿Qué tiempo emplea el impulso eléctrico en llegar al foco?

A) Al instante siguiente

B) A los 10^{-9} s

C) A los 0,001 s

D) A los 0,01 s

E) N.A.

342.- Una vez que la corriente fluya ¿Al cabo de qué tiempo comienza la bombilla a emitir luz?

A) Entre 0,01s A 0,1s

B) Entre 1s A 2s

C) Entre 0,1s A 0,2s

D) Entre 0,001s A 0,002s

E) N.A.

BIBLIOGRAFÍA

- 01.- **Problemas de Física General** - V. S. Volkenshtein - Editorial MIR, Moscú - Edición 1976.
- 02.- **Problemas de Física** - O. Ya Sávcenko - Editorial MIR, Moscú - Edición 1989.
- 03.- **Problemas de Física General** - I. E. Iródov - Editorial MIR, Moscú - Edición 1985.
- 04.- **Problemas y Ejercicios de Física** - R. Gladkova - Editorial MIR, Moscú - Edición 1987.
- 05.- **Problemas Seleccionados de la Física Elemental** - B. B. Bújovsev, V. D. Krívchenkov, G. Ya Miákishev, I. M. Saráeva - Editorial MIR, Moscú - Edición 1979.
- 06.- **Problemas de Física** - S. Kosel - Editorial MIR, Moscú - Edición 1986.
- 07.- **Problemas Didácticos de Física** - M. A. Ushákov - Editorial MIR, Moscú - Edición 1984
- 08.- **Preguntas y Problemas de Física** - L. Tarasov, A. Tarásova - Editorial MIR, Moscú - Edición 1976.
- 09.- **Problemas de Mecánica General** - F. Wittenbauer - Editorial Labor S.A., Barcelona - España.
- 10.- **Problemas de Mecánica Teórica** - I. Mesherski - Editorial MIR, Moscú - Edición 1985.
- 11.- **Problemas de Termodinámica Técnica** - T. Andriánova, B. Dzámпов, V. Zúbarev, S. Révizov - Editorial MIR, Moscú - Edición 1976.
- 12.- **Problemas de Electricidad** - H. y W. Vieweger - Editorial Gustavo Gili - Barcelona - Edición 1963.
- 13.- **Problemas de Física - Estudio Teórico - Práctico** - Editorial Alhambra - España - 1ª edición - 1967.
- 14.- **Problemas de Física - Serie A** - Fernando Marín Alonso - Editorial Alhambra - España - 1ª reimpresión - 1981.
- 15.- **Problemas de Física y cómo resolverlos** - Clarence E. Bennett - Editorial CECSA - México - 1972 - 3ª impresión.
- 16.- **Física Programada** - Robert Resnick - David Halliday - Editorial CECSA - México - 1961.
- 17.- **Física General** - Carle W. Van Der Merwe - Colección Schaum - Editorial Mc Graw Hill - México - 1987.
- 18.- **Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad** - Robert Resnick - Editorial LIMUSA, México - Primera reimpresión - 1981.
- 19.- **Problemas de Física Básica (I y II)** - Pontificia Universidad Católica del Perú.
- 20.- **Problemas de Física General (I, II y III)** - Universidad Nacional de Ingeniería.

A NUESTROS CLIENTES

RACSO EDITORES pone en su conocimiento que ya está a la venta la siguiente relación de obras:

- * PROBLEMAS DE ARITMÉTICA y cómo resolverlos (Nueva Edición)
- * PROBLEMAS DE ÁLGEBRA..... y cómo resolverlos (Nueva Edición)
- * PROBLEMAS DE GEOMETRÍA y cómo resolverlos (Nueva Edición)
- * PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA y cómo resolverlos (Nueva Edición)
- * PROBLEMAS DE FÍSICA y cómo resolverlos
- * PROBLEMAS DE QUÍMICA y cómo resolverlos
- * PROB. DE RAZONAMIENTO Y APTITUD MATEMÁTICA (Nueva Edición)
- * FÍSICA Nova
- * QUÍMICA Nova
- * ÁLGEBRA Nova
- * ARITMÉTICA Nova
- * TRIGONOMETRÍA Nova
- * GEOMETRÍA Nova
- * FÍSICA Primer Nivel (edición revisada, corregida y aumentada)
- * GUÍA DE CIENCIAS CON APLICACIONES
- * MATEMÁTICA ACTIV A: 1RO, 2DO, 3RO, 4TO, 5TO



RACSO
EDITORES

PRÓXIMAS PUBLICACIONES

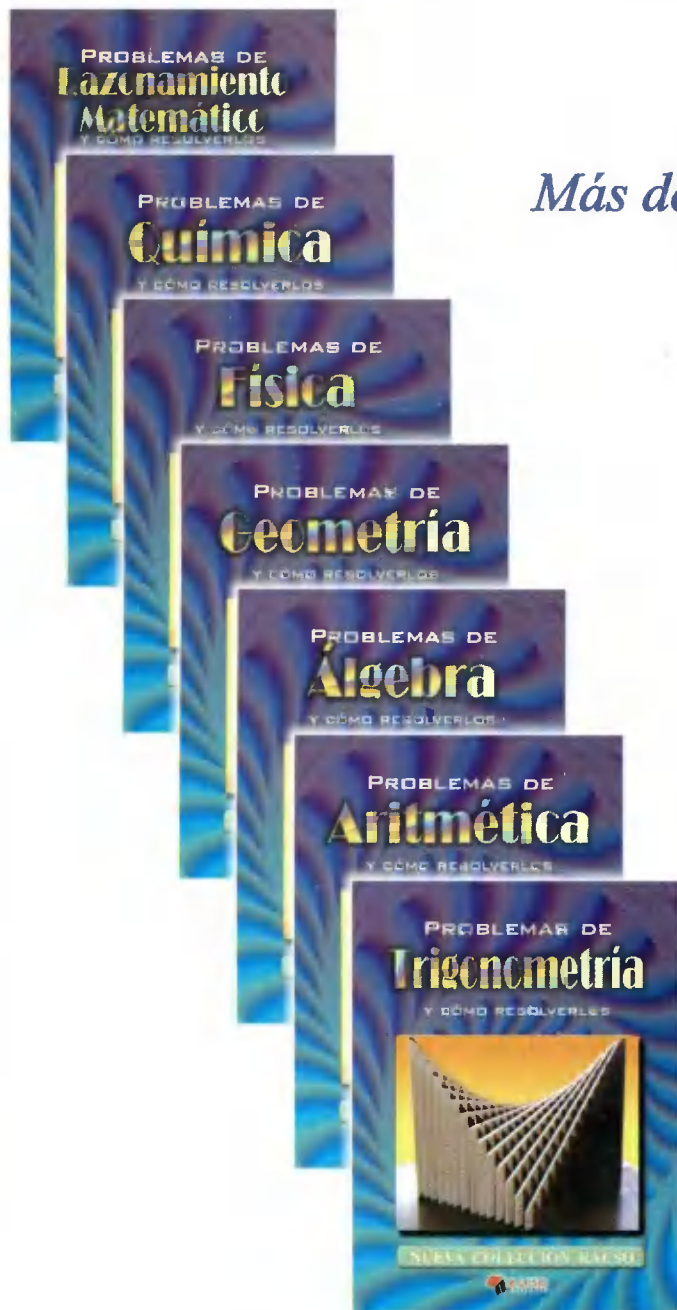
- FÍSICA COSMOS, PARA SECUNDARIA
- RAZONAMIENTO MATEMÁTICO Nova
- RAZONAMIENTO VERBAL Nova



522-1634

racsoeditores@hotmail.com

NUEVA COLECCIÓN RACSO



*Más de una década
aportando
cultura*

Tel.: 522-1634 www.racsoeditores.com ; E-mail: racsoeditores@hotmail.com